ФГОУ ВПО «КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.Д. ГУНЬКО, Л.Ю. СУХОВЕЕВА, В.М. СМОЛЕНЦЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРИМЕРЫ И ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Учебное пособие

Краснодар
2005

ФГОУ ВПО «КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.Д. ГУНЬКО, Л.Ю. СУХОВЕЕВА, В.М. СМОЛЕНЦЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРИМЕРЫ И ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Учебное пособие

Краснодар
2005

УДК 517.9
ББК 22.161.

В.Д. Гунько, Л.Ю. Суховеева, В.М. Смоленцев. Дифференциальные уравнения. Примеры и типовые задания: Учебное пособие/КубГАУ. – Краснодар, 2005. – 105с.

Пособие содержит изложение теоретических сведений по основным разделам курса обыкновенных дифференциальных уравнений в относительно небольшом объеме. Изложение материала сопровождается решением типовых примеров. Имеются также задания типовых расчетов для самостоятельного решения, представленные в 30 вариантах.

Учебное пособие составлено в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования, утвержденного комитетом РФ по высшему образованию, Москва, 2000, и может быть использовано студентами инженерных факультетов университета.

Рецензент:

А.Ф. Бачурская, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений КубГУ,

В.В. Жучкова, зав. кафедрой математики и информатики КВАУл, к. ф.-м. н., доцент.

ISBN 5-94672-139-9

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие посвящено некоторым основным разделам курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделено методам решения различных типов обыкновенных дифференциальных уравнений. Текст пособия сопровождается подробным решением типовых примеров и иллюстративными рисунками, что позволяет более глубоко и наглядно воспринимать излагаемый материал.

Цель пособия – помочь студентам в выработке стойких практических навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания. При этом предполагается, что необходимые сведения по дифференциальному и интегральному исчислению читателю известны. Изложение материала ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Кроме того, должное внимание уделено подбору заданий типовых расчетов для самостоятельного решения предлагаемых в 30 вариантах и содержащих 360 задач.

Пособие состоит из трех параграфов, с содержанием которых читатель может ознакомиться по оглавлению.

Материал пособия рассчитан на студентов инженерных факультетов, а также может быть полезным для всех других категорий студентов, изучающих в том или ином объеме курс обыкновенных дифференциальных уравнений.

Авторы выражают благодарность рецензентам доценту кафедры дифференциальных уравнений КубГУ Бачурской А. Ф. и заведующей кафедрой математики и информатики КВАУл, доценту Жучковой В. В. за полезные замечания и советы, способствовавшие улучшению настоящего издания.

Авторы

§1. Общие понятия и определения

Определение 1. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее между собой независимые переменные, неизвестную функцию этих переменных и ее производные (или дифференциалы).

Если неизвестная функция зависит только от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Если же неизвестная функция зависит от нескольких независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала) неизвестной функции, входящей в уравнение.

Примеры.

1) $3x^3 \cdot y' + \frac{x}{y} = y^2$ – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, $y = y(x)$ – неизвестная функция;
2) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} = 0$ – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, $y = y(x)$ – неизвестная функция;
3) $y''' - 8y = 4x^2 + 1$ – обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, $y = y(x)$ – неизвестная функция;
4) $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ – общий вид обыкновенного дифференциального уравнения $n-$го порядка, где $F-$известная функция своих аргументов, заданная в некоторой фиксированной области, $x-$независимая переменная, $y = y(x)$ – неизвестная функция аргумента x; $y', y'', y''', ..., y^{(n)}-$производные неизвестной функции;

5) $x\frac{\partial z}{dx}+y\frac{\partial z}{dy}=0$ – дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка; $z=z(x;y)$ – неизвестная функция;

6) $u'_t=9\cdot u''_{xx}$ – дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка; $u=u(t;x)$ – неизвестная функция.

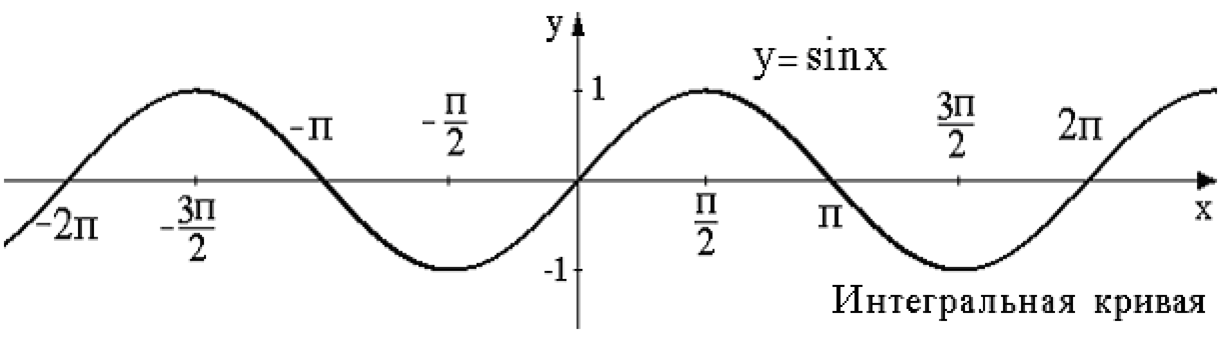
***Замечание*:** В дифференциальное уравнение $n-$го порядка обязательно должна входить производная (или дифференциал) $n-$го порядка неизвестной функции, а независимые переменные, сама неизвестная функция и ее производные (или дифференциалы) порядка, ниже, чем n, могут и не входить.

Определение 3 *Решением (или интегралом) дифференциального уравнения* называется такая дифференцируемая функция, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение, обращает его в тождество, т. е. равенство, верное при всех допустимых значениях переменных.

Решить, или проинтегрировать дифференциальное уравнение – значит, найти все его решения. График всякого решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Примеры.

1)функция $y=\sin x$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: $y''=-y$.



Действительно, после подстановки функции $y = \sin x$ в данное уравнение, получаем тождество: $-\sin x \equiv -\sin x$.

2) функция $y = 3x$ не является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = y + 6.$$

Действительно, после подстановки ее в данное дифференциальное уравнение получим равенство: $3 = 3x + 6$, которое не является тождеством, т. к. оно верно не при всех допустимых значениях переменной x, а лишь при $x = -1$.

Заметим, что интегрирование дифференциального уравнения в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами. Легко догадаться, например, что решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = \cos x$ является функция $y = \sin x$, а также функции $y = \sin x + 1$, $y = \sin x - \sqrt{2}$, и вообще функции вида $y = \sin x + c$, где c – произвольная постоянная.

Чтобы решение дифференциального уравнения приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Дифференциальное уравнение порядка n в общем случае записывается в виде

$$F\left(x; y; y'; y''; ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1.1.)$$

или

$$y^{(n)} = f\left(x; y; y'; ..., y^{(n-1)}\right) \qquad (1.2.)$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

<u>Определение</u> 4. *Начальной задачей* или *задачей Коши* для обыкновенного дифференциального уравнения $(1.2.)$ порядка n называется задача отыскания решения этого уравнения, удовлетворяющего так называемым *начальным условиям*:

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \\ &y'(x_0) = y'_0, \\ &y''(x_0) = y''_0, \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{1.3.}$$

В частности, для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x; y)$ задача Коши состоит в отыскании его решения, которое при $x = x_0$ принимает значение y_0, т. е. решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрически это значит, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$ координатной плоскости XOY.

<u>Определение</u> 5. *Общим решением* дифференциального уравнения порядка n называется функция $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$, и удовлетворяющая условиям:

1) Функция $\varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ как функция аргумента x является решением дифференциального уравнения.
2) Каковы бы ни были начальные условия $(1.3.)$, существуют значения постоянных $c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0, ..., c_n = c_n^0$ такие, что функция $\varphi(x, c_1^0, c_2^0, ..., c_n^0)$ является решением дифференциального уравнения $(1.2.)$ и удовлетворяет начальным условиям $(1.3.)$.

Общее решение дифференциального уравнения порядка n, записанное в виде

$$\Phi\left(x, y, c_1, c_2, ..., c_n\right) = 0,$$

называется *общим интегралом*.

В частности, общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f\left(x, y\right)$ называется функция $y = \varphi\left(x, c\right)$, содержащая одну произвольную постоянную c и удовлетворяющая условиям:

1) Функция $y = \varphi\left(x, c\right)$ как функция аргумента x является решением дифференциального уравнения;
2) Каково бы ни было начальное условие $y\left(x_0\right) = y_0$, существует такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi\left(x, c_0\right)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Определение 6. Частным решением дифференциального уравнения порядка n называется решение $y = \varphi\left(x, c_1^0, c_2^0, ..., c_n^0\right)$ при фиксированных значениях постоянных $c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0, ..., c_n = c_n^0$.

Частное решение дифференциального уравнения порядка n, записанное в виде

$$\Phi\left(x, y, c_1^0, c_2^0, ..., c_n^0\right) = 0,$$

называется *частным интегралом*.

Теорема Пикара (*существования и единственности решения задачи Коши*)

Если в уравнении (1.2.) функция f, определяющая правую часть уравнения (1.2.) непрерывна в некоторой окрестности начальной точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ и имеет непрерывные в этой окрестности частные производные по всем переменным, начиная со второй, то уравнение $(1.2.)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $(1.3.)$

Пример. Решить задачу Коши

$$y' = 2x, \;\; y(1) = 2\,.$$

Решение: Очевидно, что решение данного уравнения представляет собой семейство всех функций, первая производная которых равна $2x$, т. е. имеет вид

$$y = x^2 + c\,,$$

где c – произвольная постоянная.

Из начального условия $y(1)=2$ имеем: $2=1^2+c$, откуда c=1. Тогда частное решение, имеет вид $y_{ч.р.} = x^2 + 1$.

Геометрически, семейство интегральных кривых данного уравнения представляет собой семейство парабол с вершинами в точках вида $(0;c)$, где c – произвольная постоянная. А графиком найденного частного решения является парабола с вершинами в точке $(0;1)$, т.е. проходящая через точку $A(1;2)$ (рисунок 1). **КОРРЕКЦИЯ РИСУНКА**

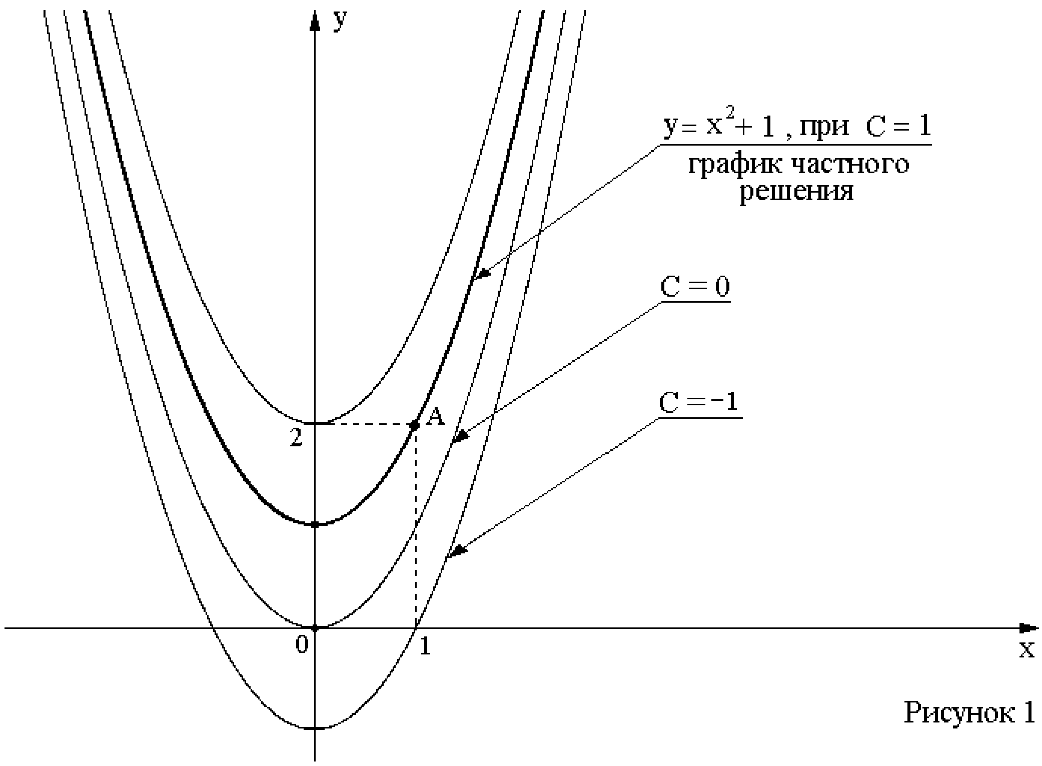


Рисунок 1

Наряду с начальной задачей (задачей Коши) рассматриваются так называемые *граничные* (*краевые*) *задачи*, в которых дополнительные условия на искомую функцию задаются не в одной точке, как это имеет место в начальной задаче, а на концах некоторого интервала $[a;b]$ и разыскивается решение, определенное внутри этого интервала. Условия, задаваемые на концах интервала $[a;b]$, называются *граничными* (*краевыми*) *условиями*, а задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего граничным условиям, называется *граничной* (*краевой*) *задачей*.

Необходимо отметить, что постановка граничной задачи имеет смысл только для уравнений порядка, выше первого. Граничная (краевая) задача не всегда имеет решение, а если имеет, то, чаще всего, не единственное.

Пример. Найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'' = 6x,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = 0, \ \ y(1) = 1.$$

***Решение*:** Интегрируя последовательно данное дифференциальное уравнение два раза, имеем

$$y' = 3x^2 + c_1,$$

$$y = x^3 + c_1 x + c_2 \text{ – общее решение,}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Используя граничные условия, получим систему двух алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных c_1 и c_2, входящих в общее решение, а именно:

$$\begin{cases} 0 = 0 + c_1 \cdot 0 + c_2, \\ 1 = 1 + c_1 \cdot 1 + c_2. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений находим, что $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, и, следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = x^3.$$

Ответ. $y(x) = x^3$ – частное решение.

Контрольные вопросы

I. Какие уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями?

II. Что называется порядком дифференциального уравнения?

III. Что называется решением дифференциального уравнения?

IV. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?

V. В чем заключается геометрический смысл решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения I порядка?

VI. Чем отличаются обыкновенные дифференциальные уравнения от дифференциальных уравнений в частных производных?

VII. Какие из приведенных ниже уравнений являются дифференциальными, укажите их порядок:

$$а)\ y'' + x = 1,\ б)\ \ln y = x^2,\ в)\ dy = xe^x dx,\ г)\ \sin(x+y) = 0,$$

$$д)\ y''' = 0,\ е)\ \frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0,\ ж)\ \frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = 1.$$

VIII. Является ли функции $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = x + 2$ решениями дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$?

IX. Сколько решений в общем случае имеет дифференциальное уравнение?

X. Что называется общим решением дифференциального уравнения?

XI. Что называется частным решением дифференциального уравнения?

XII. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения.

§2. Простейшие типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

2.1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Определение 1. *Дифференциальным уравнением с разделенными переменными* называется уравнение вида:

$$p(y)dy = q(x)dx, \tag{2.1.}$$

в котором левая часть зависит только от одной переменной, а правая – только от другой.

Решаются дифференциальные уравнения с разделенными переменными интегрированием обеих частей:

$$\int p(y)dy = \int q(x)dx \tag{2.2.}$$

Здесь под интегралами понимаются соответствующие первообразные.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Решение: Перенесем слагаемое $\frac{dx}{x}$ из левой части в правую, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

которое является уравнением с разделенными переменными.

Интегрируя обе части последнего уравнения, будем иметь

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные,

или

$$\ln|y| = \ln|x| + c_3, \qquad (2.3.)$$

где $c_3 = c_2 - c_1$.

В дальнейшем, после интегрирования обеих частей уравнения, будем писать одну постоянную интегрирования c в правой части равенства, которая будет складываться из постоянных интегрирования левой и правой части уравнения. Заметим также, что в полученном равенстве $(2.3.)$ произвольную постоянную c_3 удобно взять в логарифмической форме, а именно,

$$c_3 = \ln|c|,\ c \neq 0,\ c \in \mathbb{R},$$

что законно, так как всякое действительное число может быть представлено как логарифм другого действительного числа. Поэтому равенство $(2.3.)$ можно записать в виде

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|,$$

где $c \neq 0$ – произвольная постоянная, или

$$\ln|y| = \ln|cx|,$$

откуда, потенцируя, окончательно получим общее решение

$$y = cx,\ x \neq 0, c \neq 0 \qquad (2.4.)$$

Полученное общее решение (4), где c – любое действительное число, геометрически представляет собой семейство полупрямых, исходящих из начала координат, исключая саму точку $(0; 0)$ (рисунок 2).

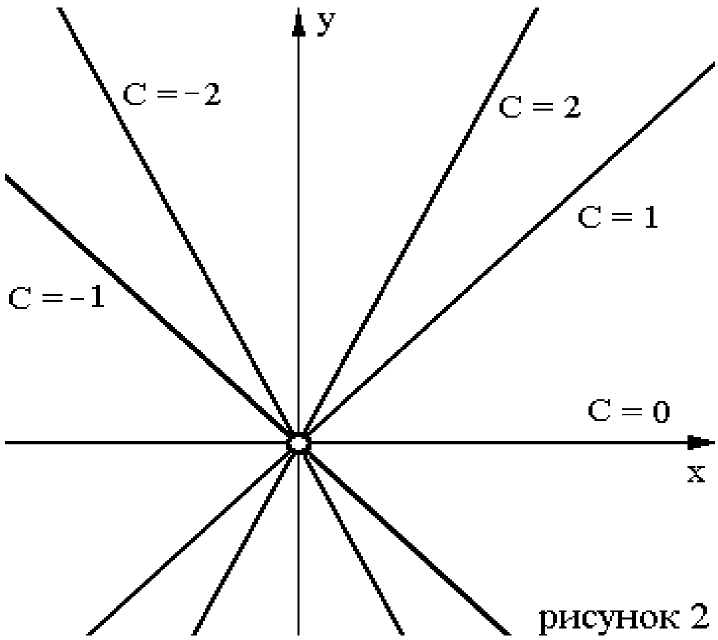


рисунок 2

Ответ. $y(x) = cx$ – общее решение, c – произвольная постоянная.

Определение 2. *Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение, которое может быть записано в виде

$$y' = f(x)\cdot g(x), \quad \left(y' = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \right) \qquad (2.5.)$$

или в виде

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0 \qquad (2.6.)$$

где $f(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$ – функции только переменной x, а $g(y)$, $N_1(y)$, $N_2(y)$ – функции только переменной y.

Общая схема решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

I. Разделить переменные, т. е. свести к уравнению с разделенными переменными. Для этого надо обе части данного уравнения умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входила только одна переменная, а в другую – только другая переменная.

Замечание. Если в данном дифференциальном уравнении присутствует y', то сначала следует заменить y' на $\frac{dy}{dx}$, а затем произвести разделение переменных.

II. Проинтегрировать обе части полученного уравнения с разделенными переменными.

III. На I этапе, при делении обеих частей уравнения на выражения, содержащие переменные, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль. Поэтому следует рассмотреть вопрос о существовании таких решений данного дифференциального уравнения.

IV. Если дополнительно к уравнению задано начальное условие, то с его помощью следует найти частное решение.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' - x^2 y = 2xy$$

Решение. Выразим y':

$$y' = x^2 y + 2xy .$$

Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$ и одновременно в правой части полученного равенства вынесем общий множитель y за скобки, получим

$$\frac{dy}{dx} = y\left(x^2 + 2x\right).$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, т. к. его удалось привести к уравнению вида (2.5), где можно считать $f(x) = x^2 + 2x, g(x) = y$.

Решим его.

I. Разделим переменные, для чего сначала умножим обе части на dx, получим

$$dy = y\left(x^2 + 2x\right)dx, \quad dx \neq 0$$

Затем разделим обе части полученного равенства на y

$$\frac{dy}{y} = \left(x^2 + 2x\right)dx, \quad y \neq 0$$

Получили уравнение с разделенными переменными.

II. Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(x^2 + 2x\right)dx ,$$

или

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + x^2 + c ,$$

где c – произвольная постоянная, откуда, потенцируя, получаем

$$y = e^{\frac{x^3}{3} + x^2 + c} ,$$

или

$$y = e^c \cdot e^{\frac{x^3}{3}+x^2}.$$

Пусть $e^c = \tilde{c}$, где $\tilde{c}$ – также произвольная постоянная. Тогда окончательно получаем общее решение

$$y = \tilde{c} \cdot e^{\frac{x^3}{3}+x^2} \qquad (2.7.)$$

III. Заметим, что при разделении переменных мы полагали, что $y \neq 0$.

Рассмотрим отдельно случай $y = 0$. Легко убедиться, что функция $y = 0$ также является решением данного уравнения. Однако заметим, что оно формально получается из формулы (2.7) общего решения при $\tilde{c} = 0$.

Ответ: $y(x) = \tilde{c} \cdot e^{\frac{x^3}{3}+x^2}$ – общее решение, где $\tilde{c}$ – произвольная постоянная.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0, \quad y(\sqrt{8}) = 1.$$

Решение.

Данное дифференциальное уравнение имеет вид уравнения (2.6), где $M_1(x) = x, N_1(y) = y, M_2(x) = \sqrt{1+x^2}, N_2(y) = 1+y^2$, а потому является уравнением с разделяющимися переменными.

I. Разделим переменные, для чего поделим обе части уравнения на $y \cdot \sqrt{1+x^2}$, полагая $y \cdot \sqrt{1+x^2} \neq 0$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{1+y^2}{y}dy = 0,$$

или

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=-\frac{1+y^2}{y}dy.$$

Получили уравнение с разделенными переменными.

II. Интегрируем обе части, имеем

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=-\int\left(\frac{1}{y}+y\right)dy,$$

где c – произвольная постоянная, или

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{dy}{y}-\int ydy,$$

Откуда получаем общий интеграл данного дифференциального уравнения:

$$\sqrt{1+x^2}=-\ln|y|-\frac{y^2}{2},$$

или

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}-\tilde{n}=0$$

где c – произвольная постоянная.

III. При разделении переменных мы полагали, что $y\cdot\sqrt{1+x^2}\neq 0$, что могло привести к потере решения.

Рассмотрим отдельно случай

$$y\cdot\sqrt{1+x^2}=0,$$

откуда следует, что $y=0$, ($\sqrt{1+x^2}\neq 0$ при всех $x\in\mathbb{R}$). После подстановки $y=0$ в исходное уравнение получим

$$x\cdot 0\cdot dx+\left(1+0^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot d0=0,$$

откуда имеем $0=0$. Следовательно, $y=0$ также является решением данного дифференциального уравнения. Однако заметим, что оно не может быть получено из общего решения ни при каком частном значении произвольной постоянной c.

IV. Далее, частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, $y\left(\sqrt{8}\right)=1$, получим, подставляя в общий интеграл $x=\sqrt{8}$, $y=1$:

$$\sqrt{1+8}+\ln 1+\frac{1}{2}-c=0, \text{ откуда } c=\frac{7}{2}.$$

Следовательно, искомый частный интеграл имеет вид:

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}=0.$$

Ответ. $\sqrt{1+x^2}+2\ln|y|+\frac{y^2}{2}-c=0$ – общий интеграл, где c – произвольная постоянная; $\sqrt{1+x^2}+2\ln|y|+\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}=0$ – частный интеграл; $y=0$.

***Задание № 1*. Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:**

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

2. $2x\sqrt{1-y^2}\cdot dx + y\cdot dy = 0$.

3. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.

4. $x\cdot\left(1+y^2\right) + y\cdot y'\cdot\left(1+x^2\right) = 0$.

5. $\sqrt{3+y^2}\cdot dx - y\cdot dy = x^2\cdot y\cdot dy$.

6. $\left(y^2 + x\cdot y^2\right) + \left(x^2 - y\cdot x^2\right)\cdot y' = 0$.

7. $\left(e^{3x}+7\right)\cdot dy + y\cdot e^{3x}\cdot dx = 0$.

8. $y'\cdot y\cdot\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

10. $y' = e^{x-y}$.

11. $y\left(4+e^x\right)dy - e^xdx = 0$.

12. $\sqrt{4-x^2}\cdot y' + xy^2 + x = 0$.

13. $y'\cdot\operatorname{tg} x - y = 1$.

14. $x\sqrt{4-y^2}\cdot dx + y\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot dy = 0$.

15. $\left(e^x+8\right)\cdot dy - ye^x\cdot dx = 0$.

16. $e^y\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right) = 1$.

17. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$.

18. $y\ln y + xy' = 0$.

19. $\left(1+e^x\right)\cdot y' = ye^x$.

20. $y' = 10^{y+x}$.

21. $y\left(1+\ln y\right) + xy' = 0$.

22. $\left(3+e^{x}\right)\cdot yy'=e^{x}$.

23. $2x+2xy^{2}+\sqrt{2-x^{2}}\cdot y'=0$.

24. $e^{y}\cdot\left(1+x^{2}\right)\cdot dy-2x\cdot\left(1+e^{y}\right)\cdot dx=0$.

25. $2xdx-ydy=yx^{2}dy-xy^{2}dx$.

26. $y-xy'=1+x^{2}y'$.

27. $e^{y}\left(1+x^{2}\right)\cdot dy-2x\left(1+e^{y}\right)\cdot dx=0$.

28. $x\cdot y\cdot\left(1+x^{2}\right)\cdot y'=1+y^{2}$.

29. $\left(1+2y\right)\cdot x\cdot dx+\left(1+x^{2}\right)\cdot dy=0$.

30. $y'\cdot\sin^{2}x=y\cdot\ln y$.

2.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Понятие однородного дифференциального уравнения первого порядка связано с однородными функциями.

***Определение** 1*. Функция $\Phi(x;\, y)$ называется *однородной функцией степени* n, если для любого числа $k>0$ имеет место тождество:

$$\Phi(k\,x;k\,y)\equiv k^{\,n}\cdot\Phi(x;\,y).$$

Пример.

Рассмотрим многочлен $\Phi(x;\,y)=2x^2-3xy-5y^2$. Он является однородной функцией степени 2.

Действительно, заменим аргументы x и y на пропорциональные величины kx и ky, тогда будем иметь

$$\Phi(kx;\,ky)=2(kx)^2-3(kx)(ky)-5(ky)^2=$$
$$=k^2\left(2x^2-3xy-5y^2\right)=k^2\Phi(x;y).$$

***Определение** 2*. *Однородным дифференциальным уравнением первого порядка* называется дифференциальное уравнение, которое может быть записано в виде

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (2.8.)$$

а также в виде

$$M(x;\,y)dx+N(x;\,y)dy=0, \qquad (2.9.)$$

где $M(x;\,y)$ и $N(x;\,y)$ – однородные функции одной и той же степени.

С помощью подстановки

$$\frac{y}{x}=t \text{ или } y=tx,$$

где $t = t(x)$ – новая неизвестная функция, однородное дифференциальное уравнение первого порядка приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить уравнение

$$xy' = y + 2x.$$

Решение. Выразим y', получим

$$y' = \frac{y + 2x}{x},$$

или

$$y' = \frac{y}{x} + 2, \qquad (2.10.)$$

Полученное дифференциальное уравнение $(2.10.)$ имеет вид уравнения $(2.8.)$, где $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + 2$. Следовательно, данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Для того чтобы решить его, сделаем замену

$$y = tx. \qquad (2.11.)$$

Найдем первую производную функции y по аргументу x

$$y' = (tx)' = t'x + tx' = t'x + t \qquad (2.12.)$$

Подставим в уравнение $(2.10.)$ вместо y' и $\frac{y}{x}$ их выражения через t и x согласно равенствам $(2.11.)$ и $(2.12.)$:

$$t'x + t = t + 2,$$

или

$$t'x = 2.$$

Заменим t' на $\frac{dt}{dx}$ и одновременно разделим обе части последнего равенства на x, получим уравнение

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2}{x},\quad x\neq 0,$$

которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$dt=\frac{2}{x}dx.$$

Проинтегрируем обе части

$$\int dt=\int\frac{2}{x}dx,$$

откуда

$$t=2\ln|x|+\ln|c|,\quad c\neq 0,\ c\in\mathbb{R},$$

где $\ln|c|$ – произвольная постоянная,

или

$$t=\ln|cx|.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной, получим решение исходного дифференциального уравнения в виде

$$\frac{y}{x}=\ln|cx|,\text{ или } y=x\ln|cx|.$$

Заметим, что при решении мы делили обе части уравнения на x, полагая, что $x\neq 0$. При $x=0$ из данного уравнения следует $y=0$, т. е. имеем точку $(0;0)$, таким образом, случай $x=0$ не дает решение.

Ответ. $y(x)=x\ln|cx|$ – общее решение, где c – произвольная постоянная.

Пример 2. Показать, что дифференциальное уравнение

$$(x+y)dx+xdy=0$$

является однородным, и решить его.

Решение. Рассмотрим функции

$$M(x;y)=x+y\text{ и }N(x;y)=x.$$

Найдем

$$M(kx;ky) = kx + ky = k(x+y) = kM(x;y),$$
$$N(kx;ky) = kx = kN(x;y).$$

Следовательно, функции $M(x;y)$ и $N(x;y)$ являются однородными первой степени, поэтому данное уравнение однородно. Полагаем $y = tx$, где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – первоначальная неизвестная функция, $t = t(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда

$$y' = t' \cdot x + t,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot x + t,$$

или

$$dy = xdt + tdx \qquad (2.13.)$$

Подставляя это выражение в данное уравнение, будем иметь

$$(x+tx)dx + x(xdt + tdx) = 0,$$
$$x^2 dt + x(2t+1)dx = 0.$$

Разделим обе части последнего равенства на x, полагая $x \neq 0$, получим дифференциальное уравнение

$$xdt + (2t+1)dx = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$\frac{dt}{2t+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части, получаем

$$\int \frac{dt}{2t+1} = -\int \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{d(2t+1)}{2t+1} = -2\int \frac{dx}{x},$$

отсюда находим

$$\ln|2t+1| = -2\ln|x| + \ln|c|,$$

$$\ln|2t+1| = \ln\left|\frac{c}{x^2}\right|,$$

или

$$2t+1 = \frac{c}{x^2},$$

где c – произвольная постоянная.

Вернемся к первоначальной переменной, тогда общее решение примет вид

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \qquad (2.14.)$$

где $c_1 = \frac{c}{2}$ – произвольная постоянная.

Следует также отметить, что в процессе решения возникала необходимость делить на функции x и $2t+1$. Приравнивая их к нулю, получаем возможные решения:

1) $x = 0$,

2) $2t+1=0$, или $y = -\frac{x}{2}$.

Легко убедиться проверкой, что обе функции удовлетворяют данному дифференциальному уравнению; вторая функция $y = -\frac{x}{2}$ получается из общего решения $(2.14.)$ при $c_1 = 0$; функция $x = 0$ не может быть получена из общего решения $(2.14.)$ ни при каком значении произвольной постоянной c_1.

Ответ. $y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}$ – общее решение, где c_1 – произвольная постоянная, $x = 0$.

Замечание: Уравнение в примере 2

$$(x+y)dx + xdy = 0$$

можно было также записать в виде

$$y' = -1 - \frac{y}{x}.$$

Полученное уравнение имеет вид уравнения $(2.8.)$, где

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = -1 - \frac{y}{x},$$

и поэтому является однородным.

***Задание № 2*. Показать, что данные дифференциальные уравнения являются однородными и решить их.**

1. $x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2$.

2. $y' = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{y}{x}$.

3. $y' = \dfrac{x + 8y}{8x + y}$.

4. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2x^2y}{2y^2 + x^2}$.

5. $x \cdot y \cdot y' = x^2 - y^2$.

6. $xy' = \dfrac{4x^2y + 3y^3}{2x^2 + 2y^2}$.

7. $y' = \dfrac{2y + x}{2x - y}$.

8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

9. $xy' = y + 3x \cdot \sin\dfrac{y}{x}$.

10. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

11. $y' = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

12. $x \cdot y' + y \cdot \ln\dfrac{2y}{x} = 0$.

13. $x \cdot y \cdot y' = 2x^2 + y^2$.

14. $x \cdot y \cdot \dfrac{dy}{dx} + x^2 = 2y^2$.

15. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$.

16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

17. $x \cdot y' = y - x \cdot e^{\frac{y}{x}}$.

18. $y'x = \dfrac{10x^2y + 3y^3}{5x^2 + 2y^2}$.

19. $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$.

20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

21. $x^2y' = y^2 + 12x^2 + 8xy$.

22. $xy' = \dfrac{12x^2y + 3y^3}{2y^2 + 6x^2}$.

23. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.

24. $xy' = 2\sqrt{y^2 + 3x^2} + y$.

25. $\left(y + \sqrt{xy}\right) \cdot dx = x \cdot dy$.

26. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

27. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dy = 0$.

28. $xy' - y = x \cdot \mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$.

29. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

30. $xy' = y - x \cdot e^{\frac{y}{x}}$.

2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Я. Бернулли

<u>Определение</u> <u>1</u>. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, которое можно записать в виде

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{2.15.}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – заданные непрерывные функции, в частности – постоянные ($f(x)$ – свободный член или правая часть уравнения). Будем полагать, что коэффициент уравнения $p(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения $(2.15.)$ непрерывны на некотором интервале $(a;b)$, в котором разыскивается решение уравнения $(2.15.)$.

Если правая часть в уравнении $(2.15.)$, функция $f(x)$, тождественно не равна нулю на $(a;b)$, то уравнение $(2.15.)$ называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если же правая часть в уравнении $(2.15.)$, функция $f(x)$, тождественно равна нулю на $(a;b)$, то уравнение $(2.15.)$ принимает вид:

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.16.}$$

и называется в этом случае *линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка*, соответствующим линейному неоднородному уравнению $(2.15.)$ (линейное однородное дифференциальное уравнение I порядка не следует смешивать с однородными дифференциальными уравнениями первого порядка, содержащими однородную функцию, которые рассматривались выше). Отметим, что линейное однород-

ное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.
Иногда уравнение $(2.16.)$ называют линейным уравнением без правой части.

Существует несколько методов решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. Рассмотрим несколько из них.

I. Метод И. Бернулли

Решение уравнения $(2.15.)$ разыскивается в виде

$$y = u \cdot v \qquad (2.17.)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – новые неизвестные функции аргумента x.

Из равенства $(2.17.)$ находят

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad (2.18.)$$

Подставляя в уравнение $(2.15.)$ вместо y и y' их выражения через u и v, согласно равенствам $(2.17.)$ и $(2.18.)$, получают

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = f(x),$$

Далее, группируя в левой части слагаемые с общим множителем v (или u), и, вынося общий множитель за скобки, имеют

$$\left[u' + p(x)u\right]v + uv' = f(x) \qquad (2.19.)$$

В качестве функции $u(x)$ выберем одно из решений дифференциального уравнения

$$u' + p(x)u = 0 \qquad (2.20.)$$

т. е. функция $u(x)$ подбирается так, чтобы коэффициент при v в уравнении $(2.19.)$, был равен нулю. Тогда функция $v(x)$ находится как общее решение уравнения

$$u \cdot v' = f(x), \qquad (2.21.)$$

Подставляя полученные выражения для функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ в формулу $(2.17.)$, находят искомую функцию $y(x)$.

Таким образом, с помощью подстановки $(2.17.)$ решение линейного дифференциального уравнения первого порядка относительно неизвестной функции $y(x)$ сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, одно – относительно новой неизвестной функции $u(x)$, другое – относительно другой новой неизвестной функции $v(x)$.

Пример 1. Найти решение уравнения,

$$y' + \frac{2y}{x} = x$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным первого порядка. Здесь можно считать $p(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = x$.

Решение данного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y = u \cdot v, \qquad (2.17.)$$

откуда

$$y' = u'v + uv' \qquad (2.18.)$$

Подставляя выражения для y и y' из $(2.17.)$ и $(2.18.)$ в данное уравнение, получаем

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x.$$

Группируя в левой части первое и второе слагаемые и вынося общий множитель за скобки, получим

$$\left[u' + \frac{2u}{x}\right]v + uv' = x \qquad (2.23.)$$

Подберем функцию u так, чтобы выражение в квадратных скобках было равно нулю, т. е.

$$u' + \frac{2u}{x} = 0.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными и находим функцию u, как его некоторое ненулевое решение:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x},$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x},\ u \neq 0.$$

Интегрируя, находим

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| = -2\ln|x| + \ln|c_0|,$$

или

$$u = \frac{c_0}{x^2}.$$

Выбирая $c_0 = 1$, получаем

$$u = \frac{1}{x^2} \qquad (2.24.)$$

Тогда, учитывая способ выбора функции $u(x)$ из уравнения $(2.23.)$ имеем дифференциальное уравнение для нахождения второй неизвестной функции $v(x)$:

$$uv' = x,$$

или, учитывая $(2.24.)$

$$\frac{1}{x^2}\cdot v' = x,$$

которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными относительно другой неизвестной функции $v(x)$. Решая его, получаем

$$\frac{dv}{dx} = x^3,$$

или

$$dv = x^3 dx.$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$\int dv = \int x^3 dx,$$

или

$$v = \frac{x^4}{4} + c, \qquad (2.25.)$$

где c – произвольная постоянная.

Перемножая найденные выражения для функций $u(x)$ и $v(x)$, находим искомое решение

$$y = uv = \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x^4}{4} + c\right).$$

Таким образом, общее решение данного линейного уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2},$$

где c – произвольная постоянная.

Используя заданное начальное условие, будем иметь

$$0 = \frac{1}{4} + c,$$

откуда находим

$$c = -\frac{1}{4}.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}.$$

Ответ. $y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}$ – частное решение.

II. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Этот метод заключается в следующем:

1) находят общее решение соответствующего линейного однородного уравнения, которое будет содержать произвольную постоянную c;
2) решение исходного неоднородного дифференциального уравнения следует искать в том же виде, что и решение соответствующего однородного уравнения, но заменив постоянную c на функцию $c(x)$. Отыскав ее, находят общее решение данного линейного неоднородного уравнения.

Пример 2. Решить линейное дифференциальное уравнение

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}.$$

Решение.

1) Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y' + y\cos x = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{dx} = -y\cos x,$$

или

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx.$$

После интегрирования имеем

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x dx,$$

откуда находим

$$\ln|y| = -\sin x + c_0,$$

или

$$y = e^{-\sin x + c_0}.$$

Полагая $e^{c_0} = c$, получаем общее решение соответствующего однородного уравнения в виде

$$y = c \cdot e^{-\sin x}, \qquad (*)$$

где c – произвольная постоянная.

2) Решение исходного неоднородного дифференциального уравнения будем искать в том же виде, что и решение $(*)$ соответствующего однородного дифференциального уравнения, только заменяя постоянную c на функцию $c(x)$:

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x} \qquad (2.26.)$$

Продифференцируем равенство $(2.26.)$ по x:

$$y' = c'(x) e^{-\sin x} - c(x) \cdot \cos x \cdot e^{-\sin x} \qquad (2.27.)$$

Подставив в исходное уравнение выражения $(2.26.)$ и $(2.27.)$ вместо y и y' будем иметь

$$c'(x) e^{-\sin x} - c(x) \cdot \cos x \cdot e^{-\sin x} + c(x) \cdot \cos x \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x}.$$

Преобразуя полученное равенство, получаем

$$c'(x) = 1,$$

или

$$\frac{dc}{dx} = 1,$$

$$dc = dx,$$

откуда, после интегрирования, находим

$$\int dc = \int dx,$$

или

$$c(x) = x + c_0,$$

где c_0 – произвольная постоянная.

Подставляя найденное выражение для $c(x)$ в $(2.26.)$, получим общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = (x + c_0) \cdot e^{-\sin x}.$$

Ответ: $y(x) = (x + c_0) \cdot e^{-\sin x}$, где c_0 – произвольная постоянная.

Замечание. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять ролями искомую функцию и независимую переменную.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y = \left(2x + y^3 \right) y',$$

в котором y является функцией от x. Оно не является линейным относительно y.

Учитывая, что $y' = \dfrac{1}{x'}$, будем иметь уравнение

$$y = \left(2x + y^3\right) \cdot \frac{1}{x'},$$

или

$$x' - \frac{2x}{y} = y^2,$$

которое является линейным относительно переменной x, т. е. здесь $x = x(y)$ – искомая функция, y – независимая переменная.

<u>Определение</u> 2. *Уравнением Я. Бернулли* называется обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n, (n \neq 0, 1) \qquad (2.28.)$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция независимого переменного аргумента x, $p(x), f(x)$ – известные функции, коэффициенты уравнения, $y^n = \left[y(x) \right]^n$ – n-я степень неизвестной функции $y(x)$.

Существует несколько способов решения уравнения Я. Бернулли. Один из них состоит в том, что если записать уравнение $(2.28.)$ в виде

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x), \quad y \neq 0, \qquad (2.28.)$$

то с помощью замены $z = y^{1-n}$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция, уравнение $(2.29.)$ приводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка, которое можно решить любым из вышеизложенных способов.

Однако, решение уравнения Я. Бернулли $(2.28.)$ удобней искать методом И. Бернулли, т. е. в виде

$$y = u \cdot v,$$

не приводя его к линейному уравнению.

Пример 3. Решить уравнение

$$y' + 2y = e^x \cdot y^2.$$

Решение.

Данное уравнение является уравнением Я. Бернулли $(n = 2)$. Решим его по методу И. Бернулли, т. е. решение будем искать в виде произведения двух функций:

$$y = u \cdot v,$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – новые неизвестные функции.

Найдем

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Подставим в исходное уравнение вместо y и y' их выражения через u и v, получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2u \cdot v = e^x \cdot u^2 \cdot v^2,$$

или, после группировки слагаемых в левой части полученного равенства и вынесения общего множителя за скобки, будем иметь

$$u' \cdot v + u \cdot \left[v' + 2v\right] = e^x \cdot u^2 \cdot v^2 \qquad (2.30.)$$

Функцию $v(x)$ найдем как некоторое частное решение уравнения

$$v' + 2v = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя затем обе части, получим

$$\frac{dv}{dx} = -2v,$$

или

$$\frac{dv}{v} = -2dx,$$

откуда имеем

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx,$$

$$\ln|v| = -2x + c_0,$$

$$v = e^{-2x+c_0}.$$

Полагая $c_0 = 0$, получим

$$v = e^{-2x} \qquad (2.31.)$$

При таком выборе функции $v(x)$ из уравнения $(2.30.)$ будем иметь следующее уравнение относительно второй неизвестной функции $u(x)$:

$$u' \cdot e^{-2x} = e^x \cdot u^2 \cdot \left(e^{-2x}\right)^2,$$

или, после несложных преобразований, получим уравнение

$$u' = e^{-x} \cdot u^2, \qquad (2.32.)$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$\frac{du}{dx} = e^{-x} \cdot u^2,$$

или

$$\frac{du}{u^2} = e^{-x} \cdot dx.$$

Проинтегрируем обе части

$$\int \frac{du}{u^2} = \int e^{-x} dx,$$

$$-\frac{1}{u} = -e^{-x} + c,$$

где c – произвольная постоянная,
или

$$\frac{1}{u} = e^{-x} - c,$$

откуда находим

$$u(x) = \frac{1}{e^{-x} - c} \qquad (2.33.)$$

Заметим, что, кроме полученного общего решения $(2.33.)$ уравнению $(2.32.)$ удовлетворяет функция $u = 0$, которая не может быть получена из формулы $(2.33.)$ ни при каком произвольном значении постоянной c.

Таким образом, решения исходного уравнения таковы:

1. при $u = 0$, $v = e^{-2x}$, $y = 0$.
2. при $u(x) = \dfrac{1}{e^{-x} - c}$, $v = e^{-2x}$, $y = \dfrac{e^{-2x}}{e^{-x} - c}$ – общее решение.

Ответ: $y(x) = \dfrac{e^{-2x}}{e^{-x} - c}$ – общее решение, где c – произвольная постоянная, $y = 0$.

Задание № 3. **Найти:**

а) решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

б) решение уравнения Бернулли, удовлетворяющее заданному начальному условию.

1. а) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2,$ $\qquad y(1) = 0;$

б) $\dfrac{dy}{dx} + xy = (1+x)\cdot e^{-x}\cdot y^2,$ $\qquad y(0) = 1.$

2. а) $y' - y\cdot \text{ctg}x = 2x\cdot \sin x,$ $\qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

б) $xy' + y = 2y^2\cdot \ln x,$ $\qquad y(1) = \dfrac{1}{2}.$

3. а) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x,$ $\qquad y(0) = 0;$

б) $2(xy' + y) = xy^2,$ $\qquad y(1) = 2.$

4. а) $y' + y\cdot \text{tg}x = \cos^2 x,$ $\qquad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2};$

б) $\dfrac{dy}{dx} + 4x^3 y = 4\left(1+x^3\right)\cdot e^{-4x}\cdot y^2,$ $\qquad y(0) = 1.$

5. а) $y' + 2xy = 3x^2\cdot e^{-x^2},$ $\qquad y(0) = 0;$

б) $x\cdot \dfrac{dy}{dx} + y = y^2\cdot \ln x,$ $\qquad y(1) = \dfrac{1}{2}.$

6. а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+1} + (1+x)\cdot e^x,$ $\qquad y(0) = 1;$

б) $2(y + xy') = (1+x)e^{-x}y^2,$ $\qquad y(0) = 2.$

7. а) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x\cdot \sin x,$ $\qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1;$

б) $3(xy' + y) = y^2\cdot \ln x,$ $\qquad y(1) = 3.$

8. а) $y' + \dfrac{1}{x}y - \sin x = 0,$ $\qquad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi};$

б) $2y' + y\cos x = y^{-1} \cdot \cos x \cdot (1+\sin x)$, $\qquad y(0)=1$.

9. а) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} + x^2$, $\qquad y(1)=1$;

б) $y' + 4x^3 y = 4y^2 \cdot e^{4x} \cdot (1-x^3)$, $\qquad y(0)=-1$.

10. а) $y' + \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $\qquad y(0)=\dfrac{2}{3}$;

б) $3\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \dfrac{2x}{y^2} \cdot e^{-2x^2}$, $\qquad y(0)=-1$.

11. а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-5}{x^2} \cdot y + 5$, $\qquad y(2)=4$;

б) $2xy' - 3y = -(5x^2+3) \cdot y^3$, $\qquad y(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

12. а) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+1)e^x}{x}$, $\qquad y(1)=e$;

б) $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2+3\cos x) \cdot \dfrac{1}{y}$, $\qquad y(0)=1$.

13. а) $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}$, $\qquad y(1)=1$;

б) $3(xy'+y) = xy^2$, $\qquad y(1)=3$.

14. а) $y' - \dfrac{1}{x} \cdot y = -\dfrac{12}{x^3}$, $\qquad y(1)=4$;

б) $\dfrac{dy}{dx} - y = 2xy^2$, $\qquad y(0)=\dfrac{1}{2}$.

15. а) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$, $\qquad y(1)=-\dfrac{5}{6}$;

б) $3xy' + 5y = (4x-5) \cdot y^4$, $\qquad y(1)=1$.

16. а) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x} \cdot y + 3x$, $\qquad y(1)=1$;

б) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$, $\qquad y(0)=\sqrt{2}$.

17. а) $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} \cdot y = 1 + x^2$, $\qquad y(1)=3$;

б) $x\cdot\frac{dy}{dx}+y=y^2\cdot\ln x,$ $y(1)=1.$

18. а) $y'+\frac{1-2x}{x^2}\cdot y=1,$ $y(1)=1;$

б) $2\frac{dy}{dx}+3y\cos x=\frac{1}{y}(8+12\cos x)e^{2x},$ $y(0)=2.$

19. а) $\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=2x^{-3},$ $y(1)=1;$

б) $4y'+4x^3y=\left(x^3+8\right)\cdot e^{-2x}\cdot y^2,$ $y(0)=1.$

20. а) $\frac{dy}{dx}+2xy+2x^3=0,$ $y(1)=\frac{1}{e};$

б) $y'+xy=(x-1)\cdot e^x\cdot y^2,$ $y(0)=1.$

21. а) $y'+\frac{xy}{2\left(1-x^2\right)}=\frac{1}{2}x,$ $y(0)=\frac{2}{3};$

б) $2x\frac{dy}{dx}-3y=-\left(20x^2+12\right)y^3,$ $y(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

22. а) $y'+xy+x^3=0,$ $y(0)=3;$

б) $2\frac{dy}{dx}-3y\cos x=-e^{-2x}\cdot(2+3\cos x)\cdot\frac{1}{y},$ $y(0)=1.$

23. а) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}+e^x(1+x)^2,$ $y(0)=1;$

б) $2(y'+xy)=(x-1)e^x\cdot y^2,$ $y(0)=2.$

24. а) $\frac{dy}{dx}+2xy=x\cdot e^{-x^2}\cdot\sin x,$ $y(0)=1.$

б) $2(xy'+y)=y^2\cdot\ln x,$ $y(1)=2.$

25. а) $y'=\frac{y}{x}-\frac{2}{x^2},$ $y(1)=1;$

б) $\frac{dy}{dx}-y\cdot\mathrm{tg}x=-\frac{2}{3}y^4\cdot\sin x,$ $y(0)=1.$

26. а) $y'+3y=e^{2x},$ $y(0)=3,2;$

б) $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}-2xy=4\sqrt{y\left(1+x^2\right)}\cdot \operatorname{arctg}x,\qquad y(0)=0.$

27. а) $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\sin 2x,\qquad y(\pi)=1;$

б) $xydy=\left(y^2+x\right)dx,\qquad y(1)=0.$

28. а) $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x\cdot e^{x^2}},\qquad y(1)=\frac{1}{2};$

б) $xy'-2x^2\cdot\sqrt{y}=4y,\qquad y(1)=0.$

29. а) $xy'+y=\ln x+1,\qquad y(1)=2;$

б) $3x\frac{dy}{dx}+5y=(4x-5)\cdot y^4,\qquad y(1)=1.$

30. а) $xy'-x^2y=e^{\frac{x^2}{2}},\qquad y(1)=e^{\frac{3}{2}};$

б) $2(y'+y)=x\cdot y^2,\qquad y(0)=2.$

2.4. Уравнения в полных дифференциалах

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.34.)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, т. е.

$$dF(x, y) \equiv \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy \qquad (2.35.)$$

Справедливо следующее **утверждение**:

Для того чтобы уравнение $(2.34.)$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (2.36.)$$

Чтобы решить уравнение $(2.34.)$, необходимо найти такую функцию $F(x, y)$, полный дифференциал которой равен левой части уравнения $(2.34.)$, то есть, чтобы выполнялось условие $(2.35.)$. Тогда, что очевидно следует из уравнения $(2.34.)$, будет выполнятся равенство

$$dF(x,y) = 0,$$

и, следовательно, все решения уравнения $(2.34.)$ будут удовлетворять условию

$$F(x,y) = c,$$

где c – произвольная постоянная.

Для нахождения функции $F(x, y)$ воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \; \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \qquad (2.37.)$$

Интегрируя первое из этих равенств по x, считая y постоянной величиной по отношению к переменной интегрирования x, определим функцию $F(x, y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции $\varphi(y)$ (функция $\varphi(y)$ играет в этом случае роль постоянной интегрирования, точнее, постоянной по отношению к переменной интегрирования x, т. е. не зависящей от x)

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=\Phi(x,y)+\varphi(y), \qquad (2.38.)$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция; $\Phi(x,y)$ – первообразная от $M(x,y)$. Далее, дифференцируем $(2.38.)$ по y и с учетом второго равенства из $(2.37.)$ получаем уравнение для определения функции $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}+\frac{d\varphi}{dy}=N(x,y).$$

Пример. Решить уравнение

$$\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-3y^2\right)dy=0.$$

Решение.

В данном случае имеем

$$M(x,y)=2xy+3y^2,\ \ N(x,y)=x^2+6xy-3y^2.$$

Находим

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+3y^2\right)=2x+6y,$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+6xy-3y^2\right)=2x+6y.$$

Таким образом, выполнено условие

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. его левая часть действительно является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$.
Для искомой функции $F(x, y)$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2 \qquad (2.39.)$$

Интегрируя первое из равенств $(2.39.)$ по x,считая y постоянной, получим

$$F(x, y) = \int (2xy + 3y^2) dx = x^2 y + 3y^2 x + \varphi(y).$$

Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем последнее равенство по y, считая x постоянной, и, с учетом второго из равенств $(2.39.)$, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3y^2,$$

тогда

$$\partial \varphi = -3y^2 \partial y,$$

или, интегрируя

$$\int \partial \varphi = -3 \int y^2 \partial y,$$

$$\varphi(y) = -y^3 + c_1,$$

где c_1 – произвольная постоянная.
Поэтому

$$F(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + c_1.$$

Все решения исходного уравнения запишутся в виде

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = c.$$

Ответ: $x^2 y + 3xy^2 - y^3 = c$ – общий интеграл, где c – произвольная постоянная.

Задание № 4. **Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах и решить их.**

1. $3x^2 \cdot e^y \cdot dx + \left(x^3 \cdot e^y - 1\right)dy = 0.$

2. $\left(1 + y^2 \cdot \sin 2x\right) \cdot dx - 2y \cdot \cos^2 x \cdot dy = 0\,.$

3. $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0.$

4. $e^{-y} \cdot dx - \left(2y + x \cdot e^{-y}\right) \cdot dy = 0\,.$

5. $\left(y^2 + \dfrac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \left(2xy + \operatorname{tg} x\right)dy = 0.$

6. $\left(3x^2 y + 2y + 3\right)dx + \left(x^3 + 2x + 3y^2\right)dy = 0.$

7. $2x \cdot \left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) \cdot dx - \sqrt{x^2 - y} \cdot dy = 0.$

8. $\left(\sin 2x - 2\cos\left(x + y\right)\right)dx - 2\cos\left(x + y\right)dy = 0.$

9. $3x^2 \cdot \left(1 + \ln y\right) \cdot dy = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right) \cdot dy.$

10. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0.$

11. $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0.$

12. $\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0.$

13. $\left(x \cdot \cos 2y + 1\right) \cdot dx - x^2 \cdot \sin 2y \cdot dy = 0\,.$

14. $\dfrac{1 + xy}{x^2 y}dx + \dfrac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$

15. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \cdot dx + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) \cdot dy = 0.$

16. $\dfrac{y}{x^2} \cdot dx - \dfrac{xy + 1}{x} \cdot dy = 0.$

17. $\left(xe^x + \dfrac{y}{x^2}\right)dx = \dfrac{1}{x}dy.$

18. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y^2}\right)\cdot dx=\sqrt{x^2-y}\cdot dy$

19. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=0.$

20. $e^y\cdot dx+\left(\cos y+xe^y\right)\cdot dy=0$

21. $\left(y^3+\cos x\right)\cdot dx+\left(3xy^2+e^y\right)\cdot dy=0$

22. $xe^{y^2}\cdot dx+\left(x^2y\cdot e^{y^2}+\operatorname{tg}^2 y\right)\cdot dy=0$

23. $\dfrac{x\cdot dy-y\cdot dx}{x^2+y^2}=0.$

24. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)\cdot dy-\dfrac{y\cdot dy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$

25. $\left(\sin y+y\cdot\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cdot\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

26. $\left(1+y^2\cdot\sin 2x\right)\cdot dx-2y\cdot\cos^2 x\cdot dy=0.$

27. $3x^2\cdot\left(1+\ln y\right)dx=\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy.$

28. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0.$

29. $\left(3x^2+\dfrac{2}{y}\cdot\cos\dfrac{2x}{y}\right)\cdot dx-\dfrac{2x}{y^2}\cdot\cos\dfrac{2x}{y}\cdot dy=0.$

30. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)\cdot dy=0.$

Контрольные вопросы

I. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением с разделенными и разделяющимися переменными? Приведите примеры.

II. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Как найти его общий интеграл?

III. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? Приведите пример.

IV. Назовите основные методы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка, в чем они заключаются?

V. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Я. Бернулли? Укажите методы его решения.

VI. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах?

VII. Сформулируйте условие, при котором заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

VIII. Определите к какому типу относятся дифференциальные уравнения:

1. $x\left(1+y^2\right)+y\left(1+x^2\right)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$;
2. $\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-3y^2\right)dy=0$;
3. $\dfrac{dy}{dx}-2xy=3x^2-2x^4$;
4. $x\cdot y'-y=x\cdot\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;
5. $x\dfrac{dt}{dx}+t=1$;

6. $xy^2 y' = x^2 + y^3$;

7. $\left(x^2 + y^2\right) y' = 2xy$;

8. $\frac{y}{x} \cdot dx + \left(y^3 + \ln x\right) \cdot dy = 0$;

9, $\left(xy + e^x\right) \cdot dx - x \cdot dy = 0$;

10. $y' + 2\frac{y}{x} = x^4 \cdot e^x \cdot y^3$.

§ 3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

3.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x), \tag{3.1.}$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, $y = y(x)$ – неизвестная функция, $y^{(n)}$ – производная порядка n неизвестной функции y.

Для получения общего решения уравнения $(3.1.)$ следует n раз проинтегрировать его обе части, в результате чего общее решение уравнения $(3.1.)$ будет иметь вид:

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx = F(x) + c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + ... + c_{n-1} \cdot x + c_n, \tag{3.2.}$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные.

Пример 1. Решить уравнение

$$y''' = \sin x.$$

Решение.

Очевидно, данное уравнение относится к рассматриваемому виду $(n = 3)$. Запишем данное уравнение в виде

$$(y'')' = \sin x,$$

или

$$\frac{d(y'')}{dx} = \sin x,$$

или

$$d(y'') = \sin x \cdot dx,$$

тогда, проинтегрировав обе части последнего равенства, получим

$$\int d\left(y''\right)=\int \sin x\cdot dx,$$

или

$$y''=-\cos x+c_1,$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Поступая аналогично, получим далее

$$\left(y'\right)'=-\cos x+c_1,$$

или

$$\frac{d\left(y'\right)}{dx}=-\cos x+c_1,$$

или

$$d\left(y'\right)=\left(-\cos x+c_1\right)dx,$$

интегрируя последнее равенство, получим

$$\int d\left(y'\right)=\int\left(-\cos x+c_1\right)dx,$$

или

$$y'=-\sin x+c_1x+c_2,$$

где c_2 – произвольная постоянная.

Поступая так же, как и ранее, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x+c_1x+c_2,$$

или

$$dy=\left(-\sin x+c_1x+c_2\right)dx,$$

откуда

$$\int dy=\int\left(-\sin x+c_1x+c_2\right)dx,$$

тогда общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y=\cos x+c_1\cdot\frac{x^2}{2}+c_2\cdot x+c_3,$$

или

$$y=\cos x+\overline{c_1}\cdot\frac{x^2}{2}+c_2\cdot x+c_3,$$

где $\overline{c_1}=\frac{c_1}{2}$, c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $y(x)=\cos x+\overline{c_1}\cdot\frac{x^2}{2}+c_2\cdot x+c_3$ – общее решение, где $\overline{c_1}, c_2, c_3$ – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти решение задачи Коши

$$y^{\mathrm{IV}}=e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=-2,\ y''(0)=3,\ y'''(0)=-1.$$

Решение.

1) Найдем общее решение данного уравнения четырехкратным интегрированием его обеих частей:

$$\frac{d(y''')}{dx}=e^{2x},$$

$$d(y''')=e^{2x}\cdot dx,$$

$$\int d(y''')=\int e^{2x}\cdot dx,$$

$$y'''=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1, \qquad (3.3.)$$

далее,

$$\frac{d(y'')}{dx}=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1,$$

$$d(y'')=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c_1\right)dx,$$

$$\int d(y'')=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c_1\right)dx,$$

$$y''=\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2, \qquad (3.4.)$$

$$\frac{d(y')}{dx}=\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2,$$

$$d\left(y'\right)=\left(\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2\right)dx,$$

$$\int d\left(y'\right)=\int\left(\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2\right)dx,$$

$$y'=\frac{1}{8}e^{2x}+c_1\cdot\frac{x^2}{2}+c_2\cdot x+c_3, \qquad (3.5.)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{8}e^{2x}+c_1\cdot\frac{x^2}{2}+c_2\cdot x+c_3,$$

$$dy=\left(\frac{1}{8}e^{2x}+c_1\cdot\frac{x^2}{2}+c_2\cdot x+c_3\right)dx,$$

$$\int dy=\int\left(\frac{1}{8}e^{2x}+c_1\cdot\frac{x^2}{2}+c_2\cdot x+c_3\right)dx,$$

откуда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=\frac{1}{16}e^{2x}+c_1\cdot\frac{x^3}{6}+c_2\cdot\frac{x^2}{2}+c_3\cdot x+c_4,$$

или

$$y=\frac{1}{16}e^{2x}+\overline{c_1}\cdot x^3+\overline{c_2}\cdot x^2+c_3\cdot x+c_4, \qquad (3.6.)$$

где $\overline{c_1}=\frac{c_1}{6}, \overline{c_2}=\frac{c_2}{2}, c_1, c_2, c_3, c_4$ – произвольные постоянные.

Произвольные постоянные $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$, c_3, c_4 найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} 0=\frac{1}{16}\cdot e^{2\cdot 0}+\overline{c_1}\cdot 0^3+\overline{c_2}\cdot 0^2+c_3\cdot 0+c_4, \\ -2=\frac{1}{8}\cdot e^{2\cdot 0}+c_1\cdot\frac{0^2}{2}+c_2\cdot 0+c_3, \\ 3=\frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot 0}+c_1\cdot 0+c_2, \\ -1=\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot 0}+c_1, \end{cases} \qquad (3.7.)$$

которая вытекает из равенств $(3.3.),(3.4.),(3.5.),(3.6.)$ и заданных начальных условий. Решая систему $(3.7.)$, будем иметь

$$\begin{cases} c_4 = -\dfrac{1}{16}, \\ c_3 = -\dfrac{17}{8}, \\ c_2 = \dfrac{11}{4}, \\ c_1 = -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

или, учитывая, что $\overline{c_1} = \dfrac{c_1}{6}, \overline{c_2} = \dfrac{c_2}{2}$, получим

$$\begin{cases} \overline{c_1} = -\dfrac{1}{4}, \\ \overline{c_2} = \dfrac{11}{8}, \\ c_3 = -\dfrac{17}{8}, \\ c_4 = -\dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Тогда решение данной задачи Коши имеет вид:

$$y = \frac{1}{16} \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{11}{8} \cdot x^2 - \frac{17}{8} \cdot x - \frac{1}{16}.$$

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{16} \cdot e^{2x} - \dfrac{1}{4} \cdot x^3 + \dfrac{11}{8} \cdot x^2 - \dfrac{17}{8} \cdot x - \dfrac{1}{16}$ – частное решение (решение задачи Коши).

***Задание № 5.* Решить задачу Коши:**

1. $y''' = 3 + \cos^2 2x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -1$

2. $y^{\mathrm{IV}} = \dfrac{\left(4\sqrt{x} + 1\right)^2}{x}$, $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = -1,\ y'''(1) = 2$

3. $y''' = \dfrac{1}{(x-1)^3}$, $y(2) = 3,\ y'(2) = 2,\ y''(2) = \dfrac{1}{2}$

4. $y''' = 2 \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1,\ y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

5. $y'' = \dfrac{\sin^3 x - 4}{\sin^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi}$

6. $y''' = 27e^{3x} + 120x^3$, $y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 2$

7. $y'' = x \cdot e^{-x}$, $y(0) = 3,\ y'(0) = -2$

8. $y'' = x \cdot \cos 3x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

9. $y'' = 2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

10. $y''' = \dfrac{\sin x}{3\cos^3 x}$, $y(0) = -3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 7$

11. $y''' = \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = -2$

12. $y'' = x \cdot \ln x$, $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

13. $y'' = x \cdot e^x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

14. $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $y(e) = 4,\ y'(e) = \dfrac{2}{e}$

15. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

16. $y^{IV} = \dfrac{x^4}{1 + x^2}$, $y(-1) = 0,\ y'(-1) = 2,$
$y''(-1) = -3,\ y'''(-1) = 7$

17. $y''' = \sin^2 \dfrac{3x}{2}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -3$

18. $y'' = \dfrac{2+\sqrt{4x^3 - x^5}}{\sqrt{4-x^2}}$, $\quad y(0) = -2,\ y'(0) = 5$

19. $y''' = (2-3x)^5$, $\quad y(2) = 1,\ y'(2) = -3,\ y''(2) = 6$

20. $y''' \cdot \sin^4 x = \sin 2x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2,\ y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

21. $y^{IV} = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = -3,\ y'''(0) = 8$

22. $y''' = \dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$, $\quad y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1,\ y''(-1) = 2$

23. $y''' = \dfrac{e^{6x}}{e^{3x}+1}$, $\quad y(0) = \dfrac{4}{27},\ y'(0) = \dfrac{1}{9},\ y''(0) = 1$

24. $y^{IV} = 64\sin 2x \cdot \cos 2x$, $\quad y(0) = 6,\ y'(0) = \dfrac{3}{2},\ y''(0) = -2,\ y'''(0) = 5$

25. $y'' = \mathrm{tg}^2 3x$, $\quad y(0) = 9,\ y'(0) = -5$

26. $y''' = \sin 4x \cdot \cos 6x$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 4$

27. $y'' = \cos^3 2x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4}{3}$

28. $y''' = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3 + 1}{x^{\frac{1}{2}} + 1}$, $\quad y(4) = 1,\ y'(4) = 2,\ y''(4) = 3$

29. $y'' = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$, $\quad y(0) = 5,\ y'(0) = -2$

30. $y'' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$

3.2. Уравнения, не содержащие искомой функции

I. Дифференциальное уравнение n-го порядка, не содержащие искомой функции, имеет вид

$$F\left(x, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (3.8.)$$

Порядок его может быть понижен на единицу с помощью замены

$$y' = p(x), \qquad (3.9.)$$

где $p(x)$ – новая искомая функция.

Такая замена приводит уравнение $(3.8.)$ к уравнению

$$F\left(x, p, p', p'', ..., p^{(n-1)}\right) = 0 \qquad (3.10.)$$

II. Дифференциальное уравнение которое не содержит ни искомой функции y, ни ее производных до порядка $(k-1)$ включительно, т. е. имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (3.11.)$$

Его порядок может быть понижен на k единиц в результате подстановки

$$y^{(k)} = p(x), \qquad (3.12.)$$

где $p(x)$ – новая искомая функция. Тогда уравнение $(3.11.)$ принимает вид

$$F\left(x, p, p', p'', ..., p^{(n-k)}\right) = 0. \qquad (3.13.)$$

После определения функции $p(x)$ искомую функцию $y(x)$ находят из уравнения (5) k-кратным интегрированием его обеих частей.

III. Дифференциальные уравнения, которые содержат только две последовательные производные неизвестной функции, т. е. уравнения вида

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0. \qquad (3.14.)$$

Если это уравнение удается разрешить относительно $y^{(n)}$, то оно принимает вид

$$y^{(n)}=\Phi\left(y^{(n-1)}\right) \qquad (3.15.)$$

и решается с помощью подстановки

$$y^{(n-1)}=p(x) \qquad (3.16.)$$

где $p(x)$ – новая искомая функция.

Такая подстановка $(3.16.)$ приводит уравнение $(3.15.)$ к виду

$$\frac{dp}{dx}=\Phi(p). \qquad (3.17.)$$

Определив из уравнения $(3.17.)$ функцию $p(x)$ и подставив ее в уравнение $(3.16.)$, находят неизвестную функцию $y(x)$.

Пример 1. Решить уравнение.

$$y''=5\cdot y'\cdot\frac{1}{x}.$$

Решение.

Данное уравнение не содержит искомой функции y, поэтому для его решения проведем замену

$$y'=p(x) \text{ и } y''=p'(x) \qquad (3.18.)$$

где $p(x)$ – новая искомая функция. Тогда данное уравнение примет вид

$$p'=5\cdot p\cdot\frac{1}{x},$$

или

$$\frac{dp}{dx}=5\cdot p\cdot\frac{1}{x}.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dp}{p}=5\cdot\frac{dx}{x},$$

откуда, интегрируя, будем иметь

$$\int \frac{dp}{p} = 5\int \frac{dx}{x},$$

или

$$\ln|p| = 5\ln|x| + \ln|c_1|,$$

или

$$p(x) = c_1 \cdot x^5,$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Подставляя найденную функцию $p(x)$ в первое уравнение из равенств $(3.18.)$, получим уравнение для определения первоначальной искомой функции $y(x)$:

$$y' = c_1 \cdot x^5,$$

решая которое, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot x^5,$$

или, разделив переменные,

$$dy = c_1 \cdot x^5 \cdot dx.$$

После интегрирования получим

$$\int dy = \int c_1 \cdot x^5 \cdot dx,$$

или

$$y = \frac{c_1}{6} \cdot x^6 + c_2,$$

или

$$y = \overline{c_1} \cdot x^6 + c_2,$$

где $\overline{c_1} = \dfrac{c_1}{6}, c_2$ – произвольные постоянные.

Ответ: $y(x) = \overline{c_1} \cdot x^6 + c_2$ – общее решение, где $\overline{c_1}, c_2$ – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''' - 2y'' = x^3.$$

Решение.

Данное уравнение не содержит искомой функции y и ее первой производной y'. Сделаем замену

$$y'' = p(x), \tag{3.19.}$$

где $p(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда данное уравнение примет вид

$$x \cdot p' - 2p = x^3,$$

или

$$p' - \frac{2}{x} \cdot p = x^2 \tag{3.20.}$$

Последнее уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно новой неизвестной функции $p(x)$, которое решим методом И. Бернулли. Неизвестную функцию $p(x)$ будем искать в виде

$$p = u \cdot v, \tag{3.21.}$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – неизвестные функции.

Из $(3.21.)$ имеем

$$p = u' \cdot v + u \cdot v', \tag{3.22.}$$

Подставим в уравнение $(3.20.)$ вместо p и p' их выражения через u и v из $(3.21.)$ и $(3.22.)$, получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2}{x} \cdot u \cdot v = x^2,$$

или, после группировки слагаемых в левой части полученного равенства и вынесения общего множителя за скобки,

$$u' \cdot v + u \cdot \left[v' - \frac{2}{x} \cdot v \right] = x^2. \tag{3.23.}$$

Функцию $v(x)$ найдем как одно из решений уравнения

$$v' - \frac{2}{x} \cdot v = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Итак, имеем

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} \cdot v,$$

или

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x} \cdot dx,$$

после интегрирования

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|v| = 2\ln|x|,$$

или

$$v(x) = x^2. \qquad (3.24.)$$

Тогда для определения функции $u(x)$ будем иметь уравнение

$$u' \cdot v = x^2.$$

После подстановки в последнее уравнение выражения для найденной функции $v(x)$ получим

$$u' \cdot x^2 = x^2,$$

или

$$\frac{du}{dx} = 1,$$

или

$$du = dx,$$

откуда, интегрируя,

$$\int du = \int dx,$$

$$u(x) = x + c_1, \qquad (3.25.)$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Тогда, учитывая равенства $(3.24.)$ и $(3.25.)$, получаем, что неизвестная функция $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = x^3 + c_1 \cdot x^2. \qquad (3.26.)$$

Подставляя найденное выражение $(3.26.)$ для функции $p(x)$ в равенство $(3.19.)$, будем иметь следующее дифференциальное уравнение для определения первоначальной неизвестной функции $y(x)$, а именно, уравнение

$$y'' = x^3 + c_1 \cdot x^2,$$

которое решим двукратным интегрированием обеих частей. Имеем

$$\frac{d(y')}{dx} = x^3 + c_1 x^2,$$

или, после разделения переменных,

$$d(y') = \left(x^3 + c_1 \cdot x^2\right) dx.$$

Интегрируя, получим,

$$y' = \frac{1}{4} x^4 + \frac{c_1}{3} \cdot x^3 + c_2.$$

Далее, поступая аналогично, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} x^4 + \frac{c_1}{3} \cdot x^3 + c_2,$$

или

$$dy = \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{c_1}{3} \cdot x^3 + c_2\right) dx,$$

откуда

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{c_1}{3} \cdot x^3 + c_2\right) dx,$$

или

$$y=\frac{1}{20}\cdot x^5+\frac{c_1}{12}\cdot x^4+c_2\cdot x+c_3,$$

или, полагая $\frac{c_1}{12}=\overline{c_1}$, получим окончательно общее решение исходного уравнения в виде

$$y=\frac{1}{20}\cdot x^5+\overline{c_1}\cdot x^4+c_2\cdot x+c_3,$$

где $\overline{c_1}, c_2, c_3$ – произвольные постоянные.

Ответ: $y=\frac{1}{20}\cdot x^5+\overline{c_1}\cdot x^4+c_2\cdot x+c_3$ – общее решение, где $\overline{c_1}, c_2, c_3$ – произвольные постоянные.

Пример 3. Решить задачу Коши для уравнения

$$y'''=2y'',\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=2.$$

Решение. Данное уравнение содержит только две последовательные производные неизвестной функции y'' и y''. Понизим его порядок с помощью замены

$$y''=p(x), \tag{3.27.}$$

где $p(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$p'=2p,$$

или

$$\frac{dp}{dx}=2p,$$

Тогда

$$\frac{dp}{p}=2dx,$$

откуда, интегрируя, получим

$$\int\frac{dp}{p}=2\int dx,$$

$$\ln|\,p\,|=2x+c_0,$$

или

$$p = e^{2x + c_0},$$

где c_0 – произвольная постоянная, или полагая, $e^{c_0} = c_1$, имеем

$$p = c_1 \cdot e^{2x}, \qquad (3.28.)$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Тогда, подставляя найденное выражение для функции $p(x)$ в равенство $(3.28.)$, получим уравнение для определения искомой функции $y(x)$

$$y'' = c_1 \cdot e^{2x}.$$

Проинтегрируем последнее равенство последовательно два раза. Получим

$$\frac{d(y')}{dx} = c_1 \cdot e^{2x},$$

или

$$d(y') = c_1 \cdot e^{2x} \cdot dx.$$

Тогда

$$\int d(y') = \int c_1 \cdot e^{2x} \cdot dx,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{2} c_1 \cdot e^{2x} + c_2,$$

где c_2 – произвольная постоянная.

Далее, поступая аналогично, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} c_1 \cdot e^{2x} + c_2,$$

или

$$dy = \left(\frac{1}{2} c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \right) dx,$$

откуда

$$y = \frac{1}{4} c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x + c_3,$$

где c_3 – произвольная постоянная.

Полагая $\overline{c_1} = \frac{1}{4}c_1$, окончательно получим общее решение исходного дифференциального уравнения в виде

$$y = \overline{c_1} \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x + c_3, \qquad (3.29.)$$

где $\overline{c_1}, c_2, c_3$ – произвольные постоянные.

Для определения постоянных $\overline{c_1}, c_2, c_3$ воспользуемся заданными начальными условиями и получим следующую систему уравнений относительно c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{4}c_1 \cdot e^{2\cdot 0} + c_2 \cdot 0 + c_3, \\ 1 = \frac{1}{2}c_1 \cdot e^{2\cdot 0} + c_2, \\ 2 = c_1 \cdot e^{2\cdot 0}. \end{cases}$$

Из полученной системы определяем:

$$\begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 0, \\ c_3 = -\frac{1}{2}, \\ \overline{c_1} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда, подставляя найденные значения для произвольных постоянных $\overline{c_1}, c_2, c_3$ в общее решение $(3.29.)$, получим частное решение или решение задачи Коши, в виде

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$ – частное решение (решение задачи Коши).

***Задание № 6*. Найти общее решение дифференциального уравнения:**

1. $\left(1-x^2\right)\cdot y''-x\cdot y'=2$,

2. $y'''\cdot x\cdot\ln x=y''$,

3. $x\cdot y'''+y''=1$,

4. $2xy'''=y''$,

5. $xy'''+y''=x+1$,

6. $y''\cdot\operatorname{tg}x-y'+\dfrac{1}{\sin x}=0$,

7. $x^2\cdot y''+x\cdot y'=1$,

8. $y'''\cdot\operatorname{ctg}2x+2y''=0$,

9. $x^3\cdot y'''+x^2\cdot y''=1$,

10. $y'''\cdot\operatorname{tg}x=2y''$,

11. $x^4\cdot y''+x^3\cdot y'=1$,

12. $x\cdot y'''+2y''=0$,

13. $\left(1+x^2\right)\cdot y''+2x\cdot y'=x^3$,

14. $x^5\cdot y'''+x^4\cdot y''=1$,

15. $x\cdot y'''-y''+\dfrac{1}{x}=0$,

16. $x\cdot y'''+y''+x=0$,

17. $x\cdot y'''+y''=\sqrt{x}$,

18. $y'''\cdot\operatorname{tg}x=y''+1$,

19. $y'''\cdot\operatorname{tg}5x=5y''$,

20. $x^3\cdot y'''+x^2\cdot y''=\sqrt{x}$,

21. $\left(x+1\right)\cdot y'''+y''=x+1$,

22. $\left(1+\sin x\right)\cdot y'''=y''\cdot\cos x$,

23. $x\cdot y'''+y''=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

24. $x\cdot y'''-2y''=-\dfrac{2}{x^2}$,

25. $x^4\cdot y''+x^3\cdot y'=4$,

26. $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot y'=2x$,

27. $\left(1+x^2\right)\cdot y''+2xy'=12x^3$,

28. $\left(x+2\right)\cdot y^{\mathrm{IV}}=y'''$,

29. $x\cdot y''+y'=5x^2$,

30. $\left(\cos x-2\right)\cdot y'''=y''\cdot\sin x$.

3.3. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной

Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимой переменной, имеют следующий общий вид

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (3.30.)$$

С помощью замены

$$y' = p(y) \text{ или } \frac{dy}{dx} = p(y), \qquad (3.31.)$$

(где $p(y)$ – новая искомая функция, y – новая независимая переменная), порядок уравнения $(3.30.)$ понижается на единицу. Так как за независимую переменную принимается не x, а y, то вторая, третья и все последующие производные (y'', y''', ...) должны быть преобразованы так, чтобы независимой переменной была y, а именно,

$$y'' = (y')' = \left[p(y(x))\right]'_x = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot p,$$

$$y''' = (y'')' = [p'\cdot p]_x{}' = \left[\frac{dp}{dy}\cdot p\right]_y' \cdot\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2p}{dy^2}\cdot p + \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dp}{dy}\right)\cdot p =$$

$$= \frac{d^2p}{dy^2}\cdot p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\cdot p = p''\cdot p^2 + (p')^2\cdot p, \qquad (3.32.)$$

… … … … … … … … … … … …

$$y^{(n)} = g\left(p, p', ..., p^{(n-1)}\right),$$

где $p^{(i)} = \dfrac{d^i p}{dy^i}, \quad i = 1, 2, ..., n-1.$

Подстановки $(3.31.)$ и $(3.32.)$ в уравнение $(3.30.)$ приводят к дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка относительно новой неизвестной функции $p(y)$:

$$F_1\left(y,\, p,\, p',\, ...,\, p^{(n-1)}\right)=0 \qquad (3.33.)$$

Если удается найти общий интеграл уравнения $(3.33.)$

$$\Phi\left(y,\, p,\, c_1,\, c_2,\, ...,\, c_{n-1}\right)=0,$$

то соотношение

$$\Phi\left(y,\, y',\, c_1,\, c_2,\, ...,\, c_{n-1}\right)=0 \qquad (3.34.)$$

является дифференциальным уравнением первого порядка, из которого и находят искомую функцию $y(x)$. Общий интеграл уравнения $(3.34.)$, имеющий вид

$$\Phi\left(x,\, y,\, c_1,\, c_2,\, ...,\, c_n\right)=0,$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные, является общим интегралом исходного уравнения $(3.30.)$.

Заметим также, что при осуществлении замены $(3.31.)$ возможна потеря решения $y=\text{const}$. Непосредственной подстановкой необходимо проверить наличие у уравнения $(3.30.)$ решений такого вида.

Пример. Решить задачу Коши

$$(y')^2+2y\cdot y''=0,\;\; y(1)=1,\; y'(1)=1.$$

Решение. Данное уравнение не содержит явно независимой переменной x, а потому относится к рассматриваемому типу. Полагаем

$$y'=p,$$

где $p=p(y)$ – новая неизвестная функция, y – новая независимая переменная.

Из равенств $(3.32.)$ имеем

$$y'' = p' \cdot p = \frac{dp}{dy} \cdot p .$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$p^2 + 2y \cdot p \cdot p' = 0 ,$$

или

$$p^2 + 2yp \cdot \frac{dp}{dy} = 0 .$$

Разделим обе части последнего уравнения на p (следует не забыть дополнительно исследовать решение $p = 0$):

$$p + 2y \cdot \frac{dp}{dy} = 0 .$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его

$$2y \cdot \frac{dp}{dy} = -p ,$$

$$2\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y},$$

$$2\ln|\, p\,| = -\ln|\, y\,| + \ln c_1^2 ,$$

откуда, потенцируя, находим, что

$$p^2 = \frac{c_1^2}{y},$$

или

$$p = \frac{c_1}{\sqrt{y}},$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Учитывая замену $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, получаем уравнение для определения функции $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{\sqrt{y}}, \qquad (3.35.)$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем

$$\sqrt{y}\cdot dy=c_1\cdot dx.$$

Интегрируя, получаем общее решение в виде

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=c_1\cdot x+c_2, \qquad (3.36.)$$

где c_2 – произвольная постоянная.

Из заданных начальных условий находим, что произвольные постоянные c_1 и c_2 удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}\cdot 1=c_1\cdot 1+c_2,\\ 1=c_1,\end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases}c_1=1,\\ c_2=-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Подставляя найденные значения для произвольных постоянных c_1 и c_2 в общее решение $(3.36.)$, получаем частное решение, решение задачи Коши, в виде

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=x-\frac{1}{3},$$

или

$$2y^{\frac{3}{2}}=3x-1,$$

или

$$y^{\frac{3}{2}}=\frac{3x-1}{2}.$$

Возводя обе части последнего равенства в степень $\frac{2}{3}$, получим окончательно искомое решение задачи Коши

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(3x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

Так как в процессе решения приходилось делить на p, то исследуем дополнительно случай $p=0$, т. е. $\frac{dy}{dx}=0$, или $y=\text{const}$. Очевидно решение $y=c$ (где $c=\text{const}$) может быть получено из общего $(3.36.)$ при $c_1=0$.

Ответ: $y(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(3x-1)^{\frac{2}{3}}$ – решение задачи Коши.

***Задание № 7*. Найти решение задачи Коши:**

1. $4y^3 \cdot y'' = y^4 - 1,$ $\quad y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

2. $y'' = 128 \cdot y^3,$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 8.$

3. $y'' \cdot y^3 + 64 = 0,$ $\quad y(0) = 4,\ y'(0) = 2.$

4. $y'' + 2\sin y \cdot \cos^3 y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

5. $y'' = 32 \cdot \sin^3 y \cdot \cos y,$ $\quad y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 4.$

6. $y'' = 98 \cdot y^3,$ $\quad y(1) = 1,\ y'(1) = 7.$

7. $y'' \cdot y^3 + 49 = 0,$ $\quad y(3) = -7,\ y'(3) = -1.$

8. $4y^3 \cdot y'' = 16y^4 - 1,$ $\quad y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

9. $y'' + 8\sin y \cdot \cos^3 y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

10. $y'' = 72y^3,$ $\quad y(2) = 1,\ y'(2) = 6.$

11. $y'' \cdot y^3 + 36 = 0,$ $\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 2$

12. $y'' = 18 \cdot \sin^3 y \cdot \cos y,$ $\quad y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 3.$

13. $4y^3 \cdot y'' = y^4 - 16,$ $\quad y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

14. $y'' = 50y^3,$ $\quad y(3) = 1,\ y'(3) = 5.$

15. $y'' \cdot y^3 + 25 = 0,$ $\quad y(2) = -5,\ y'(2) = -1.$

16. $y'' + 18 \cdot \sin^3 y \cdot \cos y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

17. $y'' = 8 \cdot \sin y \cdot \cos^3 y,$ $\quad y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 2.$

18. $y'' = 32y^3,$ $\quad y(4) = 1,\ y'(4) = 4.$

19. $y'' \cdot y^3 + 16 = 0,$ $\quad y(1) = 2,\ y'(1) = 2.$

20. $y'' + 32\sin y \cdot \cos^3 y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

21. $y'' = 50 \cdot \sin^3 y \cdot \cos y,$ $\qquad y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 5.$

22. $y'' = 18y^3,$ $\qquad y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$

23. $y'' \cdot y^3 + 9 = 0,$ $\qquad y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$

24. $y^3 \cdot y'' = 4\left(y^4 - 1\right),$ $\qquad y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}.$

25. $y'' + 50\sin y \cdot \cos^3 y = 0,$ $\qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$

26. $y'' = 8y^3,$ $\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

27. $y'' \cdot y^3 + 4 = 0,$ $\qquad y(0) = -1,\ y'(0) = -2.$

28. $y'' = 2 \cdot \sin^3 y \cdot \cos y,$ $\qquad y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 1.$

29. $y^3 \cdot y'' = y^4 - 16,$ $\qquad y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}.$

30. $y'' = 2y^3,$ $\qquad y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1.$

Контрольные вопросы

I. Каким способом решаются уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$? Ответ поясните на конкретных примерах.

II. Какой общий вид имеют уравнения $n^{го}$ порядка, не содержащие искомой функции? Приведите примеры и укажите способ решения.

III. Какой общий вид имеют дифференциальные уравнения $n^{го}$ порядка, не содержащие явно независимой переменной? Приведите примеры таких уравнений и укажите способ их решения.

IV. Какие из перечисленных дифференциальных уравнений можно решить понижением их порядка? Укажите соответствующий способ решения.

$$а)\ y''' = 2\sin x,\ б)\ y''' + 2y' = 6x,\ в)\ y'' = \left(y'\right)^3,\ г)\ 3y'' - y^2 = x,$$

$$д)\ x^3 y'' + 4x^2 y' = 10,\ е)\ y'' = \frac{y'}{\sqrt{x}},\ ж)\ y' + \frac{y}{x^2} = \cos x.$$

§4. Линейные дифференциальные уравнения порядка n

4.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

<u>Определение</u> <u>1</u>. *Линейным однородным дифференциальным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0, \qquad (4.1.)$$

где $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ – известные постоянные коэффициенты, причем $a_n \neq 0$; $y = y(x)$ – неизвестная функция аргумента x, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, …, y' – ее производные порядка $n, (n-1), \ldots, 1$ соответственно.

Приведем основные *свойства решений* линейного однородного уравнения $(4.1.)$.

I. Если $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – решения уравнения $(4.1.)$, то и любая их линейная комбинация

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \ldots + c_m \cdot y_m, \qquad (4.2.)$$

также является решением уравнения $(4.1.)$, где $c_1,\ c_2, \ldots, c_m$ – некоторые постоянные.

II. Если линейное однородное уравнение $(4.1.)$ с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y = u + i \cdot v$, то функции $u = \operatorname{Re} y$ и $v = \operatorname{Im} y$ в отдельности являются решениями уравнения $(4.1.)$.

<u>Определение</u> <u>2</u>. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются *линейно зависимыми* на множестве A, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, такие, что

$$\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(x) + \ldots \alpha_m \cdot \varphi_m(x) \equiv 0,\ x \in A, \qquad (4.3.)$$

причем

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 > 0.$$

Если же тождество $(4.2.)$ имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются *линейно независимыми*.

<u>Определение</u> <u>3</u>. Любая система из *n* линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейного однородного уравнения $(4.1.)$ называется *фундаментальной системой решений* уравнения $(4.1.)$.

III. Общее решение линейного однородного уравнения $(4.1.)$ представляет собой линейную комбинацию фундаментальных решений, т. е. имеет вид

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x), \qquad (4.4.)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные, а $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения $(4.1.)$.

Формула $(4.4.)$ определяет структуру общего решения линейного однородного уравнения $(4.1.)$.

IV. Линейное однородное уравнение $(4.1.)$ всегда имеет решение $y \equiv 0$, которое называется *тривиальным решением*.

V. Задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами $a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$,

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_0', \\ y''(x_0) &= y_0'', \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \qquad (4.5.)$$

всегда имеет и притом единственное решение при любых начальных условиях $(4.5.)$.

<u>Определение</u> <u>4</u>. *Характеристическим уравнением* для линейного однородного дифференциального уравнения порядка *n* с постоянными коэффициентами

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

называется алгебраическое уравнение степени n вида

$$a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot k + a_0 = 0. \qquad (4.6.)$$

Таким образом, чтобы составить характеристическое уравнение $(4.6.)$, надо в уравнении $(4.1.)$ заменить производные $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, …, y' соответственно степенями неизвестной величины *k*, точнее, показатель степени с основанием *k* должен быть равен порядку соответствующей производной неизвестной функции y, а сама искомая функция y заменена единицей (т. е. k^0).

Здесь возможны следующие случаи:

1. Если все корни характеристического уравнения $(4.6.)$ $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ – числа вещественные и не кратные (т. е. среди них нет равных между собой), то функции
$$y_1(x) = e^{k_1 \cdot x}, y_2(x) = e^{k_2 \cdot x}, \ldots, y_n(x) = e^{k_n \cdot x} \qquad (4.7.)$$
образуют фундаментальную систему решений уравнения $(4.1.)$.
2. Если все корни характеристического уравнения $(4.6.)$ – числа вещественные, но среди них есть кратные (т. е. равные между собой), то каждому корню k_i кратности p соответствует p линейно независимых функций вида
$$y_1(x) = e^{k_i \cdot x}, y_2(x) = x \cdot e^{k_i \cdot x}, \ldots, y_p(x) = x^{p-1} \cdot e^{k_i \cdot x} \qquad (4.8.)$$
из фундаментальной системы решений уравнения $(4.1.)$.

3. Если среди корней характеристического уравнения $(4.6.)$ имеются комплексные, но не равные между собой (эти корни всегда входят комплексно сопряженными парами $\alpha \pm \beta i$), то каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ соответствует две линейно независимые функции
$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \text{ и } y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x \qquad (4.9.)$$
из фундаментальной системы решений уравнения $(4.1.)$.
4. Если же среди комплексных корней характеристического уравнения $(4.6.)$ имеются кратные, то каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ кратности p (комплексно сопряженные корни характеристического уравнения всегда имеют одну и туже кратность) соответствует $2p$ линейно независимых функций вида
$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x;\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x;\ x^2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x; ...; x^{p-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x; \\ &e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x;\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x;\ x^2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x; ...; x^{p-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x; \end{aligned} \qquad (4.10.)$$

Таким образом, линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами всегда можно решить в элементарных функциях, причем решение сводится к алгебраическим операциям.

Пример 1. Решить задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения
$$y'' + 9y' + 20y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение вида $(4.6.)$
$$k^2 + 9k + 20 = 0.$$
Находим его корни $k_1 = -4, k_2 = -5$, которые вещественны и не равны между собой (т. е. не кратные). Тогда фундаментальную систему решений (кратко ФСР) образуют функции
$$y_1(x) = e^{-4x},\ y_2 = e^{-5x}.$$

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, а именно

$$y(x)=c_1\cdot e^{-4x}+c_2\cdot e^{-5x}, \qquad (4.11.)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Далее по заданным начальным условиям определим постоянные c_1 и c_2, для чего, прежде всего, найдем производную от общего решения $(4.11.)$:

$$y'(x)=-4c_1\cdot e^{-4x}-5c_2\cdot e^{-5x}, \qquad (4.12.)$$

Подставим начальные условия в $(4.11.)$, $(4.12.)$ и получим следующую систему уравнений для определения c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2, \\ -1=-4c_1-5c_2, \end{cases}$$

откуда находим $\begin{cases} c_1=-1, \\ c_2=1. \end{cases}$ Тогда искомое решение задачи Коши имеет вид

$$y(x)=-e^{-4x}+e^{-5x}.$$

Ответ: $y(x)=-e^{-4x}+e^{-5x}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$y'''-2y''+y'=0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3-2k^2+k=0,$$

или

$$k\cdot\left(k^2-2k+1\right)=0.$$

Его корни $k_1=0,\ k_2=1,\ k_3=1$ – вещественны, но среди них есть кратные $\left(k_2=k_3\right)$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1,$$
$$y_2(x) = e^x,$$
$$y_3(x) = x\cdot e^x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных

$$y(x) = c_1\cdot 1 + c_2\cdot e^x + c_3\cdot x\cdot e^x,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $y(x) = c_1 + c_2\cdot e^x + c_3\cdot x\cdot e^x$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Пример 3. Найти частное решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 6y' + 10y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 10 = 0$$

имеет одну пару комплексно сопряженных корней $k_{1,2} = 3 \pm i$.

Тогда фундаментальная система решений состоит из двух функций

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{3x}\cdot\cos x, \\ y_2(x) &= e^{3x}\cdot\sin x. \end{aligned}.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = c_1\cdot e^{3x}\cdot\cos x + c_2\cdot e^{3x}\cdot\sin x,$$

или

$$y(x) = e^{3x}\cdot\left(c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\sin x\right). \qquad (4.13.)$$

Для определения произвольных постоянных c_1 и c_2 из начальных условий надо найти y':

$$y'(x) = e^{3x}\cdot\left[(c_1 + c_2)\cdot\cos x + (c_2 - c_1)\cdot\sin x\right]. \qquad (4.14.)$$

Подставляя в $(4.13.)$ и $(4.14.)$ начальные условия, получим систему уравнений для определения произвольных постоянных c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_1 + c_2 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = -1. \end{cases}$$

Тогда искомое решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, получим, подставляя найденные значения для c_1 и c_2 в общее решение $(4.13.)$:

$$y(x) = e^{3x}(\cos x - \sin x).$$

Ответ: $y(x) = e^{3x} \cdot (\cos x - \sin x)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$y^{\mathrm{V}} + y''' = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^5 + k^3 = 0,$$

или

$$k^3 \cdot \left(k^2 + 1\right) = 0.$$

Его корни $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,\ k_{4,5} = \pm i$.

Среди этих корней есть кратные $\left(k_1 = k_2 = k_3\right)$ и одна пара комплексно сопряженных $k_{4,5} = \pm i = 0 \pm i$.

Следовательно, фундаментальная система решений исходного дифференциального уравнения состоит из функций

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1,$$

$$y_2(x) = x, \qquad ,$$

$$y_3(x) = x^2.$$

$$y_4(x) = e^{0\cdot x`} \cdot \cos x = \cos x,$$

$$y_5(x) = e^{0\cdot x`} \cdot \sin x = \sin x.$$

Поэтому искомое общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot \cos x + c_5 \cdot \sin x,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 – произвольные постоянные.

Ответ: $y(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot \cos x + c_5 \cdot \sin x$, где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 – произвольные постоянные.

Задание № 8. **Решить задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

1. $y'' + 8y' + 16y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$

2. $y'' - 7y' + 6y = 0;$ $y(0) = 2;\ y'(0) = 0;$

3. $y'' - 4y' + 17y = 0;$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

4. $y'' - 8y' + 15y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -2;$

5. $y'' - 4y' + 4y = 0;$ $y(0) = 2;\ y'(0) = -1;$

6. $y'' + y = 0;$ $y(\pi) = 1;\ y'(\pi) = -4;$

7. $y'' - 2y' + y = 0;$ $y(2) = 0;\ y'(2) = 6;$

8. $y'' + 2y' + 10y = 0;$ $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

9. $y'' - 7y' + 10y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -1;$

10. $y'' - 6y' + 9y = 0;$ $y(0) = 2;\ y'(0) = 1;$

11. $y'' - 6y' = 0;$ $y(0) = -2;\ y'(0) = 2;$

12. $y'' + 10y' + 25y = 0;$ $y(0) = 5;\ y'(0) = 3;$

13. $y'' + 16y = 0;$ $y(\pi) = 1;\ y'(\pi) = 2;$

14. $y'' + 8y' + 7y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -2;$

15. $y'' + 9y = 0;$ $y(-\pi) = 0;\ y'(-\pi) = 1;$

16. $y'' - 7y' + 12y = 0;$ $y(0) = -2;\ y'(0) = 2;$

17. $y'' - 2y' + 5y = 0;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = -1;$

18. $y'' - 5y' + 6y = 0;$ $y(0) = 5;\ y'(0) = 0;$

19. $y'' + 9y' = 0;$ $y(0) = -2;\ y'(0) = 3;$

20. $y'' - 3y' + 2y = 0;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 2;$

21. $y'' - 2y' - 8y = 0;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 5;$

22. $y'' - y' - 2y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -2;$

23. $y'' + y = 0;$ $y(\pi) = -1;\ y'(\pi) = -4;$

24. $y'' - y' - 6y = 0;$ $y(0) = 3;\ y'(0) = 5;$

25. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$

26. $y'' + y' - 2y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$

27. $y'' + 4y = 0;$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

28. $y'' - 4y' + 3y = 0;$ $y(0) = 3;\ y'(0) = 7;$

29. $y'' + 16y = 0;$ $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3;\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

30 $y'' + 6y' + 9y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -3;$

20. $y'' - 3y' + 2y = 0;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 2;$

21. $y'' - 2y' - 8y = 0;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 5;$

22. $y'' - y' - 2y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -2;$

23. $y'' + y = 0;$ $y(\pi) = -1;\ y'(\pi) = -4;$

24. $y'' - y' - 6y = 0;$ $y(0) = 3;\ y'(0) = 5;$

25. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$

26. $y'' + y' - 2y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$

27. $y'' + 4y = 0;$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

28. $y'' - 4y' + 3y = 0;$ $y(0) = 3;\ y'(0) = 7;$

29. $y'' + 16y = 0;$ $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3;\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

30 $y'' + 6y' + 9y = 0;$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -3;$

4.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения порядка *n* с постоянными коэффициентами

Определение **1**. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x), \qquad (4.15.)$$

где $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ – известные постоянные коэффициенты, причем $a_n \neq 0$; $y = y(x)$ – неизвестная функция аргумента x, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, …, y' – ее производные порядка $n, (n-1), \ldots, 1$ соответственно, $f(x)$ – известная функция (свободный член или правая часть уравнения $(4.15.)$) тождественно не равная нулю, непрерывная в некотором промежутке $(a;b)$, причем, случаи $a = -\infty$ и $b = \infty$ не исключаются.

Если в уравнении $(4.15.)$ старший коэффициент $a_n = 1$, то уравнение $(4.15.)$ принимает вид

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x), \qquad (4.16.)$$

и называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением порядка *n* в *канонической форме*.

Если в уравнении $(4.15.)$ $f(x) \equiv 0$ при всех $x \in (a;b)$, то уравнение

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0, \qquad (4.17.)$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением порядка n, соответствующим неоднородному уравнению* $(4.15.)$.

Основные свойства решений линейного неоднородного дифференциального уравнения $(4.15.)$

I. *Общее решение* $y_{\text{о.н.}}(x)$ линейного неоднородного уравнения $(4.15.)$ равно сумме общего решения $y_{\text{о.о.}}(x)$ соответствующего ему линейного однородного уравнения $(4.17.)$ и какого-нибудь частного решения $y_{\times.\text{н.}}(x)$ данного неоднородного уравнения $(4.15.)$, т. е. находится по формуле:

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\times.\text{н.}}(x). \qquad (4.18.)$$

II. Принцип суперпозиции решений

Если правая часть линейного неоднородного уравнения $(4.15.)$ есть сумма *m* функций, т. е., уравнение $(4.15.)$ имеет вид:

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f_1(x) + \ldots + f_m(x) \quad (4.19.)$$

и $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ – соответственно частные решения уравнений

$$\begin{aligned} &a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f_1(x), \\ &a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f_2(x), \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ &a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f_m(x), \end{aligned} \qquad (4.20.)$$

то частное решение $y(x)$ уравнения $(4.19.)$ есть сумма частных решений уравнений $(4.20.)$, т. е. находится по формуле:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_m(x).$$

III. Задача Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $(4.15.)$

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x),$$

$$
\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0, \\
y'(x_0) &= y_0', \\
y''(x_0) &= y_0'', \\
\dots \ \dots &\ \dots \ \dots \\
y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}.
\end{aligned}
\qquad (4.21.)
$$

всегда имеет и притом единственное решение при любых начальных условиях.

А. Метод вариации (изменения) произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Сущность этого метода состоит в следующем. Первоначально решается линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0, \qquad (4.22.)$$

соответствующее данному линейному неоднородному уравнению

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \qquad (4.16.)$$

Здесь, не ограничивая общности, мы положили $a_n = 1$, т. к. этого всегда можно добиться, разделив обе части уравнения $(4.15.)$ на $a_n \neq 0$.

Получив общее решение $y_{\text{О.О.}}(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения $(4.22.)$

$$y_{\text{О.О.}}(x) = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \ldots + c_n \cdot y_n \qquad (4.23.)$$

(где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $(4.22.)$), поступают так: полагают, что в решении $(4.23.)$ величины c_1, c_2, $c_3, \ldots, c_n$ являются не постоянными, а функциями независимой переменной x, и решение линейного неоднородного уравнения $(4.16.)$ ищут в виде:

$$y_{\text{О.Н.}}(x)=c_1(x)\cdot y_1+c_2(x)\cdot y_2+...+c_n(x)\cdot y_n, \qquad (4.24.)$$

где функции $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1+c_2'(x)\cdot y_2+...+c_n'(x)\cdot y_n=0, \\ c_1'(x)\cdot y_1'+c_2'(x)\cdot y_2'+...+c_n'(x)\cdot y_n'=0, \\ ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)}+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)}+...+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)}=0, \\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)}+...+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}=f(x), \end{cases} \qquad (4.25.)$$

Относительно функций $c_1'(x), c_2'(x), ..., c_n'(x)$ система $(4.25.)$ является системой n линейных неоднородных алгебраических уравнений, причем главный определитель этой системы – ***определитель Вронского***

$$\Delta=W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \; ... & ... \; y_n \\ y_1' & y_2' \; ... & ... \; y_n' \\ ... \; ... & ... \; ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.26.)$$

для любого $x\in(a;b)$.

Поэтому система$(4.25.)$ имеет единственное решение:

$$\begin{cases} c_1'(x)=\psi_1(x), \\ c_2'(x)=\psi_2(x), \\ ... \; ... \; ... \; ... \\ c_n'(x)=\psi_n(x), \end{cases} \qquad (4.27.)$$

откуда

$$\begin{cases} c_1(x) = \int \psi_1(x)dx + \widetilde{c_1}, \\ c_2(x) = \int \psi_2(x)dx + \widetilde{c_2}, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ c_n(x) = \int \psi_n(x)dx + \widetilde{c_n}, \end{cases} \tag{4.28.}$$

где $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}, \dots, \widetilde{c_n}$ – произвольные постоянные.

Учитывая равенство $(4.24.)$, общее решение $y_{\text{О.Н.}}(x)$ линейного неоднородного уравнения $(4.16.)$, найденное методом вариации произвольных постоянных, получаем в виде

$$y_{\text{О.Н.}}(x) = \underbrace{\widetilde{c_1} \cdot y_1 + \widetilde{c_2} \cdot y_2 + \dots + \widetilde{c_n} \cdot y_n}_{y_{\text{О.О.}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\int \psi_i(x) \cdot dx \right) \cdot y_i}_{y_{\times.\text{í}.}} \tag{4.29.}$$

Пример 1. Методом вариации произвольных постоянных решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}. \tag{4.30.}$$

Решение.

1) Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = 0. \tag{4.31.}$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

имеет два различных действительных корня

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 3.$$

Тогда фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения $(4.31.)$ состоит из функций

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{3x}.$$

Следовательно, общее решение $y_{\text{О.О.}}(x)$ линейного однородного уравнения $(4.31.)$ имеет вид:

$$y_{\text{О.О.}}(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2) Общее решение исходного линейного неоднородного уравнения $(4.30.)$, согласно методу Лагранжа, будем искать в виде

$$y_{\text{О.Н.}}(x) = c_1(x)\cdot e^{-x} + c_2(x)\cdot e^{3x}, \tag{4.32.}$$

где функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot e^{-x} + c_2'\cdot e^{3x} = 0, \\ -c_1'(x)\cdot e^{-x} + 3c_2'\cdot e^{3x} = e^{4x}. \end{cases} \tag{4.33.}$$

Главный определитель этой системы – определитель Вронского $\Delta = W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 4e^{2x} \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$, поэтому система $(4.33.)$ имеет и, притом единственное решение, которое найдем по методу Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ -e^{4x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = -e^{7x},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{4x} \end{vmatrix} = e^{3x}.$$

Тогда

$$\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{1}{4}\cdot e^{5x}, \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{4}\cdot e^{x}, \end{cases} \tag{4.34.}$$

Интегрируя равенства $(3.69.)$, находим

$$\begin{cases} c_1(x) = -\dfrac{1}{4}\int e^{5x}dx = -\dfrac{1}{20}\cdot e^{5x} + \widetilde{c_1}, \\ c_2(x) = \dfrac{1}{4}\int e^{x}dx = \dfrac{1}{4}e^{x} + \widetilde{c_2}, \end{cases} \tag{4.35.}$$

где $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}$ – произвольные постоянные.

Подставляя найденные выражения для функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в равенство $(4.32.)$, получим искомое решение данного линейного неоднородного уравнения $(4.30.)$ в виде

$$y_{\text{о.н.}}(x) = \underbrace{\widetilde{c_1} \cdot e^{-x} + \widetilde{c_2} \cdot e^{3x}}_{y_{\text{о.о.}}} + \underbrace{\frac{1}{5} e^{4x}}_{y_{\text{ч.н.}}}.$$

Ответ: $y_{\text{о.н.}}(x) = \widetilde{c_1} \cdot e^{-x} + \widetilde{c_2} \cdot e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}$, где $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}$ – произвольные постоянные.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) – универсальный. Он позволяет при помощи квадратур найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $(4.15.)$, если известно общее решение соответствующего ему линейного однородного дифференциального уравнения $(4.17.)$.

Ниже рассмотрим метод, позволяющий находить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $(4.15.)$ без применения метода вариации произвольных постоянных, т. е. без вычисления интегралов.

В. Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть в уравнении

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x), \qquad (4.15.)$$

где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – действительные числа, правая часть функции $f(x)$, имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x \right], \qquad (4.36.)$$

где α, β – известные действительные постоянные, $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены соответственно степени n и m с действительными коэффициентами относительно переменной x. Тогда линейное неоднородное уравнение $(4.15.)$ имеет единственное частное решение вида:

$$y_{\times.\text{í}.} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left[M_l(x) \cdot \cos \beta x + N_l(x) \cdot \sin \beta x \right], \qquad (4.37.)$$

где $r \geq 0$ – кратность контрольного числа (точнее, комплексно-сопряженной пары) $z = \alpha \pm \beta i$ правой части как корня характеристического уравнения соответствующего линейного однородного уравнения $(4.17.)$ ($r > 0$ – резонансный случай, $r = 0$ – нерезонансный случай), $M_l(x), N_l(x)$ – многочлен степени $l = \max\{n, m\}$ с неизвестными действительными коэффициентами, которые могут быть найдены *методом неопределенных коэффициентов*.

Таким образом, линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами всегда могут быть проинтегрированы в квадратурах, причем в случае, когда правая часть, свободный член $f(x)$, имеет специальный вид $(4.36.)$, интегрирование по существу сводится к алгебраическим операциям.

Пример 1. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' - 7y' + 12y = 5. \qquad (4.38.)$$

Решение.

Общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{Î.í.}}(x) = y_{\text{Î.Î.}}(x) + y_{\times.\text{í}.}(x) \qquad (4.18.)$$

1) Найдем сначала $y_{\text{Î.Î.}}(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 7k + 12 = 0 \qquad (4.39.)$$

имеет корни

$$k_1 = 3,\ k_2 = 4.$$

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1(x) = e^{3x} \text{ и } y_2(x) = e^{4x},$$

следовательно, искомое общее решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$y_{\text{О.О.}}(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{4x},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2) Найдем $y_{\times.\acute{I}.}(x)$ – частное решение данного линейного неоднородного уравнения $(4.38.)$.

Рассмотрим правую часть данного уравнения

$$f(x) = 5 \qquad (4.40.)$$

и сравним ее с $(4.37.)$.

Так как правая часть $(4.40.)$ данного уравнения $(4.37.)$ не содержит множителя $e^{\alpha x}$, то надо считать, что $\alpha = 0$ ($e^{\alpha x} = e^{0 \cdot x} = e^0 = 1$).

Правая часть $(4.40.)$ не содержит также ни $\cos \beta x$, ни $\sin \beta x$. Это значит, что $\beta = 0$ $(\cos \beta x = \cos 0 \cdot x = 1;\ \sin \beta x = \sin 0 \cdot x = 0)$.

Число 5 в правой части данного уравнения надо рассматривать как многочлен нулевой степени, т. е. $P_0(x) = 5$ $(n = 0)$.

Таким образом, контрольное число правой части $(4.40.)$ имеет вид

$$z = \alpha \pm \beta i = 0 \pm 0 \cdot i = 0,$$

и не является корнем характеристического уравнения $(4.39.)$. Это означает, что $r = 0$ (нерезонансный случай). Также заметим, что в этом случае $l = 0$ $(l = n)$.

Следовательно, частное решение $y_{\text{×.í.}}(x)$ данного линейного неоднородного уравнения будем искать в виде (подставить в $(4.37.)$ $\alpha = 0, \beta = 0, r = 0, l = 0$):

$$y_{\text{×.í.}}(x) = A, \tag{4.41.}$$

где A – неизвестный действительный коэффициент.

Найдем первую и вторую производные $y_{\text{×.í.}}(x)$:

$$y'_{\text{×.í.}} = 0, \quad y''_{\text{×.í.}} = 0.$$

Подставим выражения для $y_{\text{×.í.}}$, $y'_{\text{×.í.}}$, $y''_{\text{×.í.}}$ в данное уравнение

$$0 - 7 \cdot 0 + 12A = 5,$$

откуда

$$A = \frac{5}{12}.$$

Подставим найденное значение для A в $(4.41.)$ и получим частное решение данного неоднородного уравнения

$$y_{\text{×.í.}}(x) = \frac{5}{12}.$$

Складывая $y_{\text{×.í.}}(x)$ с $y_{\text{î.î.}}(x)$, находим общее решение заданного уравнения

$$y_{\text{î.í.}}(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{4x} + \frac{5}{12},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Ответ: $y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{4x} + \frac{5}{12}$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Пример 2. Решить уравнение

$$y''' - y'' = 3x^2 - 5. \tag{4.42.}$$

Решение.

$$y_{\text{î.í.}}(x) = y_{\text{î.î.}}(x) + y_{\text{×.í.}}(x). \tag{4.18.}$$

1) Соответствующее однородное уравнение

$$y''' - y'' = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^3 - k^2 = 0,$$

или

$$k^2(k-1) = 0 \qquad (4.43.)$$

имеет корни

$$k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = 1.$$

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1,$$

$$y_2(x) = x,$$

$$y_3(x) = e^x.$$

Следовательно, общее решение $y_{\text{Î.Î.}}(x)$ соответствующего однородного уравнения

$$y_{\text{Î.Î.}}(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot e^x, \qquad (4.44.)$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные действительные постоянные.

2) Для отыскания частного решения $y_{\text{×.í.}}(x)$ заданного неоднородного уравнения рассмотрим его правую часть

$$f(x) = 3x^2 - 5, \qquad (4.45.)$$

которая представляет собой многочлен степени 2. Сравнивая $(4.45.)$ с $(4.37.)$, имеем $\alpha = 0, \beta = 0, n = 2$. Контрольное число правой части

$$z = \alpha \pm \beta i = 0 \pm 0 \cdot i = 0$$

является корнем характеристического уравнения $(4.43.)$ кратности 2, следовательно, $r = 2$ (резонансный случай). Здесь число $l = 2$ $(l = n)$.

Подставляя в $(4.37.)$ $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ l = 2,\ r = 2$, получаем общий вид частного решения $y_{\text{×.í.}}(x)$ исходного неоднородного уравнения

$$y_{\times.\acute{\imath}.}(x)=x^2\cdot\left(Ax^2+Bx+C\right),\qquad(4.46.)$$

или

$$y_{\times.\acute{\imath}.}(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2,\qquad(4.47.)$$

где A, B, C – неизвестные действительные коэффициенты.

Найдем из $(4.47.)$ первую, вторую и третью производные $y_{\times.\acute{\imath}.}(x)$

$$\begin{gathered}
y'_{\times.\acute{\imath}.}(x)=4Ax^3+3Bx^2+2Cx,\\
y''_{\times.\acute{\imath}.}(x)=12Ax^2+6Bx+2C,\qquad(4.48.)\\
y'''_{\times.\acute{\imath}.}(x)=24Ax+6B.
\end{gathered}$$

Подставим выражения $(4.48.)$ в исходное уравнение $(4.42.)$, получим

$$(24Ax+6B)-\left(12Ax^2+6Bx+2C\right)=3x^2-5,$$

или

$$(-12A)x^2+(24A-6B)x+(6B-2C)=3x^2-5.$$

Сравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x левой и правой части, получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B, C:

$$\begin{cases}-12A=3,\\ 24A-6B=0,\\ 6B-2C=-5,\end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4},\\ B=-1,\\ C=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Подставляя найденные значения для коэффициентов A,B,C в $(4.47.)$, получаем частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\times.\acute{\imath}.}(x)=-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2.\qquad(4.49.)$$

Складывая выражения $(4.44.)$ и $(4.49.)$ для $y_{\text{Î.Î.}}(x)$ и $y_{\text{×.Í.}}(x)$, получаем искомое общее решение данного линейного неоднородного уравнения $(4.42.)$ в виде

$$y_{\text{Î.Í.}}=c_1+c_2\cdot x+c_3\cdot e^x-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2,$$

где c_1,c_2,c_3 – произвольные действительные постоянные.

Ответ: $y(x)=c_1+c_2\cdot x+c_3\cdot e^x-\frac{1}{4}\left(x^4+4x^3+2x^2\right)$, где c_1,c_2,c_3 – произвольные действительные постоянные.

Пример 3. Решить уравнение

$$y''-6y'+8y=3e^{2x}. \tag{4.50.}$$

Решение.

$$y_{\text{Î.Í.}}(x)=y_{\text{Î.Î.}}(x)+y_{\text{×.Í.}}(x). \tag{4.18.}$$

1) Соответствующее однородное уравнение

$$y''-6y'+8y=0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2-6k+8=0 \tag{4.51.}$$

имеет корни

$$k_1=2,\ k_2=4.$$

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1(x)=e^{2x},\ y_2(x)=e^{4x}.$$

Следовательно, общее решение $y_{\text{Î.Î.}}(x)$ соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{Î.Î.}}(x)=c_1\cdot e^{2x}+c_2\cdot e^{4x}, \tag{4.52.}$$

где c_1,c_2 – произвольные действительные постоянные.

2) Рассмотрим правую часть данного уравнения $(4.50.)$:

$$f(x)=3e^{2x}. \tag{4.53.}$$

Сравнивая $(4.53.)$ с $(4.37.)$, находим $\alpha = 2, \beta = 0, n = 0$. Тогда $l = 0$ $l = n$.

Контрольное число правой части $(4.53.)$

$$z = \alpha \pm \beta i = 2 \pm 0 \cdot i = 2$$

является корнем характеристического уравнения $(4.51.)$ кратности 1, поэтому $r = 1$.

Подставляя $\alpha = 2, \beta = 0, r = 1, l = 0$ в формулу $(4.37.)$, получим частное решение данного неоднородного уравнения $(4.50.)$ в виде

$$y_{\times.\text{í}\,.}(x) = x^1 \cdot e^{2x} \cdot A,$$

или

$$y_{\times.\text{í}\,.}(x) = Ax \cdot e^{2x}, \tag{4.54.}$$

где A – неизвестный действительный коэффициент.

Из $(4.54.)$ находим

$$\begin{aligned} y'_{\times.\text{í}\,.}(x) &= \left(Axe^{2x}\right)' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = Ae^{2x}(1+2x) \\ y''_{\times.\text{í}\,.}(x) &= \left(Ae^{2x}(1+2x)\right)' = 2Ae^{2x}(1+2x) + 2Ae^{2x} = 4Ae^{2x}(1+x) \end{aligned} \tag{4.55.}$$

Подставим выражения $(4.54.)$ и $(4.55.)$ для $y_{\times.\text{í}\,.}(x)$, $y'_{\times.\text{í}\,.}(x)$, $y''_{\times.\text{í}\,.}(x)$ в исходное уравнение $(4.50.)$, получим

$$4Ae^{2x}(1+x) - 6Ae^{2x}(1+2x) + 8Axe^{2x} = 3e^{2x}.$$

Разделим обе части последнего равенства на $e^{2x} \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, получим

$$4A(1+x) - 6A(1+2x) + 8Ax = 3,$$

или, раскрыв скобки и приводя подобные,

$$-2A = 3,$$

откуда

$$A = -\frac{3}{2}.$$

Подставив найденное значение для A в формулу $(4.54.)$, получим частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y_{\times.\acute{\imath}.}(x) = -\frac{3}{2}xe^{2x}. \qquad (4.56.)$$

Тогда, учитывая $(4.18.)$, $(4.52.)$, $(4.56.)$, получаем исходное решение в виде

$$y_{\hat{\imath}.\acute{\imath}.}(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{4x} - \frac{3}{2}xe^{2x},$$

где c_1, c_2 – произвольные действительные постоянные.

Ответ: $y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{4x} - \frac{3}{2}xe^{2x}$, где c_1, c_2 – произвольные действительные постоянные.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 5\sin 2x. \qquad (4.57.)$$

Решение.

$$y_{\hat{\imath}.\acute{\imath}.}(x) = y_{\hat{\imath}.\hat{\imath}.}(x) + y_{\times.\acute{\imath}.}(x). \qquad (4.18.)$$

1) Соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0 \qquad (4.58.)$$

имеет пару комплексно сопряженных корней

$$k_{1,2} = \pm i = 0 + i.$$

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} \cdot \cos x = \cos x,$$

$$y_2(x) = e^{0\cdot x} \cdot \sin x = \sin x.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{Î.Î.}}(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x, \qquad (4.59.)$$

где c_1, c_2 – произвольные действительные постоянные.

2) Рассмотрим правую часть данного дифференциального уравнения $(4.57.)$

$$f(x) = 5\sin 2x. \qquad (4.60.)$$

Сравнивая $(4.60.)$ и $(4.37.)$, имеем

$\alpha = 0;\ \beta = 2;\ P_n(x) = P_0(x) = 0 \quad (n = 0);\ Q_m(x) = Q_0(x) = 5 \quad (m = 0).$

Следовательно, $l = \max\{n; m\} = 0$.

Тогда контрольное число правой части $(4.60.)$

$$z = \alpha \pm \beta i = 0 \pm 2i = 2i$$

не является корнем характеристического уравнения $(4.58.)$, поэтому $r = 0$ (нерезонансный случай).

Подставим в $(4.37.)$ $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ r = 0,\ l = 0$, получим общий вид частного решения $y_{\text{×.Í.}}(x)$ данного неоднородного уравнения $(4.57.)$

$$y_{\text{×.Í.}}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x, \qquad (4.61.)$$

где A, B – неизвестные действительные коэффициенты.

Из $(4.61.)$ находим

$$\begin{aligned} y'_{\text{×.Í.}}(x) &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \\ y''_{\text{×.Í.}}(x) &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x. \end{aligned} \qquad (4.62.)$$

Подставим в исходное уравнение $(4.57.)$ выражения для $y_{\text{×.Í.}}(x)$ и $y''_{\text{×.Í.}}(x)$ из $(4.61.)$ и $(4.62.)$, получим:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = 5\sin 2x,$$

или

$$(-3A)\cos 2x + (-3B)\sin 2x = 5\sin 2x,$$

Сравнивая в последнем равенстве коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ левой и правой части получим

$$\begin{cases} -3A = 0, \\ -3B = 5, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = -\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения для A и B в $(4.61.)$, получаем

$$y_{\times.\text{í}.}(x) = -\frac{5}{3}\sin 2x. \qquad (4.63.)$$

Тогда, учитывая равенства $(4.18.),(4.59.),(4.63.)$, находим общее решение исходного неоднородного уравнения $(4.57.)$

$$y_{\hat{\text{I}}.\text{í}.}(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x - \frac{5}{3}\sin 2x,$$

где c_1, c_2 – произвольные действительные постоянные.

Ответ: $y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x - \frac{5}{3}\sin 2x$, где c_1, c_2 – произвольные действительные постоянные.

Задание № 9. Решить дифференциальные уравнения.

1. а) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$,

б) $y'' - 4y' + 5y = (16 - 12x) \cdot e^{-x}$,

в) $y'' + 2y' + y = 4e^x (\sin x + \cos x)$.

2. а) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$,

б) $y''' - 2y'' + 2y' = (1 - 2x) \cdot e^x$,

в) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 6x$.

3. а) $y''' - y' = x^2 + x$,

б) $y''' - y'' + y' - y = (3x + 7) \cdot e^{2x}$,

в) $y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$.

4. а) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$,

б) $y''' + 2y'' + 2y' = (2x + 5) \cdot e^{2x}$,

в) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

5. а) $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2$,

б) $y''' - 3y'' - 4y = (18x - 21) \cdot e^{-x}$,

в) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

6. а) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x)$,

б) $y'' - 5y' + 4y = (2x - 5) \cdot e^x$,

в) $y'' - 4y' + 8y = e^x (5\sin x - 3\cos x)$.

7. а) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$,

б) $y''' + 4y'' + 8y' = (x - 1) \cdot e^x$,

в) $y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x)$.

8. а) $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3$,

б) $y''' - 2y'' + 5y' = (18x + 21) \cdot e^{2x}$,

в) $y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \cdot \sin 3x$.

9. а) $3y^{IV} + y''' = 6x - 1,$

б) $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4) \cdot e^{x},$

в) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 4x.$

10. а) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^{2},$

б) $y'' - 3y' - 2y = -4x \cdot e^{x},$

в) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

11. а) $y''' + y'' = 5x^{2} - 1,$

б) $y'' - 3y' + 2y = (4x + 9) \cdot e^{2x},$

в) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x.$

12. а) $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^{2},$

б) $y'' + 4y' + 5y = (12x + 16) \cdot e^{x},$

в) $y'' - 4y' + 3y = (-3\sin x + 4\cos x) \cdot e^{x}.$

13. а) $7y''' - y'' = 12x,$

б) $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11) \cdot e^{-x},$

в) $y''' + 8y = 10e^{x} \cdot (\sin x + \cos x) \cdot .$

14. а) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^{2} + 2x,$

б) $y''' + 6y'' + 18y' = (6x + 5) \cdot e^{x},$

в) $y'' - 4y' + 4y = e^{x} \cdot \sin 5x.$

15. а) $y''' - y' = 3x^{2} - 2x + 1,$

б) $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15) \cdot e^{x},$

в) $y^{IV} - y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$

16. а) $y''' - y'' = 4x^{2} - 3x + 2,$

б) $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x) \cdot e^{x},$

в) $y'' + 2y' + 5y = -17 \cdot \sin 2x.$

17. а) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3,$

б) $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x) \cdot e^{x},$

в) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos x.$

18. а) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x,$

б) $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x) \cdot e^{-x},$

в) $y'' - 4y' + 8y = e^x \cdot (3\sin x + 5\cos x).$

19. а) $y''' - 4y'' = 32x - 384x^2,$

б) $y'' - 5y' + 4y = (20 - 16x) \cdot e^{-x},$

в) $y^{IV} - 16y = 6e^x (\sin x + \cos x).$

20. а) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2,$

б) $y''' - 4y'' + 3y' = -4x \cdot e^x,$

в) $y'' + 4y' + 8y = -e^{2x} \cdot \sin 4x.$

21. а) $y''' + y'' = 49 - 24x^2,$

б) $y'' - 5y' + 6y = e^{-x} \cdot (32x - 3),$

в) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 5x.$

22. а) $y''' - 2y'' - 3y' = 3x^2 + x - 4,$

б) $y''' - 6y'' + 9y' = 4x \cdot e^x,$

в) $y'' + 9y = 2\cos 7x - 3\sin 7x.$

23. а) $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1,$

б) $y''' - 8y'' + 16y' = (8x - 12) \cdot e^{2x},$

в) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

24. а) $y^{IV} + y''' = x,$

б) $y''' - y'' - 2y' = -(8x + 4) \cdot e^{-x},$

в) $y'' - 4y' + 8y = e^{3x} \cdot (2\sin x - \cos x).$

25. а) $y''' - 2y'' = 6x + 5,$

б) $y''' + 5y'' + 4y' = (16x + 1) \cdot e^x,$

в) $y^{IV} - 16y = 3e^x (\sin x + \cos x).$

26. а) $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3,$

б) $y''' + 10y'' + 25y' = (8x - 3) \cdot e^{5x},$

в) $y'' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 4x.$

27. а) $y''' - 2y'' + y' = (x-1)^2$,

б) $y'' + 6y' + 13y = (1-7x) \cdot e^{3x}$,

в) $y''' + 2y'' - 3y' = e^{-2x} \cdot \cos 8x$.

28. а) $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$,

б) $y''' + 27y = e^{-x} \cdot (2x+5)$,

в) $y'' + y' - 6y = 10\cos x$.

29. а) $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 7$,

б) $y''' + y'' + 9y' + 9y = 16x \cdot e^x$,

в) $y'' + 4y' + 8y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.

30. а) $y^{IV} + 2y''' = 12x + 1$,

б) $y''' + 4y'' + 3y' = 4e^{-x} \cdot (1-x)$,

в) $y'' - 2y' + 5y = e^{2x} \cdot (-\sin x + 2\cos x)$.

Контрольные вопросы

I. Какой вид имеет линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами? Чем отличается однородное линейное уравнение от неоднородного?

II. Что называется характеристическим уравнением, соответствующим линейному однородному дифференциальному уравнении?

III. Что такое фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения $n^{го}$ порядка?

IV. Что такое определитель Вронского решений линейного однородного дифференциального уравнения $n^{го}$ порядка?

V. Как строиться общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $n^{го}$ порядка по фундаментальной системе решений?

VI. Какую структуру имеет общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $n^{го}$ порядка?

VII. В чем состоит метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) интегрирования линейного дифференциального уравнения $n^{го}$го порядка?

VIII. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов для нахождения частных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения $n^{го}$ порядка?

Литература

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 271с.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч. II – М.: Высшая школа, 1986. – 463с.
3. Еругин Н. П., Штокало И.З., Бондаренко П.С. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Вища школа, 1974. – 471с.
4. Киселев А. И., Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая школа, 1978. – 278с.
5. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике.– М.: Высшая школа, 1983.–175с.
6. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 766с.
7. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие.– СПб: Издательство «Лань», 2002. – 432с.
8. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 254с.
9. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 279с.
10. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985. – 126с.
11. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике.–М.: Высшая школа, 2001. – 304с.

Литература

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 271с.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч. II – М.: Высшая школа, 1986. – 463с.
3. Еругин Н. П., Штокало И.З., Бондаренко П.С. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Вища школа, 1974. – 471с.
4. Киселев А. И., Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая школа, 1978. – 278с.
5. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике.– М.: Высшая школа, 1983.–175с.
6. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 766с.
7. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие.– СПб: Издательство «Лань», 2002. – 432с.
8. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 254с.
9. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 279с.
10. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985. – 126с.
11. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике.–М.: Высшая школа, 2001. – 304с.

НУЖЕН ДРУГОЙ ПОСЛЕДНИЙ ЛИСТ

Владимир Данилович Гунько, Людмила Юрьевна Суховеева,
Виталий Михайлович Смоленцев

Дифференциальные уравнения. Примеры и типовые задания

Подписано в печать . .2005г. Бумага типографическая. Формат $60 \times 84\, ^1\!/_{16}$. Тираж 500 экз. П. л. – , учет. – изд. л – 6,1. Заказ №

Редакционно-издательский отдел и типография Кубанского государственного аграрного университета
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13