МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Кубанский государственный аграрный университет»

Учетно-финансовый факультет

Кафедра статистики и прикладной математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ЗАДАНИЯ

для контрольной работы студентам заочного факультета экономических специальностей

Краснодар – 2013

Задания по контрольной работе разработаны профессором Бондаренко П. С., профессором Кацко И. А., старшим преподавателем Стеганцовой Е. Д., старшим преподавателем Соловьевой Т. В.

Задания рассмотрены и рекомендованы к изданию кафедрой статистики и прикладной математики Кубанского государственного аграрного университета, протокол № 10 от 24 июня 2013 г. Утверждены методической комиссией учетно-финансового факультета КГАУ, протокол № 11 от 27 июня 2013г.

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения теории вероятностей и математической статистики является освоение студентами математического аппарата, необходимого для успешного овладения учебных дисциплин: эконометрики, статистики, финансового анализа, математического моделирования, теории рисков и других дисциплин. Должны быть выработаны умения применять выводы и положения теории вероятностей и математической статистики при решении практических задач по экономическим специальностям, получены навыки самостоятельной работы над учебной и специальной литературой, развито логическое мышление.

Программа курса «Теория вероятностей и математическая статистика».

1. Предмет и задачи теории вероятностей и математической статистики. Случайные события. Классификация событий. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Вероятность и относительная частота. Основные формулы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и гипотез. Схема Бернулли.
2. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Функция распределения и её свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, их свойства.
3. Непрерывные случайные величины. Функция распределения случайной величины и её свойства. Плотность распределения случайной величины и её свойства. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины;
4. Законы распределения вероятностей. Равномерное распределение. Нормальное распределение и его свойства. Правило трех сигм. Показательное распределение.
5. Случайные векторы. Закон распределения. Числовые характеристики случайных векторов. Коэффициенты корреляции.

6. Функции случайных величин и случайных векторов, их законы распределения.
7. Закон больших чисел и предельные теоремы. Теорема Чебышева и устойчивость средних. Теорема Бернулли и устойчивость относительных частот. Центральная предельная теорема Ляпунова.
8. Статистический (вариационный) ряд распределения. Построение и графическое изображение ряда распределения. Средняя арифметическая и дисперсия ряда распределения, их свойства. Моменты ряда распределения и связь между ними. Определение характеристик ряда распределения способом моментов. Эмпирическое и теоретическое распределения.
9. Генеральная совокупность и выборка. Статистические оценки выборочной совокупности и их свойства. Несмещенные и состоятельные оценки центра распределения и дисперсии. Точность оценок. Доверительная вероятность, доверительный интервал. Доверительные оценки параметров нормального распределения при случайном отборе. Доверительные оценки вероятности.
10. Проверка статистических гипотез. Понятие и виды статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Критерий и критическая область. Ошибки первого и второго рода. Критерий согласия Пирсона. Проверка гипотез о равенстве средних и долей.
11. Дисперсионный анализ. Модели дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ. Многофакторный дисперсионный анализ. Оценка влияния одновременно действующих факторов.
12. Корреляционно-регрессионный анализ. Функциональная и корреляционная зависимость. Определение параметров линейного уравнения регрессии методом наименьших квадратов. Коэффициент корреляции и его свойства. Определение параметров нелинейных уравнений регрессии методом наименьших квадратов. Корреляционное отношение и его свойства. Понятие о множественной корреляции.

13. Временные ряды. Анализ составляющих. Методы наименьших квадратов и скользящей средней. ,

14. Основные понятия многомерного анализа. Методы факторного анализа, область их применения. Метод главных компонент. Классификация объектов, описываемых количественными и качественными признаками. Примеры кластерного анализа.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1997, 2003. – 479с.

2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. / В. Е. Гмурман. – 8-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 405с.

2. Горелова Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel, Ростов н/Д.: Феникс,2006. – 475 с.

3. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: КНОРУС, 2009.– 384 с.

4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573с.

2. Калинина В. Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика М.: Высшая школа, 1998. – 336 с.

4. Теория статистики с основами теории вероятностей./ И.И. Елисеева, В.С. Князевский, Л.И. Новорожкина, Э.А. Морозова; Под ред. И.Н. Елисеевой.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 446с.

5. Солодовников А.С. Математика в экономике: учебник. В 3-х ч. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика / А.А.Солодовников, В.А. Бабайцев, А.И. Браилов. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 464с.

6. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под общ. ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М. 2008. – 656с.

Задания и методические указания к выполнению контрольной работы

В соответствии с учебным планом студенты экономических специальностей Кубанского государственного аграрного университета по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» выполняют одну письменную контрольную работу, соответствующую первой букве фамилии студента и последней цифре номера зачетной книжки. Шифр проставляется на первой странице контрольной работы после фамилии студента.

Контрольные работы, выполненные не по соответствующему варианту, преподавателем не проверяются.

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, оставляя на каждой странице поле для замечаний рецензента.

Рекомендуется следующий порядок выполнения контрольной работы: полностью записывается условие решаемой задачи, в которой вместо общей части проставляются конкретные задания; подробно, с необходимыми пояснениями, теоремами, формулами, излагается решение задачи. По результатам решения каждого задания записывается ответ или даётся вывод по результатам расчётов.

В конце контрольной работы приводится список использованной литературы, проставляется дата выполнения контрольной работы и подпись студента.

Таблица 1 - Варианты и номера задач для контрольной работы

Первая буква фамилии студента	Последняя цифра шифра зачетной книжки	Номера задач
А,Б	0;1;2;3;4	1,21,41,61,81,101
	5;6;7;8;9	2,22,42,62,82,102
В,Г	0-4	3,23,43,63,83,103
	5-9	4,24,44,64,84,104
ДДЖ,3	0-4	5,25,45,65,85,105
	5-9	6,26,46,66,86,106
И,К	0-4	7Д7,47,67,87,107
	5-9	8,28,48,68,88,108
л,м	0-4	9,29,49,69,89,109
	5-9	10,30,50,70,90,110
Н,0	0-4	11,31,51,71,91,111
	5-9	12,32,52,72,92,112
П,Р	0-4	13,33,53,73,93,113
	5-9	14,34,54,74,94,114
С,Т	0-4	15,35,55,75,95,115
	5-9	16,36,56,76,96,116
У,Ф,Х,Ц	0-4	17,37,57,77,97,117
	5-9	18,38,58,78,98,118
Остальные буквы	0-4	19,39,59,79,98,119
	5-9	2^40,60.80,100,120

Методические рекомендации к решению типовых задач

До непосредственного выполнения заданий индивидуального варианта контрольной работы студенту рекомендуется ознакомиться с программой дисциплины, подобрать и изучить рекомендуемую учебную литературу, проработать конспект лекций по изучаемой дисциплине, а затем приступить к решению задач. Контрольная работа содержит задания по всем основным разделам изучаемой дисциплины.

Задачи 1-20 решаются с использованием определения вероятности события и основных теорем теории вероятностей.

Случайным называют событие, которое в результате опыта (испытания) может либо произойти, либо не произойти. При решении задач используются понятия: совместных и несовместных, зависимых и независимых событий; суммы и произведения событий; полной группы событий.

События обозначаются буквами A,B,C,..., или $A_1,A_2,A_3,..,A_n$. Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$. Вероятностью события A называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию A к общему числу элементарных событий. Предполагается, что все элементарные исходы являются несовместными и равновозможными.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных событий (исходов), благоприятствующих событию A; n – общее число элементарных событий (исходов).

При решении задач используются формулы комбинаторики. Если имеется множество, состоящее из каких либо элементов, то из них можно составить различные подмножества или комбинации.

Размещениями из n элементов по k элементам, называются комбинации, образованные из n различных элементов, отличающиеся друг от друга или составом, или порядком своих элементов. Общее число размещений из n элементов по k элементам определяется по формулам:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \text{ или } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Перестановками из k элементов называются комбинации, содержащие все k элементов, отличающиеся друг от друга порядком своих элементов. Число перестановок определяется по формуле: $P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = k!$.

Сочетаниями из n элементов по k элементам, называются комбинации, отличающиеся составом своих элементов, то есть хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k элементам определяется по формулам:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Большинство задач решается с использованием основных теорем: а) вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий; б) вероятность произведения двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий; в) вероятность произведения нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех других событий, найденных в предположении, что предыдущие события уже произошли; г) вероятность появление хотя бы одного из n независимых событий равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий:

а) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i$;

б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n)$;

в) $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$; $P(A_1A_2A_3 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdots P(A_n/A_1A_2 \cdots A_{n-1})$;

г) $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdots P(\overline{A}_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$; $P(A) = 1 - q^n$, если $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q$.

Задачи 13-20 решаются по формулам полной вероятности и гипотез.

Если событие А может наступить вместе с одним из несовместных событий $B_1, B_2, B_{3,} \dots, B_n$, образующих полную группу и называемых гипотезами, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей гипотез $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ на соответствующие условные вероятности события А.

$$\text{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i).$$

Известно, что событие А, вероятность появления которого найдена по формуле полной вероятности, уже произошло. Тогда вероятность наступления какой то из гипотез$B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ при условии осуществления события А находится по формулам Бейеса:

$$\text{P}(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)} \; .$$

Пример 1. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,6, для второго - 0,5, для третьего - 0,1. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним студентом; б) двумя студентами; в) хотя бы одним студентом; г) тремя студентами.

Решение. Обозначим события: A_1 - первый студент сдаст экзамен на «отлично»; A_2- второй студент сдаст экзамен на «отлично»; A_3- третий студент сдаст экзамен на «отлично». По условию: $P(A_1) = 0,6$; $P(A_2) = 0,5$; $P(A_3) = 0,1$.

а) Пусть А - событие, сдаст экзамен на «отлично» только один студент. Значит, один студент должен сдать экзамен на «отлично», а другие два – не сдать экзамен на оценку «отлично». Тогда событие А = $A_1\bar{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Так как события $A_1\bar{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ являются несовместными, а события, между которыми стоит знак умножения, независимыми, то по теоремам сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий имеем:

P(A) = P($A_1\bar{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$) = P($A_1$)$P(\bar{A}_2)P(\overline{A}_3)$ + P($\overline{A}_1$)$P(A_2)P(\overline{A}_3)$ + P($\overline{A}_1$)$P\left(\overline{A}_2\right)P(A_3)$.

Используя значения вероятностей из условия задачи и учитывая, что P($\overline{A}_1$) = 1 – 0,6 = 0,4; P($\overline{A}_2$) = 1– 0,5 = 0,5; P($\overline{A}_3$) = 1– 0,1 = 0,9, то получим P(A) = 0,6 · 0,5 · 0,9 + 0,4 · 0,5 · 0,9 + 0,4 · 0,5 · 0,1 = 0,27 + 0,18 + 0,02 = 0,47.

б) Пусть событие B – сдадут экзамен на «отлично» два студента из трех. Тогда B = $A_1A_2\overline{A}_3$+ $A_1\overline{A}_2A_3$ + $\overline{A}_1A_2A_3$.

По аналогии с предыдущим пунктом имеем:

P(B) = P(A_1)$P(A_2)P(\overline{A}_3)$ + P(A_1)$P\left(\overline{A}_2\right)P(A_3)$ + P($\overline{A}_1$)$P(A_2)P(A_3)$ =

= 0,6 · 0,5 · 0,9 + 0,6 · 0,5 · 0,1 + 0,4 · 0,5 · 0,1 = 0,27 + 0,03 + 0,02 = 0,32.

в) Обозначим через C – событие, сдаст на «отлично» хотя бы один студент из трех. Воспользуемся теоремой вероятности появления хотя бы одного из n независимых событий. P(C) = l – P($\overline{A}_1$)·P($\overline{A}_2$)·P($\overline{A}_3$) = 1 – 0,4·0,5·0,9 = 1– 0,18 = 0,82.

г) Вероятность того, что все три студента сдадут экзамен на «отлично» находится по теореме умножения вероятностей независимых событий.

P($A_1A_2A_3$) = P(A_1) · P(A_2) · P(A_3) = 0,6.0,5. 0.1 = 0,03.

Ответ: а) 0,47; б) 0,32; в) 0,82; г) 0,03.

Пример 2. Группа студентов состоит из 6 юношей и 4 девушек. Наудачу, по схеме без возвращения, отбирается три студента. Какова вероятность того, что будут отобраны: а) три девушки; б) только один юноша; в) хотя бы один юноша.

Решение. Обозначим события: A_1 – первой будет отобрана из группы девушка; A_2 – второй будет отобрана из группы девушка; A_3 – третьей из группы будет отобрана девушка. Тогда $\overline{A}_1$,$\overline{A}_2$,$\overline{A}_3$ – соответственно первым, вторым и третьим из группы будет отобран юноша.

а) Пусть A – событие, что отобраны последовательно три девушки. Тогда A = $A_1A_2A_3$. Так как использована схема без возвращения, то события A_1, A_2, A_3

и, соответственно, $\overline{A}_1$,$\overline{A}_2$,$\overline{A}_3$ являются событиями зависимыми. Используем теорему умножения вероятностей для трех зависимых событий

Р(А) = Р$(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2)$.

По условию: Р(A_1) = $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $P(A_2/A_1) = \frac{4-1}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(A_3/A_1A_2) = \frac{4-1-1}{10-1-1} = \frac{1}{4}$.

Тогда Р(А) = Р$(A_1A_2A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$.

б) Пусть событие В – отобран только один юноша. Так как отбирается один юноша и две девушки, то В =$A_1\bar{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Применим теоремы сложения вероятностей несовместных событий и умножения зависимых событий:

Р(В)=Р$(A_1A_2\overline{A}_3$+$A_1\overline{A}_2A_3$+$\overline{A}_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(\overline{A}_3/A_1A_2)$ + $+P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2/\overline{A}_1) \cdot P(A_3/\overline{A}_1A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

в) Обозначим С - событие, что хотя бы один из отобранных студентов юноша. Тогда $\overline{\text{C}}$ - все три отобранных студента - девушки. События С и $\overline{\text{C}}$ противоположные и образуют полную группу событий Р(С)+Р($\overline{\text{C}}$)=1.

Р($\overline{\text{C}}$) = Р$(A_1A_2A_3)$ = $\frac{1}{30}$ (см. первый пункт).

Тогда Р(С) = l – Р($\overline{\text{C}}$) = $1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

Ответ: а) $\frac{1}{30}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{29}{30}$.

Пример 3. Производственная фирма получает комплектующие изделия от трех поставщиков в соотношении 1:2:3. Известно, что от первого поставщика поступает 80 % изделий высшего качества, от второго 85 % и третьего - 90 %. Определить, что случайно взятое изделие будет высшего качества. Случайно взятое изделие оказалось высшего качества. Найти вероятность того, что оно поступило от третьего поставщика.

Решение. Обозначим через А - событие, что случайно взятое изделие имеет высшее качество. Так как изделия поступают от трех поставщиков, то можно выделить следующие события: B_1-случайно взятое изделие поступило от первого поставщика; B_2- случайно взятое изделие поступило от второго поставщика; B_3- случайно взятое изделие поступило от третьего поставщика.

Тогда P(B_1) = $\frac{1}{1+2+3}$ = $\frac{1}{6}$; P(B_2) = $\frac{2}{1+2+3}$ = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; P($B_3$) = $\frac{3}{1+2+3}$ = $\frac{1}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} B_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$

По условию P(A/B_1) = 0,8; P(A/B_2) = 0,85; P(A/B_3) = 0,9. Так как изделие высшего качества может быть получено от одного из трех поставщиков, то вероятность события A найдем по формуле полной вероятности.

P(A) = $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}85 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 = 0{,}8667.$

Пусть взятое наугад изделие - высшего качества. Найдем вероятность того, что оно поступило от третьего поставщика, т.е. P(B_3/A)

Воспользуемся формулами Байеса: P(B_i/A) = $\frac{P(B_{i)} \cdot P(A/B_i)}{P(A)}$.

P(B_3/A) = $\frac{P(B_3 \cdot P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}9}{0{,}8667}$ = 0,5192.

Ответ: 0,8667; 0,5192.

Пример 4. В двух урнах имеется по шесть шаров, из которых 4 красного и 2 черного цвета. Из первой урны вынимается наудачу один шар и перекладывается во вторую урну. Затем из второй урны вынимают один шар. Найти вероятность, что он красный.

Шар, вынутый из второй урны, оказался красным. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую переложен черный шар.

Решение. Обозначим через А – событие, что шар, взятый из второй урны, красный, через B_1 и B_2 – соответственно события: шар, вынутый из первой урны и переложенный во вторую урну – красный; шар, вынутый из первой урны и переложенный во вторую – черный! Событие А может появиться вместе с одним из несовместных событий B_1 и B_2. Тогда, согласно формулы полной вероятности P(A) = P(B_1) · P(A/B_1) + P(B_2) · P(A/B_2).

$P(B_1)$ – вероятность того, что из первой урны взят и переложен во вторую урну красный шар, $P(B_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$P(B_2)$ – вероятность того, что из первой урны взят и переложен во вторую урну черный шар, $P(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$P(B_1) + P(B_2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$,

$P(A/B_1)$ – вероятность того, что шар, вынутый из второй урны красный, если в нее из первой переложили красный шар: $P(A/B_1) = \frac{4+1}{6+1} = \frac{5}{7}$.

$P(A/B_2)$ – вероятность того, что шар вынутый из второй урны красный, если в нее из первой переложили черный шар: $P(A/B_2) = \frac{4}{7}$. Тогда $P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{3}$.

Пусть шар, извлеченный из второй урны, оказался красным. Значит событие А уже произошло. Событие (B_2/A) означает, что из первой урны во вторую переложен черный шар, при условии, что из второй урны был вынут красный шар. Вероятность этого события находится по формуле вероятностей гипотез:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{7}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{7}$.

Задачи 21-40 решаются по теме: «Дискретные случайные величины».

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения, число которых может быть как конечным, так и бесконечным, но счётным. Обычно дискретная случайная величина представляется в виде ряда (закона) распределения, как упорядоченная совокупность значений дискретной величины и соответствующих этим значениям вероятностей. Дискретные случайные величины могут задаваться также биномиальным, геометрическим, гипергеометрическим, пуассоновским распределениями и некоторыми другими распределениями.

Графически дискретная случайная величина изображается в виде многоугольника распределения, причем по оси ординат откладывают значения дискретной случайной величины, а по оси абсцисс – вероятности этих значений.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из случайных величин не зависит от того, какие значения приняли другие случайные величины. В противном случае случайные величины называются зависимыми.

Важнейшими числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, которые определяются по формулам:

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $p_i \geq 0$;

$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2$ или $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$;

$б(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 5. Случайная величина X задана законом распределения

X	1	7	10
P	0,3	0,2	0,5

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений случайной величины X на соответствующие им вероятности.

Следовательно, $M(X)$ = l·0,3+7·0,2+l0·0,5 = 6,7.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины X от ее математического ожидания.

$D(X) = M(X–M(X)^2$; $D(X) = (1–6,7)^2·0,3+(7–6,7)^2·0,2+(10–6,7)^2·0,5 = 15,21$.

Дисперсия может быть найдена также по формуле $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0,3 + 7^2 \cdot 0.2 + 10^2 \cdot 0,5 = 60,1$;

$$D(X) = 60{,}1 - 6{,}7^2 = 15{,}21.$$

Среднее квадратическое отклонение есть корень квадратный из дисперсии случайной величины X. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$.

Пример 6. Независимые случайные величины X и У заданы законами распределения:

X	1	3	5
P(x)	0,2	0,5	0,3

У	- 2	4
P(y)	0,4	0,6

Составить законы распределения случайных величин: Z=X+Y и У=XУ. Начертить график распределения вероятностей случайной величины Z.

Решение. Значения случайной величины Z равны сумме возможных значений случайной величины X с каждым возможным значением случайной величины Y, а вероятности значений случайной величины Z равны произведениям вероятностей слагаемых.

Z	1+(-2)	1+4	3+(-2)	3+4	5+(-2)	5+4
P(z)	0,2·0,4	0,2·0,6	0,5·0,4	0,5·0,6	0,3·0,4	0,3·0,6

Z	- 1	5	1	7	3	9
P(z)	0,06	0,14	0,20	0,30	0,12	0,18

Следует упорядочить значения случайной величины Z.

Z	- 1	1	3	5	7	9
P(z)	0,06	0,20	0,12	0,14	0,30	0,18

Значения случайной величины V равны произведениям возможных значений случайной величины X на каждое возможное значение случайной величины Y, а вероятности значений случайной величины V равны произведениям вероятностей значений сомножителей.

V	1·(-2)	1·4	3·(-2)	3·4	5·(-2)	5·4
P	0,2·0,4	0,2·0,6	0,5·0,4	0,5·0,6	0,3·0,4	0,3·0,6

или

V	-2	4	-6	12	- 10	20
P	0,0/8	0,12	0,20	0,30	0,12	0,18

или

V	-10	-6	- 2	4	12	20
P	0,12	0,20	0,08	0,12	0,30	0,18

Построим график распределения вероятностей случайной величины Z.

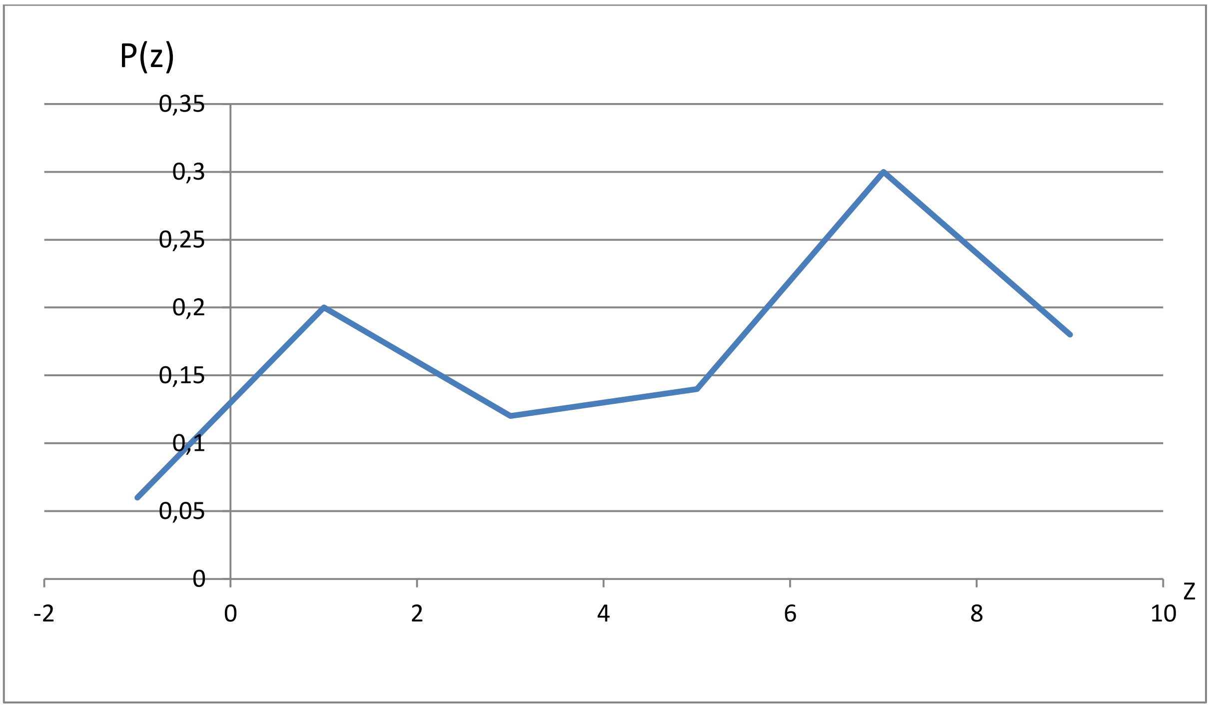

Рисунок 1– Полигон распределения вероятностей дискретной случайной величины Z.

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Z.

M(Z) = $\sum_{i=1}^{n} z_i p(z_i)$ = -1·0,06+1·0,20+3·0,12+5·0,14+7·0,30+9·0,18 = 4,92.

D(Z) = M(Z^2) − $M^2(Z)$ = (-1^2)·0.06+(1^2) · 0.20 + (3^2) · 0.12 + (5^2) · 0.14 + (7^2) · 0.30 + (9^2) · 0.18 – 4.92^2 = 9.9136; σ(X) = $\sqrt{9{,}9136}$ = 3,15.

Пример 7. Известно, что M(X)=8; M(У)=5; D(X)=4; D(Y)=3. Найти M(W), D(W) и ϭ(W), если W = 5X–2Y.

Решение. Воспользовавшись свойствами математического ожидания и дисперсии случайной величины, получим: M(W) = M(5X–2Y) = M(5X)–M(2У) = 5M(X)–2M(У) = 5·8–2·5 = 30; D(W) = D(5X–2Y) = D(5X)+D(2У) = 25D(X)+4D(У) = 25·4 + 4·3 = 112; ϭ(W) = $\sqrt{D(W)} = \sqrt{112}$ = 10.6.

Задачи 41-60 решаются по теме «Непрерывные случайные величины».

.Непрерывные случайные величины задаются функцией распределения вероятностей случайной величины F(x) или функцией плотности вероятностей f(x). Причем по определению F(x) = P(X < x), f(x) = $F'(x)$. Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) 0 ≤ F(x) ≤ 1;

2) является неубывающей функцией, то есть, если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$;

3) вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определенное значение равна нулю;

4) если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу(a,b), то F(x) = 0 при x$\leq a$ и F(x) = 1 при x$> b$. Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу $(-\infty, \infty)$, то $F(-\infty) = 0$; $F(\infty) = 1$.

Плотность вероятностей непрерывной случайной величины обладает свойствами:

1) f(x) ≥ 0, т. е. является неотрицательной функцией;

2) несобственный интеграл от плотности вероятностей в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Зная функцию плотности вероятностей f(x) можно найти функцию распределения F(x) по формуле:

F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал находится по формулам:

$$P\ (a\leq X<b) = F(b) - F(a);\ P(a<X<b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Если необходимо найти числовые характеристики непрерывных случайных величин, то применяются формулы:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ или } M(X) = \int_a^b xf(x)dx,\ x\in (a;b)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(x)\ ,$$

$$\text{или } D(X)=\int_a^b \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X),\ x\in (a;b).$$

При решении практических задач часто приходится использовать определенные функции плотности распределения, к важнейшим из которых относятся нормальное, равномерное, показательное.

Пример 8. Непрерывная случайная величина X задана функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ \text{при}\ x \leq 0, \\ \frac{x^3}{125},\text{при}\ 0 < x \leq 5, \\ 1,\ \text{при}\ x > 5. \end{cases}$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (2;3); б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Функции распределения изобразить графически.

Решение. Так как по условию задачи а = 2, в = 3, то

$$P(2\leq X< 3) = F(3) - F(2)\ = \frac{x^3}{125}\Big|_{x=3} - \frac{x^3}{125}\Big|_{x=2} = \frac{27}{125} - \frac{8}{125} = \frac{19}{125} = 0{,}152.$$

Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \frac{3}{125}x^2, \text{при } 0 < x \le 5, \\ 0, \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал (а; в), можно найти, зная функцию плотности вероятностей.

$$P(2 < x < 3) = \int_2^3 \frac{3x^2}{125} dx = \frac{3}{125} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{27}{125} - \frac{8}{125} = \frac{19}{125} = 0{,}152.$$

Построим графики функций F(x) и f(x).

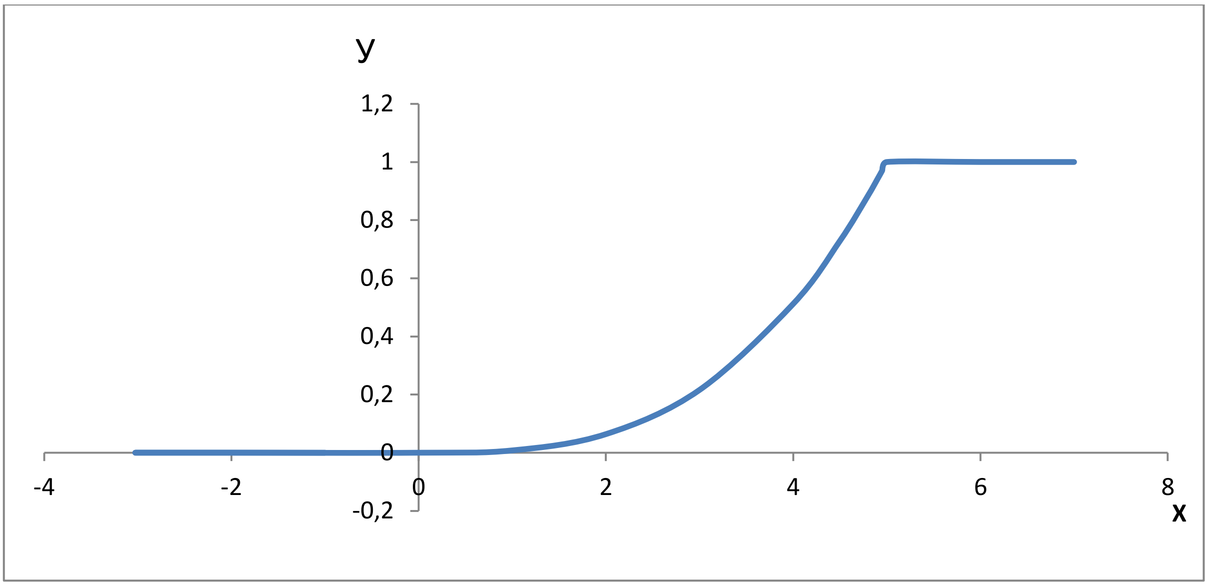

Рисунок 2 – Функция распределения случайной величины X (интегральная функция)

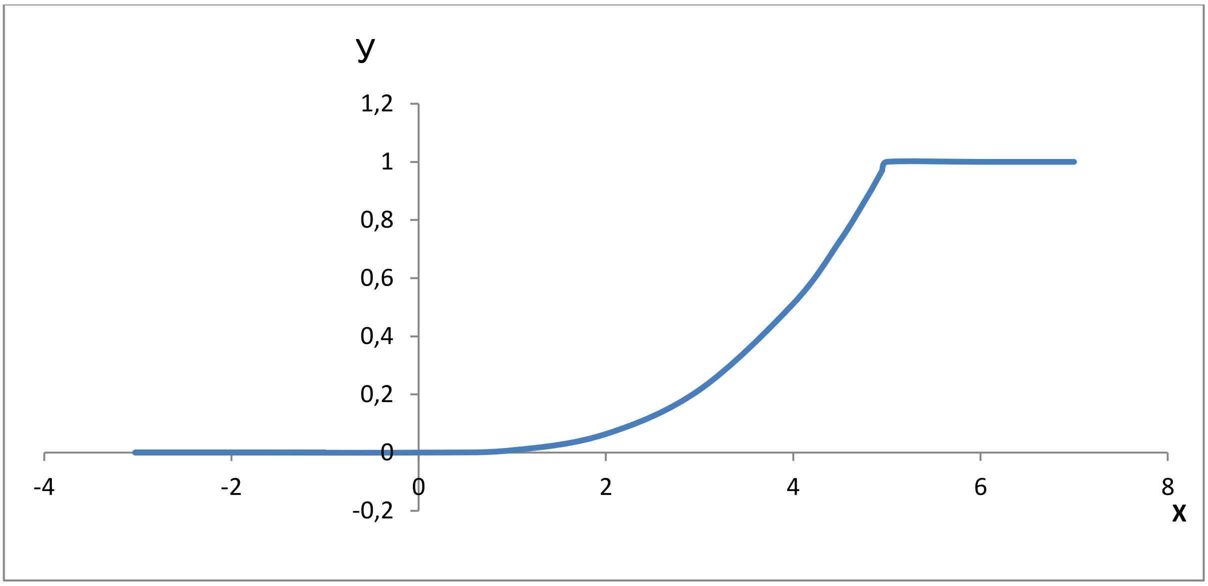

Рисунок 2 – Функция распределения случайной величины X (интегральная функция)

Найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины X. Следует обратить внимание на то, что случайная величина задана на интервале (0;5).

M(x)=$\int_0^5 \mathrm{x}\cdot\frac{3}{125}\mathrm{x}^2\,dx=\frac{3}{125}\int_0^5 \mathrm{x}^3\,dx=\ \frac{3}{125}\cdot\frac{\mathrm{x}^4}{4}\Big|_0^5=\frac{3}{5^3}\cdot\frac{5^4}{4}=\frac{15}{4}=3\,\frac{3}{4}=3{,}75.$

D(x)= $\int_0^5 x^2\cdot\frac{3}{125}\mathrm{x}^2\,dx=\frac{3}{125}\int_0^5 \mathrm{x}^4\,dx-14{,}0625=\frac{3}{125}\cdot\frac{\mathrm{x}^5}{5}\Big|_0^5-14{,}0625=15-14{,}0625=0{,}9375.$

$\sigma(\mathrm{x})=\sqrt{D(\mathrm{x})}=\sqrt{0{,}9375}=0{,}9682.$

Задачи 61-80 решаются по теме «Вариационные ряды распределения».

Исходя из целей и задач конкретного исследования, производится статистическое наблюдение или сбор данных по всем единицам однородной совокупности или по части единиц. Генеральной называют всю совокупность единиц, которая подлежит изучению, Совокупность единиц, отобранная определенным образом из генеральной, называется выборочной совокупностью. После сбора данных по отобранным или всем единицам совокупности производится их упорядочение и представление в виде вариационного ряда распределения.

Вариационным рядом распределения называется упорядоченный ряд значений изучаемого признака (x_i,) и соответствующих им частот (n_i,) или частостей (относительных частот) (w_i). Вариационный ряд строится как по дискретным, так и непрерывным признакам. Если число значений дискретного признака велико или признак непрерывный, то строится интервальный вариационный ряд, в котором значения признаки задаются интервалами значений.

Для составления ряда распределения по соответствующему варианту заданий, необходимо взять или рассчитать индивидуальные значения изучаемого признака по каждому из предприятий, если они непосредственно не приведены в приложении 1.

Пример 9. Пусть необходимо составить ряд распределения 50 хозяйств по среднегодовой численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий. Рассчитаны значения данного признака по каждому предприятию:

2,57	2,33	6,28	7,16	12,68	4,34	3,20	5,46	4,38	6,65
2,89	4,14	4,03	3,31	5,61	3,48	3,94	5,40	4,77	4,81
3,29	4,42	5,29	1,25	5,56	2,91	3,66	2,72	5,88	6,87
3,87	3,79	4,50	2,24	5,34	4,28	3,05	3,52	6,59	6,33
6,13	3,62	4,31	4,85	5,71	7,65	4,29	4,10	4,74	4,74

Так как значения признака заполняют промежуток значений, то стоится интервальный ряд распределения с равными интервалами. Число групп, на которые разбивается вариационный ряд, определяется по следующей формуле:

$$k = 1+3,322 \lg n; \quad k = 1+3,322 \lg 50 = 6,6.$$

Учитывая небольшой объем совокупности предприятий, примем число групп равным 6, значит k = 6.

Величина интервала находится по формуле

$$h= \frac{x_{max}-x_{min}}{k},$$

где X_{min}и X_{max}, соответственно, наименьшее и наибольшее значения признака.

Величина интервала округляется обычно в сторону увеличения до принятой точности измерения признака. Если крайние значения значительно отличаются от рядом расположенных значений, то в приведенной формуле они не учитываются, тогда строится ряд распределения с открытыми крайними интервалами. Например, значение 1,25 существенно отличается от следующего за ним 2,24, а также 12,68 существенно отличается от предыдущего значения 7,65, тогда:

$$h=\frac{7,65-2,24}{6} = 0,902.$$

Округлив величину интервала, получим h = 0,9. Границы интервалов составят: 2,2+0,9 = 3,1; 3,1+0,9 = 4,0; 4,0+0,9 = 4,9; 4,9+0,9 = 5,8; 5,8+0,9 = 6,7; 6,7+0,9 = 7,6.

Так как наименьшее значение (1,25) и наибольшее (12,68) в формуле были отброшены, а величина h округлена в строну уменьшения, то чтобы учесть все значения вариационного ряда, крайние интервалы берутся открытыми. Подсчитав число хозяйств, попавших в соответствующий интервал, составляем вариационный ряд распределения (таблица 2).

Таблица 2 - Распределение сельскохозяйственных предприятий по численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий

Группы предприятий по численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел.	Число предприятий в группе (n_i)	В % к итогу (w_i)	Накопленное число предприятий (S_i)	В % к итогу
до 3,1	7	14.0	7	14.0
3,1 – 4,0	11	22.0	18	36.0
4,0 – 4,9	15	30.0	33	66.0
4,9 – 5,8	7	14.0	40	80.0
5,8 – 6,7	6	12.0	46	92.0
Свыше 6,7	4	8.0	50	100.0
ИТОГО	50	100.0		

Графически ряд распределения изображается в виде полигона, гистограммы или кумуляты распределения. На оси абсцисс откладываются значения изучаемого признака (границы интервалов), а на оси ординат число хозяйств или накопленное число хозяйств. Н

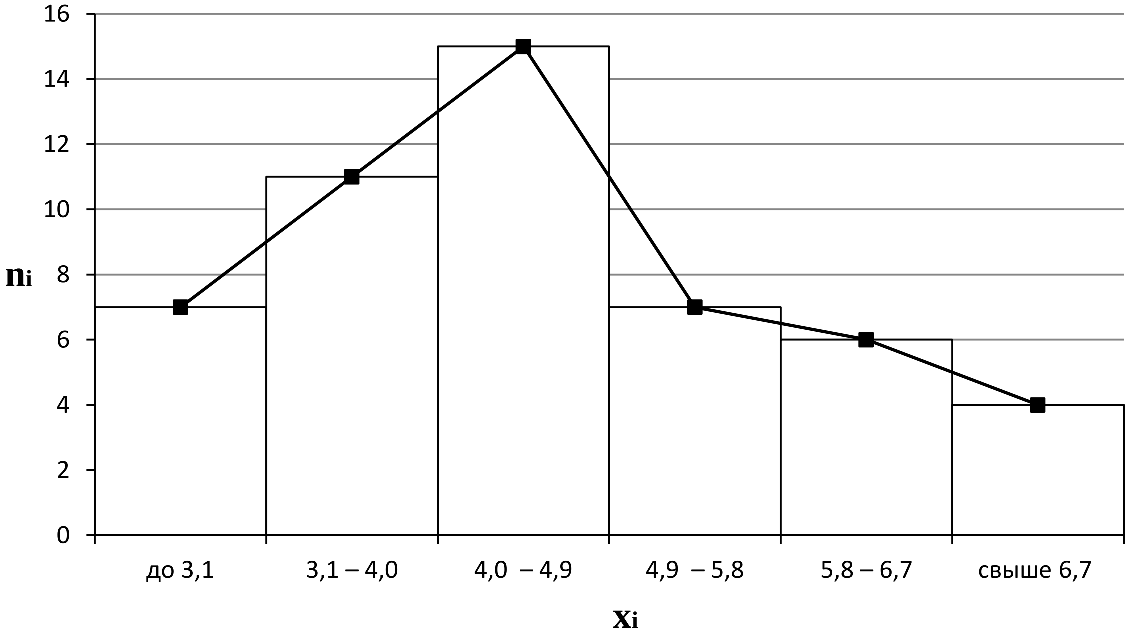

Рисунок 4 – Полигон и гистограмма распределения предприятий по численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел.

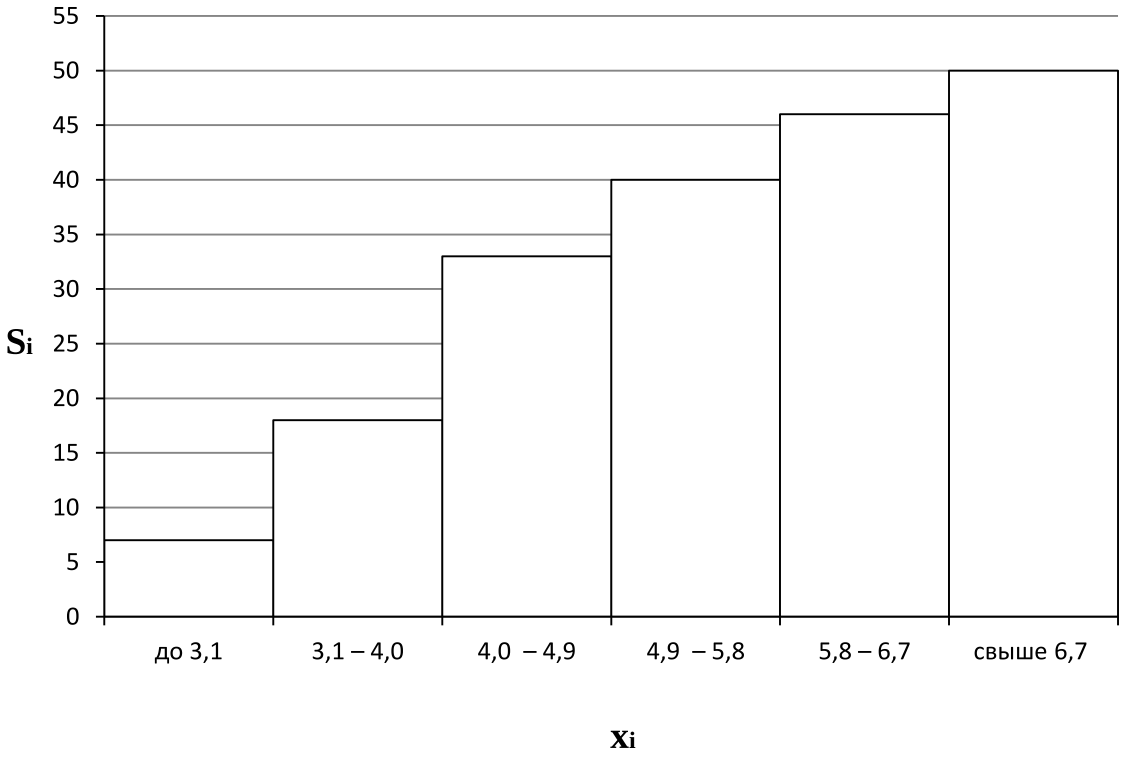

Рисунок 5 – Кумулята распределения предприятий по численности работающих на 100 га сельхозугодий

Рассчитаем основные характеристики вариационного ряда, к которым относятся мода, медиана, среднее значение, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Модой называется значение признака, имеющее наибольшую частоту в ряду распределения. Вариационные ряды могут иметь одну или несколько модальных значений. Так как в примере распределение одномодальное, то мода находится в интервале с самой большой частотой (4,0 –4,9).

В рядах с равными интервалами мода внутри модального интервала определяется по формуле.

$$\text{Mo} = \text{X}_{\text{Mo}} + \text{h}\,\frac{n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1}}{(n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1}) + (n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}+1})},$$

где Хмо - нижняя граница модального интервала;

$n_{\text{Mo}}, n_{\text{Mo}-1}, n_{\text{Mo}+1}$ - частоты модального, предмодального и послемодального интервалов, соответственно.

$$\text{Mo} = 4 + 0{,}9 \cdot \frac{15-11}{(15-11)+(15-7)} = 4{,}3.$$

Значит, наиболее часто встречаются предприятия с численностью работников на 100 га сельскохозяйственных угодий 4,3 человека.

Медианой называется значение признака, находящееся в середине ряда распределения. В интервальном ряду она находится по формуле:

$$\text{Me} = \text{X}_{\text{Me}} + h\,\frac{0{,}5n - S_{Me-1}}{n_{Me}},$$

где X_{Me} – нижняя граница медианного интервала;

$S_{\text{Me}-1}$ – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me} – частота медианного интервала.

В примере 0,5n = 0,5· 50 = 25. По накопленным частотам видно, что медиана находится в интервале (4,0 – 4,9), поэтому Хме = 4,0, тогда

$$\text{Me} = 4{,}0 + 0{,}9\,\frac{25-18}{15} = 4{,}42.$$

Значит, половина сельскохозяйственных предприятий имеет численность работников на 100 га сельхозугодий до 4,42 чел., а половина хозяйств более 4,42 чел.

Для расчета средней величины признака, дисперсии, среднего квадратического отклонения составляется вспомогательная таблица 3. Так как в примере представлен вариационный ряд с открытыми крайними интервалами, то до расчета обобщающих характеристик их необходимо закрыть. Первый интервал до 3,1: 3,1 – 0,9 = 2,2, его границы 2,2 – 3,1. Последний интервал свыше 6,7: 6,7 + 0,9 = 7,6, его границы 6,7 – 7,6.

Таблица 3 - Вспомогательная таблица для расчета средней и дисперсии ряда распределения

Группы предприятий по численности работников на 100 га сельхозугодий, чел.	Число хозяйств в группе (n_i)	Среднее значение интервала (x_i)	$x_i n_i$	$\lvert x_{i-}\bar{x}\rvert n_i$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
2,2 – 3,1	7	2,65	18,55	13,37	25,5367
3,1 – 4,0	11	3,55	39,05	11,11	11,2211
4,0 – 4,9	15	4,45	66,75	1,65	0,1815
4,9 – 5,8	7	5,35	37,45	5,53	4,3687
5,8 – 6,7	6	6,25	37,5	10,14	17,1366
6,7 – 7,6	4	7,15	28,6	10,36	26,8324
Итого	50		227,9	52,16	85,276

Для определения среднего значения признака вначале находят среднее значение каждого интервала, как полусумму границ интервала.

Среднее значение признака составит:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{227,9}{50} = 4,56.$$

Найдем показатели вариации.

Размах вариации R= $X_{max} - X_{min}$= 12,68 – 1,25 = 11,43.

Среднее линейное отклонение $L=\frac{\sum|x_i-\bar{X}|}{n} = \frac{52.16}{50} = 1.04$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

$\sigma^2 - \frac{\sum n_i(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{85,276}{50} = 1,70552$; $\sigma = \sqrt{1,70552} = 1,306 \approx 1,31$.

Коэффициент вариации

$$V=\frac{\sigma}{x}\cdot 100 = \frac{1,31}{4,56}\cdot 100 = 28,7\%.$$

Таким образом, средняя численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий по совокупности предприятий составила 4,56 чел. Плотность работников в среднем колебалась в промежутке $\overline{x} \pm$ σ = 4,56 ± 1,31, т.е. от 3,25 до 5,87 чел. на 100 га сельхозугодий. Этот интервал, а также коэффициент вариации показывают, что имеются большие различия в обеспеченности предприятий рабочей силой.

Задачи 81-100 решаются по теме «Выборочный метод».

Если исследуется совокупность единиц, то изучать можно все единицы совокупности без исключения или же какую-то их часть. При выборочном обследовании отбирается определенным образом часть генеральной совокупности единиц, а показатели, найденные по отобранной части единиц, должны достаточно точно характеризовать всю совокупность единиц. На практике наиболее часто используется случайный способ отбора при котором единицы совокупности отбираются случайным образом, обычно методом жеребьёвки из генеральной в выборочную совокупность. Случайный отбор осуществляется повторным или бесповторным способом. При бесповторном отборе, отобранная и обследованная единица генеральной совокупности, назад в генеральную совокупность не возвращается, а при повторном – возвращается.

По выборочной совокупности можно определить приближенные значения характеристик генеральной совокупности, которые называются статистическими оценками параметров генеральной совокупности. Для того, чтобы статистическая оценка достаточно точно характеризовала истинный параметр генеральной совокупности, она должна обладать свойствами несмещенности, эффективности и состоятельности.

Статистическая оценка $\hat{\theta}$ называется несмещенной, если математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру генеральной совокупности θ при любом объеме выборки:

$$M(\hat{\theta}) = \hat{\theta}.$$

Статистическая оценка называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди оценок одного класса/

Состоятельной называют оценку $\hat{\theta}$, которая сходится по вероятности к истинному значению параметра генеральной совокупности θ:

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon) = 1, (\varepsilon > 0).$$

Оценка параметра генеральной совокупности по выборке может быть точечной, задаваемой одним числом, и интервальной, задаваемой двумя числами, концами интервала.

В математической статистике доказано, что выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней, а выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии.

$$M(\bar{X}_{\text{в}}) = \bar{X}_{\text{г}}; \quad M(D_{\text{в}}) = \frac{n-1}{n} D_{\text{г}};$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_{\text{в}})^2 n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_{\text{в}})^2 n_i}{n-1};$$

где $\bar{X}_{\text{в}}$ – выборочная средняя;

$\bar{X}_{\text{г}}$ – генеральная средняя;

$D_{\text{в}}$ –выборочная дисперсия;

$D_{\text{г}}$ – генеральная дисперсия;

s^2 – исправленная выборочная дисперсия, являющаяся несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Пример 10. Считая данные примера 9 результатом 10% случайной бесповторной выборки, с доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий во всей совокупности предприятий. Сколько предприятий необходимо отобрать, чтобы предельная ошибка выборки уменьшилась в 1,5 раза.

В качестве точечной оценки генеральной средней необходимо взять выборочную среднюю, являющуюся несмещенной оценкой генеральной средней. По выборочной совокупности предприятий средняя численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий составляет 4,56 человек. Значит $\bar{X}_г$ = 4,56.

В примере 9 $\sigma_в^2$= 1,70552; n=50, значит s^2 = 1,70552$\cdot\frac{50}{49}$ = 1,74; $\frac{n}{N}$=0,1;

N = $\frac{n}{0,1} = \frac{50}{0,1} = 500.$

.

Величина доверительного интервала для средней арифметической определяется величиной предельной ошибки выборки $\Delta_{\bar{x}}$, найденной при заданном уровне доверительной вероятности γ.

Предельная ошибка выборки для средней определяется по формуле:

$$\Delta_{\bar{x}} = \text{t}\cdot\sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

Учитывая, что объём выборочной совокупности п = 50, то значение t находится по таблицам распределения t – Стьюдента при заданном уровне доверительной вероятности γ (или уровня значимости α для двухсторонней критической области) и числе степеней свободы k = n-1. При решении задач уровень доверительной вероятности принять равным 0,95. Тогда по таблице при α =0,05, k = 50–1 = 49, t = 2,01.

$$\Delta_{\bar{x}} = 2{,}01\cdot\sqrt{\frac{1{,}74}{50}\left(1-\frac{50}{500}\right)} = 0{,}36.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 можно утверждать, что средняя численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий во всей совокупности хозяйств находится в границах: $\bar{X}_в \pm \Delta_{\bar{x}}$ = 4,56 ± 0,36, т.е. от 4,2 до 4,92 человек.

Если применяется случайный бесповторный способ отбора, то необходимый объем выборки определяется по формуле:

$$n=\frac{t^2N\sigma^2}{\Delta_{\bar{x}}^2\cdot N+t^2\sigma^2}\ .$$

По условию задачи имеем:

t = 2,01; N = 500; $\sigma^2 = S^2 = 1{,}74;\ \Delta_{\bar{x}} = 0{,}36 : 1{,}5 = 0{,}24;$

$$n = \frac{2{,}01^2\cdot 500\cdot 1{,}74}{0{,}24^2\cdot 500+2{,}01^2\cdot 1{,}74} = \frac{3514{,}887}{35{,}8298} = 99.$$

Значит для уменьшения предельной ошибки выборки в полтора раза, объём выборочной совокупности должен быть увеличен в 1,98 раза т.е почти в два раза.

Задачи 101-120 решаются по корреляционно-регрессионному анализу связей между явлениями.

Пример 11. Пусть требуется дать количественную характеристику зависимости между обеспеченностью рабочей силой и выручкой от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий по предприятиям с №11 по №25.

Очевидно, что фактором роста объёмов производства и реализации продукции является обеспеченность рабочей силой, поэтому результативным признаком (У) является выручка от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий. Среднегодовая численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий является факторным признаком (Х).

Согласно условию задач, на основании данных приложения 1, рассчитываем значения Х и У по 15 предприятиям (таблица 4) и построим график зависимости. На график наносится 15 пар значений результативного и факторного признаков в виде точек. Шкалы по осям координат различаются в зависимости от значений признаков по конкретным вариантам

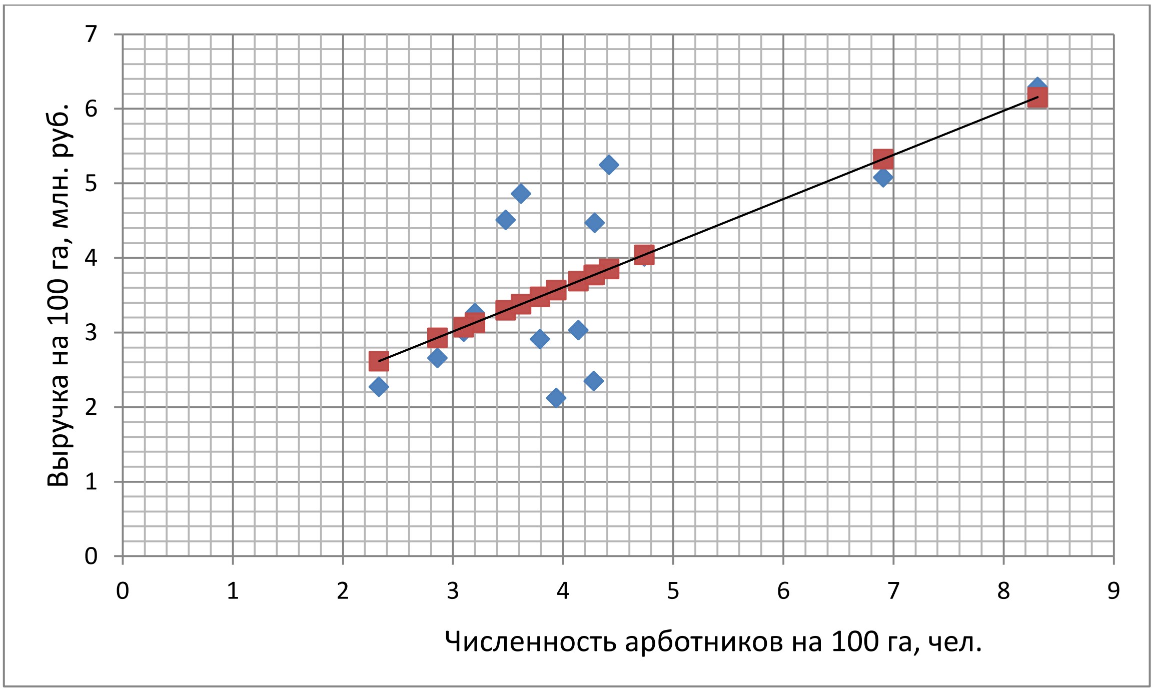

Рисунок 6 – Зависимость между численностью работников на 100 га сельскохозяйственных угодий и выручкой от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий

Расположение точек на рисунке 6 показывает, что зависимость между признаками выражается линейным уравнением регрессии

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Параметры уравнения регрессии нужно найти методом наименьших квадратов, для чего составляется и решается следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = na_0 + a_{1\sum x} \\ \sum xy = a_{0\sum x} + a_{1\sum x^2,} \end{cases} \qquad \begin{cases} 56{,}09 = 15a_0 + 63{,}41a_{1,} \\ 256{,}7404 = 63{,}41a_0 + 301{,}2313a_{1.} \end{cases}$$

Решив систему уравнений получим: a_0 = 1,238, a_1 = 0,592. Значит уравнение регрессии имеет вид y = 1,238 + 0,592 x.

Коэффициент регрессии (a_1) показывает, что при увеличении среднегодовой численности работников на 100 га с. х. угодий на одного человека, выручка от реализации продукция на 100 га с.х. угодий в среднем по совокупности предприятий возрастает на 592 тыс. руб.

Подставив в уравнение регрессии значения факторного признака, найдем по каждому предприятию расчетные значения валовой продукции, которые нанесем на график.

Если x_1=3,48 , то $\hat{y}_1$ = 1,238 + 0,592$\cdot$ 3,48 = 3,30,

x_2= 6,1, то $\hat{y}_2$= 1,238 + 0,592 $\cdot$ 6,91 = 5,33 и т.д.

Таблица 4 - Вспомогательная таблица для расчёта коэффициентов корреляции и регрессии

№ п/п	Выручка на 100га сельскохозяйственных угодий, млн. руб. (Y)	Численность работников на 100 га сельхозугодий, чел. (X)	XY	X^2	Y^2	$\hat{Y}$
1	4,51	3,48	15,6948	12,1104	20,3401	3,30
2	5,08	6,91	35,1028	47,7481	25,8064	5,33
3	2,35	4,28	10,058	18,3184	5,5225	3,77
4	6,29	8,31	52,2699	69,0561	39,5641	6,15
5	2,27	2,33	5,2891	5,4289	5,1529	2,62
6	3,03	4,14	12,5442	17,1396	9,1809	3,69
7	5,25	4,42	23,205	19,5364	27,5625	3,85
8	2,91	3,79	11,0289	14,3641	8,4681	3,48
9	4,86	3,62	17,5932	13,1044	23,6196	3,38
10	3,26	3,2	10,432	10,24	10,6276	3,13
11	2,12	3,94	8,3528	15,5236	4,4944	3,57
12	2,66	2,86	7,6076	8,1796	7,0756	2,93
13	3,01	3,1	9,331	9,61	9,0601	3,07
14	4,47	4,29	19,1763	18,4041	19,9809	3,78
15	4,02	4,74	19,0548	22,4676	16,1604	4,04

Сум-ма	56,09	63,41	256,7404	301,2313	232,6161	56,09

Для оценки тесноты связи между признаками рассчитывается коэффициент корреляции:

$$\mathrm{r} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{63,41}{15} = 4.227,\ \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{56,09}{15} = 3,739\ ,\ \overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{256,7404}{15} = 17,116,\ \ \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{301,2313}{15} - 4,227^2} = 1,488,$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{232,6161}{15} - 3,739^2} = 1,236,$$

$r = \frac{17,116 - 4,227 \cdot 3,739}{1,488 \cdot 1,236} = 0,713;\ \ r^2 = 0,508.$

Коэффициент коррекции показывает, что зависимость между численностью работников и выручкой от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий довольно сильная. Коэффициент детерминации (r^2) свидетельствует о том, что 50,8 % различий в выручке от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий объясняется обеспеченностью рабочей силой, а остальные 49,2% объясняется влиянием других факторов.

Так как регрессионный анализ зависимости между признаками проводится по выборочным данным, то необходимо проверить значимость выборочного коэффициента корреляции.

Выдвигаем нулевую гипотезу: величина коэффициента корреляции в генеральной совокупности равна нулю

$$H_0: r_\text{г} = 0 \ \text{,при} \ \ H_1: r_\text{г} \neq 0.$$

Проверку нулевой гипотезы проведем с помощью критерия t - Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия t находим по формуле

$$t_{\text{н}} = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0{,}713 \cdot \sqrt{\frac{15-2}{1-0{,}508}} = 3.66.$$

По таблице распределения t – Стьюдента, при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы k = n−2 = 15−2 = 13, находим критическое значение $t_{05.13}$ = 2,16 .

Так как $t_{\text{н}}$>$t_{05,13}$, то нулевая гипотеза не принимается, значит, коэффициент корреляции существенно отличен то нуля в генеральной совокупности. Обеспеченность рабочей силой оказывает статистически существенное влияние на выручку от реализации продукцию в расчете на 100 га сельскохозяйственных угодий.

Задания для выполнения контрольной работы

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено 3 выстрела. Какова вероятность, что будет: а) три попадания; б) один промах; в) хотя бы одно попадание; г) только одно попадание..
2. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена 0,4, для второго 0,3, для третьего 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен.
3. В первой урне 7 черных и 8 белых шаров, во второй 4 черных и 8 белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что вынуты: а) два белых шара; б) хотя бы один шар черный; в) белый и черный в любой последовательности.

4. Вероятность того, что хотя бы один из трех покупателей купит определенный товар равна 0,657. Определить вероятность того, что:
а) два покупателя совершат покупки; б) три покупателя совершат покупки.
5. В коробке находятся жетоны с цифрами то 1 до 10. Наудачу извлекаются три жетона. Какова вероятность того, что будут вынуты: а) три жетона с четными номерами; б) хотя бы один жетон с четным номером; в) только один жетон с четными номерами.
6. В двух группах обучается по 25 студентов. В первой группе сессию на «отлично» сдали 7 человек, во второй 5 человек. Из каждой группы наудачу вызывают по одному студенту. Какова вероятность того, что: а) оба студента отличники; б) только один отличник; в) хотя бы один отличник.
7. В первой бригаде из 8 тракторов 2 требуют ремонта, во второй из 6 тракторов 1 требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Определить вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) хотя бы один исправен; в) только один исправен.
8. В организации работают 12 мужчин и 7 женщин. Для них выделено три премии. Определить вероятность того, что премию получат: а) двое мужчин и одна женщина; б) только женщины; в) хотя бы один мужчина.
9. Из 35 работников предприятия 10 имеют высшее образование. Определить вероятность того, что из случайно отобранных трех человек высшее образование имеют: а) три человека; б) только один человек; в) хотя бы один человек.
10. На карточках написаны буквы «Т», «С», «Т», «И», «Т», «И», «А», «С», «К», «А». Карточки перемешивают и кладут в порядке их вытаскивания. Какова вероятность того, что получится: а) слово «ТИС»; б) слово «ТАКСИ»; в) слово «СТАТИСТИКА».
11. В коробке из 20 изделий 14 повышенного качества. Наудачу извлекается три изделия. Определить вероятность того, что: а) одно из них повышенного качества; б) все три изделия повышенного качества; в) хотя бы одно изделие повышенного качества.

12. Бросается три игральных кости. Какова вероятность того, что: а) хотя бы на одной из них появится четыре или шесть очков; б) на всех выпадут четные цифры; в) на всех костях выпадут одинаковые цифры.

13. В первом ящике из 8 шаров 5 красных и 3 черных, во втором ящике из 10 шаров 4 красных и 6 черных. Из первого ящика во второй переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первого ящика, черный.

14. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 60% изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска нестандартного изделия первым предприятием 0,15, вторым 0,1. а) Определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется стандартным, б) Взятое изделие оказалось стандартным. Какова вероятность, что оно выпущено на втором предприятии.

15. Имеется три урны. В первой 4 белых и 3 черных шара, во второй и третьей по 5 белых и 2 черных шара. Из случайно выбранной урны извлекается шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?

16. Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем от первого и второго хозяйства поступает по 35 % всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства 75%, второго 85%, третьего 90%. а) Определить вероятность того, что наудачу взятое семя взойдет, б) Наудачу взятое семя взошло. Какова вероятность, что оно получено от второго хозяйства?

17. Программа экзамена состоит из 30 вопросов. Из двадцати студентов группы 8 человек выучили все вопросы, 5 человек по 25 вопросов, 5 человек по 20 вопросов, а два человека по 10 вопросов. Определить вероятность того, что случайно вызванный студент ответит на два вопроса билета.

18. Перед посевом 80% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки 95%, необработанных 80%. а)

Какова вероятность того, что случайно взятое семя взойдет? б) Случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

19. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность равна для первого завода 0,94, для второго 0,86, для третьего 0,88 и для четвертого 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

20. Г1окупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность топ, что покупатель купит товар в первом магазине равна 0,6, втором – 0,7 и третьем – 0,5. Определить вероятность того, что покупатель купит товар в каком-то магазине. Покупатель купил товар. Найти вероятность того, что он купил его в третьем магазине.

Задачи 21 - 40. Случайные величины X и У заданы законами распределений. Определить математическое ожидание , дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и У. Составить законы распределений случайных величин Z = X + Y, V = XY. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины W = 2X – 4Y.

21	X	-1	2	4	У	3	6
	P_X	0,2	P_2	0,6	p_y	0,4	0,6
22	X	1	6	9	У	-1	2
	P_X	P_1	0,3	0,2	p_y	0,7	0,3
23	X	4	5	9	У	2	45
	P_X	0,2	0,5	Рз	p_y	0,3	0,7
24	X	1	3	5	У	1	3
	P_X	P_1	0,2	0,5	p_y	0,4	0,6
25	X	-1	3	6	Y	2	4
	p_x	0,4	P_2	0,1	Ру	0,2	0,8

26	X	0	4	9	Y	-2	3	
	P_X	0,3	0,5	P3	p_y	0,3	0,7	
21	X	-2	0	2	Y	4	5	
	P_X	0,5	0,2	P3	p_y	0,7	0,3	
28	X	-3	0	6	Y	2	6	
	P_X	0,2	0,3	0,7	p_y	P_1	0,4	
29	X	-1	2	3	Y	-3	2	
	P_X	0,4	0,1	P3	p_y	0,4	0,6	
30	X	4	6	8	Y	1	3	
	P_X	0,3	0,6	P3	p_y	0,2	0,8	
31	X	-4	-2	1	Y	0	3	
	P_X	0,1	0,4	0,5	p_y	P_1	0,3	
32	X	-6	-3	-1	Y	-1	1	
	P_X	0,4	P2	0,2	p_y	0,6	0,4	
33	X	-1	0	2	Y	2	3	
	P_X	0,5	0,3	0,2	p_y	P_1	0,2	
34	X	2	0	3	Y	1	5	
	P_X	P_1	0,8	0,1	p_y	0,7	0,3	
35	X	3	6	8	Y	-2	2	
	P_X	P_1	0,2	0,6	p_y	0,3	0,7	
36	X	-3	-2	1	Y	-1	3	
	P_X	0,2	P_2	0,3	p_y	0,2	0,8	
37	X	2	3		Y	-1	3	5
	P_X	0,4	P_2		p_y	0,1	0,4	0,5
38	X	0	5	10	Y	-2	-1	
	P_X	0,4	P_2	0,4	p_y	0,4	0,6	
39	X	-4	0	3	Y	2	4	
	P_X	0,3	0,4	0,3	p_y	0,8	P_2	
40	X	6	12		Y	-1	0	4

P_X 0,6 0,4 p_y 0,3 P2 0,2

В задачах 41-60 непрерывная случайная величина задана функцией распределения (интегральной функцией) F(x). Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал (а,в); б) функцию плотности вероятностей (дифференциальную функцию) f(x); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; г) построить графики функций F(x) и f(x).

$$41. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{\pi^2}, \text{при } 0<x\le\pi,\\ 1, \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

a=1, b=2.

$$42. F(x)=\begin{cases}0, \text{при} x\le 0,\\ \frac{4}{9}x^2, \text{при } 0<X\le\frac{3}{2},\\ 1, \text{при } x>\frac{3}{2}.\end{cases}$$

a=0,5, b=1∅.

$$43. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 1,\\ (x-1)^2, \text{при } 1<x\le 2,\\ 1, \text{при } x>2.\end{cases}$$

a=1,5, b=2.

$$44. F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^3}{16}, \text{ при } 0<x\le 2\sqrt[3]{2},\\ 1, \text{ при } x>2\sqrt[3]{2}.\end{cases}$$

a=2, b=3.

$$45. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^3}{8}, \text{при } 0<x\le 2,\\ 1, \text{при } x>2.\end{cases}$$

a=0,5, b=1,5.

$$46. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \frac{16}{49}x^2, \text{при } 0<x\le\frac{7}{4},\\ 1, \text{при } x>\frac{7}{4}.\end{cases}$$

a=0,5, b=1,2.

$$47. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 3,\\ \frac{(x-3)^2}{4}, \text{при } 3<x\le 5,\\ 1, \text{при } x>5.\end{cases}$$

a=3, b=4.

$$48. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{7}, \text{при } 0<x\le\sqrt{7},\\ 1, \text{при } x>\sqrt{7}.\end{cases}$$

a=1, b=2.

$$49. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le -1,\\ 1+x, \text{при} -1<x\le 0,\\ 1, \text{при } x>0.\end{cases}$$

a=$\frac{1}{2}$, b=0.

$$50. F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^4}{4}, \text{при } 0<x\le\sqrt{2},\\ 0, \text{при } x>\sqrt{2}.\end{cases}$$

a=1, b=1,3.

51. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{e^2}, & \text{при } 0 < x \le e, \\ 1, & \text{при } x > e. \end{cases}$

a=1, b=2.

52. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 3, \\ \frac{x^4-81}{175}, & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$

a=3.2, b=3.5.

53. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^4}{16} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$

a=1, b=1.5.

54. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ \frac{(x-1)^2}{25}, & \text{при } 1 < x \le 6, \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$

a=2, b=4

55. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2, \\ \frac{(x+2)^3}{216}, & \text{при } -2 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$

a=-1, b=3.

56. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ \frac{x^3-x}{60}, & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$

a=1, b=2.

57. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \ge 0, \\ \frac{64}{49}\, x^2, & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$

a=0.5, b=1.

58. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2, \\ \frac{x^3+8}{16}, & \text{при } -2 < x \le 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$

a=-1, b=1.

59. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ \frac{x^3-x^2}{48}, & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$

a=2, b=3.

60. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le \sqrt{2}, \\ \frac{x^6-x^4-4}{96}, & \text{при } \sqrt{2} < x \le \sqrt{5}, \\ 1, & \text{при } x > \sqrt{5}. \end{cases}$

a=1.5, b=2.

В задачах 61-80 по данным приложения 1, составить вариационный ряд распределения сельскохозяйственных по одному признаку. Построенный интервальный ряд изобразить графически с помощью полигона, гистограммы и кумуляты. Определить среднее значение признака, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

61. Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника, га.

62. Выручка от реализации продукции на 1га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

63. Выручка от реализации продукции продукции на среднегодового работника, тыс. руб.

64. Выручка от реализации продукции на 100 руб. основных фондов, руб.

65. Выручка от реализации продукции на 100 руб. затрат, руб.

66. Выручка от реализации продукции на 100 руб. основных производственных фондов, руб.

67. Выручка от реализации продукции на среднегодового работника, тыс. руб.

68. Выручка от реализации продукции на 1 га пашни, тыс. руб.

69. Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.

70. Основные средства на 100 руб. выручки, тыс. руб.

71. Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

72. Основные средства на 1 га пашни, тыс. руб.

73. Среднегодовая численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел.

74. Среднегодовая численность работников на 100 га пашни, чел.

75. Энергетические мощности на 100 га сельскохозяйственных угодий, л. с.

76. Энергетические мощности на среднегодового работника, л. с.

77. Энергетические мощности на 100 га пашни, л. с.

78. Заработная плата на среднегодового работника, тыс. руб.

79. Потреблено электроэнергии на 100 га сельскохозяйственных угодий, тыс. кВт-ч.

80. Потреблено электроэнергии на среднегодового работника, тыс. кВт-ч.

Задачи 81-100. Рассматривая данные приложения 1 как результаты случайной бесповторной 10% выборки и, используя результаты решения задач 61-80, определить: а) доверительный интервал для среднего значения признака в генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,95; б) необходимый объем выборки, обеспечивающий уменьшение предельной ошибки выборки в 2 раза, сохранив остальные характеристики на прежнем уровне. Условие задачи 81 соответствует данным задачи 61, задачи 82 данным задачи 62 и т. д.

Задачи 101-120. Дать количественную оценку связи между двумя признаками. Построить график корреляционной зависимости между признаками. По графику определить тип уравнения связи. Методом наименьших квадратов найти параметры уравнения регрессии. Полученное уравнение нанести на график связи. Рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить значимость выборочного коэффициента корреляции при уровне значимости 0,05. Для выполнения задач использовать данные приложения 1 по первым 15 предприятиям, по указанным в соответствующем варианте двум признакам.

Выявить влияние следующих факторов на изменение результативных признаков:

101. Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га) и выручка от реализации продукции на среднегодового работника(тыс. руб.);

102. Затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

103. Основные средства на среднегодового работника (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на среднегодового работника(тыс. руб.);

104. Энергетические мощности на 100 га сельскохозяйственных угодий (л.с.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (чел.);

105. Энергетические мощности на среднегодового работника (л.с.) и выручка от реализации продукции на среднегодового работника (тыс. руб.);

106. Затраты на 100 га пашни (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 100 га пашни (тыс. руб.);

107. Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

108. Энергетические мощности на 100 га пашни (л.с.) и выручка от реализации продукции на 100 га пашни (тыс. руб.);

109. Энергетические мощности на 100 га сельскохозяйственных угодий (л.с.) и выручка от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

110. Среднегодовая численность работников (чел.) и валовая продукция на одно хозяйство (млн. руб.);

111. Заработная плата на среднегодового работника (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на среднегодового работника (тыс. руб.);

112. Заработная плата на 100 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

113. Основные средства на 1 га пашни (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га пашни (тыс. руб.);

114. Площадь сельскохозяйственных угодий (га) и выручка от реализации продукции (млн. руб.);

114. Энергетические мощности (тыс. л.с,) и выручка от реализации продукции (млн. руб.);

115. Основные средства (млн. руб.) и выручка от реализации продукции (млн. руб.);

116. Затраты на производство продукции (млн. руб.) и выручка от реализации продукции (млн. руб.);

117. Среднегодовая численность работников (чел.) и выручка от реализации продукции (млн. руб.);

118. Площадь пашни (га) и выручка от реализации продукции (млн. руб.);

119. Площадь сельскохозяйственных угодий (га) и среднегодовая численность работников (чел.)

120. Потреблено электроэнергии (тыс. кВт.-ч.) и выручка от реализации продукции (млн. руб.).

Приложение 1 – Статистические показатели по сельскохозяйственным предприятиям Краснодарского края, 2011 г.

№ п/п	Основные средства, тыс. руб.	Среднегодовая численность работников, чел.	Начислено заработной платы, тыс. руб.	Выручка от продажи продукции, тыс. руб.	Затраты на продукцию, тыс руб.	Площадь сельскохозяйственных угодий, га	Площадь пашни, га	Энергетические мощности, л. с.	Потреблено электроэнергии, тыс. кВт-ч.
1	105134	157	21497	119903	92666	4327	4327	8770	490
2	101014	144	25068	145595	125678	5597	5562	9345	644
3	133710	115	16772	119796	50393	3976	3930	11378	310
4	207666	166	27818	270623	199913	7093	7093	8366	325
5	356652	287	45610	300856	194696	8723	8509	20553	1554
6	323862	498	83620	436966	314923	12871	12668	21464	1544
7	475241	597	114993	602285	368156	9734	9508	44700	2273
8	402035	333	64171	379274	270283	7664	7601	49250	3158
9	211550	149	22406	192944	130799	4282	4200	14131	832
10	295448	399	33354	293715	181517	5780	5735	21834	1288
11	83527	171	24983	93989	79277	3999	3956	10720	572
12	711493	910	168756	688832	560853	10946	10654	49478	4291
13	199481	184	40338	179362	159681	7899	7203	15652	517
14	305281	247	40363	181176	98594	5970	5000	22057	1084
15	384657	224	24296	266139	219038	5072	5027	20924	603
16	173003	219	33147	167892	147530	5775	5701	13335	1035
17	167764	155	25010	207986	145435	4276	4211	11753	939
18	318381	265	50379	269836	174880	8275	8175	18630	833
19	186910	293	30958	157873	161081	7444	7297	14882	838
20	259140	424	68815	394709	308188	14811	14728	25017	1270
21	142000	161	36680	156126	99728	5193	4630	22040	738
22	186397	214	38143	223195	160802	4994	4620	22723	799
23	719143	585	131210	496040	336402	12338	12275	47580	2621
24	222567	751	128866	388078	340292	11967	11665	42393	4161
25	740990	688	136802	548218	415639	17183	14313	53450	3815
26	495985	563	117782	486227	388394	10648	10486	36372	2367
27	56265	103	13323	99657	84911	2290	2128	11052	586
28	110676	253	37530	180784	140274	5865	5825	19839	856
29	137970	228	32111	132912	114618	4178	4031	15840	1143
30	213547	230	32113	184627	135793	4259	4234	14475	1163
31	410658	351	51904	534777	429863	12907	12463	22250	1053
32	163457	105	14755	106664	54333	2985	2753	8542	387
33	749381	582	134121	452866	390498	10563	9959	27983	1863
34	712599	910	124793	470071	421220	12708	12102	47481	4301
35	544891	532	105473	499737	403518	16061	13975	29278	3036