МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Практикум

КРАСНОДАР
2014

УДК 519.2(076.5)
ББК 22.172
Т33

Р е ц е н з е н т:

П. С. Бондаренко - канд. экон. наук,
профессор Кубанского государственного
аграрного университета

Коллектив авторов:

П. С. Бондаренко, И. А. Кацко,
Н. Х. Ворокова, Т. В. Соловьева,
Е. Д. Стеганцова, Т. Ю. Чернобыльская

Т33 **Теория** вероятности и математическая статистика: практикум / П.С. Бондаренко [и др.]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – 94 с.

Содержание и тематика заданий соответствует действующей программе по теории вероятностей и математической статистике.

Отдельные задачи носят условный характер, значительная часть составлена по реальным данным организаций Краснодарского края. По каждой теме предусмотрено решение студентами индивидуальных заданий с последующей их сдачей преподавателю.

Задания предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, при самостоятельном изучении учебников и учебных пособий студентами, обучающихся по направлениям «Экономическая безопасность», «Экономика», «Прикладная информатика», «Менеджмент», «Бизнес-информатика».

УДК 519.2(076.5)
ББК 22.172

Оглавление

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Событие есть возможный результат опыта или испытания. Простейшие неразложимые результаты опыта называются элементарными событиями.

Достоверным называется событие *U*, которое в данном опыте обязательно произойдет.

Невозможным называется событие *V*, которое в данном опыте не может произойти.

Случайным называется событие, которое в данном опыте или испытании может произойти, а может и не произойти. События обозначаются буквами *A, B, C,* и т. д. или A_1, A_2, A_3, и т. д.

События называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление других в данном опыте. Если события не могут появиться в одном опыте, то они называются **несовместными**. Несколько событий называются **попарно-несовместными**, если никакие два из них не могут появиться вместе в данном опыте.

События называются **единственно-возможными**, если в результате испытания обязательно произойдет какое-то из этих событий.

Совокупность несовместных и единственно возможных событий образуют **полную группу событий**.

События являются **равновозможными**, если имеются основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Вероятность события *A* обозначается *P(A)* и находится по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

где n - общее число элементарных исходов (событий) в опыте или испытании; m - число элементарных исходов (событий), благоприятствующих появлению события A.

$$P(U)=1, \quad P(V)=0, \quad 0<P(A)<1. \quad (1.2)$$

где U – достоверное событие; *V*– невозможное событие; A – случайное событие.

Вероятность любого события *A* заключена между нулем и единицей,

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.3)$$

При определении вероятностей событий часто используются формулы комбинаторики, позволяющие подсчитать число различных способов выбора k элементов из n элементного множества по схеме без возвращений и с возвращениями:

– число размещений из n элементов по k элементов в каждом без возвращений

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1), \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}; \qquad (1.4)$$

– число перестановок из n элементов, каждое из которых содержит все n элементов

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n; \qquad (1.5)$$

– число сочетаний из n элементов по k элементов в каждомбез возвращений

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.6)$$

$0! = 1$; $C_n^0 = 1$; $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$; $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Различные размещения отличаются друг от друга или порядком или составом своих элементов. Различные сочетания отличаются друг от друга только составом своих элементов. Перестановки отличаются порядком своих элементов.

Число перестановок, размещений и сочетаний с возвращениями определяется по формулам:

$$\overline{P_\kappa} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!};\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n;\ \overline{A_n^k} = n^k;\ \overline{C_n^\kappa} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+\kappa-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (1.7)$$

Относительной частотой или статистической вероятностью события А называется число исходов, в которых появилось событие А к общему числу проведенных исходов.

$$W(A) = \frac{M}{N}, \quad 0 \le W(A) \le 1. \qquad (1.8)$$

Если число элементарных исходов бесконечно, то используют геометрическое определение вероятности.

Вероятность попадания точки в область g, брошенной в область G равна отношению меры (mes)области g к мере области G.

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}. \qquad (1.9)$$

1 Являются ли несовместными следующие события:

а) Опыт - бросание двух монет;

события: A_1 – появление двух гербов; A_2 – появление двух цифр.

б) Опыт – три выстрела по мишени;

события:B_1 – хотя бы одно попадание; B_2 – хотя бы один промах.

в) Опыт – бросание двух игральных костей;

события: C_1 – хотя бы на одной кости появилось три очка;C_2 – появление четного числа очков на каждой кости.

г) Опыт – извлечение двух шаров из урны, содержащей белые и черные шары;

события:$Д_1$ – взято два белых шара; $Д_2$ – оба извлеченных шара одного цвета.

д) Опыт – студент сдает три экзамена;

события: E_1 – студент сдает хотя бы один экзамен; E_2 – студен не сдает хотя бы один экзамен;

е) Опыт – лифт отправляется с 10 пассажирами и останавливается на пяти этажах;

события: F_1 – на первых четырех остановках вышло не более 9 человек; F_2 – на последней остановке вышел хотя бы один человек.

2 Образуют ли полную группу следующие события:

а) Опыт – два выстрела по мишени;

события: A_1 – два попадания в мишень; A_2 – хотя бы один промах по мишени.

б) Опыт – бросание двух игральных костей;

события: B_1 – сумма очков на верхних гранях больше 3; B_2 – сумма очков на верхних гранях равна 3.

в) Опыт – посажено четыре зерна;

события: C_1 – взошло одно зерно; C_2 – взошло два зерна; C_3 – взошло три зерна; C_4 – взошло четыре зерна.

г) Покупатель посещает три магазина;

события: $Д_1$ – покупатель купит товар хотя бы в одном магазине; $Д_2$ – покупатель не купит товар ни в одном магазине.

д) Опыт – студент сдает три экзамена;

события: E_1 – студент сдаст хотя бы один экзамен; E_2 – студент не сдаст хотя бы один экзамен.

3 Являются ли равновозможными следующие события:

а) Опыт – выстрел по мишени;

события: A_1 – попадание при выстреле; A_2 – промах при выстреле.

б) Опыт – бросание двух игральных костей;

события: B_1 – произведение очков на верхних гранях равно 12; B_2 – сумма очков на верхних гранях равна 9.

в) Бросание двух монет;

события: C_1 – появление двух гербов; C_2 – появление двух цифр; C_3 – появление одного герба и одной цифры.

г) Опыт – извлечение двух карт из колоды;

события: $Д_1$ – обе карты одинаковой масти; $Д_2$ – обе карты разных мастей.

4 Брошены 3 монеты.

Составить события, образующие полную группу.

Сколько равновозможных исходов образует полную группу событий?

Укажите события единственно – возможные, не образующие полной группы событий?

5 Приведите примеры:

а) трех событий, образующих полную группу событий;

б) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы событий;

в) двух событий, несовместных и образующих полную группу событий, но не равновозможных.

6 Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на ее верхней грани появится: а) шесть очков; б) нечетное количество очков; в) не менее четырех очков; г) не более двух очков; д) более трех очков.

7 Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

8 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) на обеих костях появится одинаковое число очков;
б) хотя бы на одной кости появится два очка;
в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение шести очкам;
г) сумма очков, выпавших на обеих костях, не превзойдет 5.

9 Из 10150 человек, проживающих в населенном пункте, 71 человек имеет возраст свыше 80 лет. Определить статистическую вероятность появления лиц с возрастом свыше 80 лет. Какой процент лиц, имеет возраст до 80 лет?

10 Относительная частота (частость) работников предприятия, имеющих высшее образование, равна 0.15. Определить: а) число работников, имеющих высшее образование, если всего на предприятии работает 40 человек; б) число работников предприятия, если с высшим образованием работает 30 человек.

11 Имеются две урны. В первой – 10 красных и 6 черных шаров. Во второй – 4 красных и 6 черных шаров. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут красными; б) из первой урны будет вынут красный шар, а из второй – черный; в) хотя бы один из вынутых шаров черный.

12 Из коробки, содержащей 5 пронумерованных жетонов, вынимают один за другим все находящиеся в ней жетоны и укладывают рядом. Найти вероятность того, что номера вынутых жетонов будут идти по порядку 1, 2, 3, 4, 5.

13 Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

14 В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты, колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

15 На отдельных одинаковых карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все девять карточек перемешивают, после чего наугад берут четыре карточки и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность получить при этом: а) четное число; б) число 1234; в) 6789?

16 Какова вероятность, что на трех карточках, вынутых по одной и положенных в порядке их появления, получим число 325, если всего карточек было шесть с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6?

17 Восемь различных книг расставляются наугад на полке. Найти вероятность того, что: а) три определенные книги окажутся поставленными рядом; б) две определенные книги окажутся поставленными рядом.

18 Среди изготовленных 15 деталей имеется 5 нестандартных. Определить вероятность того, что взятые наугад три детали окажутся стандартными.

19 В партии готовой продукции из 10 изделий имеется 7 изделий повышенного качества. Наудачу отбираются шесть изделий. Какова вероятность того, что четыре из них будут повышенного качества?

20 Какова вероятность того, что два определенных студента будут посланы на практику в Лабинск, если предоставлено 6 мест в г. Лабинск, 10 – в г. Анапу и 4 – в г. Тимашевск?

21 Из 25 студентов группы, 12 занимаются научной работой на кафедре бухгалтерского учета, 7 - экономического анализа, остальные – на кафедре статистики. Какова вероятность того, что два случайно отобранных студента занимаются научной работой на кафедре статистики?

22 Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдут: а) две женщины и один мужчина; б) все женщины.

23 Среди 20 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрываются 5 билетов в театр. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся три девушки или две девушки.

24 Определить вероятность того, что участник лотереи «Спортлото – 5 из 36» угадает правильно: а) все 5 номеров; б) 3 номера.

25 Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок открывается в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Какова вероятность того, что замок откроется, если установить произвольную комбинацию цифр?

26 Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включается случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

27 В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

28 В квадрат с длиной стороны «а» вписан круг. Наудачу в квадрат бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадает в круг.

29 В прямоугольник с вершинами *А* (1;1), *В* (1;3), *С* (4;3), *Д* (4;1) наудачу брошена точка *К (x;y)*. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y \le x - 1$.

30 В прямоугольник с вершинами *А* (0;0), *В* (0;5), *С* (6;5), *Д* (6;0) наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9, \\ y \le 6 - x. \end{cases}$

31 Найти вероятность того, что при подбрасывании пяти игральных костей на всех гранях выпадет разное число очков.

2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*=*A*+*B*, заключающееся в появлении или события *A* или события *B* или в совместном их появлении. Суммой нескольких событий называется событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из этих событий. Если события несовместные, то их суммой называется событие, состоящее в появлении одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (2.1)$$

Для n несовместных событий теорема имеет вид:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.2)$$

Следствие 1. Сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу событий, равна 1.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \text{ или } p+q=1. \qquad (2.3)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (2.4)$$

События называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого события.

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B);\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \qquad (2.5)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности наступления первого события на условную вероятность второго события при условии, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A); \qquad (2.6)$$

$$P(A_1A_2A_3 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \qquad (2.7)$$

Теорема наступления хотя бы одного из событий. Вероятность наступления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n). \qquad (2.8)$$

Следствие. Если события A_iимеют одинаковую вероятность появиться p, то вероятность появления хотя бы одного события из n независимых событий:

$$P(A) = 1 - q^n, \text{ где } p + q = 1. \qquad (2.9)$$

Формула волной вероятности. Пусть событие A может появиться вместе с одним из попарно несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образующих полную группу событий. События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ будем называть гипотезами для события A. Тогда вероятность наступления события A определяется по формуле:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)\cdot P(A/B_n), \qquad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1. \qquad (2.11)$$

Формулы Бейеса. Условная вероятность наступления события B_i , при условии, что событие A произошло, определяется по формуле:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \qquad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = 1, \qquad (2.13)$$

где $P(A) \neq 0$ - находится по формуле полной вероятности.

1 Производится три выстрела по мишени. Рассматриваются события: A_1 – попадание в цель первым выстрелом; A_2 – попадание в цель вторым выстрелом; A_3– попадание в цель третьим выстрелом. Определить, каким событиям равносильны следующие события: 1) $A_1 + A_2 + A_3$; 2) $A_1A_2A_3$; 3) $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$; 4) $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$; 5) $A_1\ \overline{A_2}\ \overline{A_3} + \overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3} + \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3$; 6) $\overline{\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}}$;

7) $A_1 + \overline{A_1}\, A_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\, A_3$; 8) $(\overline{A_1} + \overline{A_2})A_3$; 9) $A_1A_2A_3 + \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}$.

2 Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события A_i – появление герба при i – ом подбрасывании $(i = 1,2,3)$. Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий A_iи $\overline{Ai}$ следующие события: A - появились все три герба; B - появились все три цифры; C - появился хотя бы один герб; $Д$ - появилась хотя бы одна цифра; E - появился только один герб; F - появилась только одна цифра.

3 Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4. Найти вероятность: а) попадания в первую или третью зоны; б) промаха по мишени.

4 Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 0,6. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на следующий выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,3. Определить вероятность поражения второй мишени.

5 В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из отобранных наудачу трех студентов: а) все три девушки; б) первые две девушки, третий - юноша; в) все три юноши?

6 Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Выстрелы производятся по одному до первого попадания. Определить вероятность того, что придется производить четвертый выстрел.

7 Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Перед выездом из гаража автомобиль осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность, равна 0,8, а второй – 0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправляется в ремонт. Найти вероятность того, что: а) автомобиль будет допущен к работе; б) автомобиль не будет допущен к работе.

8 Вероятность одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

9 Из 40 деталей в ящике 5 бракованных. Какова вероятность того, что взятые наудачу две детали не будут бракованными?

10 В коробке 12 карандашей трех цветов, по четыре карандаша каждого цвета. Наудачу вынимают три карандаша. Найти вероятность того, что все три карандаша окажутся разного цвета. Решить задачу при условии: а) карандаши возвращают в коробку; б) карандаши не возвращают в коробку.

11 Из урны, содержащей четыре красных и шесть черных шаров, вынимают два шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты: а) оба шара черного цвета; б) красный и черный в любой последовательности; в) второй шар будет черным; г) оба шара одного цвета?

12 Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

13 Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна 0,6. Производится по одному выстрелу одновременно из трех орудий. Цель будет поражена, если в нее попадут не менее двух орудий. Найти вероятность: а) поражения цели; б) промаха одним или двумя орудиями.

14 Слово «машина» составлено из букв разрезной азбуки. Какова вероятность того, что перемешав буквы и укладывая их в ряд по одной, получим слово: а) «машина»; б) «шина»; в) «маша»?

15 В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупки; г) по крайней мере два совершат покупки; д) хотя бы один купит товар.

16 Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии.

17 В продаже имеется 12 акций одного предприятия, 8 другого и 10 третьего. Клиент покупает три акции. Найти вероятность того, что клиентом будут куплены: а) акции одного предприятия; б) все три акции разных предприятий.

18 Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у которого первым появится шесть очков. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.

19 Через автобусную остановку проходят автобусы семи маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов №1, №5, №7. Какова вероятность, что нужный ему автобус будет одним из первых трех подошедших к остановке?

20 Читатель в поисках нужной книги обходит три библиотеки. Вероятность того, что книга имеется в очередной библиотеке, равна 0,3. Что вероятнее – найдет читатель книгу или нет?

21 В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы на один из трех приобретенных билетов?

22 В урне 10 красных, 5 зеленых и 3 черных шара. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут: а) одного цвета; б) разных цветов.

23 На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 первого сорта. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность, что оба содержат овощи: а) первого сорта; б) разного сорта; в) одного сорта?

24 Читатель разыскивает книгу в трех библиотеках. Одинаково вероятно, есть или нет в фонде очередной библиотеки книга и также одинаково вероятно, выдана она или нет. Чему равна вероятность того, что читатель найдет нужную книгу?

25 Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7, для второго - 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) одним студентом; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?

26 Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй – 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) хотя бы один ответит верно; в) правильно ответит только первый студент.

27 Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее четырех очков?

28 В первой бригаде 6 тракторов, во второй – 9. В каждой бригаде один трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) один требует ремонта; в) трактор из второй бригады исправен.

29 На предприятии имеется три автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9, второго – 0,7, третьего – 0,8. Найти вероятности всех возможных значений числа автомобилей, работающих безотказно в течение определенного времени.

30 Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность одного промаха при трех выстрелах.

31 В круг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна вероятность того, что поставленные наудачу внутри круга две точки окажутся внутри заданного прямоугольника?

32 В шар радиуса R вписан прямой конус наибольшего объема. Чему равна вероятность того, что из поставленных наудачу внутри шара двух точек хотя бы одна окажется внутри конуса.

33 Вероятность спортсменом взять в одной попытке высоту 1,8 м равна 0,6, высоту 2 м – 0,2, высоту 2 м10 см – 0,1. Спортсмен, не взявший предыдущую высоту, выбывает из соревнований. Спортсмену на каждую высоту дается три попытки. Определить вероятность того, что спортсмен закончит соревнования, взяв высоту: а) 1,8 м; б) 2 м; в) 2 м10 см.

34 В первой урне 5 красных, 3 белых и 2 черных шара. Во второй 3 белых и 2 черных шара. Из первой урны взято 2 шара, а из второй один. Определить вероятность того, что среди них: а) все шары одного цвета; б) все шары разного цвета.

35 При исследовании жирности молока коров все стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70%, во второй 23% и в третьей 7% всех коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы коров соответственно равна 0,6; 0,4 и 0,1. Определить вероятность того, что для взятой наудачу коровы жирность молока составит не менее 4%. Взятая наудачу корова дает молоко жирностью не менее 4%. Найти вероятность того, что эта корова из первой группы.

36 В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь.

Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из первой урны, нестандартная?

37 Имеются две урны. В первой – семь красных шаров и три черных, во второй – три красных и четыре черных. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны переложили в первую один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется красным.

38 Торговая фирма получает однотипные товары от трех поставщиков. Объемы поставок товаров относятся как 1 : 2 : 3. Известно, что удельный вес товаров высокого качества от первого поставщика составляет 2/3 , второго 3/4 и третьего 5/6 . Найти вероятность того, что взятая случайно единица товара будет высокого качества. Если взятая единица товара высокого качества, то наиболее вероятно, от какого поставщика она поступила?

39 Предприятие использует для производства продукта сырье трех других предприятий. Объем поступающего сырья относится в пропорции 1: 2: 5. Известно, что первое предприятие поставляет 60 % сырья высокого качества, второе 70 % и третье 90 %. Случайно взятая единица сырья оказалась высокого качества. Найти вероятность того, что она поступила от второго или третьего предприятия.

40 В первом ящике из 20 деталей 4 бракованных, во втором из 30 деталей 5 бракованных. Из первого во второй переложили две детали. Найти вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второго ящика, бракованная.

41 Исследование рынка хлебобулочных изделий показало, что на долю фирмы А приходится 40 % объема реализации продукции, фирмы В – 32 % и фирмы С – 28 %. Известно, что на долю хлеба приходится 65 % реализованной продукции фирмы А, 40 % - фирмы В и 70 % - фирмы С. Определить долю каждой фирмы на рынке хлеба.

42 Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы, из которых 20% семян 1-го сорта, 30% - 2-го сорта, 10% - 3-го сорта и 40% - 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для первого сорта равна 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,2, для четвертого – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен.

43 Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов по 20 вопросов, трое по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность, что он из тех трех студентов, которые подготовили по 10 вопросов?

44 Запасная деталь может находиться в одной из трех партий с вероятностями $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,5$; $p_3 = 0,3$. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что: а) взятая наудачу деталь проработает положенное время; б) деталь, проработавшая положенное время, взята из второй или третьей партии.

45 Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

46 В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады, равна 0,7, для второй – 0,8. Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной. Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность, что она из второй бригады?

47 Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине составляет 0,4, во втором - 0,3, в третьем - 0,2. Определить вероятность того, что покупатель купит товар. Пусть покупатель купил товар в одном из магазинов. Какова вероятность того, что он купил товар во втором или в третьем магазине?

48 Вероятность получения заказа на производство товара организацией равна 0,7. Если заказ будет получен, то вероятность получения высокого дохода составит 0,8. Если же заказ не будет получен, то вероятность получения высокого дохода составит 0,25. Чему равна вероятность получения высокого дохода организацией.

3 ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Схема испытаний Бернулли. Пусть опыт повторяется в неизменных условиях n раз. В каждом опыте некоторое событие A может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность того, что это событие наступит в n испытаниях ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \qquad (3.1)$$

Вероятности $P_n(k)$ называются биноминальными вероятностями, где $k=0,1,\ldots,n$.

При больших значениях n пользуются приближенными формулами.

Локальная формула Муавра – Лапласа. Если вероятность наступления некоторого события A в n независимых испытаниях постоянна, отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, причем $npq \geq 10$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз, приближенно равна (чем больше n и p ближе к 0,5, тем точнее):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (3.2)$$

Значение $\varphi(x)$, при заданном значении x, находят по таблице (приложениеA_1), причем $\varphi(-x) = \varphi(x)$, при $x > 5$, $\varphi(x) = 0$.

Формула Пуассона. Точность приближенной формулы Муавра – Лапласа снижается по мере приближения вероятности p к нулю. В таких случаях пользуются приближенной формулой Пуассона. Если вероятность наступления каждого события в независимых испытаниях постоянна и мала, а число испытаний достаточно велико, причем $npq < 10$, то вероятность того, что вn независимых испытаниях событие A наступит k раз, находится по формуле:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad (3.3)$$

где $\lambda = np$.

Интегральная формула Муавра-Лапласа. При больших значениях n вероятность того, что число появления события A будет находиться в некотором интервале от k_1 до k_2 раз, вычисляют по интегральной формуле Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что в n испытаниях событие Aпроизойдет от k_1 до k_2 раз, определяется по формуле:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (3.4)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz \text{ - функция Лапласа, } z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}; \qquad (3.5)$$

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$, при $x > 5$, $\Phi(x) = 0{,}5$.

Наивероятнейшее число появления события в независимых испытаниях. Наивероятнейшее число появления события A в повторных независимых испытаниях (k_o) определяется из неравенств:

$$np - q \le k_o \le np + p. \qquad (3.6)$$

Наивероятнейшее число k_o – число целое. Если (np - q) – целое число, то имеется два наивероятнейших числа.

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях. Вероятность того, что в независимых испытаниях абсолютное отклонение относительной частоты от постоянной вероятности не превзойдет некоторого числа $\varepsilon > 0$, определяется по формуле:

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (3.7)$$

1 Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости 5 очков появится: а) два раза; б) хотя бы один раз; в) не менее 3 раз.

2 Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) пять семян; б) не менее четырех; в) не более одного.

3 Контрольная работа по теории вероятностей состоит из трех задач. Вероятность успешного решения студентом каждой задачи составляет 0,7. Найти вероятность того, что студент успешно решит: а) все три задачи; б) хотя бы одну задачу; в) одну или две задачи.

4 В семье 5 детей. Считая вероятности рождений мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков.

5 Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми: а) три изделия; б) не более двух; в) не менее двух изделий.

6 Станок автомат делает детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется: а) 4 бракованных; б) не менее двух бракованных.

7 Установлено, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверенном аудитором документе составляет 0,1. Определить вероятность того, что из 10 проверенных документов ошибка будет содержаться в одном. Вычислить по формулам Бернулли, Лапласа, Пирсона. Сравнить результаты.

8 На факультете 900 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Найти вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

9 Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если сдают экзамен 100 студентов.

10 Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты правильно сработает, равна 0,999. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа случаев, если будет опущено 2000 монет.

11 Всхожесть клубней картофеля равна 80 %. Сколько нужно посадить клубней, чтобы наивероятнейшее число взошедших из них было равно 100?

12 Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50?

13 Два равносильных противника играют в шахматы. Для каждого из них, что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти. Ничьи во внимание не принимаются.

14 Бланк программированного опроса состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность, что методом угадывания студенту удастся выбрать по крайней мере четыре правильных ответа?

15 Вероятность того, что хотя бы одно изделие из 100 будет бракованным, составляет 0,1. Какой процент бракованных изделий выпускается предприятием.

16 При аудиторской проверке акционерного общества аудитор случайным способом отобрал 20 документов. Вероятность того, что документ имеет ошибку, равна 0,05. Определить вероятность того, чтобудет содержать ошибку: а) только два документа; б) хотя бы один документ. Решить с помощью формул Бернулли и Пуассона и сравнить результаты.

17 Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников. Численность работников составляет 500 человек.

18 Вероятность успешной сдачи экзамена студентом составляет 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов сдаст экзамен: а) 96 студентов; б) хотя бы 70 студентов; в) число сдавших экзамен составит от 70 до 90.

19 Известно, что 80 % специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет: а) не менее 70; б) от 65 до 90 человек.

20 Вероятность заболевания гриппом в осенне-зимний период для населения поселка составляет0,4. Найти вероятность того, что из 800 человек число заболевших составит: а) от 300 до 500; б) более половины населения.

21 Найти такое число k, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что среди 900 новорожденных более k мальчиков. Вероятность рождения мальчика 0,515.

22 В автопарке 70 машин. Вероятность поломки машины 0,2. Найти наивероятнейшее число исправных автомобилей и вероятность этого числа.

23 Всхожесть хранящегося на складе зерна равна 80 %. Определить вероятность того, что среди 100 зерен: а) число всхожих составит от 68 до 90 шт.; б) доля (частость) всхожих зерен будет отличаться от вероятности 0,8 по абсолютной величине не более чем на 0,1?

24 Два стрелка одновременно делают выстрелы по мишени. Сколько нужно произвести залпов, если наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, равно 8? Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первого стрелка равна 0,5, а второго – 0,8.

25 Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,1. Сколько нужно купить билетов, чтобы с вероятностью 0,99 выиграл хотя бы один из них?

26 Два стрелка производят по n выстрелов, причем каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,5.

27 В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определенный момент времени.

28 Всхожесть зерна 90 %. Определить вероятность того, что для отобранных случайным образом 100 зерен относительная частота всхожести будет отличаться от вероятности взойти р = 0,9 по абсолютной величине не более, чем на 0,1.

29 Вероятность что случайно взятый избиратель проголосует за данного кандидата, составляет 0,4. Найти вероятность того, что: а) из 100 опрошенных избирателей более половины проголосует за данного кандидата: в) доля избирателей, проголосовавших за данного кандидата, будет отклоняться от постоянной вероятности не более чем на 0,05?

30 Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найти границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

31 Известно, что 10 % делянок под овощами плохо обработано. Сколько нужно проверить делянок, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что относительная частота засоренных делянок будет отличаться от вероятности засоренности по модулю не более чем на 0,01?

32 Для определения степени поражения винограда вредителями было обследовано 400 кустов. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,03. Определить границы, в которых с вероятностью 0,9545 будет заключено число кустов, не пораженных вредителями.

33 По экспертной оценке, доля семей с очень высокими доходами составляет 0,1. Каков должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью не менее 0,99, погрешность в оценке неизвестной вероятности роста была не более 0,0025?

34 Страховаякомпания заключила 5000 договоров определенного вида. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти: а) вероятность того, что страховых случаев будет не более 120; б) наивероятнейшее число страховых случаев; в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения доли договоров со страховым случаем, будет отклоняться от постоянной вероятности не более чем на 0,5 %.

4 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем до опыта заранее неизвестно, какое именно значение она примет. Случайные величины подразделяются на одномерные и многомерные.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные значения, а непрерывная величина принимает все значения на заданном промежутке.

Законом или таблицей распределения дискретной случайной величины называют упорядоченный перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

X	x_1	x_2	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	. . .	p_n

, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

На графике в прямоугольной системе координат наносят точки $(x_i;p_i)$, которые соединяют отрезками прямых. Полученную ломанную линию называют многоугольником распределения.

Математическим ожиданием *M(X)* дискретной случайной величины *X* называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \qquad (4.1)$$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат дисперсия и среднее квадратическое отклонение. **Дисперсией** *D(X)* дискретной случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \text{ или } D(X) = M(X^2) - M^2(X), \qquad (4.2)$$

$$\text{где } M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \,. \qquad (4.3)$$

Средним квадратическим (стандартным) отклонением случайной величины *X* называют корень квадратный из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины *X* - числа появления события *A* в *n* независимых испытаниях *k* раз (*k* = 0,1,2,…, *n*), если вероятность появления события в *k*-ом испытании равна *p*, а вероятность возможного значения *X* = *k* (числа появления события) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; M(X) = np, D(X) = npq. \qquad (4.4)$$

Если число независимых испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытании очень мала, то применяют формулу Пуассона, а полученный закон называется **законом распределения вероятностей Пуассона:**

$$P_n(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np, \quad M(X)=\lambda, \; D(X)=\lambda. \qquad (4.5)$$

Геометрическим называют закон распределения дискретной случайной величины X - числа появления события A в nнезависимых испытаниях k раз (k = 1,2,…, n), если вероятность появления события в k-ом испытании равна p, а испытания проводятся до первого положительного исхода. Тогда вероятность возможного значения $X = k$находится по формуле:

$$P_n(X=k)=p\,q^{k-1},\; M(X)=\frac{1}{p},\;\; D(X)=\frac{q}{p^2}. \qquad (4.6)$$

Пусть имеется совокупность, состоящая из Nэлементов, из которых M обладает необходимым свойством, Из общей совокупности элементов случайным образом отбирается n элементов по схеме без возвращения. Тогда вероятность того, что среди nэлементов окажется k с нужным свойством определяется по формуле (4.7), составляющей **гипергеометрический** закон распределения.

$$P_n(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \qquad (4.7)$$

$$M(X)=n\frac{M}{N},\; DX=n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right). \; (4.8)$$

1 Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины Х – числа комбайнов, работавших безотказно. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Х.

2 Вероятность рождения мальчика 0,515. Составить закон распределения случайной величины Х – числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3 Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4. Составить закон распределения случайной величины Х – числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Х. Построить график распределения вероятностей.

4 В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3 спортсмена. Составить закон распределения случайной величины Х – числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины Х.

5 В группе, состоящей из $(2N + 1)$ студентов, N девушек. Составить закон распределения случайной величины Х – числа девушек из случайно отобранных трех студентов (N – номер студента в группе).

6 В партии из $(N+5)$ изделий $(N+1)$ изделие высокого качества. Случайно отбирается 3 изделия. Составить закон распределения случайной величины X – числа изделий высокого качества среди отобранных.

7 Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X – числа выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7. Найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

8 Покупатель посещает магазины до момента приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые посетит покупатель из пяти возможных. Найти наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

9 Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения случайной величины X – числа купленных билетов, если он имеет возможность купить только 5 билетов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

10 На спортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствия с вероятностями, равными соответственно 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. При первой неудаче спортсмен в дальнейших состязаниях не участвует. Составить закон распределения случайной величины X – числа взятых препятствий. Найти математическое ожидание случайной величины X.

11 Имеется 10 билетов: 1 билет в партер стоимостью 2500 руб., 3 билета в амфитеатр по 1000 руб. и 6 билетов на балкон по 300 руб. После реализации части билетов осталось три билета. Составить закон распределения случайной величины X – стоимости непроданных билетов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

12 Две компании участвуют в аукционе по реализации трех инвестиционных проектов. Вероятность выиграть аукцион для первой компании по первому проекту составляет 0,6, по второму – 0,95 и по третьему проекту 0,4. Возможная прибыль от реализации каждого проекта составляет 12 млн. руб. Определить ожидаемую прибыль для каждой компании.

13 Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым 0,8. Составить закон распределения случайной величины Х – числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен, если он его первый раз не сдал. Найти математическое ожидание случайной величины Х.

14 Дискретная случайная величина Х задана законом распределения.

По одному варианту построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Х.

X	Значения вероятностей по вариантам											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,1	0,2	0,05	0,15	0,1	0,2	0,25	0,1	0,4	0,05	0,15	0,12
3	0,2	0,25	0,15	0,2	0,3	0,4	0,3	0,15	0,3	0,1	0,25	0,23
5	0,4	0,3	0,2	0,25	0,3	0,3	0,2	0,25	0,2	0,15	0,25	0,46
7	0,2	0,15	0,4	0,25	0,2	0,05	0,15	0,35	0,08	0,25	0,2	0,14
9	0,1	0,1	0,2	0,15	0,1	0,05	0,1	0,15	0,02	0,45	0,15	0,05

15 Предприниматель рассматривает возможность покупки акций трех предприятий, по каждой из которых известна доходность, как отношение величины получаемого дохода за определенный период времени к цене акции и вероятности возможных значений доходности.

Акции какого предприятия следует считать более доходными, если руководствоваться средним значением (математическим ожиданием) доходности?

Акции какого предприятия являются менее рискованными (считая, что чем выше колеблемость доходности акций, тем больше их рискованность)?

Предприятие 1		Предприятие 2		Предприятие 3	
Доход-ность,% (*X*)	Вероят-ность, (*Px*)	Доход-ность, % (*У*)	Вероят-ность, (*Py*)	Доход-ность, % (*Z*)	Вероят-ность, (*Pz*)
5	0,2	3	0,1	1	0,1
7	0,3	7	0,4	6	0,4
9	0,4	10	0,3	10	0,25
11	0,1	15	0,2	20	0,25

16 Бросают 12 игральных костей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

17 Математическое ожидание случайной величины X равно 8. Найти математическое ожидание случайных величин: а) $X–4$; б) $X+6$; в) $3X–4$; г) $4X+3$.

18 Дисперсия случайной величины X равна 8. Найти дисперсию следующих величин: а) $X–2$; б) $X+6$; в) $3X-2$; г) $2X+7$.

19 Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) Z = 4X-2У; б) Z = 2X-4У; в) $Z = 3X+5У$; г) $Z = 0,5X+3У$ если $M(X)=5$, $M(У) = 3$, D(X) = 4, $D(У) = 6$. Случайные величины X и У независимы.

20 Случайные величины X и У независимы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) Z = 4X+2У; б) Z = 5X-3У; в) Z = 3X-У, г) Z = 2X + 4У если M(X) = 6, M(У)= 5, D(X)= 7, D(У)= 4.

21 Вероятность изготовления бракованной детали автоматом равна 0,002. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* - числа бракованных деталей, если деталей изготовлено 1000. Определить вероятность того, что из 1000 деталей будет изготовлено: а) не более двух бракованных; б) хотя бы одна бракованная.

22 Независимые случайные величины *X* и *У* имеют следующие распределения:

X	2	4	6
p_x	0,3	0,5	0,2

$У$	3	4
p_y	0,4	0,6

Составить закон распределения случайных величин: а) Z=X+У; б) V=XУ. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин Z и V.

23 В бригаде два звена тракторов. В первом звене 3 трактора, причем вероятность безотказной работы каждого из них в течение смены равна 0,9. Во втором звене 2 трактора, вероятность безотказной работы первого из них равна 0,8, а второго 0,7. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа тракторов, работавших безотказно в бригаде. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

24 Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна *N: (N+5)*, вторым *N: (N+2)*. Составить закон распределения случайной величины *Z=X+У*, где *X* - число поражений мишени первым стрелком, *У* – число поражений мишени вторым стрелком. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

25 Случайные величины *X* – площадь посева овощей на хозяйство (га) и *У* – урожайность овощей с 1 га (т) имеют следующие распределения:

X	1	2	3
p_x	0,1	0,6	0,3

$У$	10	15	20
p_y	0,2	0,5	0,3

Определить средний валовой сбор овощей на хозяйство, дисперсию и среднее квадратическое отклонение валового сбора овощей.

26 Два независимо работающих станка могут выпускать бракованные изделия за 1 час в соответствии со следующими законами распределения:

1 станок

X	0	1	2
p_x	0,1	0,6	0,3

2 станок

$У$	0	1	2
p_y	0,2	0,6	0,2

Найти закон распределения случайной величины *Z* – числа единиц выпуска бракованных изделий для двух одновременно работающих станков. Построить график распределения случайной величины *Z* . Найти *M(Z), D(Z), σ(Z)*.

27 В учреждении заработная плата служащих на начало января текущего года имела следующий закон распределения:

X	33000	34000	35000	36000
p	0,1	0,15	0,6	0,15

где X – величина заработной платы для определенной категории служащих, руб.; р – доля служащих определенной категории.

В первом полугодии заработную плату повысили на 30 %, во втором полугодии заработная плата возросла по каждой категории служащих на 300 руб. Составить закон распределения случайной величины У - заработной платы на конец года. Определить изменение среднего уровня заработной платы за год.

28 Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1=1$ с вероятностью $p_1=0{,}2$; $x_3=5$ с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью p_2. Найти x_2 и p_2, если известно, что $M(X)=3$.

29 Вероятность сдать экзамен студентом на «отлично» равна 0,3, на «хорошо» – 0,4. Определить вероятности получения других оценок (2;3), если известно, что $M(X)=3{,}9$.

30 Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,02. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ - числа выигранных билетов, если их было приобретено 100.

31 По одному тиражу лотереи куплено 100 билетов. Среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно трем. Найти вероятность выигрыша по одному билету лотереи.

32 Подброшены две игральные кости. Найти $M(X)$, где X - случайная величина – сумма числа очков, которые могут появиться на двух выпавших гранях.

33 Организация продает крупный рогатый скот живым весом x_1 и x_2 ($x_2>x_1$). Вероятность того, что крупный рогатый скот будет продан весом x_1 равна 0,4. Найти закон распределения случайной величины X – веса крупного рогатого скота, если математическое ожидание составило 4,60 ц, а дисперсия 0,24.

34 Совокупность семей имеет следующее распределение по числу детей:

X	x_1	x_2	2	3
p	0,1	p_2	0,4	0,35

Определить x_1, x_2, p_2, если известно, что $M(X)=2$, $D(X)=0{,}9$.

35 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	x_2	x_3	8
p	0,1	p_2	0,5	0,1

Найти x_2, x_3, p_2, если известно, что $M(X)=4$, $M(X^2)=20{,}2$.

36 Совокупность студентов имеет следующее распределение по результатам сдачи сессии:

X	2	3	4	5
p	0,1	p_2	p_3	p_4

Найти вероятности получения удовлетворительных, хороших и отличных оценок, если известно, что математическое ожидание (среднее значение) результатов сдачи экзаменов составило 3,7, а среднее квадратическое отклонение 0,9.

37 По данным задачи 14 определить модальное и медианное значения случайной величины *X*, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

38 По данным задачи 25 определить модальное и медианное значение валового сбора, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

5 НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Непрерывная случайная величина *X* принимает значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Она может быть задана функцией распределения вероятностей (интегральной функцией) или плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией).

Функцией распределения вероятностей(интегральной функцией) случайной величины *X* называют функцию *F(x),* определяющую для каждого значения *X* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньше x, т.е. $F(x) = P(X < x)$. Функция распределения имеет следующие свойства:

1) $F(-\infty) = 0$;

2) $F(+\infty) = 1$;

3) $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$. (5.1)

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией)непрерывной случайной величины *X*называют первую производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Функция плотности вероятностей имеет следующие свойства:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3) $P(a \le x < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$; (5.2)

4) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. (5.3)

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\text{. Если } x\in(a;b)\Rightarrow M(X)=\int\limits_{a}^{b} xf(x)dx. \quad (5.4)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))^2 f(x)dx\text{, или } D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X). \quad (5.5)$$

Если $x\in(a;b)\Rightarrow D(X)=\int\limits_{a}^{b}x^2 f(x)dx-M^2(X)$. (5.6)

Среднее квадратическое отклонение определяется как корень квадратный из дисперсии:
$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ (5.7)

1 Даны законы распределения дискретной случайной величины:

а)

X	1	4	6	8
p	0,1	0,3	0,4	0,2

б)

X	-2	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

2 По данным задачи 5, темы 4 составить функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

3 По данным задачи 6, темы 4 составить функцию распределения случайной величины X и начертить ее график

4 По одному варианту задачи 14, темы 4 составить функцию распределения случайной величины X и начертить ее график.

5 Найти функцию распределения случайной величины X – числа попаданий в цель, если произведено три выстрела с вероятностью попадания в цель при каждом выстреле 0,8.

6 Вероятность сдачи первого экзамена студентом составляет 0,7, второго 0,6 и третьего 0,8. Найти функцию распределения случайной величины X – числа экзаменов, сданных студентом. Определить $M(X)$.

7 Случайная величина X задана функцией распределения:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & при -2<x\le 2,\\ 1, & при\ x>2.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -2,\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{3}, & при -2<x\le 4,\\ 1, & при\ x>4.\end{cases}$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение: а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1;
г) в интервале (0;2).

8 Дана функция распределения случайной величины *X*:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^6}{4}, & \text{при } 0<x\le\sqrt[3]{2},\\ 1, & \text{при } x>\sqrt[3]{2}.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^5}{32}, & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$

Найти вероятность того, что в результате шести испытаний случайная величина *X* два раза примет значение, принадлежащее интервалу (0;1).

9 Случайная величина задана функцией:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{8}, & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 4,\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}-1, & при\ 4<x\le 16,\\ 1, & при\ x>16.\end{cases}$

Найти: а) плотность распределения вероятностей случайной величины *X*; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

10 Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -2a,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{2}, & при -2a<x\le(4-2a),\\ 1, & при\ x>(4-2a).\end{cases}$$

а) Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (-а; а).

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

11 Случайная величина *X* задана функцией распределения:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le A,\\ \dfrac{x^3}{8}, & при\ A<x\le B,\\ 1, & при\ x>B.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le A,\\ \dfrac{x^4}{16}, & при\ A<x\le B,\\ 1, & при\ x>B.\end{cases}$

Найти значения A и B, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

12 Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x\le 1, \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}, & при\ 1<x\le 2, \\ 1, & при\ x>2. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины X; б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу $(1;1{,}5)$; в) начертить графики функций.

13 Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x\le 2, \\ \dfrac{x^3-8}{19}, & при\ 2<x\le 3, \\ 1, & при\ x>3. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5; 3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; г) моду и медиану величины X. Построить графики функций.

14 Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<0, \\ \dfrac{4a-2x}{3a^2}, & при\ 0\le x<a, \\ 0, & при\ x\ge a. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения *F(x)*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{a}{6};\frac{a}{3}\right)$.

15 Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<0, \\ x^3+x, & при\ 0\le x<\sqrt{\sqrt{5}-1}, \\ 0, & при\ x\ge\sqrt{\sqrt{5}-1}. \end{cases}$$

Определить: а) функцию распределения случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;1,2). Начертить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

16 Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x<\ln 2,\\ \dfrac{1}{2}e^{2x}, & при\ \ln 2\le x<\dfrac{3}{2}\ln 2,\\ 0, & при\ x\ge\dfrac{3}{2}\ln 2.\end{cases}$$

Определить: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (ln2; 1,2ln 2). Начертить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

17 Случайная величина *X* задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x<0,\\ \dfrac{4}{a^2}x^3, & при\ 0\le x<\sqrt{a},\\ 0, & при\ x\ge\sqrt{a}.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* примет значение, заключенное в интервале $\left(\sqrt{\frac{a}{4}};\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

18 Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}e^{3x}, & при\ x<\ln 2,\\ 0, & при\ x\ge\ln 2.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины *X* и начертить её график; б) вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

19 Случайная величина *X* задана функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1,\\ a(x-1)^2, & при\ 1<x\le 3,\\ 1, & при\ x>3.\end{cases}$$

Определить: а) значение a; б) математическое ожидание; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2). Построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

20 Дана функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le-\dfrac{\pi}{2},\\ 0{,}5(1+Sinx), & при\ -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & при\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Построить графики функций *F(x)* и *f(x)*. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

21 Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\; x\le 1,\\ \dfrac{3x^2-2x}{c}, & при\; 1<x\le 4,\\ 0, & при\; x>4.\end{cases}$$

Найти: а) постоянную *c*; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

22 Случайная величина *X* задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{2c}{e^{x}+e^{-x}},\ \text{при}\quad -\infty<x<+\infty.$$

Найти значение постояннойc.

23 Случайная величина *X* задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & при\; x\le 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & при\; x>0.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (-1;3).

6 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При решении практических задач наиболее часто применяются законы равномерного, нормального и показательного распределения вероятностей непрерывных случайных величин.

Равномерным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, если на интервале *(a,b)*, которому принадлежат все возможные значения случайной величины *X*, плотность распределения сохраняет постоянное значение:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\; x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & при\; a<x\le b,\\ 0 & при\; x>b.\end{cases}\quad (6.1)$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при\ a<x\le b,\\ 1 & при\ x>b.\end{cases} \quad (6.2)$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, Д(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X)=\frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}. \quad (6.3)$$

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, плотность распределения которого имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ M(x)=a, D(x)=\sigma^2. \quad (6.4)$$

Вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha;\beta$):

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \quad (6.5)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_o^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функция Лапласа,

причем $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, при $x>5, \Phi(x)=0{,}5$.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания будет меньше положительного числа δ, определяется по формуле:

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (6.6)$$

В частности, если $a = 0$, то $P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. (6.7)

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}0\ при\ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}\ при\ x\ge 0,\end{cases} \quad (6.8)$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона:

$$F(x)=\begin{cases}0,\, при\, x<0,\\ 1-e^{-\lambda x},\, при\, x\geq 0.\end{cases} \qquad (6.9)$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в интервал (*a, b*), распределенной по показательному закону:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}, \qquad (6.10)$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, Д(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (6.11)$$

1. Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале (*–2;N*). Найти: а) плотность распределения случайной величины *X*; б) функцию распределения случайной величины *X*; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(-1;\frac{N}{2}\right)$; г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*(N-число по указанию преподавателя).

2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале: а) (5; 11); б) (–3; 5); в) (0;8); г) (–4;4). Начертить графики этих функций.

3. Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале (*a;b*), причем *M(X)*=1; *D(X)*=3. Найти: а) функцию и плотность распределения вероятностейслучайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (0;3). Начертить графики функций.

4. Для исследования продуктивности определенной породы домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 5 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти вероятность того, что: а) диаметр взятого наудачу яйца будет заключен в границах от 4,7 до 6,2 см; б) отклонение диаметра от среднего не превзойдет по абсолютной величине 0,6 см.

5. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 г и математическим ожиданием 1000 г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет: а) от 900 до 1300 г; б) не более 1500 г; в) не менее 800 г; г) отличаться от среднего веса по модулю не более чем на 200 г; д) начертить график дифференциальной функции случайной величины X.

6. Урожайность озимой пшеницы по совокупности участков распределяется по нормальному закону с параметрами: а = 50 ц/га, σ = 10 ц/га. Определить: а) какой процент участков будет иметь урожайность свыше 40 ц/га; б) процент участков с урожайность от 45 до 60 ц/га.

7. Выборочным методом измеряется засоренность зерна, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 0,2 г и математическим ожиданием а = 0. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 0,3 г.

8. Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределенная случайная величина X, имеющая математическое ожидание 60 кг и среднее квадратическое отклонение 1,5 кг. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина X. Написать дифференциальную функцию этой случайной величины.

9. С вероятностью 0,9973 было установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой головы крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найти среднее квадратическое отклонение живого веса скота, считая, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.

10. Урожайность овощей по участкам является нормально-распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 300 ц/га и средним квадратическим отклонением 30 ц/га. С вероятностью 0,9545 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на участках.

11. Нормально-распределенная случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{32}}.$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (3; 9); б) моду и медиану случайной величины X.

12. Торговая фирма продает однотипные изделия двух производителей. Срок службы изделий подчиняется нормальному закону. Средний срок службы изделий первого производителя составляет 5,5 тыс. часов, а второго 6 тыс. часов. Первый производитель утверждает, что с вероятностью 0,95 срок службы его изделия находится в границах от 5 до 6 тыс. часов, а второй, с вероятностью 0,9, в границах от 5 до 7 тыс. часов. Изделия какого производителя имеют большую колеблемость срока службы.

13. Месячная заработная плата работников предприятия распределяется по нормальному закону с математическим ожиданием a = 40 тыс. руб. Известно, что 80 % работников предприятия получает заработную плату от 32 до 48 тыс. руб. Определить, какой процент работников предприятия имеет месячную заработную плату от 30 до 55 тыс. руб.

14. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если: а) параметр $\lambda = 2$; б) $\lambda = 5$; в) $\lambda = 0{,}5$. Начертить графики функций.

15. Случайная величина *X* распределена по показательному закону, причем $\lambda = 2$. Найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал: а) (0; 1); б) (2; 4). Найти *М(Х), Д(Х),* σ *(Х)*. Начертить графики функций.

16. Найти *М(Х), Д(Х),* σ *(Х)* показательного закона распределения случайной величины Х заданной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

если: а) $\lambda = 0{,}4$; б) $\lambda = 3$; в) $\lambda = 4$.

17. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность безотказной работы первого имеет показательнее распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 20 часов: а) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) откажет хотя бы один элемент; г) оба элемента откажут.

18. Вероятность того, что оба независимых элемента будут работать в течении 10 суток равна 0,64. Определить функцию надежности для каждого элемента, если функции одинаковы.

19. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы равно 2. Найти вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает: а) 4 ошибки; б) не менее двух ошибок; в) хотя бы одну ошибку.

20. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) 4 вызова; б) не менее трех вызовов.

21. Случайная величина Х распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Определить: а) функцию распределения вероятностей случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (-$\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$).

22. Случайная величина *X* распределена по закону Релея

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2), при а = 1; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

23.Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<a,\\ 1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^{\beta}, & при \quad x\ge a,\ \beta>0.\end{cases}$$

Определить: а) размер годового дохода, который для случайно взятого лица будет превышен с вероятностью 0,8; б) функцию плотности вероятностей случайной величины *X*; в) математическое ожидание случайной величины *X*, при $\beta>1$.

24.Случайная величина *X* распределена по закону прямоугольного треугольника (рисунок 1) в интервале (0; а). Найти: а) плотность распределения случайной величины *X*; б) функцию распределения вероятностей; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\frac{a}{4};\frac{a}{2})$; г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

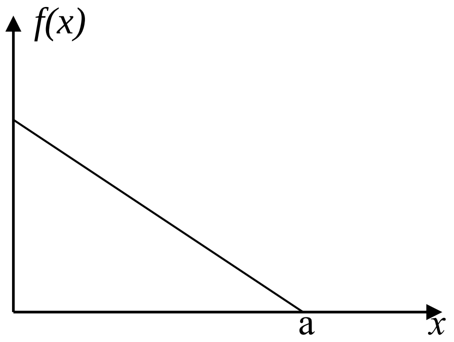

Рисунок 1.

25.Случайная величина *X* распределена по закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») (Рисунок 2) на интервале (-а; а).

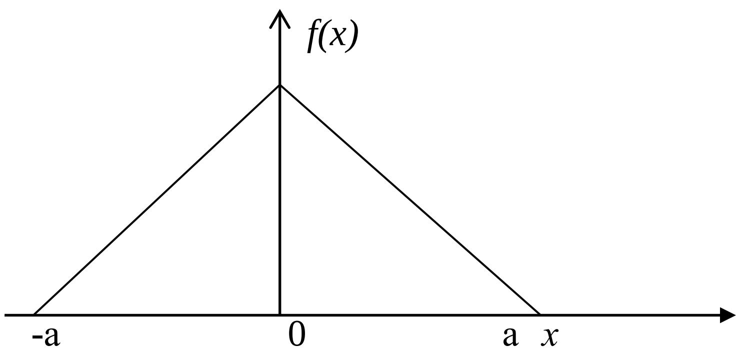

Рисунок 2.

Найти: а) функцию плотности распределения вероятностей случайной величины X; б) функцию распределения и построить ее график; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\frac{a}{2};\frac{a}{2})$; г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

26. Мишень имеет форму круга с радиусом 6см, причем вероятность попадания пули при стрельбе в любой концентрический круг пропорциональна площади этого круга. Обозначим через Rрасстояние от точки попадания пули до центра круга. Найти: а) функцию распределения случайной величины R; б) плотность распределения случайной величиныR; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины R.

7 ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

а) Функция одного случайного аргумента.

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то случайную величину Y называют функцией случайного аргумента X, т. е. $Y = \varphi(X)$.

Пусть аргумент X− дискретная случайная величина. Тогда случайная величина $Y = \varphi(X)$ также дискретная случайная величина.

Если аргумент X принимает значение x_i с вероятностьюp_{x_i}, то случайная величина Y принимает значение $y_i = \varphi(x_i)$ с той же вероятностью $p_{y_i} = p_{x_i}$.

Пусть аргумент X – непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$. Если y = φ(x) – дифференцируемая, строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|. \qquad (7.1)$$

Если функция $Y = \varphi(X)$ в интервале возможных значений случайной величины X не монотонна, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция $\varphi(x)$ монотонна, и найти плотности распределения $g_i(y)$ для каждого из интервалов монотонности, а затем представить $g(y)$ в виде суммы:

$$g(y) = \sum g_i(y). \qquad (7.2)$$

Например, если функция $\varphi(x)$ монотонна на двух интервалах, в которых соответствующие обратные функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ то

$$g(y) = f[\Psi_1(y)] \cdot |\Psi_1'(y)| + f[\Psi_2(y)] \cdot |\Psi_2'(y)| \quad (7.3)$$

б) Функция двух случайных аргументов.

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов X и $У$.

$$Z = \varphi(X, Y). \quad (7.4)$$

Если X и $У$ – дискретные независимые случайные величины, то для того чтобы найти распределение функции $Z = X + Y$ надо найти все возможные значения $z_k = x_i + y_j$ и их вероятности $p_{z_k} = p_{x_i} \cdot p_{y_i}$.

Если X и Y – непрерывные случайные величины, то плотность распределения g(z) суммы $Z = X + Y$, при условии, что плотность распределения хотя бы одного из аргументов задана в интервале (–∞; ∞), находится по формуле:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx, \text{ или } g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) \cdot f_2(y)dy, \quad (7.5)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – плотности распределения аргументов X и Y.

Если возможные значения аргументов неотрицательны, то плотность распределения $g(z)$ величины $Z = X + Y$ находят по формуле:

$$g(z) = \int_{o}^{z} f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx, \text{ или } g(z) = \int_{o}^{z} f_1(z-y) \cdot f_2(y)dy. \quad (7.6)$$

Если X и Y – независимые случайные величины, заданные соответствующими плотностями распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, то вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область S равна:

$$P[(x;y) \in S] = \iint_{(S)} f_1(x) \cdot f_2(y)dxdy. \quad (7.7)$$

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	0	1	4
p	0,3	0,5	0,2

Найти закон распределения случайной величины Y, где: а) $Y=2X–1$; б) $Y=X+5$; в) $Y=X^2–2$; г) $Y=\sqrt{X}$. Определить $M(Y)$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–2	–1	0	1

p	0,2	0,4	0,1	0,3

Найти закон распределения случайной величины Y, где: а) $Y=2X+1$; б)$Y=X^3-1$; в) $Y=X^2$; г) $Y=\sqrt{X+2}$. Определить $M(Y)$.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4	5
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y, если: а) $Y=4X-4$; б) $Y=X^2$.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
p	0,2	0,7	0,1

Найти: а) закон распределения случайной величины $Y=sin^2X$;
б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y.

5. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (2;10). Найти функцию плотности распределения случайной величины: а) $Y = 0,5X - 1$; б) $Y = X^2$; в)$Y=\sqrt{X-1}$. Определить $M(Y)$, $Д(Y)$, $\sigma(Y)$.

6. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Найти плотность распределения случайной величины: а) $Y = sinX$; б) $Y= cosX$.

7. Случайная величина X распределена нормально с параметрами: $a = 2,\ \sigma = 1$. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины: а) $Y=2X + 6$; б) $Y=X^3$.

8. Непрерывная случайная величина X задана функцией

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<\sqrt{3} \\ \dfrac{x^3-3x}{2}, & при\ \sqrt{3}\le x<2 \\ 1, & при\ x\ge 2. \end{cases},$$

Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины: а) $Y=\frac{1}{X}$; б) $Y=\sqrt{X}$.

9. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} c(4-x^2), при\ |x|\le 2, \\ 0, при\ |x|>2. \end{cases}$$

Определить значение постоянной «*c*». Найти *M(X), D(X), σ(X)*. Найти плотность распределения случайной величины *Y*, если: а) $Y=2X+1$; б) $Y=X^2$.

10. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти плотность вероятностей случайной величины *Y*, если: а) Y=2X–1; б) $Y=\sqrt{X}$; в) $Y=1-e^{-2x}$.

11. Независимые случайные величины *X* и *Y* распределены равномерно. Слу–чайная величина *X* распределена в интервале (0; 2), а случайная величина *Y* в интервале (0;10). Найти функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины $Z=X+Y$. Построить графики функций случайной величины *Z*.

12. Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале (-4; 1), а случайная величина *Y* равномерно распределена в интервале (1; 6). Найти плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$, начертить ее график.

13. Независимые случайные величины X и У заданы функциями:

$$f_1(x) = e^{-x}, \qquad npu \quad 0 \le x < \infty,$$
$$f_2(y) = 0{,}5e^{-0{,}5y}, \quad npu \quad 0 \le y < \infty.$$

Найти функцию плотности распределения случайной величины Z=X+У.

14. Независимые случайные величины X и У распределены по нормальному закону:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины Z=X+У. Показать, что случайная величина Z распределяется по нормальному закону.

15. Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с центром рассеивания α и средним квадратическим отклонением σ. Найти плотность распределения случайной величины X.

8 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Закон больших чисел представляет собой наиболее общий принцип, в результате которого количественные закономерности, присущие массовым случайным явлениям, отчетливо проявляются при достаточно большом числе наблюдений.

Лемма Чебышева (Маркова). Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $M(X)$, то для любого $\alpha > 0$ имеет место неравенство:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}. \tag{8.1}$$

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{8.2}$$

Это неравенство может быть использовано в виде следующего неравенства:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{8.3}$$

Если случайная величина X – число появления события A в независимых испытаниях,имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M(X)=np$ и дисперсией $D(X)=npq$, то неравенство Чебышева имеет вид

$$P(|m - np| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}. \tag{8.4}$$

Для относительной частоты $\frac{m}{n}$ события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью p, неравенство Чебышева принимает вид

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{8.5}$$

Теорема Чебышева.Если случайные величиныX_1, X_2, ...,X_n попарно независимы и имеют конечные математические ожидания, а дисперсии каждой из них ограниченны сверху постоянной C = const ($D(X_i) \leq C$ (i=1, 2,…,n)), то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 0. \tag{8.6}$$

то есть среднее арифметическое случайных величин X_1, X_2,...,X_n сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Воспользовавшись неравенством Чебышева, получаем

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\bar{x})}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \tag{8.7}$$

Законы больших чисел не позволяют уменьшить неопределённость в каждом конкретном случае, они утверждают лишь о существовании закономерности при достаточно большом числе опытов. Например, если при подбрасывании монеты десять раз появился герб, то это не означает, что в одиннадцатый раз появится цифра.

1 Цена акций коммерческой фирмы, реализуемых на фондовом рынке, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 6 тыс. руб. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки цена акций превысит 10 тыс. руб.

2 Число дождливых дней в году для данной местности является случайной величиной X с $M(X)$ =100. Оценить вероятность того, что в следующем году в данной местности будет меньше 140 дождливых дней.

3 Количество электроэнергии, потребляемой поселком в течение суток, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 4 тыс. кВт.- ч. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление энергии: а) превысит 8 тыс. кВт.- ч.; б) не превысит 6 тыс. кВт.- ч.

4 Общая стоимость всех букетов в цветочном киоске составляет 18 тыс. руб. Вероятность того, что стоимость взятого наугад букета не превышает 300 руб., равна 0,7. Что можно сказать о количестве букетов в киоске?

5 Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян число взошедших окажется от 3750 до 4250, если известно, что $M(X)$ = 4000. Определить вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

6 Вероятность вызревания семян овощной культуры в данной местности составляет 0,8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 растений, число растений с вызревшими семенами составит от 750 до 850. Определить вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

7 В организации имеется 100 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них в течение определенного времени составляет 0,9. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что: а) отклонение числа безотказно работавших автомобилей за определенный период времени от его математического ожидания не превзойдет по модулю 5; б) отклонение доли безотказно работающих автомобилей от постоянной вероятности 0,9 по модулю будет меньше 0,06.

8 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	6	9
p	0,1	0,4	0,3	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| > 3$.

9 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–1	0	1	3	5
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<2{,}5$.

10 Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0,\\ \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{3}}, & при \quad 0<x\le 8,\\ 0, & при \quad x>8.\end{cases}$$

а) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<4$. б) Определить вероятность того, что $|X-M(X)|<4$.

11 Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le a,\\ \frac{(x-a)^2}{a^2}, & при \quad a<x\le 2a,\\ 1, & при \quad x>2a.\end{cases}$$

а) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<\frac{a}{2}$. б) Определить вероятность того, что $|X-M(X)|<\frac{a}{2}$.

12 Случайная величина задана интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \frac{x^2}{4a^2} & при \quad 0<x\le 2a,\\ 1 & при \quad x>2a.\end{cases}$$

а) Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<a$; б) определить вероятность того, что $|X-M(X)|<a$.

13 Выборочным способом определяют вес колосьев ячменя. Сколько необходимо отобрать колосьев, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99, можно было утверждать, что средний вес случайно отобранных колосьев будет отличаться от среднего веса колосьев во всей партии (принимаемого за математическое ожидание) не более чем на 0,1 г? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса не превышает 0,2 г.

14 Сколько человек необходимо отобрать для определения удельного веса лиц со специальным образованием, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что отклонение относительной частоты лиц со специальным образованием от их доли, принимаемой за постоянную вероятность, не превышало по модулю 0,04.

15 В населенном пункте проживает 5040 жителей. В течение года каждый десятый житель обращается в администрацию поселения по интересующим жителей вопросам. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что в ближайший месяц в администрацию населенного пункта обратится от 34 до 50 жителей.

16 Применима ли к последовательности независимых случайных величин X_1, X_2, …,X_nтеорема Чебышева, если закон распределения каждой из случайных величин X_n (n=1,2,3,…) имеет вид:

а)

X_n	$-na$	0	na
p	$1/(4n^2)$	$1-1/(2n^2)$	$1/(4n^2)$

б)

X_n	$-n^{-1}$	n^{-1}
p	0,5	0,5

где $a > 0$.

9 МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Многомерной случайной величиной называют совокупность случайных величин, определенных на одном и том же пространстве элементарных событий. Она задается несколькими числами, рассматриваемыми совместно.

Многомерные случайные величины могут быть дискретными, непрерывными и смешанными.

Двумерная дискретная случайная величина (*X*, *Y*) задается таблицей распределения, как совокупность пар возможных значений ($X = x_i$, $Y = y_j$) и соответствующих им вероятностей $P_{ij} = P(x_i, y_j) = P(X = x_i, У = y_j)$, $i = 1,2,..., n,\ j = 1,2,..., m$.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = 1;\ P(X = x_i) = P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j);\ P(У = y_j) = P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j);$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1,\ \sum_{j=1}^{m} P(y_j) = 1. \qquad (9.1)$$

Условные вероятности двумерной дискретной случайной величины $P(x_i / y_j)$и $P(y_j / x_i)$ находятся по формулам:

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)};P(y_j, x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}. \qquad (9.2)$$

Двумерная непрерывная случайная величина задается функцией распределения*F*(*x*, *y*) и плотностью совместного распределения*f* (*x*, *y*).

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y),\ f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}; \qquad (9.3)$$

$$P(x_1\le X<x_2,Y<y)=F(x_2,y)-F(x_1,y);P(X<x,y_1\le Y<y_2)=F(x,y_2)-F(x,y_1);$$

$$P(x_1\le X<x_2,y_1\le Y<y_2)=(F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2))-(F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)); \qquad (9.4)$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy. \qquad (9.5)$$

Для характеристики двумерной случайной величины используют математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения составляющих X и Y, а также корреляционный момент (ковариацию) *cov(x,y)* и коэффициент корреляции (r)

$$\mathrm{cov}(X,Y)=M((x-M(X)(y-M(Y))=M(XY)-M(X)M(Y). \qquad (9.10)$$

Для дискретных случайных величин *X, У*:

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p(x_i,y_j)-M(X)\cdot M(Y). (9.11)$$

Для непрерывных случайных величин *X, У*:

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy-M(X)\cdot M(Y). \qquad (9.12)$$

Коэффициент корреляции случайных величин *X* и *У*:

$$r_{xy}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},\ -1\le r_{xy}\le 1. \qquad (9.13)$$

1 В группе 8 мужчин и 5 женщин. Наугад отбирается 2 человека из группы. Составить совместный закон распределения случайных величин (*X, У*), где *X* – случайная величина, отобран мужчина, *Y*– отобрана женщина. Определить коэффициент корреляции между *X* и *Y*.

2 В первой группе 8 мужчин, из которых 5 занимаются спортом, во второй 6 женщин, из которых две занимаются спортом. Из каждой группы случайно отобрано по одному человеку. Составить совместное распределение случайных величин (*X, Y*), где *X* – отобранный из первой группы мужчина занимается спортом, *Y* – отобранная из второй группы женщина занимается спортом. Зависимы ли случайные величины *X* и *Y*?

3 Задана двумерная дискретная случайная величина *XY*:

а)

Y	X: 2	X: 4
0	0,1	0,3
5	0,2	0,15
10	0,15	0,1

б)

Y	X: 2	X: 4
1	0,1	0,25
3	0,15	0,2
5	0,05	0,25

Определить:а) законы распределения составляющих случайных величин; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение составляющих Х и У; в) условный закон распределения случайной величины У, если Х = 2; г) условный закон распределения случайной величины Х, если У = 5.

4 Задана двумерная дискретная случайная величина *XY*:

а)

Y	X: 0	X: 5	X: 20
0	0,15	0,2	0,10
10	0,10	0,3	0,15

б)

Y	X: -1	X: *0*	X: 1
1	0,1	0,15	0,1
3	0,05	0,4	0,2

Определить:

а) законы распределения составляющих;

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение составляющих случайных величин *X* и *Y*.

5 Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & при \quad x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & при \quad x<0,\ y<0.\end{cases}$$

Определить:

а) двумерную плотность вероятностей системы (*X, Y*);

б) вероятность попадания случайной точки (*X, Y*) в прямоугольник, ограниченный прямыми x = 0, x = 2, y = 1, y = 3.

6 Найти вероятность попадания случайной точки (*X, Y*) в прямоугольник, ограниченный прямыми x = 1, x = 2, y = 3, y = 5, если известна функция распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & при\, x\ge 0;\ y\ge 0\\ 0, & при<0;\ y<0\end{cases}$$

7 Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & при \quad x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & при \quad x<0,\ y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы (*X, Y*).

8 Имеется распределение хозяйств по затратам средств на 1 га посева и урожайности озимой пшеницы:

Производственные затраты на 1га посева, тыс. руб.	Урожайность, ц с 1 га			
	до 40	40-45	45-50	Свыше 50
до 10	9	*a*	3	-
10-15	*a*	11	20	7
свыше 15	-	*a*	8	16

Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин урожайности (X) и доз внесения удобрений (Y), (a – число по указанию преподавателя).

9 Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y) = a \cdot Sin(x+y)$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ и

$f(x,y) = 0,$ вне квадрата.

Определить: а) коэффициент а; б) $M(X)$, $M(Y)$; в) $D(X)$, $D(У)$.

10 Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x,y) = cosx \cdot \cos y$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2};$ и $f(x,y) = 0,$ вне квадрата. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

11 Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно внутри треугольника с вершинами О (0,0), A (0,6) и B (6,0). Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих систем.

12 Система случайных величин (X,Y) распределена равномерно внутри квадрата со стороной a, диагонали которого совпадают с осями координат. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих системы.

13 Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} 36xye^{-(x^2+y^2)}, & при\ x > 0;\ y > 0, \\ 0, & при \le 0;\ y \le 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

14 Система случайных величин (X,Y) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми x=0, y=0, x+y=a (a>0). Определить:
а) математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y,
б) корреляционный момент.

15 Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной случайной величины (*X,Y*):

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ 2e^{-2x}, & при\ x>0,\end{cases}\quad f(y)=\begin{cases}0, & при\ \ y\le 0,\\ 5e^{-5y}, & при\ y>0.\end{cases}$$

Найти: а) плотность совместного распределения системы; б) функцию распределения системы.

16 Доказать, что. если *X* и *Y* связаны линейной зависимостью, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна 1.

10 ЦЕПИ МАРКОВА

Результаты различных экспериментов или испытаний могут быть представлены в виде определенной последовательности букв или цифр, которые рассматриваются как процессы перехода от одного состояния в другое. Можно оценить вероятность такого перехода. Модель случайного процесса объединяет множество состояний и множество вероятностей перехода из одного состояния в другое.

Множество (пространство) состояний может быть конечным и бесконечным. Последовательность состояний образует цепь Маркова, если в отдельном испытании система принимает одно из возможных состояний, не зависящее от результатов ранее произведенных испытаний.

Вероятность $P_{ij}(S)$, есть условная вероятность перехода случайного процесса из состояния S_i в состояние S_j за один шаг. Так как она не зависит от номера испытания, то может обозначаться через P_{ij}. Первый индекс указывает номер предшествующего, а второй – последующего состояния. Если известны вероятности для любой пары состояния, то они могут быть представлены квадратной матрицей перехода.

$P_1=\lfloor P_{ij}\rfloor$, где P_{ij} - элемент (вероятность), стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

$$\sum_{i=1}^{k}P_{ij}=1, i=1,2,3,......k,\ j=1,2,....,k. \qquad (10.1)$$

Вероятность перехода процесса из состояния S_i в состояние S_j за n шагов обозначается $P_{ij}^{(n)}$, а квадратная матрица всех этих вероятностей обозначается P_n. Вероятность перехода процесса из состояния i в состояние j за два шага вычисляется по формуле полной вероятности.

$$P_{ij}^{(2)}=\sum_{z=1}^{m}P_{iz}\cdot P_{zj} \text{ или в матричной записи } P_2=P_1\cdot P_1=P_1^2. \qquad (10.2)$$

Аналогично получается матрица перехода за три шага $P_3 = P_1^3$
и за n – шагов $P_n = P_1^n$. (10.3)

1 Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова задаются матрицей:

а) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ б) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Найти число состояний системы. Построить граф, соответствующий матрице р.

2 Задана матрица вероятностей переходов

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-S & S \end{bmatrix}.$$

Каковы пределы изменений p и S?

3 В урне имеется 5 белых и черных шаров. Из урны случайно извлекается один шар, а обратно в урну возвращается один шар другого цвета. Опыт повторяется неоднократно. Найти матрицу переходных вероятностей, состояниями которой является количество белых шаров в урне. Найти вероятности перехода за два шага.

4 Игральная кость перекладывается многократно с равной вероятностью случайным образом с одной грани на любую из соседних четырех граней, независимо от исхода предыдущего испытания. К какому пределу стремится при $t \to \infty$ вероятность того, что в момент времени t игральная кость лежит на грани «5», если в момент времени t=0, она находится в этом же положении?

5 Имеется пять стульев, расположенных один возле другого. Человек переса-живается с одного стула на рядом стоящий, причем эти перемещения определяются бросанием правильной игральной кости. Стулья обозначены буквами *А,В,С,Д,Е*. Вначале он сидит на среднем стуле *С*. Если человек сидит на крайнем стуле, то: возвращается на стул *С*, когда выпадет четное число очков; остается на том же месте при выпадении нечетного числа очков.

Если человек сидит не на крайнем стуле, то: перемещается налево при выпадении одного или двух очков; перемещается направо при выпадении трех или четырех очков; остается на том же месте при выпадении пяти или шести очков. Найти: а) матрицу вероятностей переходов за один шаг;
б) вероятности следующих последовательностей:*С,Д,Е,С,Д,А,С; С,В,Д,Е,Е,А; С,В,А,А,С,Д; С,Д,Е,С,Е,С; С,В,С,Д,Е,Е.*

6 Студент, для получения профессионального образования, обучается вколледже в течение трех лет. Ежегодно он сдает комплексный экзамен. Если студент успешно сдаст экзамен, то он переводится на следующий курс или заканчивает колледж с дипломом специалиста. Если студент экзамен не сдает, то он остается на соответствующем курсе второй год. Вероятность успешной сдачи экзамена на первом году обучения составляет 0,7; втором – 0,8; третьем – 0,9. Указать подходящее число состояний системы. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг для ежегодных передвижений студента по курсам (первый, второй, третий год обучения, окончание колледжа). Определить вероятность, что студент будет обучаться на третьем курсе после сдачи второго экзамена. Определить среднее число лет, которые студент проводит в колледже.

7 По некоторой цели производятся выстрелы в моменты времени t_1 , t_2 , t_3,…Возможные состояния системы (цели):

s_1 – цель невредима,

s_2 – цель повреждена (но может функционировать),

s_1 – цель полностью поражена (не может функционировать).

Матрица переходных вероятностей $\left[P_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}$.

Сколько надо сделать выстрелов, чтобы вероятность поражения цели оказалась не менее 0,6?

11 ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ

Ряд значений (вариант) признака, расположенных в порядке возрастания или убывания с соответствующими им весами (частотами или частостями), называется **вариационными рядом** (рядом распределения). **Частота** (n_i) показывает, сколько раз встречается тот или иной вариант (значение признака) в статистической совокупности. **Частость**(относительная частота) (w_i) показывает, какая часть единиц совокупности принимает определенное значение или из интервала значений. В дискретных рядах перечисляются возможные значения признака x_i. Если признак непрерывный или число значений дискретного признака велико, то строят интервальный ряд распределения, в котором значения признака задаются в виде интервалов. При построении интервального ряда распределения число интервалов можно определить по формуле Стэрджесса:

$$k=1+3,322\, lgn, \qquad (8.1)$$

где n – число единиц совокупности.

Величина интервала (h) определяется по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \quad (8.2)$$

Дискретный ряд распределения изображается графически в виде полигона распределения частот или частостей. В этом случае по оси абсцисс откладывают значения признака, а по оси ординат – соответствующие им частоты или частости. Полученные точки соединяются отрезками.

Интервальные ряды изображают в виде гистограммы – фигуры, состоящей из прямоугольников. По оси абсцисс откладываются значения признака (границы интервалов), по оси ординат – частоты или частости.

Дискретные и интервальные ряды можно графически представить в виде кумуляты или огивы. При построении кумуляты, в отличии от полигона, по оси ординат откладываются накопленные частоты или частости. При построении огивы на оси абсцисс наносятся точки, соответствующие накопленным частотам или частостям, а по оси ординат значения признака.

Основной числовой характеристикой вариационного ряда является **средняя арифметическая:**

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ – простая}, \bar{\mathrm{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n} \text{ – взвешенная.} \qquad (8.3)$$

Модой вариационного ряда называется значение признака, которое имеет наибольшую частоту.

Медиана – значение признака у той единицы совокупности, которая делит вариационный ряд пополам.

В интервальных вариационных рядах с равным интервалами мода и медиана определяется по следующим формулам:

$$M_o = x_{mo} + h\frac{n_2 - n_1}{(n_2 - n_1) + (n_2 - n_3)}; \qquad (8.4)$$

$$M_e = x_{me} + h\frac{\frac{\sum n_i}{2} - S_{me-1}}{n_{me}}, \quad (8.5)$$

где x_{mo} и x_{me}- нижняя граница модального и медианного интервалов;

h- величина интервалов;

n_1, n_2, n_3 – соответственно частота интервала перед модальным, модального и после модального;

S_{me-1} – накопленная частота интервала, предшествующего медианному интервалу.

Колеблемость признака характеризуется с помощью показателей вариации, к которым относятся: размах вариации, среднее линейное отклонение, среднее квадратическое отклонение.

Дисперсия: $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\bar{x})^2}{n} = \dfrac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$ – простая; (8.6)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x})^2 \text{ – взвешенная.} \quad (8.7)$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. (8.8)

Коэффициент вариации: $V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%.$ (8.9)

Если V> 33%, то считается, что совокупность может быть статистически неоднородной в отношении данного признака.

Характеристики вариационного ряда могут быть рассчитаны с помощью моментов распределения. **Моментом распределения** k-го порядка называется средняя арифметическая k-ых степеней отклонений значений признака от определенной величины C.

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - c)^k n_i}{n}. \quad (8.10)$$

Обычно k= 0,1,2,3,4.

Если C = 0, то момент называется начальным

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^k n_i}{n}; M_1 = \frac{\sum x_i n_i}{n}; M_2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n}; M_3 = \frac{\sum x_i^3 n_i}{n}; M_4 = \frac{\sum x_i^4 n_i}{n}. \quad (8.11)$$

Если С = $\bar{x}$, то момент называется центральным

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^k n_i}{n}; m_2 = \sigma^2; m_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 n_i}{n}. \quad (8.12)$$

Центральные моменты можно рассчитать через начальные, используя формулы:

$$m_k = M_k - C_k^1 M_{k-1} M_1 + C_k^2 M_{k-2} M_1^2 - C_k^3 M_{k-3} M_1^3 + \ldots \pm M_1^3, \quad (8.13)$$

$$m_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3;\ m_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4. \quad (8.14)$$

В качестве меры симметричности ряда распределения применяется **коэффициент асимметрии**:

$$K_A = \frac{m_3}{\sigma^3}, \tag{8.15}$$

где m_3- центральный момент третьего порядка.

Если $K_A = 0$, то вариационный ряд является симметричным;
если $K_A < 0$, то вариационный ряд с левосторонней асимметрией;
если $K_A > 0$, то вариационный ряд с правосторонней симметрией.

Мерой крутости (островершинности) ряда распределения является **эксцесс**:

$$Э = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3, \tag{8.16}$$

где m_4 – центральный момент четвертого порядка.

Если $Э \approx 0$, то распределение средне вершинное;
если $Э > 0$, то распределение островершинное;
если $Э < 0$, то распределение плосковершинное.

1По списку на предприятии числится 110 рабочих, которые имеют следующиеразряды:1,5,2,4,3,4,6,4,5,1,2,2,3,4,5,3,4,5,2,1,4,5,5,4,3,4,6,1,2,4,4,3,5,6,4,3,3,1,3,4,3,1,2,4,4,5,6,1,3,4,5,3,4,4,3,2,6,1,2,4,5,3,3,2,3,6,4,3,4,5,4,3,3,2,6,3,3,4,5,4,4,3,3,2,1,2,1,6,5,4,3,2,3,4,4,3,5,6,1,5,4,3,2,4,1,3,5,4,6,5.
Составить ряд распределения рабочих по разрядам. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.
Определить средний разряд рабочего, модальный и медианный разряд, дисперсию и среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс.

2 Имеются следующие данные о числе производственных рабочих в каждом из 95 крестьянских (фермерских) хозяйств: 2,4,5,3,4,6,7,4,5,3,3,4,2,6,5,4,7,2,3,4,4,5,4,3,4,6,6,5,2,3,4,3,5,6,7,2,4,3,4,5,4,6,7,2,5,3,5,4,3,7,2,4,3,4,5,4,3,2,6,7,6,4,3,2,3,4,5,4,3,5,4,3,2,6,4,5,7,5,4,3,4,5,7,4,3,4,5,6,5,3,4,2,2,4,3.
Составить ряд распределения крестьянских (фермерских) хозяйств по числу производственных рабочих на одно хозяйство. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.Определить: среднее число производственных рабочих на одно хозяйство, модальное и медианное значения числа рабочих, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации, коэффициент асимметрии и эксцесс.

3 Используя данные приложения 4, по одному из следующих показателей, составить интервальный вариационный ряд с равными интервалами:

1) площадь посева зерновых и зернобобовых культур(без кукурузы)на одно предприятие, га; 2) валовой сбор зерна, тыс.ц; 3) производственные затраты, млн. руб.; 4) затраты труда, тыс. чел.-ч; 5) реализовано зерна, тыс. ц; 6) полная себестоимость, млн. руб.; 7) выручка от реализации, млн. руб.; 8) производственная себестоимость 1 ц зерна, руб.; 9) полная себестоимость 1 ц зерна, руб.; 10) урожайность зерновых и зернобобовых культур (без кукурузы) с 1 га, ц; 11) производственные затраты на 1 га посева, тыс. руб.; 12) затраты труда на 1 ц зерна, чел.-ч; 13) выручка от реализации на 1 га посева, тыс. руб.; 14) полные затраты на 1 га посева, тыс. руб.; 15) цена реализации 1 ц зерна, руб.; 16) выручка на 1 руб. затрат, руб.

Найти накопленные частоты и частости. Ряд распределения изобразить графически. Определить моду, медиану, среднее значение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс. Сделать выводы по результатам расчетов.

4 Определить абсолютную и относительную плотность распределения работников предприятия по стажу их работы.

Таблица 1- Распределение работников по стажу работы

Стаж работы, лет	До 1	1-5	5-10	10-20	20-40	Всего
Число работников, чел.	8	22	46	34	10	120

Найти средний стаж работы, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

5 Путем устного опроса изучалось качество продукции, выпускаемой фирмой и реализуемой в магазине этой фирмы. Посетители давали оценку качества по десятибалльной шкале.

Таблица 2- Бальная оценка продукции предприятия

Оценка качества продукции, балл	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10
Число случаев	3	8	36	89	45

Определить средний балл качества продукции, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, показатели асимметрии и эксцесса.

6 Имеются следующие данные о площади посева овощейв сельскохозяйственных организациях по совокупности районов (таблица 3). Дать сравнительную оценку колеблемости площади посева овощей в организациях двух районов.

Таблица 3 - Площадь посева овощей на одну организацию, га

№ района	Номер хозяйства								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	10	12	6	15	30	21	18	23
2	32	16	26	41	44	38	24	-	-
3	101	65	96	144	84	76	90	109	-
4	22	30	44	18	16	31	27	36	25
5	10	7	4	3	12	7	6	9	8
6	25	36	38	27	45	51	44	-	-
7	121	84	96	110	161	143	112	132	144
8	34	16	44	21	36	8	17	42	-
9	46	41	48	52	50	58	62	54	47
10	15	24	86	144	34	114	24	73	401

7По данным распределения студентов по результатам сдачи экзаменовопределить: а) средний балл успеваемости студентов по каждому предмету и по всем предметам; б) дисперсии балла успеваемости по предмету и в целом по всем предметам; в) межгрупповую дисперсию. Найти общую дисперсию успеваемости, используя правило сложения дисперсий.

Таблица 4 - Распределение студентов группы по результатам сдачи Экзаменов

Оценка	Число студентов, получивших оценку по предметам			
	1	2	3	4
2	2	4	4	3
3	6	10	8	8
4	10	8	9	9
5	7	3	4	5

8 Работники предприятия сгруппированы по возрасту .

Таблица 5 - Распределение работников предприятия по возрасту

Категория работников	Возраст работников, лет					Всего работников
	До 30	30-40	40-50	50-60	Свыше 60	
Рабочие	43	141	216	127	52	579
Руководители	2	4	6	8	4	24
Специалисты	3	18	30	34	12	97
Всего работников	48	163	252	169	68	700

Определить: а) средний возраст работников предприятия в целом и по категориям: б) модальное и медианное значения возраста работников по категориям и предприятию; в) дисперсию и среднее квадратическое отклонение возраста по категориям работников и предприятию; г) межгрупповую дисперсию возраста работников. Найти общую дисперсию возраста работников, используя правило сложения дисперсий.

9 В таблице 6 приведено распределение численности работников организаций Краснодарского края по размерам начисленной месячной заработной платы по видам экономической деятельности (по данным выборочного обследования за апрель 2013 г.).

Таблица 6 – Распределение численности работников организаций Краснодарского края по размеру начисленной заработной платы, в % к общей численности

Вид деятельности	Группы работников по месячной заработной плате, тыс. руб.							Итого
	До 5	5–9	9–17	17–25	25–35	35–50	Свыше 50	
Сельское хозяйство	0,3	17,6	39,8	26,0	10,6	4,3	1,4	100,0
Добыча полезных ископаемых	-	9,8	18,4	31,5	20,0	11,5	8,8	100,0
Строительство	0,1	6,6	18,0	20,9	24,2	18,9	11,3	100,0
Торговля	4,7	18,0	27,0	20,8	15,3	8,4	5,8	100,0
Транспорт и связь	0,8	8,7	21,2	26,5	22,4	13,0	7,4	100,0
Финансовая деятельность	0,7	7,4	18,9	23,6	22,4	15,1	12,0	100,0
По всем организациям	0,8	14,4	32,1	22,9	14,2	9,7	5,9	100,0

Определить: а) среднююмесячную заработную плату работников организаций по каждому виду экономической деятельности и в целом по всем организациям; б) модальное и медианное значениямесячной заработной платы работников организаций по каждому виду экономической деятельности и в целом по всем организациям; в) дисперсию и среднее квадратическое отклонение месячной заработной платы работников организаций по каждому виду экономической деятельности и в целом по всем организациям

12 ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Выборочным называется наблюдение, при котором обследованию подвергается часть единиц совокупности, отобранных на основе научно разработанных принципов, а показатели, найденные по отобранной части единиц, должны достаточно точно характеризовать всю совокупность единиц.

Совокупность единиц, из которой производится отбор, называется **генеральной совокупностью**, а ее часть, подвергающаяся изучению − выборочной совокупностью. Отбор единиц из генеральной совокупности может быть произведен повторным или бесповторным способом. Если отобранная единица возвращается в генеральную совокупность и может снова попасть в выборку, то отбор −**повторный**. Если же отобранная единица в генеральную совокупность не возвращается, то отбор – **бесповторный**.

Генеральная доля$p = \frac{M}{N}$, выборочная доля, $w = \frac{m}{n}$. где M и m – число единиц генеральной и выборочной совокупности, обладающих определенным свойством; N и n – объемы генеральной и выборочной совокупности соответственно.

Отбор единиц производится случайным, механическим, типическим, серийным, комбинированным и другими способами.

Случайным называется отбор единиц из генеральной в выборочную совокупность, при котором каждая единица имеет одинаковую вероятность попасть в выборку. Основной задачей выборочного метода является количественная оценка параметров генеральной совокупности по данным выборки. Для того, чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров генеральной совокупности по выборке, они должны обладать свойствами несмещенности, эффективности и состоятельности.

Оценка параметров генеральной совокупности может быть точечной и интервальной. Точечная оценка задается одним числом.Выборочные средняя, доля, среднее квадратическое отклонение являются точечными оценками аналогичных характеристик генеральной совокупности. Оценка, задаваемая двумя числами (границами интервала), называется интервальной.

Доверительный интервал рассчитывается по формуле:

для доли $w - \Delta_w \le p \le w + \Delta_w;$ (12.1)

для средней $\bar{x}_в - \Delta_{\bar{x}} \le \bar{x}_г \le \bar{x}_в + \Delta_{\bar{x}},$ (12.2)

где Δ_w и $\Delta_{\bar{x}}$- предельные ошибки выборки для доли и средней соответственно.

Таблица 7 – Формулы расчета предельной ошибки выборки при случайном отборе

Предельная ошибка	Повторный отбор	Бесповторный отбор
Для средней	$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$
Для доли	$\Delta_{\bar{p}} = t \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$	$\Delta_{\bar{p}} = t \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$

В больших выборках (n> 60) t находится по таблице значений функций Ф (x) при заданном уровне доверительной вероятности $\gamma = 2\Phi(x)$. Если $\gamma = 0{,}95$, t=1,96; если $\gamma = 0{,}99$, t=2,58.

В малых выборках $(n \le 60)$ значение t находится по таблице t-распределения Стьюдента в соответствии с заданным уровнем доверительной вероятности γ и числом степеней свободы k = n – 1. Оценкой генеральной дисперсии служит «исправленная» выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}. \qquad (12.3)$$

Таблица 8– Формулы расчета необходимой численности выборки при случайном отборе

Предельная ошибка	Повторный отбор	Бесповторный отбор
Для средней	$n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}$	$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{N\Delta^2 + t^2 \cdot \sigma^2}$
Для доли	$n = \frac{t^2 \cdot w(1-w)}{\Delta^2}$	n=$\frac{t^2 N w(1-w)}{N\Delta^2 + t^2 w(1-w)}$

1 Для определения потерь зерна при уборке случайным способом проведено 100 измерений. Средняя величина потерь составила 1,8 ц с одного гектара посевов, при среднем квадратическом отклонении 0,5 ц с га. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя величина потерь зерна с 1 га и возможная величина потерь, если площадь уборки зерновых составила 640 га.

2 С помощью случайной выборки изучалось время выполнения производственной операции рабочими бригады. На основании 60 наблюдений установлено, что в среднем на выполнение производственной операции затрачивалось 0,5 часа, при среднем квадратическом отклонении 0,12часа. Считая время выполнения производственной операции нормально - распределенной случайной величиной, определить границы, в которых находится среднее время выполнения производственной операции всех рабочих с доверительной вероятностью :

а) 0,9; б) 0,95.

3 Случайным бесповторным способом изучались остатки горюче-смазочных материалов на складе предприятий. Обследовано 110 предприятий из 750. Средние остатки составили 150 т, при среднем квадратическом отклонении 42 т. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будут находиться средние остатки горюче-смазочных материалов на одно предприятие и общие остатки горюче-смазочных материалов.

4 Считая данные задачи 1 темы 11 результатом 20% выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения разряда рабочих; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал ($0{,}95\bar{x}_в$; $1{,}05\bar{x}_в$) покроет математическое ожидание разряда рабочего; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 1,5 раза, при сохранении значений остальных характеристик.

5 Считая данные задачи 2 темы 11 результатом 20% выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения числа производственных рабочих в расчете на одно крестьянское (фермерское) хозяйство; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,9; в) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,9 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении значений остальных характеристик.

6 Считая данные задачи 3 темы 11 результатом 20% случайной бесповторной выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения изучаемого параметра; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал ($0{,}95\bar{x}_в$; $1{,}05\bar{x}_в$) покроет математическое ожидание изучаемого параметра; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении значений остальных характеристик.

7 В районе имеется 10000 дачных участков населения. В результате выборочного обследования 300 дачных участков оказалось, что средняя выборочная урожайность овощей составила 250 ц с гектара при среднем квадратическом отклонении 60 ц с га. Известно, что 40% общей площади посевов овощей занимали помидоры. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на всех дачных участках и удельный вес посевов помидор. Сколько необходимо обследовать участков, чтобы предельная ошибка выборки по признакам уменьшилась в 1,5 раза?

8 Для определения влажности зерна случайным способом было взято 25 проб. Средний процент влажности зерна составил 16%, а выборочное среднее квадратическое отклонение 2,5%. Определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения; б) интервал, который покроет математическое ожидание с доверительной вероятностью, 0,95.

9 Вероятность изготовления продукции высшего качества фирмой составляет 0,9. Сколько необходимо обследовать единиц продукции, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля продукции высшего качества по выборке будет отклоняться от постоянной вероятности по модулю не более чем на 0,03?

10 Случайным бесповторным способом проведено выборочное обследование семей района. Из 1400 семей обследовано 140, по которым определен душевой доход на члена семьи, представленный в виде интервального вариационного ряда (таблица 9).

Таблица 9 - Распределение семей по величине месячного дохода на одного члена семьи

Группы семей по месячному доходу на члена семьи, тыс. руб.	До 10,0	10,0-15,0	15,0-20,0	20,0-25,0	Свыше 25,0
Число семей	13	26	44	37	20

С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средний месячный доход на одного члена семьи по району, а также доля семей с доходами менее 10,0 тыс. руб. на одного члена семьи.

11 В фирме проведен выборочный опрос 10% работников по вопросам изменения условий труда. Из 90 работников основного производства за изменение условий труда высказалось 65 человек, из 30 работников вспомогательного производства – 20, а из 25 работников, занятых управлением фирмой – 21. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля работников фирмы, поддерживающих изменение условий труда.

12 Для определения влияния микроэлементов на результаты откорма свиней проведен опыт на 8 группах животных. Рационы отличаются набором и дозами микроэлементов.

Таблиц 10 - Результаты откорма свиней в опыте

Рацион	Поголовье свиней, гол.	Среднесуточный прирост живой массы, г	Среднее квадратическое отклонение, г
1	2	3	4
1	90	500	40
2	75	575	45

Продолжение таблицы 10

1	2	3	4
3	100	610	54
4	50	450	52
5	70	590	65
6	60	650	70
7	110	490	48
8	80	540	62

С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться среднесуточный прирост свиней по каждому рациону и по опыту в целом.

13 Проведен социологический опрос 500 избирателей по вопросам предстоящих выборов в региональные органы власти. Из опрошенных 22 % избирателей готовы поддержать кандидата А, а 36 % - кандидата Б.

а) Определить 95 % доверительные интервалы для доли избирателей, которые отдадут свои голоса за кандидатов А и Б. б) Как изменится доверительный интервал для кандидата А, если предположить, что в выборах примут участие по первому варианту прогноза 30% избирателей, а по второму – 60%.

13 ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистической гипотезой называется всякое предположение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке. Статистические гипотезы делятся на:параметрические – сформулированные относительно параметров (среднего значения, доли, дисперсии и др.) распределения известного вида;
непараметрические – сформулированные относительно вида распределения (например, оценка по выборке нормальности генеральной совокупности).

Выдвигаемая гипотеза называется основной или нулевой (H_0).Гипотеза, противоположная нулевой, называется конкурирующей или альтернативной гипотезой (H_1).

Так как проверка статистических гипотез осуществляется по выборочным данным, то возникает возможность принятия ошибочных решений. Различают ошибки первого и второго рода.

Ошибка первого рода заключается в том, что будет отвергнута правильная гипотеза, т.е. когда в действительности верна H_0 гипотеза, а в результате проверки она была отвергнута и принята гипотеза H_1. Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости и обозначается α .

$$\alpha = P\ (H_1|H_0). \qquad (13.1)$$

Чем меньше уровень значимости α, т. е. вероятности совершить ошибку первого рода, тем меньше вероятность отклонить верную нулевую гипотезу. Уровень значимости задается заранее.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, т.е. в действительности верна некоторая альтернативная гипотеза, а по выборочным данным была принята неверная гипотеза H_0. Вероятность ошибка второго рода обозначается β.

$$\beta = P(H_0|H_1). \quad (13.2)$$

Существует правильное решение двух видов:

$$\mathrm{P}(H_0|H_0) = 1 - \alpha, \text{ а также } \mathrm{P}(H_1|H_1) = 1 - \beta. \quad (13.3)$$

Вероятность $1 - \beta$ называется мощностью критерия. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Статистическим критерием (K) называют случайную величину, с помощью которой принимают решение о принятии или отклонений нулевой гипотезы.

Проверка статистических гипотез обычно осуществляется в определенной последовательности.

1. Располагая выборочными данными, формулируют нулевую и конкурирующую гипотезы.

2. Задают уровень значимости α (обычно принимают α =0,1; 0,01; 0,05; 0,001).

3. Выбирают критерий К, по которому будет проверяться выдвинутая гипотеза. Обычно используют следующие распределения критериев:

u–нормальноераспределение;

χ^2 – распределение Пирсона (хu – квадрат);

t – распределение Стьюдента;

F – распределение Фишера - Снедекора.

4. На основании выборочных данных определяют фактически наблюдаемое значение критерия $К_н$.

5. В зависимости от вида альтернативной гипотезы находят, по соответствующей таблице, критические значения критерия для двусторонней $\left(K_{1-\frac{\alpha}{2}} u\, K_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ или односторонней области ($К_{1-\alpha}$ или $К_{\alpha}$). Если фактически наблюдаемые значения критерия попадают в критическую область, то нулевая гипотеза отвергается. В противном случае принимается нулевая гипотеза и считается, что она не противоречит выборочным данным (при этом существует возможность ошибки с вероятностью равной α).

1 Имеется распределение сельскохозяйственных предприятий Краснодарского края по урожайности озимой пшеницы. Требуется проверить нулевую гипотезу, что совокупность предприятий по урожайности озимой пшеницы распределяется по нормальному закону. Уровень значимости принять равным 0,05.

Таблица 11 – Распределение предприятий по урожайности озимой пшеницы

Группы хозяйств по урожайности , ц/га	До 30	30-40	40-50	50-60	60-70	Свыше 70	Всего
Число хозяйств	6	8	14	17	10	5	60

2 Выборочным методом изучались цены на картофель на продовольственных рынках города. Получено следующее распределение продавцов по уровню цен.

Таблица 12 – Распределение продавцов по цене на картофель

Группы продавцов по цене за 1 кг, руб.	До 15	15-18	18-21	21-24	Свыше24	Итого
Число продавцов	6	12	18	14	7	57

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу, что цена на картофель на продовольственных рынках города распределяется по нормальному закону.

3 Сельскохозяйственные предприятия области по урожайности озимой пшеницы распределяются по нормальному закону с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 8{,}1$ ц/га и генеральной средней урожайностью $\bar{x}_г = 42$ц/га. Из генеральной совокупности извлечена выборка 50 хозяйств, по которой определена выборочная средняя урожайность $\bar{x}_в =$ 45 ц/га.

При уровне значимости $a = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу, что:

а) $\bar{x} = \bar{x}_в = 42, при H_1 : \bar{x} \neq 42{,}0;$

б) $\bar{x} = \bar{x}_в = 42, при H_1 : \bar{x} > 42{,}0;$

в) $\bar{x} = \bar{x}_в = 42, при H_1 : \bar{x} < 42{,}0.$

4 Производитель печенья утверждает, что вес одной пачки составляет 200 г. Выборочное взвешивание 10 пачек дало следующие результаты: 198; 197; 199; 200; 197; 201; 199; 195; 197; 200. При уровне значимости $a = 0{,}05$ проверить гипотезу, что средний вес пачки печенья действительно составляет 200 г.

5 Сливочное масло фасуется в пачки средним весом 170 г и средним квадратическим отклонением 3 г. Случайная выборка 20 пачек масла показала, что средний вес одной пачки равен 170,3 г. Проверить статистическую гипотезу при уровне значимости 0,05 о соответствии веса случайно взятой пачки масла, установленному весу.

6 Две фирмы производят однотипный товар. Утверждается, что 90% товаров первой фирмы реализуется повышенного качества, а второй фирмы 80 %. При выборочной проверке оказалось, что из 80 единиц товара первой фирмы повышенного качества 75, а из 60 единиц товара второй фирмы оказалось 45 единиц повышенного качества. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезы: а) о соответствии выборочных долей продукции высшего качества заявленной доле; б) о значимости различий в доле продукции высшего качества двух фирм.

7 Провести две случайные выборки по одному из показателей приложения 4, объемами n_1 и n_2. Проверить нулевую гипотезу о равенстве выборочных средних значений, при уровне значимости 0,05 (предполагается, что дисперсии неизвестны и одинаковы): а) $n_1 = n_2 = 20$; б) $n_1 = 20$; $n_2 = 15$.

8 Проводилось испытание 9 сортов озимой пшеницы. Каждый сорт высевался на 6 делянках одинаковой площади. При 5% уровне значимости проверить гипотезу о существенности различий в средней урожайности двух сортов озимой пшеницы (номера сортов даются студенту преподавателем).

Таблица 13 - Урожайность озимой пшеницы, ц/га

Повто-рения	Сорт								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	45	54	60	49	63	44	55	60	68
II	44	51	62	52	61	40	53	55	72
III	46	56	61	49	62	41	51	53	70
IV	44	52	56	48	66	43	58	57	69
V	47	54	61	47	62	45	54	54	71
VI	45	52	59	50	64	41	53	56	65

9 Произведено выборочное обследование 10% приусадебных участков девяти районов случайным бесповторным способом. Получены следующие результаты об урожайности овощей.

Таблица 14 – Урожайность овощей в хозяйствах населения

Район	Урожайность с 1 га, ц	Среднее квадратическое отклонение, ц/га	Доля овощей в площади участка, %	Число обследованных участков
1	2	3	4	5
1	215	30	30	75
2	246	35	35	80
3	305	32	40	75
4	220	24	50	90

Продолжение таблицы 14

1	2	3	4	5
5	364	36	38	66
6	280	23	65	77
7	340	40	45	94
8	316	36	53	82
9	398	56	48	68

При уровне значимости 0,05 по двум районам проверить гипотезы о равенстве: дисперсий, средних выборочных урожайностей, долей посевов овощей в площади приусадебных участков.

10 При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве успеваемости студентов по теории вероятностей и математике.

Таблица 15 – Оценки студентов на экзаменах

Номер студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Теория вероятностей	4	5	3	4	5	3	5	2	4	4	3	2	4	4	5
Математика	3	5	2	3	4	3	5	2	4	3	4	3	4	3	4

11 - Результаты выступлений 11 спортсменов оценивались двумя судьями по десятибалльной шкале.

Таблица 16 – Оценки судей результатов соревнований спортсменов

Номер спортсмена		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Оценка судьи	1	8,5	9	7,4	9,4	9,7	6,5	7,1	8,3	9,1	8,0	7,6
	2	8,3	9,1	7,7	9,3	9,2	6,0	7,3	8,1	9,1	7,9	7,4

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о значимости различий в оценке выступлений спортсменов двумя судьями.

12 Имеются данные о числе сорняков в пробах семян помидор

Таблица 18 – Число сорняков в пробах

Число сорняков	0	1	2	3	4
Число проб	250	190	36	18	6

Проверить гипотезу о соответствии данного эмпирического вариационного ряда распределению Пуассона. Уровень значимости принять равным 0,05.

13 Определенные сорта озимой пшеницы испытывались на одинаковом числе участков, на протяжении восьми лет. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о существенности различий в урожайности двух сортов озимой пшеницы.

Таблица 17 – Урожайность озимой пшеницы по сортам

Год	Урожайность, ц/га								
	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	x_{4i}	x_{5i}	x_{6i}	x_{7i}	x_{8i}	X_{9i}
2005	57	49	54	48	62	75	52	52	71
2006	53	46	50	44	55	70	58	49	66
2007	43	48	41	46	49	71	50	44	68
2008	45	46	43	43	48	73	49	43	76
2009	56	51	52	50	59	76	53	52	72
2010	58	52	56	51	61	79	55	55	70
2012	55	48	43	47	60	69	51	54	75
2013	59	52	61	49	64	68	56	59	74

14По данным задачи4 темы «Вариационные ряды», проверить гипотезу о нормальности распределения работников предприятия по стажу работы.
15Используя данные задачи 10 по теме «Выборочный метод» проверить гипотезу о нормальности распределения семей по величине месячного дохода на одного члена семьи.

14 ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Сущность дисперсионного анализа заключается в том, что дисперсия изучаемого признака разлагается на сумму составляющих ее дисперсий, каждое слагаемое которой соответствует действию определенного источника изменчивости.

Например, в однофакторном анализе мы получим разложение вида:
$\sigma_c^2 = \sigma_A^2 + \sigma_z^2$, а в двухфакторном: $\sigma_c^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_Z^2$, (14.1)

где σ_c^2 -общая дисперсия изучаемого признака С;

σ_A^2- дисперсия, вызванная влиянием фактора А;

σ_B^2- дисперсия, вызванная влиянием фактора В;

σ_{AB}^2- дисперсия, вызванная взаимодействием факторов А и В;

σ_z^2- дисперсия, вызванная неучтенными случайными причинами (случайная дисперсия);

В дисперсионном анализе рассматривается нулевая гипотеза – ни один из рассматриваемых факторов не оказывает влияние на изменчивость признака.

Расчеты проводятся в следующей последовательности:

- определяются необходимые суммы квадратов отклонений результативного признака, в соответствии с моделью дисперсионного анализа;
- находится число степеней свободы вариации по каждому источнику;
- рассчитываются средние квадраты отклонений;

- определяются наблюдаемые и критические значения критерия F – Фишера – Снедекора, формулируются выводы относительно гипотезы H_0;
- оценивается значимость различий групповых средних по вариантам опыта.

Если $F_н > F_{кр}$, то делается вывод о сущности различий результативного признака, обусловленных влиянием признака – фактора, т.е. действие фактора на результативный признак признается статистически достоверным.

Рассмотрим алгоритм однофакторного дисперсионного анализа. Определенный фактор принимает p различных уровней и на каждой уровне сделано nнаблюдений, что дает $N=np$ наблюдений. Модель однофакторного дисперсионного анализа имеет вид:

$$x_{ij} = \bar{x} + A_i + \varepsilon_{ij} \qquad (14.2)$$

где $\bar{x}$ – общая средняя арифметическая;

$A_i -$ эффект фактора A на $i -$ ом уровне;

ε_{ij} – случайная величина или остаток, характеризует влияние прочих неучтенных факторов

Выдвигается нулевая гипотеза: $H: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_p$, при конкурирующей гипотезе – не все средние по уровням фактора равны.

Рассматриваем тождество $(x_{ij} - \bar{x}_{..}) = (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{..}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})$. Суммируя обе части уравнения по i и j и проведя преобразования, получим:

$$\sum_{i,j}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i,j}(\bar{x}_{i}. - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i,j}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i}.)^2 \qquad (14.2)$$

(Точка вместо индекса обозначает усреднение соответствующих наблюдений по этому индексу.)

Иначе можно записать: $SS_o=SS_v+SS_z$. Величина факторной суммы квадратов отклонений SS_vвычисляется по отклонениям p средних от общей средней $\bar{X}_{..}$, поэтому S_vимеет (p–1) степеней свободы. Величина остаточной суммы квадратов отклонений SS_zвычисляется по отклонениям N наблюдений от p выборочных средних и, следовательно, имеет N–p=np – p=p (n–1) степеней свободы. Общая сумма квадратов отклонений SS_oимеет (N–1) степеней свободы.

Данные обычно располагают в виде таблицы результатов X_{ij} (i=1,2,…,p; j=1,2,….,n):

Уровень фактора, i	Номер наблюдения, j					
	1	2	...	j	...	n
A_1	X_{11}	X_{12}	…	x_{1j}	…	X_{ln}
A_2	X_{21}	X_{22}	…	x_{2j}	…	X_{2n}
...	…	...	…	…	…	…
A_i	X_{il}	X_{i2}	…	x_{ij}	…	X_{in}
...	…	…	…	…	…	…
A_p	X_{pl}	X_{p2}	…	x_{pj}	…	X_{pn}

Таблица 19 - Однофакторный дисперсионный анализ

Источник изменчивости	Суммы квадратов отклонений (SS)	Степени свободы (k)	Средние квадраты (s^2)
Общая	$SS_o = \sum_{i,j}(X_{ij} - \overline{X}..)^2$	N-1	
Различия между уровнями (факторная)	$SS_v = n\sum_{i}(\overline{X}_{i.} - \overline{X}..)^2$	p-1	$s_v^2 = \frac{SS_v}{p-1}$
Различия внутри уровней (остаточная)	$SS_z = \sum_{i,j}(X_{ij} - \overline{X}_{\iota}.)^2$	N-p	$s_2^2 = \frac{SS_z}{N-p}$

Если гипотеза о том, что влияние всех уровней одинаково, справедлива, то обе величины s_v^2 и s_z^2 будет несмещенными оценками σ^2. Значит, гипотезу можно проверить, вычислив отношение $s_v^2 : s_z^2$ и сравнив его с $F_{кр}$ имеющего k_l=*(p–1) и* k_2=*(N–p)* степеней свободы.

Если $F_н > F_{кр}$, то будет справедлива гипотеза о значимом влиянии фактора А на результат наблюдений. В этом случае оценивается значимость различий между средними результативного признака по уровням факторного признака.Если $F_н < F_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза о незначимости различий между средними арифметическими значениями по вариантам опыта.

Для оценки существенности частых различий вычисляют:

а) среднюю ошибку средней арифметической

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s_z^2}{n}}; \tag{14.3}$$

б) ошибку разности средних

$$s_d = s_{\bar{x}} \cdot \sqrt{2} \tag{14.4}$$

в) наименьшую существенную разность

$$HCP_{\alpha,k_Z} = t_{\alpha,k_{Z_z}} s_d . \tag{14.5}$$

Сравнивая разности средних значений $\overline{X}_i$ по вариантам с НСР, делают вывод о существенности различий в уровне средних.

1 Оценить существенность различий в успеваемости студентов по четырем предметам и группам. Численность студентов в каждой группе составляет 25 человек.

Таблица 20 - Уровень успеваемости студентов, балл

Пред-мет	Группы							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4,3	4,1	4,1	4,2	4,4	4,5	4,0	4,3
2	4,2	4,0	3,9	4,0	4,3	4,3	3,7	3,9
3	4,4	4,5	4,2	4,2	4,3	4,3	4,4	4,4
4	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,4	4,1	4,2
5	3,6	3,7	3,5	3,8	4,0	3,7	3,4	3,9

2 Доказывает ли опыт влияние различных доз удобрений на урожайность озимой пшеницы

Таблица 21 - Урожайность озимой пшеницы с 1 га по участкам равной площади, ц

Доза удобрений	Повторения							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	39	39	37	41	36	38	43	40
2	41	40	39	40	38	38	41	42
3	42	40	39	42	40	39	43	45
4	47	45	43	42	40	41	45	50
5	55	50	60	48	54	53	61	53
6	67	60	64	66	63	70	72	67
7	73	70	77	79	76	65	64	68
8	62	60	57	63	49	51	61	56
9	81	86	74	78	83	80	79	85

3 Оценить различия в среднемесячной начисленной заработной плате механизаторов различной квалификации.

Таблица 22 – Средняя месячная заработная плата механизаторов, тыс. руб.

Класс механизаторов	Бригады									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	38,5	33,8	35,4	32,9	31,8	35,4	33,7	34,9	32,8	36,8
II	29,1	26,8	27,2	26,9	28,3	25,0	26,5	27,0	25,4	28,7
III	24,1	25,1	21,2	25,2	25,1	24,0	23,5	24,3	22,8	23,8

4 По четырем сортам, трем дозам удобрений и пяти повторениям, взятым по указанию преподавателя, оценить существенность влияния различных сортов, доз удобрений и их взаимодействий на урожайность риса.

Таблица 23 - Урожайность риса с 1га, ц

Сорт	Доза удобре-ний	Повторения							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	42	39	44	41	38	39	37	42
	2	44	47	46	45	43	42	41	44
	3	58	55	53	50	56	57	54	53
2	1	45	42	44	40	44	43	46	45
	2	49	47	49	47	45	47	48	47
	3	57	56	55	50	47	45	47	47
3	1	59	42	44	41	42	40	42	40
	2	68	51	55	53	51	54	53	49
	3	67	59	65	63	62	60	64	60
4	1	41	44	39	40	43	1	43	45
	2	48	49	46	51	52	49	46	51
	3	52	49	47	50	50	48	47	50
5	1	38	40	39	42	44	43	40	41
	2	49	52	50	52	48	49	50	54
	3	53	58	49	50	50	53	49	50
6	1	42	41	43	41	39	40	44	42
	2	49	52	53	53	50	54	53	53
	3	68	66	65	69	70	72	73	76
7	1	64	61	66	64	68	67	61	63
	2	72	74	70	69	73	69	72	71
	3	88	85	89	80	79	78	83	86

5 Оценить существенность различий уровня производительности механизаторов при культивации в различных хозяйствах по пропашным культурам и стажу работы механизаторов.

Таблица 24 - Объем выполненных работ механизаторами за 1 час работы, эт. га

Культура	Стаж работы, лет	Хозяйства			
		1	2	3	4
Кукуруза на зерно	до 5	0,75	0,9	0,95	1,00
	от 5 до 10	1,40	1,55	1,35	1,50
	от 10 до 15	1,25	1,35	1,35	1,40
Кукуруза на силос	до 5	0,85	0,95	0,85	1,10
	от 5 до 10	1,50	1,40	1,55	1,45
	от 10 до 15	1,35	1,40	1,55	1,50
Подсолнечник	до 5	0,80	0,90	0,75	0,85
	от 5 до 10	1,35	1,45	1,35	1,40
	от 10 до 15	1,45	1,40	1,30	1,30

15 КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Корреляционно-регрессионный анализ–это совокупность статистических и математических методов, позволяющих оценить степень зависимости между результативными и факторными признаками, а также найти аналитическое выражение зависимости.

Корреляционно-регрессионный анализ проводится в следующей последовательности.

1. Исходя из целей и задач исследования зависимости устанавливается результативный (У) признак и факторные (X_i) признаки.
2. По совокупности объектов определяются значения результативного и факторных признаков.
3. Обосновывается, обычно графическим методом, модель в виде уравнения регрессии.
4. Методом наименьших квадратов рассчитываются параметры уравнения регрессии.
5. Определяется теснота связи между изучаемыми признаками.
6. Оценивается значимость уравнения связи, его параметров и показателей тесноты связи.

При изучении влияния одного фактора X на изменение результативного признака У линейное уравнение регрессии имеет вид: y=a + bx.
Его параметры находятся методом наименьших квадратов путем составления и решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \Sigma y = na + b\Sigma x, \\ \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2, \end{cases} \text{или} \quad b = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}, a = \frac{\Sigma y}{n} - b\frac{\Sigma x}{n}. \tag{15.1}$$

В линейном уравнении регрессии b– коэффициент регрессии, который показывает, на сколько единиц в среднем изменяется результативный признак X при увеличении факторного признака У на единицу.

При линейной зависимости для оценки тесноты связи между признаками используется коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}. \tag{15.2}$$

Статистическая гипотеза H_0 : r = 0, H_1: $r \neq 0$ при уровне значимости α проверяется с использованием критерия Стьюдента:

$$t_н = |r| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}. \tag{15.3}$$

Критическое значение t находится по таблицераспределениях t – Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$и числе степеней свободы k = n–2 для двусторонней критической области. Если $t_{н} > t_{кр.}$, то нулевая гипотеза отвергается, коэффициент корреляции существенно отличен от нуля в генеральной совокупности. Если $t_{н} < t_{кр.}$, то нулевая гипотеза принимается и влияние фактора Х на У статистически не значимо.

D = r^2 100% − коэффициент детерминации, показывает какая часть общей колеблемости результативного признака объясняется влиянием факторного признака.

Коэффициент эластичностипоказывает, на сколько процентов изменится результативный признак У, при изменении факторного признака Х на 1 %. Он рассчитывается по формуле:

$$Э = b\,\frac{\bar{x}}{\bar{y}}. \qquad (15.4)$$

Теснота связи, в случае нелинейной зависимости, выраженной уравнением регрессии $\hat{y}_i = f(x_i)$, определяется с помощью индекса (коэффициента) корреляции R:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}},\ 0 \le R \le 1. \qquad (15.5)$$

Статистическая значимость индекса корреляции оценивается с помощью критерия F – Фишера при уровне значимости αс $к_1$ = m – числом степеней свободы числителя и $к_2$ = (n–m–1) – числом степеней свободы знаменателя $\left(F_{кр} = F_a(\kappa_{1,}\kappa_2)\right)$.

$$F_н = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \qquad (15.6)$$

где m – число параметров уравнения регрессии, n – число наблюдений.

Если $F_н > F_{кр}$, то гипотеза о том, что R не является статистически значимым отклоняется (H_0:R=0, H_1:R$\neq$0).

Коэффициент эластичности в общем виде определяется по формуле:

$$Э_i = f'(x)\,\frac{x_i}{\hat{y}_i} \qquad (15.7)$$

В зависимости от числа признаков, между которыми изучается связь, различают парную и множественную связь. Если изучается связь между результативным признаком, двумя и более факторными признаками, то она называется множественной связью.

1 На основании данных, приведенных в таблице 25, определить параметры линейного уравнения регрессии между уровнем кормления и продуктивностью коров, рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить существенность величины коэффициентов корреляции и регрессии при уровне значимости 0,05.

Таблица 25 – Уровень кормления и продуктивность коров

№ п/п	Удой молока на фуражную корову, ц	Расход кормов на фуражную корову, ц корм. ед.
1	71,1	66,6
2	85,1	81,6
3	61,4	58,5
4	48,1	53,2
5	62,7	55,7
6	58,2	56,6
7	60,3	66,8
8	74,3	69,6
9	51,4	45,9
10	75,3	70,8
11	71,5	66,8
12	46,6	55,4

2 По 15 организациям, взятых из приложения 4: а) построить график зависимости между двумя признаками, определив какой из них будет результативным, а какой факторным; б) установить аналитическое выражение зависимости между признаками; в) определить методом наименьших квадратов параметры уравнения регрессии; г) оценить тесноту связи между признаками; д) при уровне значимости $a = 0{,}05$ дать оценку значимости уравнения регрессии и показателей тесноты связи.

Зависимость изучить по следующим парам признаков:

1)производственная себестоимость 1 ц зерна и урожайность зерновых и зернобобовых культур;

2) производственная себестоимость 1 ц зерна и затраты труда на 1 ц зерна;

3)производственная себестоимость 1 ц зерна и площадь посева зерновых и зернобобовых культур (без кукурузы);

4)производственная себестоимость 1 ц зерна и валовой сбор зерна;

5) полная (коммерческая) себестоимость 1 ц зерна и урожайность зерновых и зернобобовых культур;

6)полная (коммерческая) себестоимость 1 ц зернаи затраты труда на 1 ц зерна;

7)полная (коммерческая) себестоимость 1 ц зернаи площадь посева зерновых и зернобобовых культур (без кукурузы);
8)полная (коммерческая) себестоимость 1 ц зернаи валовой сбор зерна;
9)затраты труда на 1 ц зерна и урожайность зерновых и зернобобовых культур;
10) выручка от реализации зерна на 1 руб. затрат и урожайность зерновых и зернобобовых культур;
11)выручка от реализации зерна на 1 руб. затрат и количество реализованного зерна;
12)выручка от реализации зерна на 1 руб. затрат иваловой сбор зерна.

3 Рейтинг 9 банков был оценен тремя экспертами. С помощью коэффициента ранговой корреляции найти пары экспертов, оценки которых наиболее близко соответствует друг другу. Оценить значимость различий в оценке рейтинга банков экспертами.

Таблица 26 - Рейтинг банков (номер предпочтительности)

Эксперт	Номер банка								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	1	4	5	6	7	8	9
2	2	3	1	4	7	9	8	5	6
3	1	2	5	3	4	6	9	7	8
4	2	1	3	5	4	6	8	7	9

16 АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Временной ряд – это ряд значений изучаемого признака за последовательные моменты или периоды времени. Он состоит из уровней ряда (y_i) и периодов или моментов времени, к которым относятся уровни (t_i).

Уровни ряда формируются под влиянием совокупности факторов, проявляющихся через трендовую (T), циклическую или сезонную (S) и случайную компоненты (ε). Применяются аддитивная У=T+S+ε или мультипликативная У=T·S·ε модели.

Для выявления во временном ряду тенденции или циклических колебаний используется коэффициент автокорреляции. Коэффициент автокорреляции уровней первого порядка, смещенных на одну единицу времени, определяется по формуле:

$$r_1=\frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t-\bar{y}_1)(y_{t-1}-\bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t-\bar{y}_1)^2\cdot\sum_{t=2}^{n}(y_{t-1}-\bar{y}_2)^2}}\text{, где }\bar{y}_1=\frac{\sum_{t=2}^{n}y_t}{n-1},\quad \bar{y}_2=\frac{\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}}{n-1}. \qquad (16.1)$$

Для характеристики тенденций во временном ряду наиболее часто используются следующие функции:

- линейная $\hat{y}_t=a+вt$; (16.2)
- степенная $\hat{y}_t=at^{в}$; (16.3)
- гиперболическая $\hat{y}_t=a+\frac{в}{t}$; (16.4)
- показательная $\hat{y}_t=ab^1$; (16.5)
- полиноминальная $\hat{y}_t=b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3+.....+b_кt^к$. (16.6)

Параметры уравнений определяются методом наименьших квадратов.
Для характеристики зависимости между последовательными значениями остатков применяется критерий Дарбина-Уотсона.

$$d=\frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_1-\varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2},\ 0\le d\le 4,\ \varepsilon_t=y_t-\hat{y}_t. \qquad (16.7)$$

Для выявления циклических колебаний во временных рядах используется гармонический анализ. Наиболее часто применяют ряд Фурье:

$$\hat{y}_t=f(t)+\sum_{к=1}^{n}\left(a_k\cos\left(kt\frac{2\pi}{T}\right)+b_k\sin\left(kt\frac{2\pi}{T}\right)\right), \qquad (16.8)$$

где k=1,2, …., $(\frac{T}{2}-1)$ номер гармоники,
t = 1,2, ….., T – номер интервала или момента времени,
T – число уровней временного ряда,
$f(t)$ - выравненный уровень в момент или интервал времени t.

Если в исходном временном ряду тенденции развития не обнаружено, то $f(t)=a_0$.

Параметры ряда Фурье определяются методом наименьших квадратов по формулам:

$$a_0=\frac{\sum y}{T},\ a_k=\frac{2}{T}\sum_{t=2}^{T}y_t\cos\left(kt\frac{2\pi}{T}\right),\ b_k=\frac{2}{T}\sum_{t=2}^{T}y_t\sin(kt\frac{2\pi}{T}). \qquad (16.9)$$

Если в исходном ряду обнаружена тенденция и найдены значения $f(t)$, то в формуле (16.8) вместо y_t , используется $\varepsilon_t=y_t-f(t)$.

1 На основании данных об урожайности одной сельскохозяйственной культуры: а) построить график динамики урожайности; б) определить параметры тренда урожайности, используя приемы линейного и нелинейного сглаживания, в) найти выравненные значения урожайности и доверительные интервалы для этих значений, г) определить прогнозные значения урожайности на период до 2015 года

Таблица 27 - Урожайность сельскохозяйственных культур с 1 га, ц

Год	Пшеница озимая	Кукуруза	Картофель	Сахарная свекла	Подсол-нечник	Овощи
1995	32,9	31,3	83	259	17,5	82
1996	38,9	44,6	92	309	12,8	54
1997	44,5	35,1	95	336	8,4	58
1998	39,9	42,9	107	342	12,4	65
1999	37,8	20,1	63	280	13,0	61
2000	38,8	22,0	73	324	15,6	70
2001	44,0	24,0	80	338	13,3	70
2002	47,2	28,8	91	315	17,3	65
2003	46,8	35,7	101	359	18,6	92
2004	43,1	40,4	93	268	17,3	39
2005	46,7	40,3	88	323	20,1	75
2006	42,7	29,8	112	360	20,8	87
2007	50,8	43,9	125	348	24,6	74
2008	55,3	49,5	97	439	23,3	103
2009	45,7	33,8	94	381	20,9	106
2010	49,7	33,8	89	361	20,8	99
2011	55,1	47,7	96	438	23,3	112
2012	39,8	41,9	98	423	23,2	106

2 Имеются данные об объеме подрядных работ строительной организации (таблица 28).

Таблица 28 - Объем подрядных работ, млн. руб.

Месяц	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.
1	2	3	4	5
Январь	1,25	1,58	1,46	2,31
Февраль	1,88	1,96	2,32	2,70
Март	2,32	2,64	2,89	3,23
Апрель	4,41	4,87	4,66	5,11
Май	4,10	4,05	4,34	6,02
Июнь	4,21	4,58	4,11	6,25
Июль	5,03	5,94	6,03	8,02
Август	5,41	6,05	5,74	8,44

Продолжение таблицы28

1	2	3	4	5
Сентябрь	4,87	5,11	5,34	7,34
Октябрь	3,17	4,07	4,85	5,02
Ноябрь	2,46	3,86	4,23	4,75
Декабрь	3,28	3,15	3,98	4,95

Построить график динамики объема подрядных работ. Определить параметры тренда объема подрядных работ, включающего общую закономерность изменения объема работ и периодическую составляющую, используя периодическую функцию ряда Фурье.

ОТВЕТЫ

РАЗДЕЛ 1

1. а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) нет.
2. а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет.
3. а) нет; б) да; в) нет. г) нет.
6. а) 1/6; б) ½; в) ½; г) 1/3. д) ½.
7. 1/90.
8. а) 1/6; б) 11/36; в) 1/18; г) 5/18.
9. а) 0,007; б) 99,3%.
10. а) 6; б) 200.
11. а) 0,25; б) 0,375; в) 0,75.
12. 1/120.
13. 1/120.
14. 0,25.
15. а) 4/9; б) 1/3024. в) 1/3024.
16. 1/120.
17. а)3/28; б) 0,25.
18. 24/91.
19. 0,5.
20. 3/38.
21. 0,05.
22. а)0,087; б) 0,0043.
23. 0,6966.
24. а) 1/376992; б) 0,0123.
25. 0,00077.
26. 0,3.
27. а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.
28. $\pi/4$.
29. 1/3.
30. 0,3477.
31. 5/54.

РАЗДЕЛ 2

3. а) 0,5; б) 0,15.
4. 0,5.
5. а) 91/460; б) 7/46; в) 6/115.
6. 0,027.
7. а) 0,902; б) 0,098.
8. 0,7.
9. 119/156.
10. а) 2/9; б) 16/55.
11. а) 1/3; б) 8/15; в) 3/5; г) 7/15.
12. 0,271.
13. а) 0,648; б) 0,72.
14. а) 1/360; б) 1/180; в) 1/180.
15. а) 0,189; б) 0,027; в) 0,343; г) 0,216; д) 0,657.
16. а) 0,0105; б) 0,4265; в) 0,558.
17. а) 0,0975; б) 0,236.
18. 6/11 и 5/11.
19. 31/35.
20. Найдет.
21. 0,059.
22. а) 0,379; б) 0,621.
23. а) 0,558; б) 0,385; в) 0,616.
24. 37/64.
25. а) 0,392; б) 0,428; в) 0,904; г) 0,096.
26. а) 0,51; б) 0,94; в) 0,34.
27. 4.
28. а) 0,741; б) 0,241; в) 0,889.
29. 0,006;0,092; 0,398; 0,504.
30. 0,288.
31. 0,4053.
32. 0,5048
33. а) 0,479; б) 0,333; в) 0,124.
34. а) 11/225; б) 4/15.
35 а) 0,519; б) 0,809.
36. 0,197.
37. 0,676.
38. а) 7/9; б) третьего.
39. а) 0,8125; б) 0,908
40. 0,1688.
41. 0,445; 0,219; 0,336.
42. 0,25.
43. 0,61; 0,0203;
44. а) 0,79; б) 0,772.

45. 0,4.

46. а) 0,725; б) 0,276.

47. 0,3; 0,556.

48. 0,635

РАЗДЕЛ 3

1. а) 0,116; б) 0,518; в) 0,016.

2. 0,328; б) 0,738; в) 0,0067.

3. а) 0,343; б) 0,973; в) 0,63.

4. а) 0,31; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,625.

5. а) 0,062; б) 0,926; в) 0,159.

6. 0,09; б) 0,594.

7. 0,387; 0,42; 0,368.

8. 212.

9. 20; 0,0997.

10. 2; 0,2707.

11. 124 или 125.

12. $9 \leq n \leq 305$.

13. а) одну из двух; б) не менее двух из четырех.

14. 045.

15. 0,1%.

16. а) 0,1887; 0,1839; б) 0,6415; 0,632.

17. 0,993.

18. а) 0,000033; б) 0,9938; в) 0,9876.

19. а) 0,9938; б) 0,9937.

20. 0,925; б) 0.

21. 444.

22. ; 0,119.

23. 0,992; б) 0,988.

24. От 19 до 21

25. 44

26. $0{,}25^n C_{2n}^n$

27. $0{,}9 \pm 0{,}0294$

28. 0,999

29. а) 0,0207; б) 0,6922

30. От 792 до 828

31. 8100

32. От 381 до 395

33. 95852

34. а) 0,9783; б) 100; в) 0,9882

РАЗДЕЛ 4

1. M(x)=3,6; Д(X)=0,36; σ(X)=0,6.

2. M(X)=2,06; Д(X)=0,991; σ(X)=1,0.

3. M(X)=1,2;Д(X)=0,72; σ(X)=0,85.

4. M(X)=1,8.

7. $x_0=1$.

8. $x_0=1$.

9. M(X)=3,1216.

10. M(X)=2,4264.

11. M(X)=751,67.

12. 23,4 и 12,6 млн. руб.

13. M(X)=1,87.

15. Третьего; первого.

16. M(X)=42; Д(X)=35; σ(X)=5,92.

17. а) 4; б)14; в) 20; г) 35.

18. а) 8; б)8; в) 72; г) 32.

19. а) M(Z)=14; D(Z)=88; б)M(Z)=–2; D(Z)=112;в) M(Z)=30; D(Z)=186; г)M(Z)=11.5; D(Z)=55.

20. а) 34 и 96; б)15 и 161; в) 13 и 49;г). 32 и 92.

21. M(X)=2; D(X)=1,44; а) 0,6768; б)0,8646.

22. M(Z)=7.4; Д(Z)=2.2; σ(Z)=1,48; M(V)=13,68;Д(V)=29,3376; σ(V)=5,4164.

23. M(X)=4,2; Д(X)=0,64; σ(X)=0,8.

25. 34,1;150,19; 12,26.

26. M(Z)=2,2; D(Z)=0.76; σ (Z)=0,87

27. Рост на 4740 руб.

28. x_2=2,6

29. p(x=2)=0,1; p(x=3)=0,2.

30. M(X)=2; σ (X)=1,4.

31. p=0,1

32. M(X)=7.

33. x_1=4; p_1=0,4;x_2=5; p_2=0,6

34. x_1=0; x_2=1;p_2=0,15.

35. x_2=2; x_3=5; p_2=0,3.

36. p_2=0,3; p_3=0,4; p_4=0,2.

РАЗДЕЛ 5

6. M(X)=2,1.

7. 7а: а) 0,5; б) 0,75; в) 0,25; г) 0,5.
7б: а) 1/3; б) 0,5; в) 0,5; г) 1/3.

8 а) 0,2966; б) 0,0129.

9. а)$M(X)=2\frac{1}{6}$;$D(X)=\frac{11}{36}$; $\sigma(X)=0{,}553.$
б) $M(X)$=9,333; $D(X)$=12,089; $\sigma(X)$=3,477.

10. а) 0,5a; б) $M(X)$=2-2a; $D(X)=\frac{4}{3}$; $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. A=0; B=2; M(X)=1,5; D(X)=0,15; σ(X)=0,387.
б) A=0; B=2;
M(X)=1,6; D(X)=0,107; σ(X)=0,326.

12. б) 0,847.

13. б) 0,599
в) M(X)=2,566;
D(X)=0,08; σ(X)=0,283.

14. б) 7/36.

15. б) 0,4884.

16. б) 0,3195.

17. б) 3/16; в) M(X)=$0{,}8\sqrt{a}$;
D(X)=$\frac{2}{75}a$; σ(X)=$\frac{\sqrt{6}}{15}a$.

18. б) 0,3335 ; в) M(X)=0,3598; D(X)=0,51207; σ(X)=0,7156.

19. а) a=0,25; б) M(X)=$2\frac{1}{3}$;
в) 0,25.

20. M(X)=0; D(X)=$\frac{\pi^2}{4}-2$.

21. а) c=48; б) M(X)=199/64; D(X)=0,463.

22. c=$\frac{1}{\pi}$.

23. $$f(x)=\begin{cases}0.5e^{x}, x\le 0,\\ 0.5e^{-x}, x>0,\end{cases}$$
M(X)=0; D(X)=2; P(-1<x<3)=0,79.

РАЗДЕЛ 6

2. а) M(X)=8; D(X)=3; б) M(X)=1; D(X)=$5\frac{1}{3}$.в) M(X)=4; D(X)= $5\frac{1}{3}$;
г) M(X)=0; D(X)= $5\frac{1}{3}$.

3. б) 0,5.

4. а)0,8413; б) 0,9544.

5. а) 0,7258; б) 0,9996; в) 0,9082;

г) 0,8164.

6. а) 84,13%; б) 53,28%.

7. 0,99968.

8. (56,1; 63,9).

9. 10.

10. (240; 360).

11. а) 0,5328; б) Mo=Me=5.

12. Второго производителя.

13. 93,7%.

15. а)0,864; б)0,0018. M(X) = 0.5; D(X) = 0.25; Ϭ(X) = 0.5.

17. а) 0,5466; б) 0,4037; в) 0,9502; г) 0,0498.

19. а) 0,134; б) 0,9826; в) 0,9975.

20. а) 0,134; б) 0,9379.

21. а) $F(x) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}x+\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$.

22. б) 0,4712.

в) $M(X)=a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $D(X)=a^2(2-\frac{\pi}{2})$;

$\sigma(X)=a\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}$.

23. а) $x_0=1{,}25^{\frac{1}{\beta}}a$; в) $M(X)=\frac{\beta\cdot a}{\beta-1}$.

при β >1.

24. а)f(x)=

Мест

$$\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right), \text{при } 0 < x \le a, \\ 0, \text{при} x > a. \end{cases}$$

в) $\frac{5}{16}$; г) $M(X) = \frac{a}{3}$;

б) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le a, \\ \frac{x}{a}(2-\frac{x}{a}), \text{при } 0 < x \le a, \\ 0, \text{при } x > a. \end{cases}$

$$D(X) = \frac{a^2}{18}, \sigma(X) = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

25. а) $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le -a, \\ \frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right), \text{при } -a < x \le a, \\ 0, \text{при} x > a. \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -a, \\ \frac{(a-x)^2}{2a^2}, & \text{при } -a < x \le 0, \\ \frac{a^2+2ax-x^2}{2a^2}, & \text{при } 0 \le x < a, \\ 1, & \text{при } x \ge a. \end{cases}$

в) 0,75; г) M(X) = 0; $D(X) = \frac{a^2}{6}$; $\sigma(X) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

26.а) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при x } \le 0, \\ \frac{x^2}{36}, \text{при } 0 < \text{x} \le 6, \\ 1, \text{при x} > 6. \end{cases}$ б)$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при x } \le 0, \\ \frac{x}{18}, \text{при } 0 < \text{x} \le 6, \\ 1, \text{при x} > 6. \end{cases}$

в) M(x) = 4; D(x) = 2; $\sigma(x)=\sqrt{2}$.

РАЗДЕЛ 7

1. а) 1,6; б) 6,3; в) 1,7; г) 0,9.

2. а) 0; б) -2,7; в) 1,5; г) 1,061.

3. а) M (У)=10; D(У)=36; σ(Y)=6; б) M (У)=14,5; D(У)=95,85; σ(Y)=9,79.

4. б) M(Y) = 0,475; D(Y) = 0,018; ϭ(y) = 0,135.

5.а) M(Y) = 2; D(Y) = 1,333; ϭ(Y) = 1,155; б) M(Y) = 41,333; D(Y) = 791,015; ϭ(Y) = 28,125; в) M(Y) = 2,17; D(Y) = 0,31; ϭ(Y) = 0,553.

6. а) $g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, при $y \in (-1,1)$; б) $g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, при $y \in (0,1)$.

7. а) g(y) = $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(y-10)^2}{8}}$; б) g(y) = $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sqrt[3]{y^2}}e^{\frac{-(\sqrt[3]{y}-2)^2}{2}}$.

8. а) g(y) = $\begin{cases} 0, \text{при } y \le \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}\left(\frac{1}{y^4}-\frac{1}{y^2}\right), \text{ при } \frac{1}{2} < y \le \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ 0, \text{при } y > \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

б) g(y) = $\begin{cases} 0, \text{при } y < \sqrt[4]{3}, \\ 3y^5 - 3y, \text{при} \sqrt[4]{3} \le y < \sqrt{2}, \\ 0, \text{при } y \ge \sqrt{2}. \end{cases}$

9. c=$\frac{3}{32}$; $\mathrm{M}(\mathrm{X}) = 0; D(X) = 0.8;\ \sigma(X) = 0.8944;$ а) g(y) = $\begin{cases} 0, \text{при} y < -3, \\ \frac{3}{256}(15 + 2y - y^2), \text{при } -3 \le y < 5, \\ 0, \text{при} y \ge 5. \end{cases}$

б)g(y) = $\begin{cases} 0, \text{при } y \le 0, \\ \frac{3}{32}\left(\frac{4-y}{\sqrt{y}}\right), \quad \text{при } 0<y \le 4, \\ 0, \text{при } y \ge 4. \end{cases}$

10. а) $\mathrm{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{y})}$, при **y ≥ –1; б)** g(y)=4ye^{-2y^2}, при y>0; в) равномерное распределение на отрезке [0,1].

11. $g(z) = \begin{cases} 0, при Z \le 0, \\ \frac{z}{20}, при 0 < z \le 2, \\ \frac{1}{10}, при 2 < z \le 10, \\ \frac{12-z}{20}, при 10 < z \le 12, \\ 0, при z > 12 \end{cases}$ **12**. $g(z) = \begin{cases} 0, при Z \le 3, \\ \frac{z+3}{25}, при -3 < z \le 2 \\ \frac{7-z}{25}, при 2 < z \le 7, \\ 0, при z > 7. \end{cases}$

13. g(z) = $\begin{cases} 0, \text{при } z \ \le\ 0; \\ \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\left(1-\ \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\right), \text{при } z > 0. \end{cases}$ **14.** g(z) =$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2}}$, при z∈ $(-\infty.\infty)$.

15. g(x)=$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{(Inx-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$, при x > 0.

РАЗДЕЛ 8

1. $P(x > 10) \le 0{,}6$.
2. P(X<140) >$\frac{2}{7}$.
3. а) $P(x > 8) \le 0{,}5$, б) $P(x \le 6) \ge \frac{1}{3}$.
4. 200

5. $P \geq 0.9872$; p≈1,0.

6. $P_1 \geq 0{,}936, P_2 = 0{,}99996$.

7. $P \geq 0{,}64$; б) $p \geq 0{,}75$.

8. $P \leq \frac{2}{3}$.

9. $P \geq 0{,}5456$.

10. а) $P \geq 0{,}64$, б) $P \geq 0{,}932$.

11. а) $P \geq \frac{7}{9}$, б) $\frac{35}{36}$.

12. а) $P \geq \frac{7}{9}$, б) $\frac{35}{36}$.

13. 400.

14. 3125.

15. $P \geq 0{,}409$.

16. а) да; б) нет.

РАЗДЕЛ 9

1. $r = \frac{1}{12}$.

2. Не зависимы.

3. а) M(X)=3,1; D(X)=0,99; σ(X)=0,995;
M(Y)=4,25; D(Y)=15,6875; σ(Y)=3,961.
б) M(X)=3,4; D(X)=0,84; σ(X)=0,916;
M(Y)=2,9; D(Y)=2,59; $\sigma(Y)$=1,609.

4. а) M(X)=7,5; D(X)=56,25; σ({)=7,5;
M(Y)=5,5; D(Y)=24,75; σ(Y)=4,975.
б) M(X)=0,15, D(X)=0,4275;σ(X)=65,38;
M(Y)=2,3; D(Y)=0,91; σ(Y)=0,954.

5. а) f(x,y)=
$$\begin{cases} \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y}, & при\ x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad , & при\ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$
б) 64/243

6. 3/128.

7. f(x)=$8 \cdot e^{-4x-2y}$, $\quad при\ x \geq 0,\ y \geq 0$;
f(x)=0, $\quad при\ x < 0,\ y < 0$.

9. а) a=0,5; б) M(X)=M(Y)=$\frac{\pi}{4}$;
в) D(X)=D(Y)=$(\pi^2+8\pi-32)/16$.

11 а) f(x,y)=$\frac{1}{18}$;
б) f_1(x)=$\frac{1}{3} - \frac{1}{18x}, 0 < x < 6$;
f_2(y)=$\frac{1}{3} - \frac{1}{18y}, 0 < y < 6$;
f(x,y)=$\frac{1}{6-y}, 0 < y < 6$;
f(x,y)=$\frac{1}{6-x}, 0 < x < 6$.

12. f(x,y)=$\frac{1}{a^2}$ внутри квадрата;
f(x,y)=0 вне квадрата;
$$f(x)=\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}-2|x|}{a^2}, при\,|x| < \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ 0, \qquad при|x| > \frac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$
$$f(y)=\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}-2|y|}{a^2}, при\,|y| \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0, \qquad при|y| > \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

13. M(X)=M(У)=$\frac{\sqrt{3\pi}}{6}$;

14. M(X)=M(У)=$\frac{a}{6}$; Д(X)=Д(У)=$\frac{a^2}{18}$;

Д(Х)=Д(У)=$\frac{4-\pi}{12}$.

$$\mu_{xy} = -\frac{a^2}{36}.$$

РАЗДЕЛ 10

2. $0 \le P \le 1, \quad 0 \le S \le 1.$

3. $Pi,i+1 = \frac{5-i}{5}; \quad Pi,i-1 = \frac{i}{5},$

$Pij = 0,$ для остальных i, j;

$Pij(2) = \frac{5+10i-2i^2}{25}, \; P_{i,i-2}(2) = \frac{i(i-1)}{25},$

$P_{i,i+2}(2) = \frac{(5-i)(4-i)}{25},$

остальные $Pij = 0.$

4. 1/6.

5. б) 0; 0;

$(\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{108}$; 0;

$(\frac{1}{3})^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{162}$.

РАЗДЕЛ 11

1. $\bar{x} = 3{,}51; \quad M_0 = 4; \quad M_e = 4;$

$\sigma = 1{,}425; Э = -0{,}688; Ка = -0{,}065.$

2. $\bar{x} = 4{,}18; \quad M_0 = 4; \quad M_e = 4;$

$\sigma = 1{,}44; Э = -0{,}612; Ка = 0{,}338.$

4. $\bar{x} = 10{,}208; \quad \sigma = 7{,}601; \; v = 74{,}45\%.$

5. $\bar{x} = 7{,}323; \quad \sigma = 1{,}751; \; v = 23{,}9\%$

$К_А = -0{,}822; \quad э = 0{,}894.$

РАЗДЕЛ 12

1. (1,702; 1,898); (1089;1215).

2. а) (0,474; 0,526); б) (0,47; 0,53).

3. (142,75; 157,25); (107062,5; 117937,5).

4. а) 3,48; 2,0504; 1,428;
б) (3,23; 3,73); в) 0,826; г) 181.

5. а) 4,24; 2,083; 1,443;
б) (3,99; 4,49); 0,899; в) 219.

7. (243,3; 256,7), (34,6; 45,4), 653.

8. а) 16%; 6,5%; 2,55%;
б) (14,95; 16,05).

9. 385.

10. (17,48; 19,31); (4,7; 13,9)

11. (65,6; 79,2)

Приложение А – Статистико-математические таблицы

Таблица А1 - Значения функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ и $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

Продолжение таблицы А1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	499841
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	499928
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	4999999
69	0957	4545	38	0235	4913			7

Таблица А2 - Критические точки распределения t-Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,7	318,31	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица А3 - Критические точки распределения F Фишера – Снедекора
(k_1 – число степеней свободы большей дисперсии,
k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости а=0,05										
	k_1									
k_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,1	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,51	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	2,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,37	2,20	2,01	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,31	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,94	1,75	1,52	1,00

Таблица А4 – Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α							
	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,00016	0,00098	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,554	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4
80	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3
90	61,75	65,61	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1
100	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8

Приложение Б
Основные показатели производства и реализации зерна по сельскохозяйственным организациям Краснодарского края, 2012 г.

№ п/п	Площадь посева (без кукурузы), га	Валовой сбор зерна, тыс. ц	Производственные затраты, млн руб.	Затраты труда, тыс. чел.-ч	Реализовано зерна, тыс. ц	Полная себестоимость, млн руб.	Выручка от реализации, млн. руб.	Производственная себестоимость 1 ц, руб.	Полная себестоимость 1 ц, руб.	Урожайность с 1 га, ц	Производственные затраты на 1 га, тыс. руб.	Затраты труда на 1 ц, чел.-ч	Выручка от реализации на 1 га, тыс. руб.	Полные затраты на 1 га, тыс. руб.	Цена за 1 ц зерна, руб.	Выручка на 1 руб. затрат, руб.
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2769	115,0	64,0	12	84,1	40,3	65,0	556,9	479,5	41,5	23,1	0,10	23,5	14,6	772,6	1,61
2	1597	68,0	38,5	10	58,1	29,4	44,1	565,5	505,3	42,6	24,1	0,15	27,6	18,4	758,7	1,50
3	1810	79,6	48,3	34	79,7	47,0	62,3	607,0	589,6	44,0	26,7	0,43	34,4	26,0	781,4	1,33
4	3739	187,3	61,6	60	114,1	37,3	83,1	328,6	327,1	50,1	16,5	0,32	22,2	10,0	728,7	2,23
5	1230	61,7	25,6	8	49,9	21,1	40,3	415,0	422,4	50,2	20,8	0,13	32,7	17,1	807,3	1,91
6	1460	56,5	34,5	25	48,9	29,7	35,1	610,4	607,0	38,7	23,6	0,44	24,0	20,3	717,4	1,18
7	3868	151,6	102,8	114	120,6	82,1	105,4	678,4	681,0	39,2	26,6	0,75	27,2	21,2	873,7	1,28
8	1420	56,4	32,5	34	42,7	23,8	31,5	575,9	557,0	39,7	22,9	0,60	22,2	16,7	738,6	1,33
9	2150	91,0	36,6	38	69,9	35,4	45,3	401,7	507,0	42,3	17,0	0,42	21,1	16,5	648,1	1,28
10	1038	38,7	23,5	12	38,8	23,0	33,2	607,1	593,8	37,3	22,7	0,31	31,9	22,2	854,7	1,44
11	2448	120,8	48,3	26	107,7	43,1	65,2	400,0	400,0	49,3	19,7	0,22	26,6	17,6	605,2	1,51
12	1870	55,3	44,7	30	58,2	48,0	57,4	807,8	824,8	29,6	23,9	0,54	30,7	25,7	985,4	1,19
13	2705	80,4	50,3	65	78,7	42,4	57,0	625,6	539,1	29,7	18,6	0,81	21,1	15,7	724,2	1,34
14	2469	135,2	51,3	25	98,9	37,5	73,8	379,7	378,9	54,8	20,8	0,18	29,9	15,2	745,7	1,97
15	4290	192,7	93,2	24	157,1	102,1	145,8	483,6	650,1	44,9	21,7	0,12	34,0	23,8	927,7	1,43

Продолжение приложения Б

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
16	2681	110,8	60,9	33	94,6	49,6	69,3	549,4	524,2	41,3	22,7	0,30	25,9	18,5	733,1	1,40
17	2064	58,9	28,1	31	64,3	36,9	48,5	476,4	574,2	28,6	13,6	0,53	23,5	17,9	754,6	1,31
18	2140	50,8	50,0	52	39,9	38,8	27,6	984,3	971,6	23,7	23,4	1,02	12,9	18,1	690,8	0,71
19	6907	236,6	145,9	28	204,6	141,4	170,6	616,6	691,1	34,2	21,1	0,12	24,7	20,5	833,6	1,21
20	3397	120,4	46,6	15	132,3	43,6	78,1	386,6	329,6	35,5	13,7	0,12	23,0	12,8	590,4	1,79
21	2920	122,1	43,9	11	103,3	33,8	64,5	359,7	326,7	41,8	15,0	0,09	22,1	11,6	624,2	1,91
22	1300	42,0	16,7	40	34,4	13,7	21,1	398,0	398,0	32,3	12,9	0,95	16,2	10,5	613,4	1,54
23	2560	104,2	51,6	51	92,3	40,3	50,2	495,2	437,2	40,7	20,2	0,49	19,6	15,8	544,1	1,24
24	1367	51,3	38,2	65	42,7	26,5	22,7	744,3	620,8	37,5	27,9	1,27	16,6	19,4	532,9	0,86
25	2386	101,1	44,2	48	47,3	22,2	28,1	437,3	468,3	42,4	18,5	0,47	11,8	9,3	594,6	1,27
26	2260	96,3	47,7	22	83,3	44,1	54,1	494,8	529,8	42,6	21,1	0,23	23,9	19,5	649,2	1,23
27	1630	93,6	44,8	14	77,4	37,3	55,9	479,1	481,6	57,4	27,5	0,15	34,3	22,9	721,9	1,50
28	2230	126,8	51,9	20	116,6	53,2	83,0	409,0	456,5	56,9	23,3	0,16	37,2	23,9	711,7	1,56
29	5079	282,9	107,2	41	130,8	52,9	104,6	379,0	404,6	55,7	21,1	0,14	20,6	10,4	800,1	1,98
30	4140	196,9	66,6	109	153,7	72,6	122,7	338,4	472,4	47,6	16,1	0,55	29,6	17,5	798,4	1,69
31	2682	121,2	55,8	53	84,2	42,1	63,6	460,4	500,0	45,2	20,8	0,44	23,7	15,7	755,3	1,51
32	4827	254,2	132,5	76	191,1	106,7	157,5	521,1	558,3	52,7	27,4	0,30	32,6	22,1	824,2	1,48
33	2433	79,6	44,6	73	58,7	33,9	41,7	560,9	577,8	32,7	18,3	0,92	17,1	13,9	709,7	1,23
34	2710	97,1	61,0	49	90,5	59,6	72,5	628,7	658,4	35,8	22,5	0,50	26,7	22,0	800,5	1,22
35	2343	79,9	44,5	14	61,7	32,3	48,6	557,1	523,6	34,1	19,0	0,18	20,7	13,8	788,0	1,50
36	1592	68,7	28,1	9	52,8	24,7	42,9	408,5	468,4	43,2	17,6	0,13	26,9	15,5	811,7	1,73
37	1658	61,6	35,3	12	66,2	20,8	36,7	572,2	314,5	37,2	21,3	0,19	22,2	12,6	554,6	1,76
38	4256	160,7	116,4	59	130,1	101,2	105,5	724,9	778,5	37,7	27,4	0,37	24,8	23,8	810,9	1,04
39	2377	95,6	68,0	53	109,9	73,5	83,5	711,4	668,7	40,2	28,6	0,55	35,1	30,9	759,4	1,14
40	1241	33,6	15,0	5	27,6	12,1	20,0	446,5	437,1	27,1	12,1	0,15	16,1	9,7	724,7	1,66
41	4220	208,7	94,3	42	164,5	71,4	125,5	451,9	434,1	49,5	22,4	0,20	29,7	16,9	762,6	1,76
42	5107	212,1	128,9	51	182,5	110,8	131,8	607,7	607,1	41,5	25,2	0,24	25,8	21,7	722,1	1,19
43	2732	74,0	58,3	22	69,4	52,9	52,5	788,2	762,8	27,1	21,4	0,30	19,2	19,4	756,6	0,99

Продолжение приложения Б

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
44	2052	90,7	38,4	11	88,6	37,7	69,9	422,9	425,1	44,2	18,7	0,12	34,0	18,4	788,0	1,85
45	2920	92,5	50,0	52	58,9	24,5	27,9	537,8	415,8	31,8	17,1	0,56	9,6	8,4	473,9	1,14
46	3102	149,4	82,2	40	105,3	55,0	92,8	550,2	522,5	48,2	26,5	0,27	29,9	17,7	881,5	1,69
47	2742	101,5	50,2	17	87,1	52,3	61,9	494,5	600,7	37,0	18,3	0,17	22,6	19,1	710,4	1,18
48	2263	81,0	48,4	15	76,7	44,2	54,6	597,5	575,8	35,7	21,3	0,19	24,1	19,5	711,4	1,24
49	3985	173,9	74,8	20	137,7	58,7	118,8	430,2	426,0	43,6	18,8	0,12	29,8	14,7	862,7	2,02
50	3888	140,0	66,2	118	139,7	60,5	94,9	472,9	433,4	36,0	17,0	0,84	24,4	15,6	679,2	1,57
51	2964	145,4	67,7	135	127,6	63,5	102,6	465,5	497,8	49,1	22,8	0,93	34,6	21,4	803,9	1,61
52	2972	147,5	53,2	38	148,9	60,6	118,3	360,7	407,1	49,6	17,9	0,26	39,8	20,4	794,4	1,95
53	2732	136,5	57,1	50	119,4	50,0	83,1	418,3	418,3	50,0	20,9	0,37	30,4	18,3	695,9	1,66
54	1090	43,3	18,8	18	34,8	18,9	25,5	435,0	541,4	39,7	17,3	0,42	23,4	17,3	732,9	1,35
55	1137	30,7	26,0	10	27,1	22,8	19,3	847,4	842,7	27,0	22,9	0,33	17,0	20,1	713,3	0,85
56	2243	80,6	54,3	12	93,1	62,3	63,7	673,2	669,7	35,9	24,2	0,15	28,4	27,8	684,7	1,02
57	1627	58,2	41,2	38	45,2	33,4	40,5	707,3	738,4	35,8	25,3	0,65	24,9	20,5	894,6	1,21
58	3338	79,6	52,6	21	63,5	38,5	51,1	660,8	606,2	23,8	15,8	0,26	15,3	11,5	804,6	1,33

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. - М.: Юрайт, 2013. – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. –М.: Юрайт, 2013. – 405 с.
2. Горелова Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel / Г. В. Горелова, И. А. Кацко.- Ростов н/Д.: Феникс, 2006. – 475 с.
3. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: КНОРУС, 2009.– 384 с.
4. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 573 с.
5. Калинина В. Н. Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин.- М.: Дрофа, 2002.– 336 с.
6. Ниворожкина Л. И. Теория вероятностей и математическая статистика / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. – М.: Эксмо, 2008. – 432 с.
7. Теория статистики с основами теории вероятностей/ И. И. Елисеева, В. С. Князевский, Л. И. Новорожкина, Э. А. Морозова; под ред. И.Н. Елисеевой - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 446 с.
8. Солодовников А. С. Математика в экономике: учебник. В 3-х ч. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика / А. А.Солодовников, В. А. Бабайцев, А. И. Браилов. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 464 с.
9. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под общ. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М. 2008. – 656 с.

У ч е б н о е   и з д а н и е

Бондаренко Петр Сергеевич
Кацко Игорь Александрович
Ворокова Нодира Хасановна
Соловьева Татьяна Владимировна
Стеганцова Екатерина Дмитриевна
Чернобыльская Татьяна Юрьевна

Теория вероятности и математическая статистика

Практикум

В авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. – 5,5. Уч.- изд.л.– 4,3
Тираж 1000 экз. Заказ №

Типография Кубанского государственного аграрного университета.
350044, Краснодар, ул. Калинина,13