МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

Кафедра статистики и прикладной математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации
к практическим занятиям и самостоятельной
внеаудиторной работе для обучающихся
по направлению 38.03.01 «Экономика»

Краснодар
КубГАУ
2021

Составители: И. А. Кацко, Н. Х. Ворокова, А. Е. Жминько,
А. Е. Сенникова

Теория вероятностей и математическая статистика : метод. рекомендации к практическим занятиям и самостоятельной внеаудиторной работе / сост. И. А. Кацко [и др.]. – Краснодар : КубГАУ, 2021. – 55 с.

Приведены указания по выполнению заданий по теории вероятностей и математической статистике. Отдельные задачи носят условный характер, значительная часть составлена по реальным данным организаций Краснодарского края. По каждой теме предусмотрено решение студентами индивидуальных заданий с последующей их сдачей преподавателю.

Методические указания предназначены для обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика», направленности «Бизнес-аналитика»

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая закономерности, происходящие в массовых однородных случайных явлениях и процессах.

В процессе всей своей жизни человек часто сталкивается с событиями и явлениями, исход которых заранее не определен. Например, студент не знает, какую оценку он получит на экзамене, инвестор – окупятся ли его инвестиции, страховщик – причину и размер выплаты страхового вознаграждения, какая погода будет на следующий месяц, фермер – какой урожай будет получен в текущем году, производитель – по какой цене будет реализован произведенный товар на рынке и т. п. Тем не менее, в подобных ситуациях, связанных с неопределенностью, человеку необходимо принимать решения.

Предметом теории вероятностей является выявление общих закономерностей и зависимостей случайных явлений, а также описание изучаемых явлений с помощью абстрактных моделей. Она позволяет по вероятностям одних событий определять вероятности других событий.

Математическая статистика – это раздел математики, в котором изучаются математические методы систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Математическая статистика использует математический аппарат и выводы теории вероятностей. Связующим звеном между теорией вероятностей и математической статистикой является закон больших чисел и так называемые предельные теоремы. В частности, закон больших чисел аргументирует применение средней арифметической в качестве оценки математического ожидания, относительной частоты появления события как оценки вероятности. Последнее обосновывает понятие статистической устойчивости**.** Предполагается что результаты наблюдений являются реализацией случайных процессов, имеющие определенные законы распределения.

Программа дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

1. Предмет и задачи теории вероятностей и математической статистики. Случайные события. Классификация событий. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Вероятность и относительная частота. Основные формулы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и гипотез. Схема Бернулли.

2. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Функция распределения и её свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, их свойства.

3. Непрерывные случайные величины. Функция распределения случайной величины и её свойства. Плотность распределения случайной величины и её свойства. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины;

4. Законы распределения вероятностей. Равномерное распределение. Нормальное распределение и его свойства. Правило трех сигм. Показательное распределение.

5. Случайные векторы. Закон распределения. Числовые характеристики случайных векторов. Коэффициенты корреляции.

6. Функции случайных величин и случайных векторов, их законы распределения.

7. Закон больших чисел и предельные теоремы. Теорема Чебышева и устойчивость средних. Теорема Бернулли и устойчивость относительных частот. Центральная предельная теорема Ляпунова.

8. Статистический (вариационный) ряд распределения. Построение и графическое изображение ряда распределения. Средняя арифметическая и дисперсия ряда распределения, их свойства. Моменты ряда распределения и связь между ними. Определение характеристик ряда распределения способом моментов. Эмпирическое и теоретическое распределения.

9. Генеральная совокупность и выборка. Статистические оценки выборочной совокупности и их свойства. Несмещенные и состоятельные оценки центра распределения и дисперсии. Точность оценок. Доверительная вероятность, доверительный интервал. Доверительные оценки параметров нормального распределения при случайном отборе. Доверительные оценки вероятности.

10. Проверка статистических гипотез. Понятие и виды статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Критерий и критическая область. Ошибки первого и второго рода. Критерий согласия Пирсона. Проверка гипотез о равенстве средних и долей.

11. Дисперсионный анализ. Модели дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ. Многофакторный дисперсионный анализ. Оценка влияния одновременно действующих факторов.

12. Корреляционно-регрессионный анализ. Функциональная и корреляционная зависимость. Определение параметров линейного уравнения регрессии методом наименьших квадратов. Коэффициент корреляции и его свойства. Определение параметров нелинейных уравнений регрессии методом наименьших квадратов. Корреляционное отношение и его свойства. Понятие о множественной корреляции.

Задания и методические указания к выполнению контрольной работы

В соответствии с учебным планом студенты бакалавриата, обучающиеся на заочном факультете Кубанского государственного аграрного университета по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент» по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» выполняют одну письменную контрольную работу, соответствующую первой и второй букве фамилии студента.

Контрольная работа, выполненная студентом не по соответствующему варианту, преподавателем не проверяется.

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, оставляя на каждой странице поле для замечаний рецензента. Рекомендуется следующий порядок выполнения контрольной работы: полностью записывается условие решаемой задачи, в которой вместо общей части проставляются конкретные задания; подробно, с необходимыми пояснениями, теоремами, формулами, излагается решение задачи. По результатам решения каждого задания записывается ответ или даётся вывод по результатам расчётов.

В конце контрольной работы приводится список использованной литературы, проставляется дата выполнения контрольной работы и подпись студента.

Таблица 1 - Варианты и номера задач для контрольной работы

Первая буква фамилии студента	**Вторая буква фамилии студента**			
	А, Б, В, Г, Д, Е, Ё	Ж, З, И, Й , К, Л, М	Н, О, П, Р, С, Т, У	Остальные буквы
А, Б	1,21,41,61,81, 101,121	11,31,51, 71,91,111,131	20,25,50, 80,99,110,139	10,35,60, 70,89,120,129
В, Г	2,22,42, 62,82,102,122	12,32,52, 72,92,112,132	19,26,51, 79,98,111,138	9,36,41, 69,88,101,128
Д, Е, Ё, Ж, 3	3,23,43, 63,83,103,123	13,33,53, 73,93,113,133	18,27,52, 78,97,112,137	8,37,42, 68,87,102,127
И, К	4,24,44, 64,84,104,124	14,34,54, 74,94,114,134	17,2853, 77,96,113,136	7,38,43, 67,86,103,126
Л, М	5,25,45, 65,85,105,125	15,35,55, 75,95,115,135	16,29,54, 76,95,114,135	6,39,44, 66,85,104,125
Н, 0	6,26,46, 66,86,106,126	16,36,56, 76,96,116,136	15,30,55, 75,94,115,134	5,40,45, 65,84,105,124
П, Р	7,27,47, 67,87,107,127	17,37,57, 77,97,117,137	14,31,56, 74,93,116,133	4,21,46, 64,83,106,123
С, Т	8,28,48, 68,88,108,128	18,38,58, 78,98,118,138	13,32,57, 73,92,117,132	3,22,47, 63,82,107,122
У, Ф, Х, Ц	9,29,49, 69,89,109,129	19,39,59, 79,99,119,139	12,33,58, 72,91,118,131	2,23,48,62, 81,108,121
Остальные буквы	10,30,50, 70,90,110,130	20,40,60, 80,100,120,140	11,34,59, 71,90,119,130	1,39,51,61, 99,109,140

Методические рекомендации к решению типовых задач

До непосредственного выполнения заданий индивидуального варианта контрольной работы студенту рекомендуется ознакомиться с программой дисциплины, подобрать и изучить рекомендуемую учебную литературу, проработать конспект лекций по изучаемой дисциплине, усвоить решение типовых задач, а затем приступить к решению задач конкретного варианта. Контрольная работа содержит задания по основным разделам изучаемой дисциплины.

Задачи 1-20 решаются с использованием определения вероятности события и основных теорем теории вероятностей.

Событие есть результат опыта или испытания, проходящего в определенных условиях. Различают достоверное, невозможное и случайное событие. Достоверным называют событие, которое в результате опыта (испытания) обязательно произойдет. Если событие в опыте не может произойти, то оно называется невозможным. Случайным называют событие, которое в результате опыта (испытания) может либо произойти, либо не произойти. При решении задач используются понятия: совместных и несовместных, зависимых и независимых событий; суммы и произведения событий; полной группы событий.

События обозначаются буквами A, B, C,..., или A_1, A_2, A_3,...,A_n. Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$. Вероятностью события A называется отношение числа элементарных событий (исходов), благоприятствующих событию A, к общему числу элементарных событий (исходов). Предполагается, что все элементарные исходы являются несовместными и равновозможными.

$P(A) = \frac{m}{n},\ 0 \leq P(A) \leq 1,$

где m – число элементарных событий (исходов), благоприятствующих событию A; n – общее число элементарных событий (исходов).

При решении задач используются формулы комбинаторики. Если имеется множество, состоящее из каких-либо элементов, то из элементов данного множества можно составить различные подмножества или комбинации, отличающиеся как порядком, так и составом своих элементов.

Размещениями из n элементов по k элементам, называются комбинации, образованные из n различных элементов, отличающиеся друг от друга или составом, или порядком своих элементов. Общее число размещений из n элементов по k элементам определяется по формулам:

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ или $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Перестановками из k элементов называются комбинации, содержащие все k элементов, отличающиеся друг от друга порядком своих элементов. Число перестановок определяется по формуле: $P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = k!$.

Сочетаниями из n элементов по k элементам, называются комбинации, отличающиеся друг от друга составом своих элементов, то есть хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k элементам определяется по формулам:

$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ или $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Большинство задач решается с использованием основных теорем:

а) вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$P(A + B) = P(A) + P(B)$, $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

б) вероятность произведения двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n)$;

в) вероятность произведения нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех других событий, найденных в предположении, что все предыдущие события уже произошли

$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$; $P(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdots P(A_n/A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$;

г) вероятность появление хотя бы одного из п независимых событий равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdots P(\overline{A}_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$; $P(A) = 1 - q^n$, если $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q$.

Задачи 13-20 решаются по формулам полной вероятности и гипотез.

Если событие А может наступить вместе с одним из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, образующих полную группу и называемых гипотезами, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей гипотез $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ на соответствующие условные вероятности события А.

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$.

Пусть известно, что событие А, вероятность появления которого найдена по формуле полной вероятности, уже произошло. Тогда вероятность наступления какой-то из гипотез $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ при условии осуществления события А, находится по формулам Бейеса:

$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$.

Пример 1. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,6, для второго - 0,5, для третьего - 0,1. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним студентом; б) двумя студентами; в) хотя бы одним студентом; г) тремя студентами.

Решение. Обозначим события: A_1 - первый студент сдаст экзамен на «отлично»; A_2- второй студент сдаст экзамен на «отлично»; A_3- третий студент сдаст экзамен на «отлично». По условию: $P(A_1) = 0,6$; $P(A_2) = 0,5$; $P(A_3) = 0,1$.

а) Пусть A - событие, сдаст экзамен на «отлично» только один студент. Значит, один студент должен сдать экзамен на «отлично», а другие два – не сдать экзамен на оценку «отлично». Тогда событие A = $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. Так как события $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ являются несовместными, а события, между которыми стоит знак умножения, независимыми, то по теоремам сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий имеем:

$P(A) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P\left(\bar{A}_2\right)P(A_3)$.

Используя значения вероятностей из условия задачи и учитывая, что $P(\bar{A}_1) = 1 - 0,6 = 0,4$; $P(\bar{A}_2) = 1 - 0,5 = 0,5$; $P(\bar{A}_3) = 1 - 0,1 = 0,9$, получим $P(A) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,1 = 0,27 + 0,18 + 0,02 = 0,47$.

б) Пусть событие B – сдадут экзамен на «отлично» два студента из трех. Тогда B = $A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$.

По аналогии с предыдущим пунктом имеем:

$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P\left(\bar{A}_2\right)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) =$

$= 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,1 = 0,27 + 0,03 + 0,02 = 0,32$.

в) Обозначим через C – событие, сдаст на «отлично» хотя бы один студент из трех. Воспользуемся теоремой вероятности появления хотя бы одного из n независимых событий. $P(C) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0,4\cdot 0,5\cdot 0,9 = 1 - 0,18 = 0,82$. Отсюда видно, что вероятность того, что все три студента не сдадут экзамен на «отлично» равна 0,18.

г) Вероятность того, что все три студента сдадут экзамен на «отлично» находится по теореме умножения вероятностей независимых событий.

$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,6.0,5.\ 0.1 = 0,03$.

Ответ: а) 0,47; б) 0,32; в) 0,82; г) 0,03.

Пример 2. Группа студентов состоит из 6 юношей и 4 девушек. Наудачу, по схеме без возвращения, отбирается три студента. Какова вероятность того, что будут отобраны: а) три девушки; б) только один юноша; в) хотя бы один юноша.

Решение. Обозначим события: A_1 – первой будет отобрана из группы девушка; A_2 – второй будет отобрана из группы девушка; A_3 – третьей из группы будет отобрана девушка. Тогда $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ – соответственно первым, вторым и третьим из группы будет отобран юноша.

а) Пусть А – событие, что отобраны последовательно три девушки. Тогда А = $A_1A_2A_3$. Так как использована схема без возвращения, то события A_1, A_2, A_3 и, соответственно, $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ являются событиями зависимыми. Используем теорему умножения вероятностей для трех зависимых событий

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2)$.

По условию: $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $P(A_2/A_1) = \frac{4-1}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(A_3/A_1A_2) = \frac{4-1-1}{10-1-1} = \frac{1}{4}$.

Тогда $P(A) = P(A_1A_2A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$.

б) Пусть событие В – отобран только один юноша. Так как отбирается один юноша и две девушки, то $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Применим теоремы сложения вероятностей несовместных событий и умножения зависимых событий:

$P(B)=P(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(\overline{A}_3/A_1A_2) + +P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2/\overline{A}_1) \cdot P(A_3/\overline{A}_1A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

в) Обозначим С - событие, что хотя бы один из отобранных студентов юноша. Тогда $\overline{C}$ - все три отобранных студента - девушки. События С и $\overline{C}$ противоположные и образуют полную группу событий $P(C)+P(\overline{C})=1$.

$P(\overline{C}) = P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{30}$ (см. первый пункт).

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

Ответ: а) $\frac{1}{30}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{29}{30}$.

Пример 3. Производственная фирма получает комплектующие изделия от трех поставщиков в соотношении 1:2:3. Известно, что от первого поставщика поступает 80 % изделий высшего качества, от второго 85 % и третьего - 90 %. Определить, что случайно взятое изделие будет высшего качества. Случайно взятое изделие оказалось высшего качества. Найти вероятность того, что оно поступило от третьего поставщика.

Решение. Обозначим через А - событие, что случайно взятое изделие имеет высшее качество. Так как изделия поступают от трех поставщиков, то можно выделить следующие события: B_1-случайно взятое изделие поступило от первого поставщика; B_2- случайно взятое изделие поступило от второго поставщика; B_3- случайно взятое изделие поступило от третьего поставщика.

Тогда Р(B_1) = $\frac{1}{1+2+3}$ = $\frac{1}{6}$; Р(B_2) = $\frac{2}{1+2+3}$ = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; Р($B_3$) = $\frac{3}{1+2+3}$ = $\frac{1}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} B_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$

По условию Р(А/B_1) = 0,8; Р(А/B_2) = 0,85; Р(А/B_3) = 0,9. Так как изделие высшего качества может быть получено от одного из трех поставщиков, то вероятность события А найдем по формуле полной вероятности.

Р(А) = $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}85 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 = 0{,}8667.$

Пусть взятое наугад изделие - высшего качества. Найдем вероятность того,

что оно поступило от третьего поставщика, т.е. Р(B_3/A)

Воспользуемся формулами Байеса: Р(B_i/A) = $\frac{P(B_{i)} \cdot P(A/B_i)}{P(A)}$.

Р(B_3/A) = $\frac{P(B_3 \cdot P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}9}{0{,}8667} = 0{,}5192.$

Ответ: 0,8667; 0,5192.

Пример 4. В двух урнах имеется по шесть шаров, из которых 4 красного и 2 черного цвета. Из первой урны вынимается наудачу один шар и перекладывается во вторую урну. Затем из второй урны вынимают один шар. Найти вероятность, что он красный.

Решение. Шар, вынутый из второй урны, оказался красным. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую переложен черный шар.

Решение. Обозначим через А – событие, что шар, взятый из второй урны, красный, через B_1 и B_2 – соответственно события: шар, вынутый из первой урны и переложенный во вторую урну – красный; шар, вынутый из первой урны и переложенный во вторую – черный! Событие А может появиться вместе с одним из несовместных событий B_1 и B_2. Тогда, согласно формулы полной вероятности $P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)$.

$P(B_1)$ – вероятность того, что из первой урны взят и переложен во вторую урну красный шар, $P(B_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$P(B_2)$ – вероятность того, что из первой урны взят и переложен во вторую урну черный шар, $P(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$P(B_1) + P(B_2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$

$P(A/B_1)$ – вероятность того, что шар, вынутый из второй урны красный, если в нее из первой переложили красный шар: $P(A/B_1)= \frac{4+1}{6+1} = \frac{5}{7}$.

$P(A/B_2)$ – вероятность того, что шар вынутый из второй урны красный, если в

нее из первой переложили черный шар: $P(A/B_2) = \frac{4}{7}$. Тогда $P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{3}$.

Пусть шар, извлеченный из второй урны, оказался красным. Значит событие А уже произошло. Событие (B_2/A) означает, что из первой урны во вторую переложен черный шар, при условии, что из второй урны был вынут красный шар. Вероятность этого события находится по формуле вероятностей гипотез:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{7}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{7}$.

Задачи 21-40 решаются по теме: «Дискретные случайные величины».

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения, число которых может быть как конечным, так и бесконечным, но счётным. Обычно дискретная случайная величина представляется в виде ряда (закона) распределения, как упорядоченная совокупность значений дискретной величины и соответствующих этим значениям вероятностей. Дискретные случайные величины могут задаваться также биномиальным, геометрическим, гипергеометрическим, пуассоновским распределениями и некоторыми другими распределениями.

Графически дискретная случайная величина изображается в виде многоугольника распределения, причем по оси ординат откладывают значения дискретной случайной величины, а по оси абсцисс – вероятности этих значений.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из случайных величин не зависит от того, какие значения приняли другие случайные величины. В противном случае случайные величины называются зависимыми.

Важнейшими числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, которые определяются по формулам:

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $p_i \geq 0$;

$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2$ или $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$;

$б(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 5. Случайная величина X задана законом распределения

X	1	7	10
P	0,3	0,2	0,5

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений случайной величины X на соответствующие им вероятности.

Следовательно, $M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}7$.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины X от ее математического ожидания.

$D(X) = M(X–M(X)^2$; $D(X) = (1–6{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + (7–6{,}7)^2 \cdot 0{,}2 + (10–6{,}7)^2 \cdot 0{,}5 = 15{,}21$. Дисперсия может быть найдена также по формуле $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0{,}3 + 7^2 \cdot 0.2 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 60{,}1$;

$D(X) = 60{,}1 – 6{,}7^2 = 15{,}21$.

Среднее квадратическое отклонение есть корень квадратный из дисперсии случайной величины X, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$.

Ответ: $M(X) = 6,7$; $D(X) = 15,21$; $\sigma(X) = 3,9$.

Пример 6. Независимые случайные величины X и У заданы законами распределения:

X	1	3	5
x)	0,2	0,5	0,3

У	- 2	4
P(y)	0,4	0,6

Составить законы распределения случайных величин: Z=X+Y и V=XУ. Начертить график распределения вероятностей случайной величины Z.

Решение. Значения случайной величины Z равны сумме возможных значений случайной величины X с каждым возможным значением случайной величины Y, а вероятности значений случайной величины Z равны произведениям вероятностей слагаемых.

Z	1+(-2)	1+4	3+(-2)	3+4	5+(-2)	5+4
P(z)	0,2·0,4	0,2·0,6	0,5·0,4	0,5·0,6	0,3·0,4	0,3·0,6

Z	- 1	5	1	7	3	9
P(z)	0,06	0,14	0,20	0,30	0,12	0,18

Следует упорядочить значения случайной величины Z.

Z	- 1	1	3	5	7	9
P(z)	0,06	0,20	0,12	0,14	0,30	0,18

Значения случайной величины V равны произведениям возможных значений случайной величины X на каждое возможное значение случайной величины Y, а вероятности значений случайной величины V равны произведениям вероятностей значений сомножителей.

V	1·(-2)	1·4	3·(-2)	3·4	5·(-2)	5·4
P	0,2·0,4	0,2·0,6	0,5·0,4	0,5·0,6	0,3·0,4	0,3·0,6

или

V	-2	4	-6	12	- 10	20
P	0,0/8	0,12	0,20	0,30	0,12	0,18

или

V	-10	-6	- 2	4	12	20

P	0,12	0,20	0,08	0,12	0,30	0,18

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Z.

M(Z) = $\sum_{i=1}^{n} z_i p(z_i)$ = -1·0,06+1·0,20+3·0,12+5·0,14+7·0,30+9·0,18 = 4,92.

D(Z) = $M(Z^2) - M^2(Z)$ = $(-1^2)\cdot 0.06+(1^2)\cdot 0.20+(3^2)\cdot 0.12+(5^2)\cdot 0.14+(7^2)\cdot 0.30+(9^2)\cdot 0.18 - 4.92^2 = 9.9136$; ϭ(X) = $\sqrt{9,9136}$ = 3,15.

Построим график распределения вероятностей случайной величины Z.

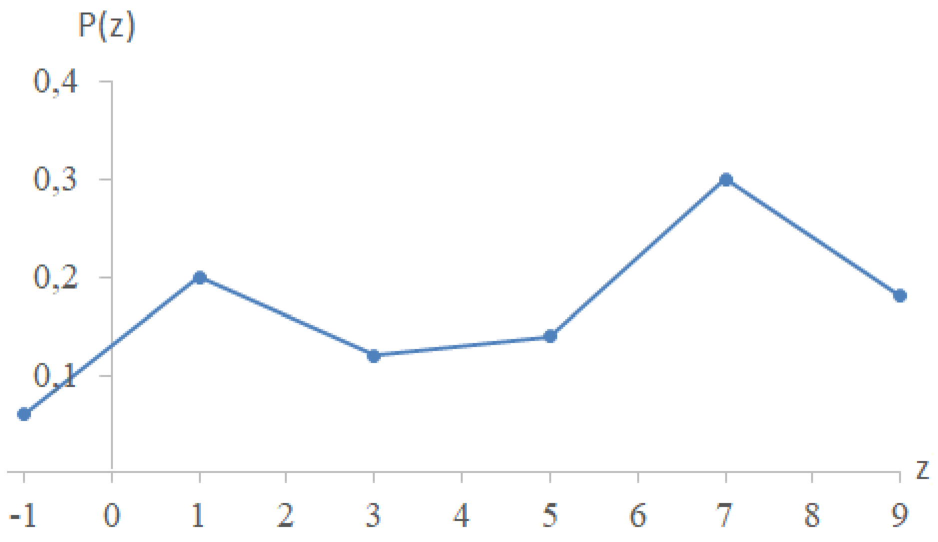


Рисунок 1– Полигон распределения вероятностей дискретной случайной величины Z.

Пример 7. Известно, что M(X)=8; M(У)=5; D(X)=4; D(Y)=3. Найти M(W), D(W) и ϭ(W), если W = 5X–2Y.

Решение. Воспользовавшись свойствами математического ожидания и дисперсии случайной величины, получим: M(W) = M(5X–2Y) = M(5X)–M(2У) = 5M(X)–2M(У) = 5·8–2·5 = 30; D(W) = D(5X–2Y) = D(5X)+D(2У) = 25D(X)+4D(У) = 25·4 + 4·3 = 112; ϭ(W) = $\sqrt{D(W)}$ = $\sqrt{112}$ = 10.6.

Задачи 41-60 решаются по теме «Непрерывные случайные величины».

Непрерывные случайные величины задаются функцией распределения вероятностей случайной величины F(x) или функцией плотности вероятностей f(x). Причем по определению F(x) = P(X < x), f(x) = $F'(x)$. Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) 0 ≤ F(x) ≤ 1;

2) является неубывающей функцией, то есть, если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$;

3) вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определенное значение равна нулю;

4) если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу(a,b), то F(x) = 0 при x$\leq a$ и F(x) = 1 при x$> b$. Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу $(-\infty, \infty)$, то $F(-\infty) = 0;\ \ F(\infty) = 1$.

Плотность вероятностей непрерывной случайной величины обладает свойствами:

1) f(x) ≥ 0, т. е. является неотрицательной функцией;

2) несобственный интеграл от плотности вероятностей в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Зная функцию плотности вероятностей f(x) можно найти функцию распределения F(x) по формуле:

F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал находится по формулам:

P (a≤X<b) = F(b) – F(a); P(a<X<b) = $\int_a^b f(x)dx$.

Если необходимо найти числовые характеристики непрерывных случайных величин, то применяются формулы:

M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ или M(X) = $\int_a^b xf(x)dx$, x$\in (a;b)$

D(X) =$\int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(x)$, или D(X)=$\int_a^b \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X)$, x∈ $(a;b)$.

При решении практических задач часто приходится использовать определенные функции плотности распределения, к важнейшим из которых относятся нормальное, равномерное, показательное.

Пример 8. Непрерывная случайная величина X задана функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \frac{x^3}{125}, \text{при } 0 < x \le 5, \\ 1, \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (2;3); б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Функции распределения изобразить графически.

Решение. Так как по условию задачи а = 2, в = 3, то

$$P(2 \le X < 3) = F(3) - F(2) = \left.\frac{x^3}{125}\right|_{x=3} - \left.\frac{x^3}{125}\right|_{x=2} = \frac{27}{125} - \frac{8}{125} = \frac{19}{125} = 0{,}152.$$

Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \frac{3}{125}x^2, \text{при } 0 < x \le 5, \\ 0, \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Построим графики функций F(x) и f(x).

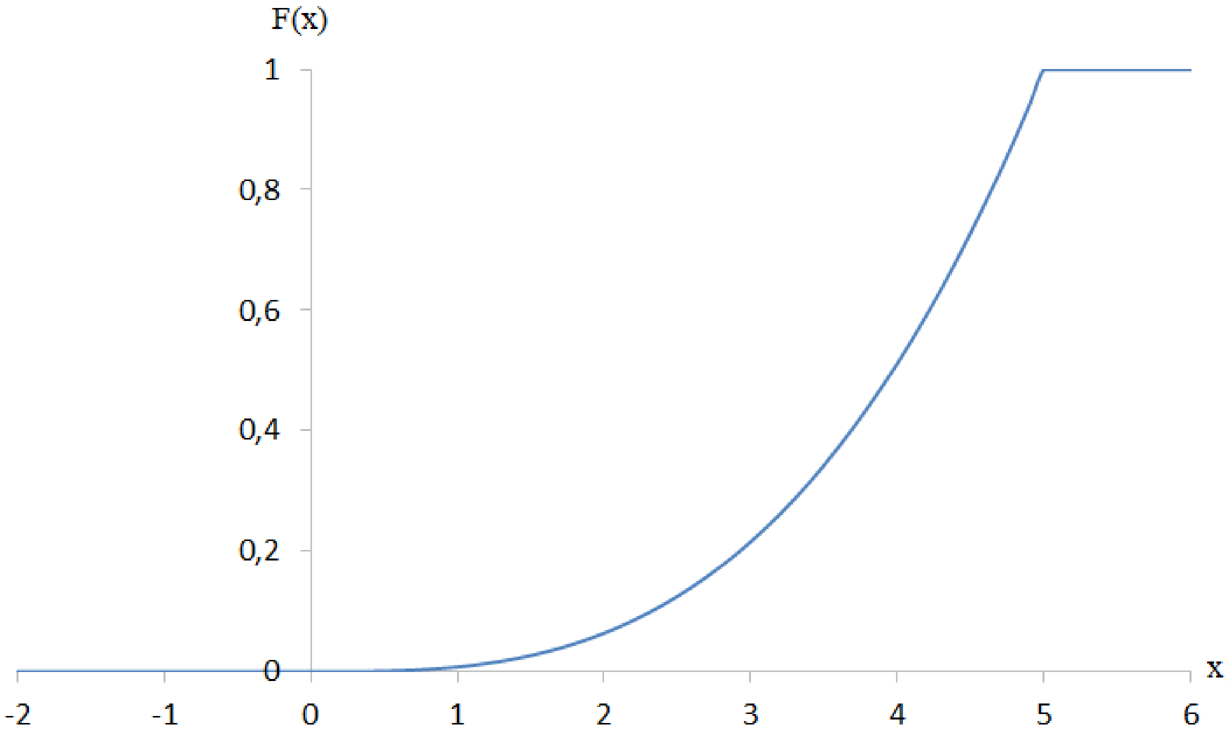


Рисунок 2 – Функция распределения случайной величины X (интегральная функция)

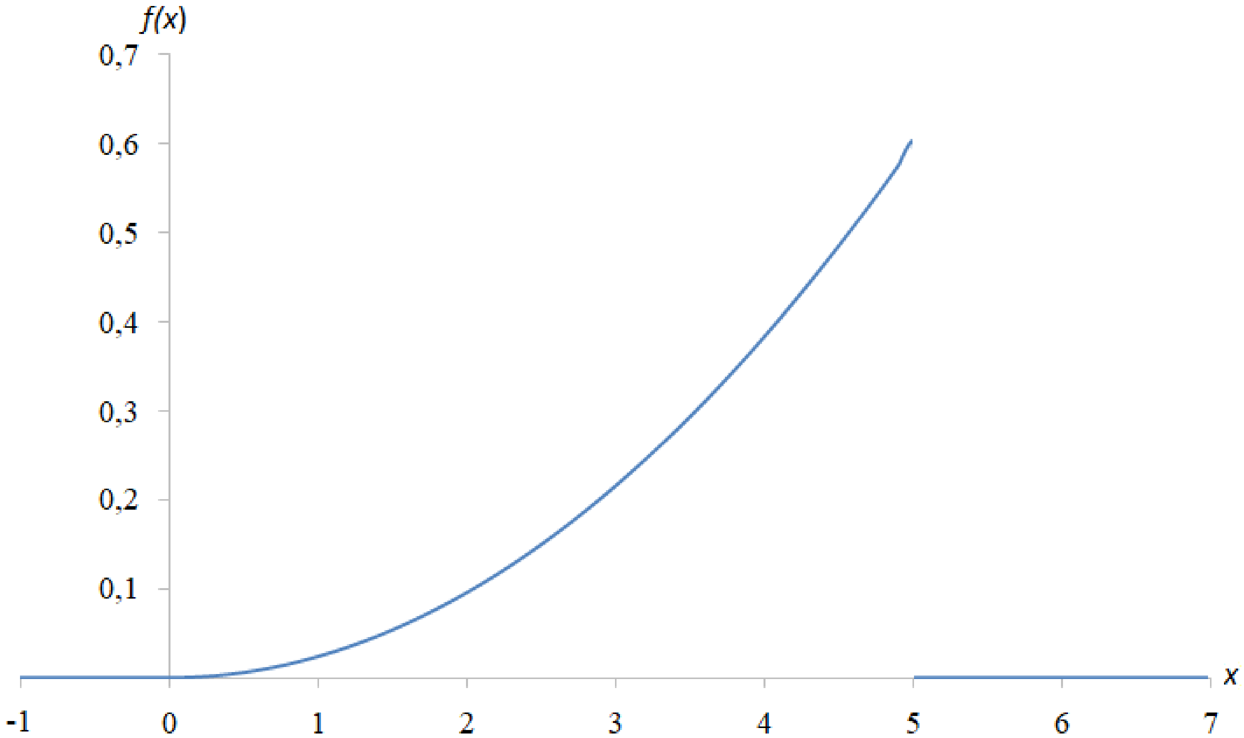


Рисунок 3 – Функция плотности распределения случайной величины X (дифференциальная функция)

Найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины X. Следует обратить внимание на то, что случайная величина задана на интервале (0;5).

M(x)=$\int_0^5 \mathrm{x} \cdot \frac{3}{125} \mathrm{x}^2\, dx = \frac{3}{125}\int_0^5 \mathrm{x}^3\, dx = \frac{3}{125} \cdot \frac{\mathrm{x}^4}{4}\Big|_0^5 = \frac{3}{5^3} \cdot \frac{5^4}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} = 3{,}75.$

D(x)= $\int_0^5 x^2 \cdot \frac{3}{125} \mathrm{x}^2\, dx = \frac{3}{125}\int_0^5 \mathrm{x}^4\, dx - 14{,}0625 = \frac{3}{125} \cdot \frac{\mathrm{x}^5}{5}\Big|_0^5 - 14{,}0625 = 15 - 14{,}0625 = 0{,}9375.$

$\sigma(\mathrm{x}) = \sqrt{D(\mathrm{x})} = \sqrt{0{,}9375} = 0{,}9682.$

Задачи 61-80 решаются по теме «Законы распределения случайных величин».

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее взаимосвязь между возможными значениями случайной величина и вероятностями этих значений. Дискретные случайные величины задаются законами распределения Бернулли, биномиальным, Пуассона, геометрическим, гипергеометрическим и др., а непрерывные случайные величины – равномерным, нормальным, показательным, логнормальным и другими законами распределения.

Биномиальный закон распределения. Случайная величина X принимает значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5,…,k,….,n, с вероятностями, определяемыми по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$,

где p – вероятность появления события A в одном испытании.

x_i	0	1	…	k	…	n
$\boldsymbol{p}_i$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^n p^n q^0$

$M(X) = np;\ D(\mathrm{X}) = npq,\ \sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Пример 9. Вероятность получения отличной оценки студентом на экзамене составляет 0,25. Составить закон распределения случайной величины X – числа студентов, сдавших экзамен на отлично из четырех сдававших.

Решение. Если сдают экзамен четыре студента, то экзамен может не сдать ни один студент, или 1, или 2, или 3, или 4 студента. Значит случайная величина X может принимать значения 0,1,2,3,4. Вероятности этих значений рассчитываются по формуле Бернулли.

$$P_4(0) = C_4^0\, 0{,}25^0\, 0{,}75^4 = 0{,}3164;$$

$$P_4(1) = C_4^1\, 0{,}25^1\, 0{,}75^3 = 0{,}4219;$$

$$P_4(2) = C_4^2\, 0{,}25^2\, 0{,}75^2 = 0{,}2109;$$

$$P_4(3) = C_4^3\, 0{,}25^3\, 0{,}75^1 = 0{,}0469;$$

$$P_4(4) = C_4^4\, 0{,}25^4\, 0{,}75^0 = 0{,}0039.$$

Закон распределения случайной величины X будет иметь вид:

x_i	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{p}_i$	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

$M(X)$=4·0,25=1; D(X) = 4·0,25· $0{,}75 = 0{,}75$, $\sigma(X)$ = $\sqrt{0{,}75} = 0{,}866$
.

Ответ: $M(X)$ = 1; D(X) = $0{,}75$, $\sigma(X)$ = $0{,}866$.

Геометрический закон распределения. Пусть $P(A)=p$ – вероятность наступления события A в каждом опыте, соответственно, $q = 1 - p$ – вероятность не наступления события A (схема Бернулли). Вероятность появления m – неудач до первого наступления события A определяется по формуле:

$$P(X = m) = pq^{m-1}.$$

Случайная величина X – распределенная по геометрическому закону принимает значения: 1, 2, …, m, … с вероятностью $P(X = m)$.

x_i	1	2	3	...	m	…
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^{m-1}p$	…

$$M(X) = \frac{1}{p};\ D(X) = \frac{q}{p^2}\ , \sigma(X) = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Пример 10. Покупатель последовательно посещает 4 магазина. Вероятность покупки товара в каждом магазине составляет 0,6. Если покупатель находит нужный товар в каком-то магазине, то следующие он не посещает. Составить закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые посетит покупатель. Определить числовые характеристики случайной величины.

Решение. Случайная величина X принимает значения 1,2,3,4, причем p=0.6, q=1 – 0,6 = 0,4. X = 1 означает, что покупатель совершил покупку в первом магазине с вероятностью 0,6, а остальные магазины он по условию задачи не посещает. P(X=1) =p = 0,4. X = 2, т. е. покупатель посетил два магазина, причем в первом магазине нужного товара не оказалось, а он купил его во втором магазине с вероятностью P(X=2) =qp = 0,4·0,6 = 0,24. Аналогично, P(X = 3) = qqp = $q^2p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$. Покупатель посетит все 4 магазина, если он найдет нужный товар в четвертом магазине или не найдет ни в одном магазине. Тогда P(X =4) = $q^3p + q^4 = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 + 0.4^4 = 0{,}064$.

Закон распределения случайной величины X будет иметь вид:

x_i	1	2	3	4
$\boldsymbol{p}_i$	0,6	0,24	0,096	0,064

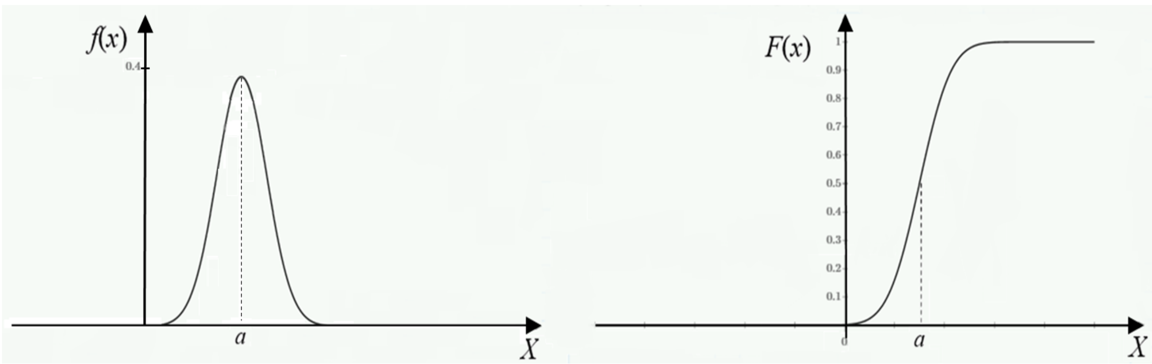
M(X) = $\sum x_i p_i = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}24 + 3\text{-}0{,}096 + 4\text{-}0{,}064 = 1{,}624$;

D(X) =M$(X^2) - M^2(X)$ = 1-0,6 +4-0,24+9·0,096+16·0,064 - $1{,}624^2 = 0{,}801$: $\sigma(X) = \sqrt{0{,}801} = 0{,}899$.

Ответ: M(X) = $1{,}624$; D(X) =$0{,}801$: $\sigma(X) = 0{,}899$.

Нормальное распределение. Функция плотности распределения вероятностей нормального закона имеет вид (рисунок 4; ось $0X$ – горизонтальная асимптота для $f(x)$ и $F(x)$, прямая y=1 горизонтальная асимптота для $F(x)$):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$



Плотность распределения Функция распределения

Рисунок 4 – Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины X

Математическое ожидание характеризует центр распределения и равно «*a*», дисперсия σ^2. Если a и σ принимают произвольные значения, то распределение называется общим. Если $a = 0, \sigma = 1$, то распределение называется нормированным, значения которого представлены в приложении 1:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал определяется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} dz$. Ф(-х) = - Ф(х). Значения функции Ф(х) представлены в приложении1.

Вероятность того, что случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону, отклонится от математического ожидания $M(x) = a$ не более чем на величину $\delta > 0$:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пример 11. Цена акции открытого акционерного общества распределяется по нормальному закону. За последний квартал математическое ожидание цены акции составило 500 руб. за одну акцию при среднем квадратическом отклонении 50 руб. Определить вероятность того, что в ближайшие дни цена акции общества будет: а) больше 525 руб.; б) меньше 480 руб.; в) находиться в интервале от 475 до 540 руб. г) отклоняться от математического ожидания не более чем на 75 руб.

Решение. По условию а = 500, $\sigma = 50$.

а) $\mathrm{P(X} > 525) = P(525 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 500}{50}\right) - \Phi\left(\frac{525-500}{50}\right) =$ $\Phi(\infty) - \Phi(0{,}5)$. По данным приложения 1, для всех значений $\mathrm{x} > 5, \Phi(\mathrm{x}) = 0{,}5,$ при х = 0,5, Ф(х) = 0,1915. Значит $\mathrm{P(X} > 525) = 0{,}5 + 0{,}1915 = 0{,}6915.$

б) $P(X < 480) = \mathrm{P}(-\infty < \mathrm{X} < 480) = \Phi\left(\frac{480-500}{50}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-500}{50}\right) = \Phi(-0{,}4) - \Phi(-\infty) = \Phi(\infty) - \Phi(0{,}4) = 0{,}5 - 0{,}1554 = 0{,}3446.$

в) $\alpha = 475, \beta = 540,$ $P(475 < X < 540) = \Phi\left(\frac{540-500}{50}\right) - \Phi\left(\frac{475-500}{50}\right)$ = Ф(0,8) – Ф(1,25). По таблице, при х = 0,8, Ф(х) = 0,2881, при х = 1,25, Ф(х) = 0,3944. Значит $\text{P}(475 < X < 540) = 0{,}2881 + 0{,}3944 = 0{,}6825.$

г) $\delta = 75,\ P(|X - 500| < 75) = 2\,\Phi\left(\frac{75}{50}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 4332 = 0{,}8864.$

Ответ: $\text{P}(\text{X} > 525) = 0{,}6915;$ $P(X < 480)$ =0,3446; $\text{P}(475 < X < 540) = 0{,}6825;$ $P(|X - 500| < 75) = 0{,}8664.$

Задачи 81-100 решаются по теме «Вариационные ряды распределения».

Исходя из целей и задач конкретного исследования, производится статистическое наблюдение или сбор данных по всем единицам однородной совокупности или по части единиц. Генеральной называют всю совокупность единиц, которая подлежит изучению, Совокупность единиц, отобранная определенным образом из генеральной, называется выборочной совокупностью. После сбора данных по отобранным или всем единицам совокупности производится их упорядочение и представление в виде вариационного ряда распределения.

Вариационным рядом распределения называется упорядоченный ряд значений изучаемого признака (x_i,) и соответствующих им частот (n_i,) или частостей (относительных частот) (w_i). Вариационный ряд строится как по дискретным, так и непрерывным признакам. Если число значений дискретного признака велико или признак непрерывный, то строится интервальный вариационный ряд, в котором значения признаки задаются интервалами значений.

Для составления ряда распределения по соответствующему варианту заданий, необходимо взять индивидуальные значения изучаемого признака по каждому из предприятий, которые приведены в приложении 3.

Пример 12. Пусть необходимо составить ряд распределения 58 хозяйств по прибыли на1 га сельскохозяйственных угодий. Рассчитаны значения данного признака по каждому предприятию:

35,12	57,64	7,80	13,26	22,08	16,91	12,69	29,56	7,69	20,05
16,73	26,49	18,71	30,76	29,78	9,05	5,73	10,46	15,41	10,57

1,01	2,50	10,72	12,70	18,82	4,89	11,78	29,07	9,62	5,17
9,32	20,12	5,46	21,95	17,19	5,65	5,02	11,73	3,39	17,39
25,11	8,06	17,53	26,55	13,13	35,37	9,63	7,54	11,22	21,65
26,02	11,97	18,04	9,30	6,03	13,89	7,90	9,57		

Так как значения признака заполняют промежуток значений, то стоится интервальный ряд распределения с равными интервалами. Число групп, на которые разбивается вариационный ряд, определяется по следующей формуле:

k = 1+3,322 lg n; k = 1+3,322 lg58 = 6,86.

Число интервалов, на которые разбивается совокупность предприятий равно 7, значит k = 7. Учитывая небольшое число предприятий, можно выделить также 6 интервалов.

Величина интервала находится по формуле

$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$,

где X_{min} и X_{max}, соответственно, наименьшее и наибольшее значения признака.

Величина интервала округляется обычно в сторону увеличения до принятой точности измерения признака. Если крайние значения значительно отличаются от рядом расположенных значений, то в приведенной формуле они не учитываются, тогда строится ряд распределения с открытыми крайними интервалами. Например, значение 57,64 существенно отличается от предыдущего значения 38,12 тогда:

$h = \frac{35{,}37 - 1{,}01}{7} = 4{,}91.$

Округлив величину интервала, получим h = 5,0. Границы интервалов составят: 1,0+5,0 = 6,0; 6,0+5,0 = 11,0; 11,0+5,0 = 16,0; 16,0+5,0 = 21,0; 21,0+5,0 = 26,0; 26,0+5,0 = 31,0, свыше 31,0. Так как наибольшее значение (57,64) в формуле было отброшено, а величина h округлена, то чтобы учесть все значения вариационного ряда, последний интервал берется открытыми. Подсчитав число хозяйств, попавших в соответствующий интервал, составляем вариационный ряд распределения (таблица 2).

Таблица 2 - Распределение сельскохозяйственных предприятий по величине прибыли на 1 га сельскохозяйственных угодий

Группы предприятий по численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел.	Число предприятий в группе (n_i)	В % к итогу (w_i)	Накопленное число предприятий (S_i)	В % к итогу
1,0 – 6,0	9	15,5	9	15,5
6,0 – 11,0	15	25,9	24	41,4
11,0 – 16,0	10	17,2	34	58,6
16,0 - 21,0	10	17,2	44	75,8
21,0 – 26,0	4	6,9	48	82,7
26,0 – 31,0	7	12,1	55	94,8
Свыше 31,0	3	5,2	58	100,0
ИТОГО	58	100.0		

Графически ряд распределения изображается в виде полигона, гистограммы или кумуляты распределения. На оси абсцисс откладываются значения изучаемого признака (границы интервалов), а на оси ординат число хозяйств или накопленное число хозяйств.

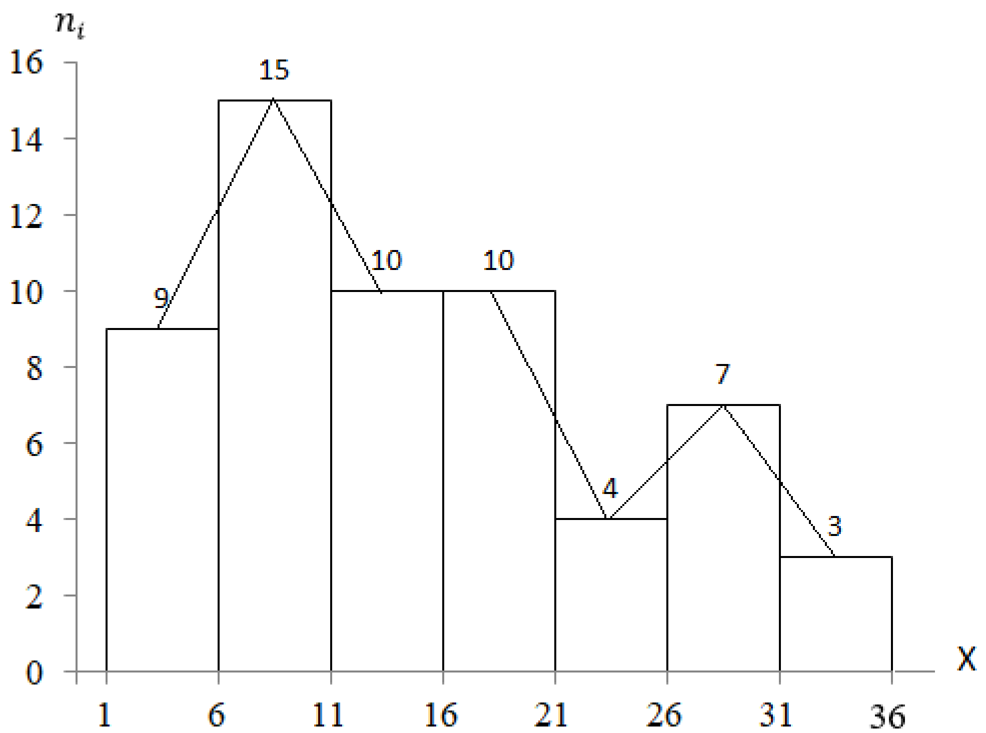


Рисунок 5 – Полигон и гистограмма распределения предприятий по сумме прибыли на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

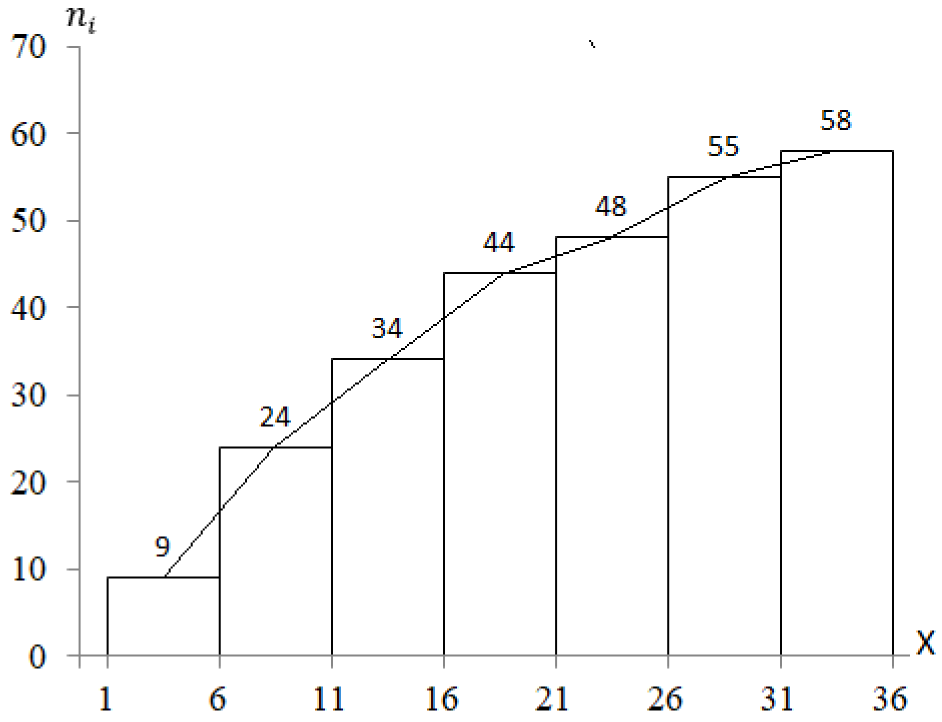


Рисунок 6 – Кумулята распределения предприятий по сумме прибыли на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

Рассчитаем основные характеристики вариационного ряда, к которым относятся мода, медиана, среднее значение, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Модой называется значение признака, имеющее наибольшую частоту в ряду распределения. Вариационные ряды могут иметь одну или несколько модальных значений. В примере распределение двух модальное, то мода находится в интервале с самой большой частотой (6,0 –11,0).

В рядах с равными интервалами мода внутри модального интервала определяется по формуле.

$$Mo = X_{Mo} + h\frac{n_{Mo}-n_{Mo-1}}{(n_{Mo}-n_{Mo-1})+(n_{Mo}-n_{Mo+1})},$$

где $Xмо$ - нижняя граница модального интервала;

$n_{Mo}, n_{Mo-1}, n_{Mo+1}$ - частоты модального, предмодального и послемодального интервалов, соответственно.

$$Mo = 6{,}0 + 5{,}0 \cdot \frac{15-9}{(15-9)+(15-10)} = 8.73.$$

Значит, наиболее часто встречаются предприятия с прибылью от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий 8,73 тыс. руб.

Медианой называется значение признака, находящееся в середине ряда распределения. Медиана делит вариационный ряд пополам. В интервальном ряду она находится по формуле:

$$Me = X_{Me} + h\,\frac{0.5n - S_{Me-1}}{n_{Me}},$$

где X_{Me} – нижняя граница медианного интервала;

S_{Me-1}– накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me}– частота медианного интервала.

В примере 0,5n = 0,5· 58 = 29. По накопленным частотам видно, что медиана находится в интервале (11,0 – 16,0), поэтому $X_{ме}$ = 11,0, тогда

$$\text{Me} = 11{,}0 + 6{,}0\,\frac{29 - 24}{10} = 14{,}0.$$

Значит, половина сельскохозяйственных предприятий имеет прибыль на 1 га сельскохозяйственных угодий до 14 тыс. руб., а половина хозяйств более 14,0 тыс. руб.

Для расчета средней величины признака, дисперсии, среднего квадратического отклонения составляется вспомогательная таблица 3. Так как в примере представлен вариационный ряд с открытым крайним интервалом, то до расчета обобщающих характеристик его необходимо закрыть. Последний интервал свыше 31,0: 31,0 + 5,0 = 36,0, его границы 31,0 – 36,0.

Таблица 3 - Вспомогательная таблица для расчета средней и дисперсии ряда распределения

Группы предприятий по прибыли на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.	Число хозяйств в группе (n_i)	Среднее значение интервала (x_i)	$x_i n_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert n_i$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1,0 – 6,0	9	3,5	31,5	103,95	1200,6225
6,0 – 11,0	15	8,5	127,5	98,25	643,5375
11,0 – 16,0	10	13,5	135,0	15,5	24,025
16,0 – 21,0	10	18,5	185,0	34,5	119,025
21,0 – 26,0	4	23,5	94,0	33,80	285,61
26,0 – 31,0	7	28,5	199,5	94,15	1266,3175
31,0 – 36,0	3	33,5	100,5	55,35	1021,2075
ИТОГО	58		873,0	435,5	4560,345

Для определения среднего значения признака вначале находят среднее значение каждого интервала, как полу сумму границ интервала.

Среднее значение признака составит:

$\overline{x}= \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{873,0}{58} = 15,05.$

Найдем показатели вариации.

Размах вариации R= $X_{max} - X_{min}$= 57,64 – 1,01 = 56,63.

Среднее линейное отклонение L=$\frac{\sum|x_i - \bar{X}|n_i}{n} = \frac{435,5}{58} = 7,51.$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

$\sigma^2 - \frac{\sum n_i(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \frac{4560,345}{58} = 78,627; \quad \sigma = \sqrt{78,627} = 8,87.$

Коэффициент вариации

$V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{8.87}{15.05} \cdot 100 = 58.9$ %.

Таким образом, средняя прибыль от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий по совокупности предприятий составила 15,05 тыс. руб. Прибыль на 1 га сельскохозяйственных угодий в среднем по предприятиям колебалась в границах $\overline{x} \pm \sigma$ = 15,05 ± 8,87, т.е. от 6,18 до 23,92 тыс. руб. Этот интервал, а также коэффициент вариации показывают, что имеются очень большие различия в величине полученной прибыли на 1 га сельскохозяйственных угодий по предприятиям.

Задачи 101-120 решаются по теме «Выборочный метод».

Если исследуется совокупность единиц, то изучать можно все единицы совокупности без исключения или же какую-то их часть. При выборочном обследовании отбирается определенным образом часть генеральной совокупности единиц, а показатели, найденные по отобранной части единиц, должны достаточно точно характеризовать всю совокупность единиц. На практике наиболее часто используется случайный способ отбора, при котором единицы совокупности отбираются случайным образом, обычно методом жеребьёвки из генеральной в выборочную совокупность. Случайный отбор осуществляется повторным или бесповторным способом. При бесповторном отборе, отобранная и обследованная единица генеральной совокупности, назад в генеральную совокупность не возвращается, а при повторном – возвращается.

По выборочной совокупности можно определить приближенные значения характеристик генеральной совокупности, которые называются статистическими оценками параметров генеральной совокупности. Для того, чтобы статистическая оценка достаточно точно характеризовала истинный параметр генеральной совокупности, она должна обладать свойствами несмещенности, эффективности и состоятельности.

Статистическая оценка $\hat{\theta}$ называется несмещенной, если математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру генеральной совокупности θ при любом объеме выборки:

$\mathrm{M}(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$.

Статистическая оценка называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди оценок одного класса/

Состоятельной называют оценку $\hat{\theta}$, которая сходится по вероятности к истинному значению параметра генеральной совокупности θ:

$\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon) = 1, (\varepsilon > 0).$

Оценка параметра генеральной совокупности по выборке может быть точечной, задаваемой одним числом, и интервальной, задаваемой двумя числами, концами интервала.

В математической статистике доказано, что выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней, а выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии.

$\mathrm{M}(\bar{X}_{\text{в}}) = \bar{X}_{\text{г}};\quad \mathrm{M}(D_{\text{в}}) = \frac{n-1}{n} D_{\text{г}};$

$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{n}{n-1}\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_{\text{в}})^2 n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_{\text{в}})^2 n_i}{n-1};$

где $\bar{X}_{\text{в}}$ – выборочная средняя;

$\bar{X}_{\text{г}}$ – генеральная средняя;

$D_{\text{в}}$ –выборочная дисперсия;

$D_{\text{г}}$ – генеральная дисперсия;

s^2 – исправленная выборочная дисперсия, являющаяся несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Пример 13. Считая данные примера 9 результатом 10% случайной бесповторной выборки, с доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться прибыль на 1 га сельскохозяйственных угодий во всей совокупности предприятий. Сколько предприятий необходимо отобрать, чтобы предельная ошибка выборки уменьшилась в 1,5 раза.

В качестве точечной оценки генеральной средней необходимо взять выборочную среднюю, являющуюся несмещенной оценкой генеральной средней. По выборочной совокупности предприятий средняя прибыль на 1 га сельскохозяйственных угодий составляет 15,05 тыс. руб. Значит $\bar{X}_г$ = 15,05.

В примере 9 $\sigma_в^2$= 78,627; n=58, значит $s^2 = 78{,}627 \cdot \frac{58}{57} = 80{,}01$; $\frac{n}{N}$=0,1;

N = $\frac{n}{0{,}1} = \frac{58}{0{,}1} = 580.$

Доверительный интервал для средней арифметической определяется величиной предельной ошибки выборки $\Delta_{\bar{x}}$, найденной при заданном уровне доверительной вероятности γ.

Предельная ошибка выборки для средней определяется по формуле:

$$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

Учитывая, что объём выборочной совокупности п = 58, то значение t находится по таблицам распределения t – Стьюдента (приложение 2) при заданном уровне доверительной вероятности γ (или уровня значимости α для двухсторонней критической области) и числе степеней свободы k = n-1. При решении задач уровень доверительной вероятности принять равным 0,95. Тогда по таблице при α =0,05, k = 58–1 = 57, t = 2,00.

$$\Delta_{\bar{x}} = 2{,}00 \cdot \sqrt{\frac{80{,}01}{58}\left(1 - \frac{58}{580}\right)} = 2{,}23.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 можно утверждать, что средняя прибыль на 1 га сельскохозяйственных угодий во всей совокупности хозяйств находится в границах: $\bar{X}_в \pm \Delta_{\bar{x}}$ = 15,05 ± 2,23, т.е. от 12,822 до 17,28 тыс. руб.

Если применяется случайный бесповторный способ отбора, то необходимый объем выборки определяется по формуле:

$$n = \frac{t^2 N \sigma^2}{\Delta_{\bar{x}}^2 \cdot N + t^2 \sigma^2}.$$

По условию задачи имеем:

t = 2,00; N = 580; $\sigma^2 = S^2 = 80{,}01$; $\Delta_{\bar{x}} = 2{,}23 : 1{,}5 = 1{,}49$;

$$n = \frac{2{,}00^2 \cdot 580 \cdot 80{,}01}{1{,}49^2 \cdot 580 + 2{,}00^2 \cdot 80{,}01} = \frac{185623{,}2}{1607{,}698} = 116.$$

Значит для уменьшения предельной ошибки выборки в полтора раза, объём выборочной совокупности должен быть увеличен в два раза.

Задачи 121-140 решаются по корреляционно-регрессионному анализу связей между явлениями.

В зависимости от целей и задач конкретного исследования зависимостей выделяют признаки или показатели факторные и результативные. Факторными (независимыми) называется признаки или переменные обуславливающие изменение других признаков. Они обозначаются Х или X_i , i=1,2,…,n. Признаки, изменяющиеся под влиянием факторных признаков, называются результативными или ли зависимыми. Они обозначаются через У или $У_i$.

Связи между признаками подразделяются на функциональные и корреляционные. Связь между признаками или переменными называется функциональной, если определённому значению одной из переменных величин соответствует определённое значение другой переменной. При увеличении одной переменной на какую-то величину вторая переменная также изменяется на определённую величину и наоборот.

При корреляционной связи с изменением факторного признака на определённую величину изменяется среднее значение результативного признака. Корреляционная зависимость является не полной, не точной, проявляется она не в конкретном отдельном случае, а в среднем, в массе явлений. Корреляционную связь можно рассматривать как своего рода функциональную связь между условной средней результативного признака со значением факторного признака

По направлению изменения своих значений различают связи прямые и обратные. Если результативный и факторный признаки изменяются в одном направлении, то связь называется прямой, если же они изменяются в противоположных направлениях, то обратной.

По аналитическому выражению связи подразделяются на линейные и нелинейные. Линейная связь между переменными выражается уравнением прямой на плоскости, или в пространстве или в гиперпространстве. Нелинейные связи выражаются уравнениями кривых различного порядка: парабола, гипербола, показательная, степенная, логистическая и прочие.

По количеству одновременно включаемых в исследование факторов различают связи однофакторные У=f(X) и многофакторные $Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Если на изменение результативного признака Y оказывает влияние один основной, доминирующий фактор, то строится модель парной регрессии. Эта связь проявляется в среднем, как тенденция по совокупности наблюдений.

В парном регрессионном анализе выбор типа функции обычно осуществляется следующими способами: графическим, теоретическим, экспериментальным. На практике наиболее широко используется графический способ, который основан на нанесение фактических пар значений переменных X и У на график. По характеру изменения точек, подбирается соответствующее уравнение, лучшим образом отражающее зависимость между переменными.

Уравнение регрессии переменной У от переменной X может быть записано в виде следующей модели:

$\hat{y} = b_0 + b_1 x$,

где $\hat{y}$ есть теоретическое или предсказанное значение переменной у для данного значения переменной х. Параметры b_0 и b_1 находятся методом наименьших квадратов. Для этого составляется и решается система уравнений:

$$\begin{cases} \sum y_i = nb_0 + b_1 \sum x_i \\ \sum y_i x_i = b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 \end{cases}$$

Параметр b_1 называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает, на сколько единиц в среднем изменится результативный признак У с увеличением факторного признака X на одну единицу своего измерения.

После расчета параметров уравнения регрессии производится оценка тесноты связи между изучаемыми переменными. При линейной связи между переменными в качестве меры тесноты связи применяется коэффициент корреляции.

Он находится по одной из формул:

$$r_{xy} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{cov\,(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n \sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y};$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2} \quad ; \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{y}^2}, \quad r_{yx} = r_{yx}..$$

Для оценки качества подбора линейного уравнения имеющимся данным результативного признака используется коэффициент детерминации равный квадрату коэффициента корреляции.

После нахождения линейного уравнения регрессии необходимо провести оценку значимости или точности всего уравнения в целом и отдельных его параметров.

Оценка точности уравнения регрессии проводится с использованием критерия F–Фишера, основанного на сопоставлении дисперсий и соответственно сумм квадратов отклонений.

Наблюдаемое значение F критерия определяется делением факторной дисперсии (среднего квадрата отклонений обусловленного регрессией) к остаточному среднему квадрату отклонений. Выдвигаются нулевая и конкурирующая гипотезы:

H_0: $s_p^2 = s_z^2$; H_1: $s_p^2 \neq s_z^2$.

Критическое значение критерия F находится по таблицам при заданном условии значимости $\propto$ и числе степеней свободы факторной и остаточной дисперсии.

Таблица 4 –Дисперсионный анализ результатов регрессии

Источник вариации	Сумма квадратов отклонений (SS)	Число степеней свободы k=df	Средний квадрат отклонений (s^2)	F- отношение	
				фактическое	критическое α,k_z
Обусловленный регрессией	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}i - \overline{У})^2$	1	$s_p^2 = \frac{SS_p}{df_p}$	$\frac{s_p^2}{s_z^2}$	
Остаточный (относительно регрессии)	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}i)^2$	n-2	$s_z^2 = \frac{Sz}{df_z}$		
Общий	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$	n-1			

Если $F_H > F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, связь между изучаемыми признаками признается статистически существенной. Если $F_H < F_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается. Уравнение регрессии статистически незначимое, мы не можем утверждать, что переменные связаны линейно.

В линейном уравнении регрессии оценивается значимость, как всего уравнения, так и входящих в него элементов.

Стандартная ошибка (или средняя квадратическая) коэффициента регрессии находится по следующей формуле:

$$m_{b_1} = \sqrt{\frac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2/n-2}{\sum(x_i-\bar{\mathrm{x}})^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2\text{ост}}{\sum(x_i-\bar{\mathrm{x}})^2}}$$

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{\mathrm{x}})^2}{n}, \sum(x_i-\bar{\mathrm{x}})^2 = \mathrm{n}\sigma_{\mathrm{x}}^2.$$

С помощью t–распределения можно проверить значимость величины коэффициента регрессии

$$t_{\text{н}} = t_{b_1} = \frac{b_1}{m_{b_1}},$$

Сравниваем наблюдаемое значение критерия с критическим значением. Если $t_{\text{н}} > t_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза о равенстве нулю коэффициента регрессии отвергается, значит его величина существенно отлична от нуля.

Оценку значимости коэффициента регрессии можно провести непосредственно по величине доверительного интервала. Если предположить, что разброс фактических значений результативного признака относительно линии регрессии подчиняется нормальному закону, то есть ошибки ε распределяются по нормальному закону с параметрами М(ε) = 0, D(ε) = (σ^2), то можно найти доверительный интервал для неизвестного параметра β, который составит

$$b_1 \pm \frac{t_{\alpha,k_z} \cdot s_z}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}} = b_1 \pm t_{\alpha,k_z} \cdot m_{b_1}.$$

Если этот интервал включает нулевое значение, то есть изменяется с минуса на плюс относительно нуля, то нулевая гипотеза не отвергается, а величина коэффициента регрессии статистически не значима.

Средняя квадратическая ошибки свободного члена уравнения регрессии находится по формуле:

$$m_{b_0} = \sqrt{\frac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2} \cdot \frac{\sum x_i^2}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}} = \sqrt{s_z^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}}$$

Значимость или существенность величины коэффициента корреляции может быть проверена различными способами, дающими примерно равные результаты.

Выдвигается нулевая гипотеза $\mathrm{H}_0: r_{\text{ген.}} = 0$, при конкурирующей гипотезе $\mathrm{H}_1: r_{\text{ген.}} \neq 0$. При использовании t – критерия, наблюдаемое значение t определяется по формуле:

$t_н = \frac{|r|}{m_r}$, $\quad m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ или $t_н = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

В парной линейной регрессии $t_r^2 = F$, так как $F = \frac{r^2}{1-r^2} \cdot (n-2)$, то $t_b^2 = F$, значит $t_r^2 = t_{b_1}^2$.

Пример 14. Пусть требуется дать количественную характеристику зависимости между обеспеченностью рабочей силой и выручкой от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий по предприятиям с №11 по №25.

Очевидно, что фактором роста объёмов производства и реализации продукции является обеспеченность рабочей силой, поэтому результативным признаком (*Y*) является выручка от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий. Среднегодовая численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий является факторным признаком (X).

Согласно условию задач, на основании данных приложения 1, рассчитываем значения *X* и *Y* по 15 предприятиям (таблица 5) и построим график зависимости (рисунок 7).

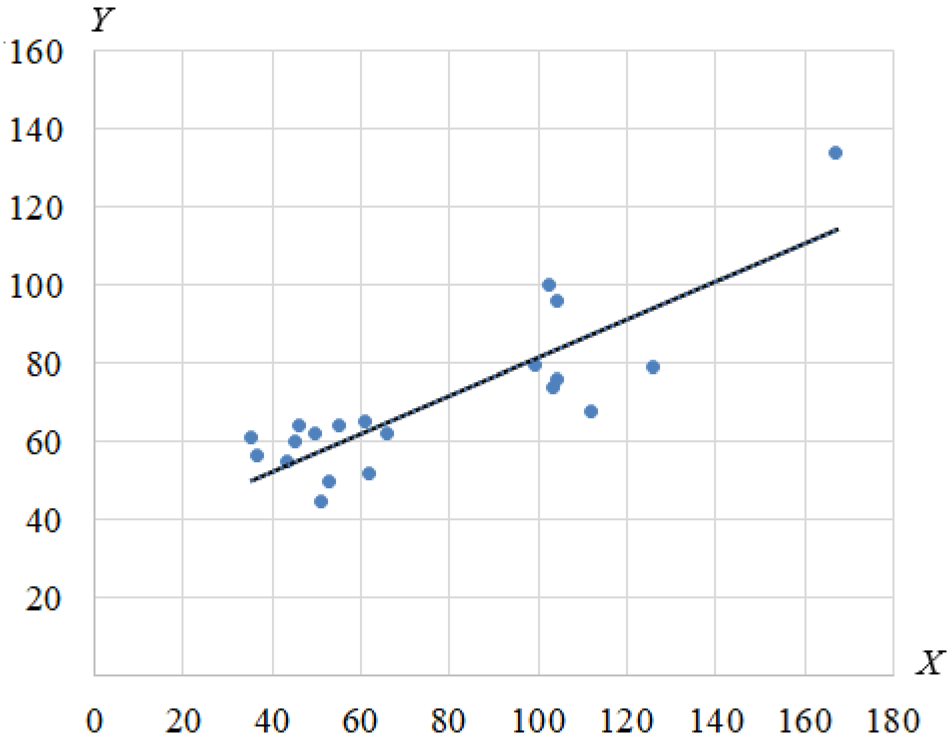


Рисунок 7 – Зависимость между выручкой от реализации продукции на 1га сельскохозяйственных угодий и стоимостью основных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий

На график наносится 15 пар значений результативного и факторного признаков в виде точек. Шкалы по осям координат различаются в зависимости от значений признаков по конкретным вариантам.

Расположение точек на рисунке 7 показывает, что зависимость между обеспеченностью рабочей силой и выручкой от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий выражается линейным уравнением регрессии

$$у = a_0 + a_1 х.$$

Параметры уравнения регрессии нужно найти методом наименьших квадратов, для чего составляется и решается следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum у = na_0 + a_1 \sum x\,, \\ \sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1400{,}4 = 20a_0 + 1521{,}4a_{1,} \\ 118470{,}3 = 1521{,}4a_0 + 140391{,}4a_{1.} \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: a_0 = 33,202, a_1 = 0,484. Значит уравнение регрессии имеет вид: у = 33,202 + 0,484 х.

Коэффициент регрессии (a_1) показывает, что при увеличении среднегодовой стоимости основных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий на 1 тыс. руб., выручка от реализации продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий угодий в среднем по совокупности предприятий увеличивается на 484 руб.

Таблица 5 - Вспомогательная таблица для расчёта коэффициентов корреляции и регрессии

№ п/п	Выручка на 1га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб. (Y)	Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.(X)	XY	X^2	Y^2	$\hat{Y}$
1	65,3	61,1	3989,83	3733,21	4264,09	62,77
2	51,6	61,6	3178,56	3794,56	2662,56	63,01
3	76,0	104,3	7926,8	10878,49	5776	83,69
4	60,9	35,3	2149,77	1246,09	3708,81	50,28
5	79,0	126,0	9954	15876	6241	94,20
6	133,8	167,0	22344,6	27889	17902,44	114,06

7	61,9	49,5	3064,05	2450,25	3831,61	57,15
8	100,1	102,6	10270,26	10526,76	10020,01	82,87
9	60,0	45,0	2700	2025	3600	54,97
10	62,0	65,8	4079,6	4329,64	3844	65,05
11	64,2	55,2	3543,84	3047,04	4121,64	59,91
12	79,4	99,5	7900,3	9900,25	6304,36	81,37
13	56,2	36,4	2045,68	1324,96	3158,44	50,81
14	44,5	51,1	2273,95	2611,21	1980,25	57,93
15	67,5	111,7	7539,75	12476,89	4556,25	87,28
16	73,7	103,4	7620,58	10691,56	5431,69	83,26
17	64,3	45,8	2944,94	2097,64	4134,49	55,36
18	49,6	52,9	2623,84	2798,41	2460,16	58,80
19	54,7	43,1	2357,57	1857,61	2992,09	54,05
20	95,7	104,1	9962,37	10836,81	9158,49	83,59
Сумма	1400,4	1521,4	118470,3	140391,4	106148,4	1400,4

Подставив в уравнение регрессии значения факторного признака, найдем по каждому предприятию расчетные значения валовой продукции, которые нанесем на график.

Если x_1=61,1, то $\hat{y}_1$ = 33,202 + 0,484· 61,1 =62,77,

x_2= 61,6, то $\hat{y}_2$= 33,202 + 0,484 · 61,6 =63,01 и т.д.

Для оценки тесноты связи между признаками рассчитывается коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1521,4}{20} = 76,07, \ \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{1400,4}{20} = 70,02, \ \overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{118470,3}{20} = 5923,515, \ \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{140391,4}{20} - 76,07^2} = 35,113,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{106148,4}{20} - 70,02^2} = 20,115,$$

$$r = \frac{5923,515 - 76,07 \cdot 70,02}{35,113 \cdot 20,115} = 0,845; \ r^2 = 0,714.$$

Коэффициент коррекции показывает, что зависимость между выручкой от реализации продукции на 1га сельскохозяйственных угодий и стоимостью основных средств на 1 га сельскохозяйственных угодий сильная. Коэффициент детерминации (r^2) свидетельствует о том, что

71,4 % различий в выручке от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий объясняется обеспеченностью основными средствами, а остальные 28,6 % объясняется влиянием других факторов.

Так как регрессионный анализ зависимости между признаками проводится по выборочным данным, то необходимо проверить значимость выборочного коэффициента корреляции.

Выдвигаем нулевую гипотезу: величина коэффициента корреляции в генеральной совокупности равна нулю

$H_0: r_г = 0$,при $H_1: r_г \neq 0$.

Проверку нулевой гипотезы проведем с помощью критерия t - Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия t находим по формуле

$$t_н = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0{,}845 \cdot \sqrt{\frac{20-2}{1-0{,}714}} = 6{,}70.$$

По таблице распределения t – Стьюдента (приложение 2), при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы k = n−2 = 20−2 = 18, находим критическое значение $t_{05.18}$ = 2,10.

Так как $t_н > t_{05,18}$, то нулевая гипотеза не принимается, значит, коэффициент корреляции существенно отличен то нуля в генеральной совокупности. Обеспеченность основными средствами оказывает статистически существенное влияние на выручку от реализации продукцию в расчете на 1 га сельскохозяйственных угодий.

Задания для выполнения контрольной работы

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Произведено 3 выстрела. Какова вероятность того, что будет: а) три попадания; б) один промах; в) хотя бы одно попадание; г) только одно попадание.
2. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена 0,5, для второго 0,2, для третьего 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен.
3. В первой урне 6 черных и 9 белых шаров, во второй 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар.

Какова вероятность того, что вынуты: а) два белых шара; б) хотя бы один шар черный; в) белый и черный в любой последовательности.

4. Вероятность того, что хотя бы один из четырех покупателей купит определенный товар равна 0,9919. Определить вероятность того, что:

а) два покупателя совершат покупки; б) три покупателя совершат покупки.

5. В коробке находятся жетоны с цифрами то 1 до 10. Наудачу извлекаются три жетона. Какова вероятность того, что будут вынуты: а) три жетона с четными номерами; б) хотя бы один жетон с четным номером; в) только один жетон с четными номерами.

6. В двух группах обучается по 20 студентов. В первой группе сессию на «отлично» сдали 8 человек, во второй 5 человек. Из каждой группы наудачу вызывают по одному студенту. Какова вероятность того, что: а) оба студента отличники; б) только один отличник; в) хотя бы один отличник.

7. В первой бригаде из 7 тракторов 2 требуют ремонта, во второй из 5 тракторов 1 требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Определить вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) хотя бы один исправен; в) только один исправен.

8. В организации работают 11 мужчин и 9 женщин. Для них выделено три премии. Определить вероятность того, что премию получат: а) двое мужчин и одна женщина; б) только женщины; в) хотя бы один мужчина.

9. Из 30 работников предприятия 9 имеют высшее образование. Определить вероятность того, что из случайно отобранных трех человек высшее образование имеют: а) три человека; б) только один человек; в) хотя бы один человек.

10. На карточках написаны буквы «Т», «С», «Т», «И», «Т», «И», «А», «С», «К», «А». Карточки перемешивают и кладут в порядке их вытаскивания. Какова вероятность того, что получится слово: а) «АИСТ»; б) «ТАКСИ»; в) «СТАТИСТИКА».

11. В коробке из 20 изделий содержится 15 изделий повышенного качества. Наудачу извлекается три изделия. Определить вероятность того, что: а) одно из них повышенного качества; б) все три изделия повышенного качества; в) хотя бы одно изделие повышенного качества.

12. Бросается три игральных кости. Какова вероятность того, что: а) хотя бы на одной из них появится пять или шесть очков; б) на всех выпадут нечетные цифры; в) на всех костях выпадут одинаковые цифры.

13. В первом ящике из 10 шаров 7 красных и 3 черных, во втором ящике из 12 шаров 4 красных и 8 черных. Из первого ящика во второй переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первого ящика, черный.

14. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 65% изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска стандартного изделия первым предприятием 0,9, вторым 0,8. а) Определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется стандартным, б) Взятое изделие оказалось стандартным. Какова вероятность, что оно выпущено на втором предприятии.

15. Имеется три урны. В первой 5 белых и 3 черных шара, во второй и третьей по 6 белых и 4 черных шара. Из случайно выбранной урны извлекается шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?

16. Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем от первого и второго хозяйства поступает по 40 % всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства 75%, второго 85%, третьего 90%. а) Определить вероятность того, что наудачу взятое семя взойдет, б) Наудачу взятое семя взошло. Какова вероятность, что оно получено от второго хозяйства?

17. Программа экзамена состоит из 40 вопросов. Из двадцати студентов группы 9 человек выучили все вопросы, 6 человек по 25 вопросов, 3 человека по 20 вопросов, а два человека по 10 вопросов. Определить вероятность того, что случайно вызванный студент ответит на два вопроса билета.

18. Перед посевом 80% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки 90%, а необработанных 70%. а) Какова вероятность того, что случайно взятое семя взойдет? б) Случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

19. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность равна для первого завода 0,94, для второго 0,86, для третьего 0,88 и для четвертого 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года

вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

20. Г1окупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине равна 0,6, втором – 0,7 и третьем – 0,5. Определить вероятность того, что покупатель купит товар в каком-то магазине. Покупатель купил товар. Найти вероятность того, что он купил его в третьем магазине.

Задачи 21 - 40. Случайные величины X и У заданы законами распределений. Определить математическое ожидание , дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и У. Составить законы распределений случайных величин Z = X + Y, V = XY. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины W = 2X – 4Y.

21	X	-1	2	3	У	3	4
	P_X	0,2	P_2	0,5	p_y	0,4	0,6
22	X	1	4	6	У	-1	2
	P_X	P_1	0,5	0,2	p_y	0,6	0,4
23	X	3	5	7	У	2	4
	P_X	0,3	0,5	P_3	p_y	0,7	0,3
24	X	1	3	6	У	1	2
	P_X	P_1	0,2	0,3	p_y	0,4	0,6
25	X	-1	3	4	Y	2	3
	p_x	0,3	P_2	0,2	Py	0,2	0,8
26	X	0	4	5	Y	-2	2
	P_X	0,3	0,5	P_3	p_y	0,2	0,8
27	X	-2	0	3	Y	3	5
	P_X	0,3	0,2	P_3	p_y	0,7	0,3
28	X	-3	1	2	Y	2	5
	P_X	0,2	0,3	0,5	p_y	P_1	0,6
29	X	-1	2	3	Y	-3	3
	P_X	0,4	0,5	P_3	p_y	0,4	0,6

30	X	4	6	8	Y	1	2	
	P_X	0,3	0,4	P_3	p_y	0,3	0,7	
31	X	-3	-2	1	Y	0	2	
	P_X	0,1	0,6	0,3	p_y	P_1	0,3	
32	X	-4	-2	0	Y	-1	1	
	P_X	0,3	P2	0,2	p_y	0,2	0,8	
33	X	-2	0	2	Y	2	3	
	P_X	0,4	0,3	0,3	p_y	P_1	0,7	
34	X	2	0	4	Y	2	5	
	P_X	P_1	0,5	0,1	p_y	0,7	0,3	
35	X	3	4	5	Y	-1	2	
	P_X	P_1	0,3	0,6	p_y	0,3	0,7	
36	X	-3	-2	2	Y	-1	2	
	P_X	0,2	P_2	0,5	p_y	0,2	0,8	
37	X	2	3		Y	-1	2	3
	P_X	0,4	P_2		p_y	0,1	0,4	0,5
38	X	0	5	6	Y	-2	1	
	P_X	0,4	P_2	0,3	p_y	0,4	0,6	
39	X	-3	0	3	Y	2	4	
	P_X	0,2	0,3	0,5	p_y	0,8	P_2	
40	X	6	8		Y	-1	0	2
	P_X	0,6	0,4		p_y	0,3	P_2	0,2

В задачах 41-60 непрерывная случайная величина задана функцией распределения (интегральной функцией) F(x). Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал (а,в); б) функцию плотности вероятностей (дифференциальную функцию) f(x); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; г) построить графики функций F(x) и f(x).

41. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{64}, \text{при } 0 < x \leq 8, \\ 1, \text{при } x > 8. \end{cases}$ a=2, b=6.

42. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 1, \\ (x-1)^2, \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, \text{при } x > 2. \end{cases}$ a=1,4, b=1,9.

43. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x \leq 0, \\ \frac{4}{9}x^2, \text{при } 0 < X \leq \frac{3}{2} \\ 1, \text{при } x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ a=0,5, b=1,2.

44. $F(x) = \begin{cases} 0, \ \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^3}{64}\ , \ \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1, \ \text{при } x > 4. \end{cases}$ a=1, b=3.

45. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq -1, \\ \frac{x^3+1}{9}, \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, \text{при } x > 2. \end{cases}$ a=0,5, b=1,5.

46. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 0, \\ \frac{9}{25}x^2, \text{при } 0 < x \leq \frac{5}{3}, \\ 1, \text{при } x > \frac{5}{3}. \end{cases}$ a=0,5, b=1,5.

47. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 4, \\ \frac{(x-4)^2}{9}, \text{при } 4 < x \leq 7, \\ 1, \text{при } x > 7. \end{cases}$ a=5, b=6.

48. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 1, \\ \frac{x^2-1}{8}, \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1, \text{при } x > 3 \end{cases}$ a=1, b=2.

49. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 2, \\ \frac{x^3-8}{19}, \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1, \text{при } x > 3. \end{cases}$ a=2,2, b=2,7.

50. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^4}{81}, \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 0, \text{при } x > 3. \end{cases}$ a=1, b=2,5.

51. F(x) = $\begin{cases} 0, \quad \text{при } x \leq 3, \\ \frac{x^2-9}{16} \quad \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1, \quad \text{при } x > 5. \end{cases}$ a=3,5, b=4,5.

52. F(x) = $\begin{cases} 0, \quad \text{при } x \leq 3, \\ \frac{x^4-81}{175}, \quad \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1, \quad \text{при } x > 4. \end{cases}$ a=3,2, b=3,5.

53. F(x) = $\begin{cases} 0, \quad \text{при } x \leq 2, \\ \frac{x^4-16}{65} \quad \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1, \quad \text{при } x > 3. \end{cases}$ a=2,5, b=3,0.

54. F(x) = $\begin{cases} 0, \quad \text{при } x \leq 2, \\ \frac{(x-2)^2}{4}, \quad \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1, \quad \text{при } x > 4. \end{cases}$ a=2,5, b=3,5

55. F(x) = $\begin{cases} 0, \quad \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^3}{125}, \quad \text{при } -1 < x \leq 4, \\ 1, \quad \text{при } x > 4. \end{cases}$ a=0, b=3.

56. F(x) = $\begin{cases} 0, \quad \text{при } x \leq -1, \\ \frac{x^3+x}{30}, \quad \text{при } -1 < x \leq 3, \\ 1, \quad \text{при } x > 3. \end{cases}$ a=1, b=2.

57. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \geq 0{,}5, \\ \frac{x^2-0.25}{2} & \text{при } 0{,}5 < x \leq 1{,}5, \\ 1, & \text{при } x > 1{,}5. \end{cases}$ a=1, b=1,25.

58. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x^3+8}{16}, & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$ a=−1, b=1.

59. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{x^3-x^2}{48}, & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$ a=2, b=3.

60. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \sqrt{2}, \\ \frac{x^6-x^4-4}{96}, & \text{при } \sqrt{2} < x \leq \sqrt{5}, \\ 1, & \text{при } x > \sqrt{5}. \end{cases}$ a=1,5, b=2.

В задачах 61 – 70 составить закон распределения дискретной случайной величины. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

Финансовую компанию посетили *n* возможных клиентов. Вероятность того, что каждый из них совершит сделку равна *p*. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа клиентов, совершивших финансовую сделку. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

61. n = 3, p = 0,6. 62. n = 4, p = 0,7. 63. n = 3, p = 0,4. 64. n = 4, p = 0,8.

65. n = 4, p = 0,5.

Стрелок производит выстрелы по мишени до первого попадания в мишень, но имеет *n* патронов. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна *p*. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа израсходованных патронов.

66. n = 4, p = 0,6; 67. n = 5, p = 0,7; 68. n = 4, p = 0,8; 69. n = 5, p = 0,4;

70. n = 4, p = 0,3.

В задачах 71 – 80 известно, что совокупность семей по расходам на одного члена семьи распределяется по нормальному закону. Математическое ожидание случайной величины равно a, среднее квадратическое отклонение равно σ. Определить: вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал (α, β): вероятность того, что случайная величина примет значение больше (меньше) некоторого значения; вероятность того, что абсолютное отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет меньше положительного числа δ.

71. а = 20; σ =8; δ = 5; $X > 15$; $X < 28$. 72. а = 25; σ =10; δ = 6; $X > 18$; $X < 30$.

73. а = 18; σ =9; δ = 10; $X > 16$; $X < 24$. 74. а = 22; σ =7; δ = 10; $X > 17$; $X < 29$.

75. а = 26; σ =11; δ = 22; $X > 14$; $X < 35$. 76. а = 19; σ =6; δ = 13; $X > 12$; $X < 24$.

77. а = 30; σ =10; δ = 15; $X > 14$; $X < 39$. 78. а = 23; σ =7; δ = 14; $X > 16$; $X < 31$.

79. а = 24; σ =5; δ = 9; $X > 17$; $X < 32$. 80. а = 35; σ =11; δ = 20; $X > 20$; $X < 45$.

В задачах 81-100 по данным приложения 1, составить вариационный ряд распределения сельскохозяйственных по одному признаку. Построенный интервальный ряд изобразить графически с помощью полигона, гистограммы и кумуляты. Определить среднее значение признака, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

81. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

82. Валовая продукция на 1 га пашни, тыс. руб.

83. Валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.

84. Валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.

85. Валовая продукция на 100 руб. затрат, руб.

86. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

87. Выручка на 1 га пашни, тыс. руб.

88. Выручка на 100 руб. затрат, руб.

89. Выручка на среднегодового работника, тыс. руб.

90. Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

91. Основные средства на 1 га пашни, тыс. руб.

92. Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.

93. Численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел.

94. Численность работников на 100 га пашни, чел.

95. Годовая заработная плата на среднегодового работника, тыс. руб.

96. Затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

77. Затраты на реализованную продукцию на 1 га пашни, тыс. руб.

98. Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника, га

99. Площадь пашни на среднегодового работника, га

100. Затраты на 100 руб. выручки, руб.

Задачи 101-120. Рассматривая данные приложения 1 как результаты случайной бесповторной 20% выборки и, используя результаты решения задач 81-100, определить: а) доверительный интервал для среднего значения признака в генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,95; б) необходимый объем выборки, обеспечивающий уменьшение предельной ошибки выборки в 2 раза, сохранив остальные характеристики на прежнем уровне. Условие задачи 101 соответствует данным задачи 81, задачи 102 данным задачи 82 и т. д.

Задачи 121-140. Дать количественную оценку связи между двумя признаками. Построить график корреляционной зависимости между признаками. По графику определить тип уравнения связи. Методом наименьших квадратов найти параметры уравнения регрессии. Полученное уравнение нанести на график связи. Рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить значимость выборочного коэффициента корреляции при уровне значимости 0,05. Для выполнения задач использовать данные приложения 1 по первым 20 предприятиям, по указанным в соответствующем варианте двум признакам.

Выявить влияние на изменение результативных признаков одного из указанных факторов.

121. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

122. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (чел.);

123. Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);

124. Валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и основные средства на 1 га пашни (тыс. руб.);

125. Валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и численность работников на 100 га пашни (чел.);

126. Валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);

127. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и основные средства на среднегодового работника (тыс. руб.);

128. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и годовая заработная плата на среднегодового работника (тыс. руб.);

129. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);

130. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, (тыс. руб.) и основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

131. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (чел.);

132. Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

133. Выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и основные средства на 1 га пашни (тыс. руб.);

134. Выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и численность работников на 100 га пашни (чел.);

135. Выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);

136. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и основные средства на среднегодового работника (тыс. руб.);

137. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и годовая заработная плата на среднегодового работника (тыс. руб.);

138. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);

139. Выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);

140. Валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га).

Приложение 1

Значения функций

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{и} \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

Продолжение приложения 1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	499841
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	499928
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
69	0957	4545	38	0235	4913			

Приложение 2

Критические точки распределения t Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,7	318,31	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 3

Экономические показатели деятельности сельскохозяйственных организаций, 2018 г.

№ п/п	Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс.	Валовая продукция на 1 га пашни. Тыс. руб.	Валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.	Валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.	Валовая продукция на 100 руб. затрат, руб.	Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.	Выручка на 1 га пашни, тыс. руб.	Выручка на 100 руб. затрат, руб.	Выручка на среднегодового работника, тыс. руб.	Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс.	Основные средства на 1 га пашни, тыс. руб.	Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.	Численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий,	Численность работников на 100 га пашни, чел.	Годовая заработная плата на среднегодового работника, тыс.	Затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяй-	Затраты на реализованную продукцию на 1 га пашни, тыс. руб.	Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работ-	Площадь пашни на среднегодового работника, га	Затраты на 100 руб. выручки, руб.
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	95,8	95,9	2439	147,0	166,1	84,9	85,0	181,5	2161	65,2	65,2	1659	3,93	3,93	342,2	46,7	46,8	25,5	25,4	55,1
2	113,8	116,6	2309	125,9	172,0	105,6	108,2	182,2	2142	90,4	92,6	1834	4,93	5,05	335,5	58,0	59,4	20,3	19,8	54,9
3	41,7	41,7	2599	128,1	123,0	40,0	40,0	124,2	2497	32,5	32,5	2029	1,60	1,60	290,5	32,2	32,2	62,4	62,4	80,5
4	92,9	93,8	3113	123,7	116,6	57,9	58,5	129,7	1941	75,1	75,8	2516	2,99	3,01	388,6	44,7	45,1	33,5	33,2	77,1
5	95,7	95,7	2031	104,4	130,0	63,5	63,5	153,3	1348	91,6	91,6	1945	4,71	4,71	360,3	41,4	41,4	21,2	21,2	65,2
6	119,7	119,7	1807	140,2	116,4	93,7	93,7	122,0	1414	85,4	85,4	1288	6,63	6,63	312,5	76,8	76,8	15,1	15,1	82,0
7	73,1	73,6	2595	106,5	121,0	48,7	49,0	135,3	1727	68,7	69,1	2437	2,82	2,84	233,1	36,0	36,2	35,5	35,3	73,9
8	103,7	104,0	2640	67,3	139,9	83,1	83,4	155,2	2116	153,9	154,5	3921	3,93	3,94	309,8	53,5	53,7	25,5	25,4	64,4
9	78,1	87,4	3134	130,3	110,9	53,6	60,0	116,7	2151	60,0	67,1	2406	2,49	2,79	268,3	45,9	51,4	40,1	35,9	85,7
10	76,2	76,2	2636	175,4	135,7	53,0	53,0	160,9	1835	43,4	43,4	1503	2,89	2,89	278,3	32,9	32,9	34,6	34,6	62,2
11	85,6	86,3	2125	134,2	124,3	58,0	58,4	140,5	1440	63,8	64,3	1583	4,03	4,06	245,3	41,3	41,6	24,8	24,6	71,2
12	71,9	72,6	2447	124,4	158,3	67,0	67,6	165,4	2279	57,8	58,4	1967	2,94	2,97	278,0	40,5	40,9	34,0	33,7	60,4
13	92,1	92,1	2065	144,2	125,5	67,0	67,0	138,7	1502	63,9	63,9	1432	4,46	4,46	284,1	48,3	48,3	22,4	22,4	72,1
14	105,2	105,8	2000	134,0	141,3	89,3	89,8	152,5	1698	78,5	79,0	1493	5,26	5,29	241,3	58,6	58,9	19,0	18,9	65,6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
15	107,1	107,1	4832	77,0	138,5	90,5	90,5	149,0	4083	139,1	139,1	6275	2,22	2,22	185,0	60,7	60,7	45,1	45,1	67,1
16	50,8	51,9	4678	156,8	121,6	33,3	34,0	137,3	3062	32,4	33,1	2984	1,09	1,11	351,3	24,2	24,7	92,0	90,1	72,8
17	70,4	70,4	2505	76,3	108,9	58,0	58,0	111,0	2064	92,3	92,3	3284	2,81	2,81	111,7	52,3	52,3	35,6	35,6	90,1
18	121,1	122,4	2152	115,8	109,5	91,0	92,1	113,0	1618	104,5	105,7	1858	5,63	5,69	301,0	80,6	81,5	17,8	17,6	88,5
19	51,4	51,4	1799	117,5	142,8	57,9	57,9	136,3	2025	43,8	43,8	1531	2,86	2,86	213,2	42,5	42,5	35,0	35,0	73,4
20	52,1	52,1	3529	98,2	125,4	40,5	40,5	135,3	2745	53,1	53,1	3595	1,48	1,48	474,8	30,0	30,0	67,7	67,7	73,9
21	91,9	98,4	1877	102,2	101,1	79,9	85,5	101,3	1633	89,9	96,2	1836	4,89	5,24	306,0	78,9	84,5	20,4	19,1	98,7
22	65,1	67,9	1578	66,8	104,0	52,2	54,5	105,0	1266	97,4	101,7	2363	4,12	4,30	336,2	49,7	51,8	24,3	23,2	95,2
23	93,9	95,1	3376	80,9	112,9	67,0	67,8	119,0	2407	116,0	117,4	4171	2,78	2,82	398,6	56,3	56,9	35,9	35,5	84,0
24	68,8	68,8	3076	149,1	122,6	55,8	55,8	129,5	2496	46,1	46,1	2063	2,24	2,24	323,8	43,1	43,1	44,7	44,7	77,2
25	71,2	71,2	2998	182,8	135,9	67,8	67,8	138,4	2855	39,0	39,0	1640	2,38	2,38	282,1	49,0	49,0	42,1	42,1	72,3
26	45,3	45,3	2284	122,0	112,1	30,7	30,7	118,9	1550	37,1	37,1	1872	1,98	1,98	244,0	25,8	25,8	50,4	50,4	84,1
27	48,1	48,1	2640	113,9	132,4	57,1	57,1	126,0	3134	42,2	42,2	2318	1,82	1,82	142,4	45,3	45,3	54,9	54,9	79,4
28	75,8	75,8	2773	124,8	162,2	76,9	76,9	160,8	2814	60,8	60,8	2223	2,73	2,73	411,9	47,8	47,8	36,6	36,6	62,2
29	65,7	66,5	2305	153,1	117,2	49,8	50,4	124,0	1746	42,9	43,4	1505	2,85	2,89	344,6	40,1	40,6	35,1	34,7	80,7
30	57,1	57,5	1435	58,0	109,9	51,0	51,3	111,3	1281	98,5	99,2	2474	3,98	4,01	349,0	45,8	46,1	25,1	25,0	89,9
31	42,3	42,3	1992	108,4	128,3	32,7	32,7	139,9	1537	39,1	39,1	1838	2,13	2,13	322,8	23,3	23,3	47,0	47,0	71,5
32	37,3	37,3	2272	75,9	216,9	36,5	36,5	223,1	2219	49,2	49,2	2995	1,64	1,64	134,5	16,3	16,3	60,9	60,9	44,8
33	83,2	83,2	2371	180,1	107,0	43,5	43,5	114,4	1240	46,2	46,2	1316	3,51	3,51	271,2	38,0	38,0	28,5	28,5	87,4
34	97,5	99,5	5473	133,3	129,1	60,8	62,0	156,6	3412	73,2	74,6	4107	1,78	1,82	329,5	38,8	39,6	56,1	55,0	63,9
35	43,7	48,4	3729	161,4	164,9	38,8	43,0	179,6	3312	27,1	30,0	2311	1,17	1,30	217,4	21,6	23,9	85,4	77,0	55,7
36	50,7	50,7	3293	163,3	112,6	43,2	43,2	115,0	2810	31,0	31,0	2016	1,54	1,54	158,1	37,6	37,6	65,0	65,0	86,9
37	90,0	94,6	974	161,1	105,9	77,9	81,9	106,9	843	55,9	58,7	605	9,24	9,71	225,1	72,9	76,6	10,8	10,3	93,6
38	38,8	42,3	2252	151,5	143,3	45,9	50,0	134,3	2662	25,6	27,9	1486	1,72	1,88	212,2	34,2	37,3	58,0	53,2	74,5
39	102,2	110,5	1702	112,2	103,4	65,3	70,6	105,5	1086	91,1	98,5	1517	6,01	6,49	256,9	61,9	66,9	16,6	15,4	94,8
40	65,6	74,1	2075	106,5	136,1	51,6	58,2	150,9	1631	61,6	69,5	1948	3,16	3,57	347,8	34,2	38,6	31,6	28,0	66,3
41	107,3	107,8	2253	102,9	130,6	76,0	76,4	149,3	1596	104,3	104,8	2191	4,76	4,79	444,8	50,9	51,2	21,0	20,9	67,0
42	102,6	105,7	2047	290,6	108,5	60,9	62,8	115,2	1217	35,3	36,4	704	5,01	5,16	379,1	52,9	54,5	20,0	19,4	86,8
43	114,9	118,3	2072	91,2	118,0	79,0	81,3	128,5	1424	126,0	129,7	2272	5,55	5,71	300,2	61,5	63,3	18,0	17,5	77,8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
44	133,4	133,4	2768	103,5	124,8	133,8	133,8	124,8	2775	129,0	129,0	2675	4,82	4,82	304,1	107,2	107	20,7	20,7	80,2
45	76,3	79,1	2126	154,0	120,8	61,9	64,1	126,9	1725	49,5	51,3	1380	3,59	3,72	322,0	48,8	50,5	27,9	26,9	78,8
46	106,2	119,8	3192	103,4	153,4	100,1	113,0	158,5	3010	102,6	115,8	3085	3,33	3,75	306,3	63,2	71,3	30,1	26,6	63,1
47	80,1	80,3	1999	177,8	113,7	60,0	60,1	119,1	1497	45,0	45,1	1124	4,01	4,02	296,4	50,3	50,5	25,0	24,9	83,9
48	80,5	83,6	1605	122,4	110,3	62,0	64,4	113,8	1237	65,8	68,3	1311	5,02	5,21	247,3	54,5	56,6	19,9	19,2	87,8
49	70,3	70,7	2128	127,2	119,0	64,2	64,6	121,2	1945	55,2	55,6	1673	3,30	3,32	232,3	53,0	53,3	30,3	30,1	82,5
50	98,3	101,9	2703	98,8	128,2	79,4	82,3	137,5	2183	99,5	103,1	2737	3,64	3,77	258,2	57,8	59,8	27,5	26,5	72,7
51	85,4	86,1	2579	234,7	143,8	56,2	56,6	186,3	1696	36,4	36,7	1099	3,31	3,34	318,3	30,2	30,4	30,2	30,0	53,7
52	54,5	54,5	3188	106,5	128,2	44,5	44,5	136,8	2604	51,1	51,1	2993	1,71	1,71	422,8	32,5	32,5	58,5	58,5	73,1
53	88,9	88,9	4057	79,6	125,5	67,5	67,5	136,5	3082	111,7	111,7	5097	2,19	2,19	146,2	49,5	49,5	45,7	45,7	73,3
54	79,4	83,7	2324	76,8	113,3	73,7	77,7	114,4	2158	103,4	109,0	3025	3,42	3,60	284,6	64,4	67,9	29,3	27,8	87,4
55	82,9	84,6	2847	181,0	107,9	64,3	65,6	110,4	2208	45,8	46,8	1573	2,91	2,97	380,1	58,2	59,5	34,4	33,6	90,6
56	87,9	88,3	3270	166,2	118,8	49,6	49,8	138,9	1845	52,9	53,1	1968	2,69	2,70	492,5	35,7	35,9	37,2	37,0	72,0
57	92,0	94,2	2838	213,7	109,4	54,7	56,0	116,9	1686	43,1	44,1	1328	3,24	3,32	362,2	46,8	47,9	30,8	30,1	85,5
58	98,1	99,7	1320	94,3	110,8	95,7	97,2	111,1	1287	104,1	105,7	1399	7,44	7,55	379,6	86,2	87,5	13,4	13,2	90,0

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко П. С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / П. С Бондаренко, Г. В. Горелова, И. Г. Кацко. М.: КНОРУС, 2017. – 390 с.

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для прикладного бакалавриата. Изд. 12-е / В. Е. Гмурман. М.: Юрайт, 2016. – 479 с.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для прикладного бакалавриата. Изд.- 11-е. / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2016. – 404 с.

4. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: КНОРУС, 2013. — 376 с.

5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. - М.: Юрайт, 2015. – 514 с.

6. Ниворожкина Л. И. Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями: Учебное пособие для бакалавров / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова, И. Э. Гурьянова; под ред. проф. Л. И. Ниворожкиной. – 2-е мзд. перераб и доп. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2015. – 480 с.

Учебное издание

Кацко Игорь Александрович, Ворокова Нодира Хасановна,
Жминько Альбина Евгеньевна, Сенникова Алина Евгеньевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

Подписано в печать . Формат
Усл. Печ. Л. - . Уч.0изд. л. - .
Тираж 100 экз. Заказ №

Краснодарский ЦНТИ, - филиал ФГБУ
«РЭА» Минэнерго России
350058, г. Краснодар, ул. Старокубанская, 116А