МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания для проведения семинарских занятий

(Численные методы)

по дисциплине

Б1.В.ОД.1 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Код и направление подготовки	09.06.01 – Информатика и вычислительная техника
Наименование профиля / программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре	Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Квалификация (степень) выпускника	***Исследователь. Преподаватель исследователь***

Краснодар 2014

Содержание

ГЛАВА 1

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

§1. Отделение корней уравнения.

Корнем уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

называется такое значение $x = x_0$ при котором уравнение (1) превращается в тождество:

$$f(x_0) = 0$$

Корень уравнения геометрически представляет собой абсциссу точки пересечения, касания или другой общей точки графика функции $y = f(x)$ и оси OX (рис.1.1).

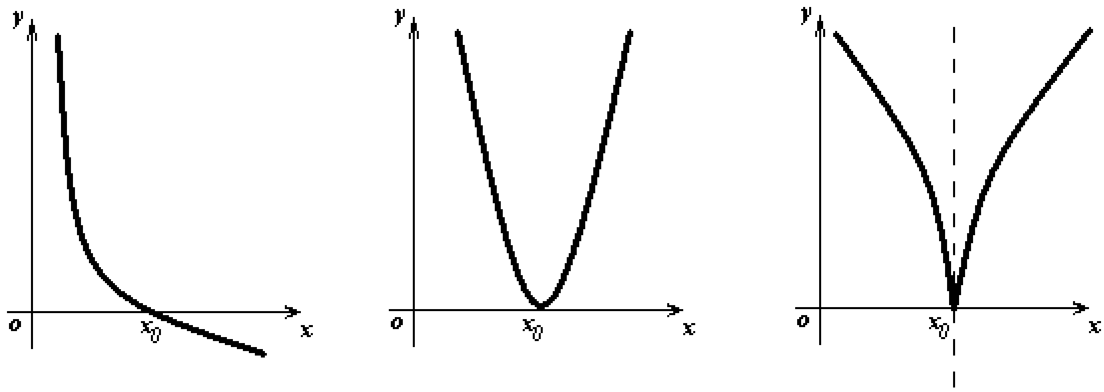

рис 1.1

Отделить корень уравнения – значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения.

Графический метод отделения корней.

Отделение корней уравнения (1) можно выполнить графически, построив график функции $y = f(x)$, по которому можно судить о том, в каких промежутках находится точка пересечения его с осью OX. В некоторых случаях целесообразно представить уравнение $f(x)=0$ в виде:

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (2)$$

с таким расчетом, чтобы графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ строились по возможности проще. Корень уравнения (2) представляет собой абсциссу точки пересечения графиков $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Таким способом можно найти, например, корни уравнения $x^3 + px + q = 0;$ это будут точки пересечения кубической параболы $y = x^3$ и прямой $y = -px – q$.

Метод исследования отрезков.

Теорема 1. Если на отрезке [a ; b] функция $y = f(x)$ непрерывна, $f'(x)$ сохраняет свой знак (является монотонной), а значения $f(x)$ на концах этого отрезка имеют разные знаки, то на этом отрезке имеется один и только один корень уравнения.

Пример 1.1 Отделить корни уравнения $x^3 + x - 4 = 0$.

Решение.

I способ (графический метод):

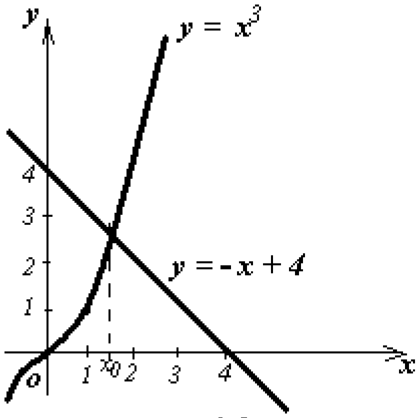

рис 1.2

Рассмотрим уравнение $x^3 + x - 4 = 0$. Придадим заданному уравнению вид $x^3 = - x + 4$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = - x + 4$. Эти графики пересекаются в точке, которая принадлежит интервалу (1; 2) (рис 1.2).

II способ (исследование отрезков):

В данном случае $f(x)= x^3 + x - 4$, $f'(x)= 3x^2 + 1$. Так как $f'(x)>0$ при всех x, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Корень считается отделенным, если указан конечный промежуток на котором он находится. Методом проб находим отрезок [a ; b], для которого $f(a) f(b) < 0$. Для этого вычислим значения функции при некоторых значениях аргумента: $f(0) = -4<0$, $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 6 > 0$. Поскольку $f(0) f(1) > 0$, то на отрезке [0 ; 1] корней нет; так как $f(1) f(2) < 0$, то корень уравнения находится на отрезке [1 ; 2].

§2. Правило пропорциональных частей (метод хорд).

Метод хорд приближенного решения уравнения (1) имеет следующую геометрическую иллюстрацию: вместо точки пересечения оси OX и графика функции $y = f(x)$, входящей в это уравнение, рассматривается точка пересечения данной оси и отрезка прямой, соединяющей концы дуги графика. Пусть требуется вычислить действительный корень уравнения $f(x) = 0$, изолированный на отрезке [a ; b]. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$.

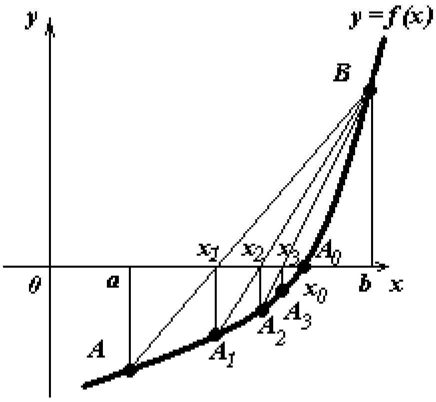

рис 1.3

Точки A $(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ соединим хордой. Найдем точку x_1:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} \qquad \textbf{(3)}$$

Если $f(x_1) < 0$, то за новый, более узкий, интервал изоляции можно взять отрезок $[x_1; b]$. Соединив точки $A_1(x_1; f(x_1))$ и $B(b; f(b))$, получим в точке пересечения хорды с осью второе приближение x_2, которое вычислим по формуле:

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} \quad \textbf{(4)}$$

и т. д. Последовательность чисел a, x_1, x_2 ....стремится к искомому корню x_0. Вычисления следует вести до тех пор, пока не перестанут изменяться те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т.е. пока не будет достигнута заданная степень точности).

Пример 1.2:

Методом хорд найти положительный корень уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$ с точностью до 0,01

Решение. Положительный корень будет находиться в промежутке (1; 1,7), т.к. $f(1) = -5<0$, а $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$. Найдем первое приближенное значение корня по формуле (3):

$$x_1 = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}, \text{ где } a = 1,\ b=1{,}7$$

Получим $x_1 = 1 - \dfrac{(1{,}7 - 1) f(1)}{f(1{,}7) - f(1)} = 1{,}588$

Так как $f(1{,}588) = -0{,}817 < 0$, то применяя вторично способ хорд к промежутку (1,588; 1,7) получим: $x_2 = 1{,}588 - \dfrac{(1{,}7 - 1{,}588) f(1{,}588)}{f(1{,}7) - f(1{,}588)} = 1{,}639$; $f(1{,}639) = -0{,}051 < 0$.

Найдем третье приближенное значение на промежутке (1,639; 1,7)

получим: $x_3 = 1{,}639 - \dfrac{(1{,}7 - 1{,}639) f(1{,}639)}{f(1{,}7) - f(1{,}639)} = 1{,}642$; $f(1{,}642) = -0{,}016 < 0$.

Найдем четвертое приближенное значение на отрезке (1,642; 1,7)

получим: $x_4 = 1{,}642 - \dfrac{(1{,}7 - 1{,}642) f(1{,}642)}{f(1{,}7) - f(1{,}642)} = 1{,}643$; $f(1{,}643) = -0{,}004 > 0$.

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64

§3. Метод касательных (Ньютона).

Метод касательных отличается от метода хорд тем, что здесь рассматривается не секущая, соединяющая концы дуги графика, а касательная к графику. Точка пересечения касательной с осью OX дает приближенное значение корня.

Пусть действительный корень уравнения *f(x) = 0* изолирован на отрезке [a ; b]. Выберем на отрезке [a ; b] такое число x_0, при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак что и $f''(x_0)$, т.е. выполняется условие

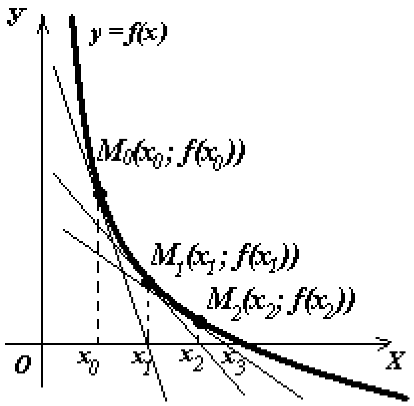

рис 1.4

$$f(x_0)f''(x_0)>0 \tag{5}$$

Проведем в точке M_0 *(x_0; $f(x_0)$)* касательную к кривой *y = f(x)*. За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью OX. Это приближенное значение корня найдется по формуле:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{6}$$

Применив этот метод вторично в точке M_1 (x_1; $f(x_1)$), получим:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{7}$$

и т.д. Полученная таким образом последовательность x_0, x_1, x_2 .... имеет своим пределом искомый корень.

Пример 1.3:

Методом касательных найти положительный корень уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$ с точностью до 0,01

Решение. Здесь $f(x) = x^4 - 2x - 4$, $f'(x) = 4x^3 - 2$, $f''(x) = 12x^2$. Так как $f(x)$ и $f''(x)$ при $x_0 = 1,7$ имеют один и тот же знак, а именно: $f(1,7) = 0,952 > 0$ и $f''(1,7) = 34,68 > 0$, то применяя формулу $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ где $f'(1,7) = 17,652$. Тогда $x_1 = 1,7 - \frac{0,952}{17,652} = 1,646$.

Применяя второй раз способ касательных, получим: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, где $f(x_1) = f(1,646) = 0,048$,

$f'(1,646) = 15,838$. $x_2 = 1,646 - \frac{0,048}{15,838} = 1,643$.

Аналогично получим третье приближение:

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, $f(1,643) = 0,004$, $f'(1,643) = 15,740$, следовательно, $x_3 = 1,643 - \frac{0,004}{15,740} = 1,6427$.

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64

§4. Комбинированное применение методов хорд и касательных.

Пусть требуется вычислить действительный корень уравнения $f(x) = 0$, изолированный на отрезке [a ; b]. Предполагается, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки (т.е. $f(a)f(b) < 0$), а каждая из производных сохраняет определенный знак на отрезке изоляции. Возьмем на отрезке [a ; b] такую точку x_0, такую, что $f(x_0)$ имеет тот же знак что и $f''(x_0)$, т.е. выполняется условие:

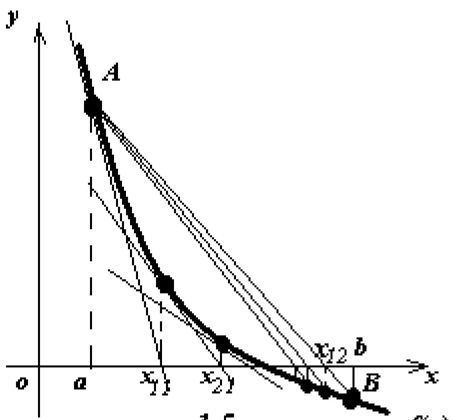

рис. 1.5

$$f(x_0)f''(x_0)>0 .$$

Воспользуемся способами хорд и касательных:

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Величины x_{11} и x_{12} принадлежат промежутку изоляции, причем $f(x_{11})$ и $f(x_{12})$ имеют разные знаки.

Построим новую пару приближений к корню:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x11)}$$

$$x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12}-x_{11})f(x_{11})}{f(x_{12})-f(x_{11})}$$

Точки x_{21} и x_{22} на числовой оси между точками x_{11} и x_{12}, причем $f(x_{21})$ и $f(x_{22})$ имеют разные знаки.

и т. д. Каждая из последовательностей:

$$x_{11},\ x_{21},\ x_{31} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{12},\ x_{22},\ x_{32} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

стремится к искомому корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая монотонно убывает.

Пример 1.4:

Комбинируя способы хорд и касательных найти приближенное значение корня уравнения $x^3 + x^2 - 11 = 0$, изолированного в промежутке (1; 2) с точностью до 0,001.

Решение.

Имеем $f(x) = x^3 + x^2 - 11$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$ $f''(x) = 6x + 2$. В указанном промежутке $f''(x) > 0$, поэтому за первое приближение в способе касательных берем $x_0 = 2$, так как $f(2) = 1 > 0$;

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} = 1{,}9375 \approx 1{,}94$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = 1 - \frac{(2-1)(-9)}{1-(-9)} = 1 + \frac{9}{10} = 1{,}9$$

Искомый корень принадлежит промежутку *(1,9; 1,94).*

$f(1{,}9) = -0{,}531$, $f(1{,}94) = -0{,}065$, $f'(1{,}94) = 15{,}172$.

Следовательно, $x_{21} = x_{11} - \dfrac{f(x_{11})}{f'(x11)} = 1{,}94 - \dfrac{0{,}065}{15{,}172} = 1{,}936$

$$x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12} - x_{11}) f(x_{11})}{f(x_{12}) - f(x_{11})} = 1{,}9 - \frac{0{,}04 \cdot (-0{,}531)}{0{,}065 + 0{,}531} = 1{,}936.$$

Так как значения x_{21} и x_{22}, вычисленные с точностью до 0,001, совпали, то приближенным значением корня будет *1,936.*

§5. Метод итераций.

Если каким нибудь способом получено приближенное значение x_0 корня уравнения, то уточнение приближения можно осуществить методом итераций (методом последовательных приближений).

Пусть задано уравнение $f(x) = 0$, представим его в виде $x = \varphi(x)$, где $|\varphi'(x)| \le r < 1$ всюду на отрезке [a ; b], содержащем единственный корень ξ. Исходя из некоторого начального значения $x_0 \in [a; b]$ можно построить последовательность: $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$ .... $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ...

Пределом последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$ является единственный корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [a ; b].

Пример 1.5:

Способом итераций найти приближенное значение корня уравнения $2 - \lg x - x = 0$ с точностью до *0.001*

Решение.

Найдем интервал изоляции действительного корня уравнения.

Представим уравнение в виде:

$$lgx = -x + 2$$

Построим графики функций $y = lgx$ и $y = -x + 2$. Точка М пересечения графиков имеет абсциссу в промежутке [1 ; 2]. Пусть $x_0 = 1$. Запишем исходное уравнение в виде $x = 2 - lgx$.

$$\varphi(x) = 2 - lgx, \quad \varphi'(x) = -\frac{\lg x}{x}$$

$|\varphi'(x)| \leq 1$ в промежутке [1 ; 2], следовательно, способ итераций применим.

Найдем приближения:

$$x_1 = 2 - \lg x_0 = 2 - \lg 1 = 2$$

$$x_2 = 2 - \lg x_1 = 2 - \lg 2 = 2 - 0{,}3010 = 1{,}6990$$

$$x_3 = 2 - \lg x_2 = 2 - \lg 1{,}6990 = 2 - 0{,}2302 = 1{,}7698$$

$$x_4 = 2 - \lg x_3 = 2 - \lg 1{,}7698 = 2 - 0{,}2480 = 1{,}7520$$

$$x_5 = 2 - \lg x_4 = 2 - \lg 1{,}7520 = 2 - 0{,}2435 = 1{,}7565$$

$$x_6 = 2 - \lg x_5 = 2 - \lg 1{,}7565 = 2 - 0{,}2445 = 1{,}7555$$

$$x_7 = 2 - \lg x_6 = 2 - \lg 1{,}7555 = 2 - 0{,}2444 = 1{,}7556$$

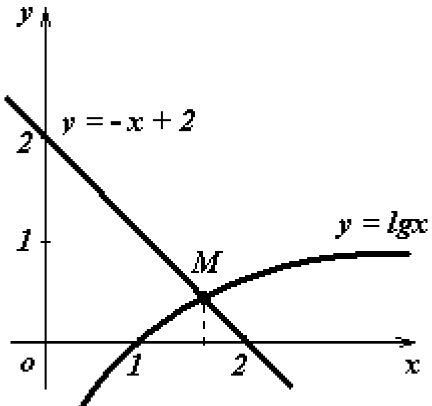

рис 1.6

Таким образом, искомый корень с точностью до *0,001* равен *1,755*

Упражнения.

Отделить корни уравнения графически и методом исследования отрезков.

1. $x^3 - 12x + 1 = 0$. *(Ответ: (-4;-3), (0;1),(3;4))*

2. $x^3 + 2x - 7 = 0$. *(Ответ: (1;2))*

3. $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$. *(Ответ: (0;1), (2;3),(6;7))*

Решить способом хорд и касательных с точностью до 0,01 следующие уравнения:

4. $x^4 + 3x - 20 = 0$. *(Ответ: 1,94)*

5. $x^3 - 2x - 5 = 0$. *(Ответ: 2,09)*

6. $x^4 - 3x + 1 = 0$. *(Ответ: 0,33; 1,30)*

7. $x^3 + 3x + 5 = 0$. *(Ответ: -1,15)*

Применив комбинированный способ хорд и касательных решить уравнение.

8. $x^4 + 5x - 7 = 0$. *(Ответ: 1,11)*

Решить способом итераций с точностью до 0,01 следующие уравнения.

9. $x^3 - 12x + 5 = 0$. *(Ответ: 0,42)*

10. $x^4 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$. *(Ответ: 3,62)*

ГЛАВА II.
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

§1. Интерполяционный полином Лагранжа.

Пусть дана таблица значений

x	x_1	x_2	x_3	…………	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…………	y_n

Требуется составить полином (функцию) $y = f(x)$ степени $m \le n - 1$, который принимал бы заданные значения y_i при соответствующих значениях x_i : $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n)$. Иными словами график функции должен проходить через заданные точки $M(x_i; y_i)$

Данная задача выполнима при использовании интерполяционного полинома Лагранжа:

$$f(x) = \frac{y_1\varphi(x)}{(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots\ldots(x_1-x_n)} +$$

$$\frac{y_2\varphi(x)}{(x-x_2)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots\ldots(x_2-x_n)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{y_n\varphi(x)}{(x-x_n)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})} \qquad \textbf{(1)}$$

или

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)} \qquad \textbf{(2)}$$

где $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)$ - вспомогательная функция n-й степени, в которой x_i – заданные табличные значения аргумента.

Пример 2.1

Составить полином Лагранжа, удовлетворяющий таблице значений

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Решение.

Вспомогательная функция $\varphi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Вычислим $\varphi'(x)$ последовательно при данных значениях x:

$\varphi'(x)$ = (x - 2)(x - 3)(x - 4)+(x - 1)(x - 3)(x - 4)+(x - 1)(x - 2)(x - 4)+(x - 1)(x - 2)(x - 3);

$\varphi'(1) = -6$, $\varphi'(2) = 2$, $\varphi'(3) = -2$, $\varphi'(4) = 6$.

Тогда по формуле (1)

$$f(x) = \frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) =$$

$= x + 1$

Таким образом, в данном случае в качестве интерполяционного полинома найдена линейная функция $f(x) = x + 1$.

§2. Интерполяционная формула Ньютона.

Пусть $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots$ – значения некоторой функции $y = f(x)$, соответствующие равноотстоящим значениям аргументам $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots$ (т.е. $x_{k+1} - x_k = \Delta x = const$).

Введем обозначения:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2$, ... , $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ - разности первого порядка данной функции;

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$, ... – разности второго порядка

....

$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0$, $\Delta^{n+1} y_1 = \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1$, ... – разности $(n+1)$ - го порядка

Производя последовательные подстановки, получим:

$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$, $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$, ... $\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \cdot y_{n-k}$

Подобным же образом получаем:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0$, $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$, ...

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k y_0 = (1+\Delta)^n \cdot y_0 = y_0 + n\Delta y_n + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0 \qquad \textbf{(3)}$$

Запишем таблицу разностей:

x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

...

Если в формуле (3) положить, что n – не только целое и положительное число, а может быть любым $n = t$, то получим интерполяционную формулу Ньютона

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... + \Delta^r y_0 \quad \textbf{(4)}$$

Мы получили такую функцию от t, которая обращается при $t = 0$ в y_0, при $t = 1$ в y_1, при $t = 2$ в y_2 и т. д. Поскольку последующее значение аргумента x при постоянном шаге h определяется формулой $x_n = x_0 + nh$, то $n = \frac{x_n - x_0}{h}$. Тогда, полагая $x = x_0 + th$, $t = \frac{x - x_0}{h}$ приведем формулу (3) к виду $y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + ...$ **(3*)**

Пример 2.2:

Из таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

Найти значение y при $x = 3,1$, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона.

Решение. Составим таблицу разностей:

x	y	Δy	Δ² y	Δ³ y
1	**3**			
		4		
2	**7**		2	
		6		0
3	**13**		2	
		8		0
4	**21**		2	
		10		0
5	**31**		2	
		12		0
6	**43**		2	
		14		
7	**57**			

Здесь $x_0 = 3$, $x = 3,1$, $h = 1$. Тогда $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3,1 - 3}{1} = 0,1$

Интерполяционная формула Ньютона (4) для этого случая: $y = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0$

Следовательно $y = 13 + 0,1 \cdot 8 + \frac{0,1(0,1-1)}{2} \cdot 2 = 13,71$, т.е. при $x = 3,1$ $y = 13,71$

Интерполяционная функция Ньютона (3*) $y = 3 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} 2 = x^2 + x + 1$

Упражнения.

1. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, найти уравнение параболы проходящей через точки (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1).

(Ответ: $y = \frac{1}{32}(x^4 - 26x^3 + 220x^2 - 664x + 640)$*)*

2. Даны точки (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Используя интерполяционную формулу Лагранжа, составить уравнение функции, принимающей указанные значения при заданных значениях аргумента.

(Ответ: $y = -\frac{1}{3}(-2x^3 - 15x^2 + 25x - 9)$*)*

3. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, принимающую значения заданные таблицей.

x	1	3	4	6
y	-7	5	8	14

(Ответ: $y = \frac{1}{5}(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$*)*

4. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, график которой проходит через точки (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

(Ответ: $y = 2x - 1$*)*

5. Даны десятичные логарифмы чисел:

$$lg\,2{,}0 = 0{,}30103, \quad lg\,2{,}1 = 0{,}32222, \quad lg\,2{,}2 = 0{,}34242,$$

$$lg\,2{,}3 = 0{,}36173, \quad lg\,2{,}4 = 0{,}38021, \quad lg\,2{,}5 = 0{,}39794.$$

Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти $lg\,2{,}03$.

(Ответ: $lg\,2{,}03 = 0{,}30750$*)*

6. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения $f(1) = 6$, $f(3) = 24$, $f(4) = 45$.

(Ответ: $y = 4x^2 - 7x + 9$*)*

7. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x) = 2^x$ и ее значениям в точках $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ и вычислить $f(-0{,}5)$ и $f(2{,}5)$.

(Ответ: $y = 8 + 4(x - 3) + (x - 3)(x - 2) + \frac{1}{6}(x - 3)(x - 2)(x - 1) + \frac{1}{48}(x - 3)(x - 2)(x - 1)x$, $f(-0{,}5) = 0{,}700$, $f(2{,}5) = 5{,}658$.*)*

8. Составить интерполяционную формулу Ньютона по данным таблицы

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

(Ответ: $y = x^3 + x^2 + x + 1$*)*

ГЛАВА III.
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции *f(x).* Если можно найти первообразную *F(x)* функции *f(x)*, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница. Но не всегда первообразная функции выражается через элементарные функции. В этих и других случаях используют приближенные формулы, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Наиболее употребимые формулы – формула прямоугольников, формула трапеции и формула парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

§1. Метод прямоугольников.

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x).* Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *n* равных частей длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$. В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту построим прямоугольник с площадью $S_i = h \cdot \tilde{y}_i$. Тогда сумма площадей всех *n* прямоугольников (при достаточно большом *n*) дает площадь приближенно равную площади трапеции, т.е.

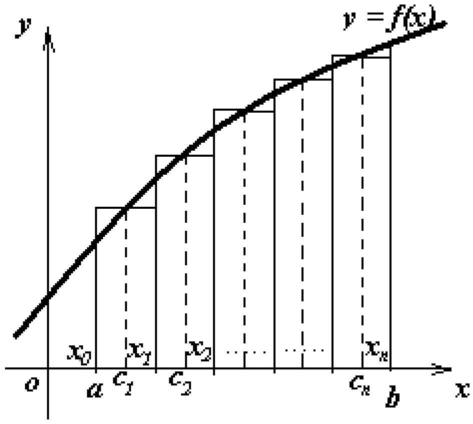

рис.3.1

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h \cdot \left(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + ...\tilde{y}_n\right) = h \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(C_i)$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \pm \left|R_n(f)\right| \quad \textbf{- формула прямоугольников} \qquad \textbf{(1)}$$

Абсолютная погрешность метода определяется неравенством:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]} \left|f''(x)\right| \qquad \textbf{(3)}$$

Пример 3.1: Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3 dx$ при n = 4, используя метод прямоугольников.

Решение.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\pm\left|R_n(f)\right| \Rightarrow \int_0^2 x^3 dx \approx \frac{2-0}{4}\cdot\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\pm\left|R_n(f)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+\left|R_n(f)\right| = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x4}{2}\right)\right)\pm\left|R_n(f)\right|$$

т.к. $x_i = x_0 + i\cdot h$ и $h=\frac{1}{2}$:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + 1\cdot h = 0+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$x_2 = x_0 + 2\cdot h = 0+2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$x_3 = x_0 + 3\cdot h = 0+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$x_4 = x_0 + 4\cdot h = 0+4\cdot\frac{1}{2}=2$$

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=f\left(\frac{0+1/2}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(\frac{1/2+1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

$$f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)=f\left(\frac{1+3/2}{2}\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}$$

$$f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)=f\left(\frac{3/2+2}{2}\right)=f\left(\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^3=\frac{343}{64}$$

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{24n^2} \quad \text{где } M_2=\max_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$$

$$f''(x)=6x,\; M_2=\max_{[0;\,2]}|6x|=12,\; \left|R_4(f)\right|\le\frac{(2-0)^3\cdot 12}{24\cdot 16}=\frac{96}{384}\approx 0{,}25$$

Следовательно: $\int_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{64}+\frac{27}{64}+\frac{125}{64}+\frac{343}{64}\right)\pm 0{,}25 \approx 3{,}875 \pm 0{,}25$

Пример 3.2:

Зная, что погрешность метода прямоугольников при вычислении интеграла $\int_0^2 x^3dx$ составляет 0,125, определить число разбиений n.

Решение. Используя формулу **(2)** получим $0{,}125 \le \frac{2^3\cdot 12}{24\cdot n^2}$

Умножим правую и левую части неравенства на дробь $\frac{n^2}{0{,}125}$, тогда $n^2 \le \frac{96}{24\cdot 0{,}125}=\frac{96}{3}=32$.

т.е $n\le\sqrt{32}$ или $n \le 5$

§2. Метод трапеций.

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

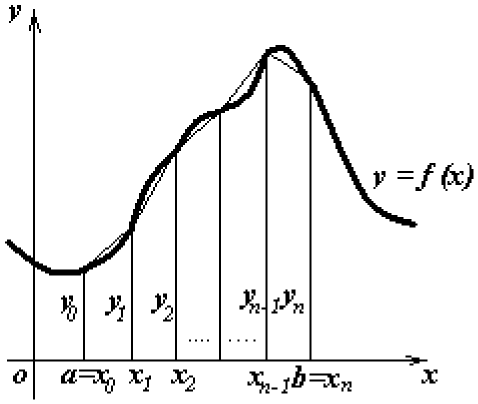

рис 3.2

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *n* равных частей длины $h = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$, $y_i = f(x_i)$.

Так как площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей трапеций S_i, высота каждой из которых равна h, то:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h\cdot\frac{y_0+y_1}{2} + h\cdot\frac{y_1+y_2}{2} + ... + h\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2} =$$

$$= h\cdot\left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{i-1} + 2y_i + ...2y_{n-1} + y_n}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

Абсолютная погрешность метода (аналогично методу прямоугольников) составляет:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12n^2} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]}|f''(x)| \qquad \textbf{(4)}$$

тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}\cdot\left(\dfrac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) \pm |R_n(f)|$ **- формула трапеций.** **(5)**

Пример 3.3: Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3dx$ при $n = 4$, используя метод трапеций.

Решение. По формуле трапеций:

$\int_0^2 x^3dx \approx \dfrac{2-0}{4}\cdot\left(\dfrac{y_0+y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3\right) \pm |R_n(f)|$, т.к. $x_i = x_0 + i\cdot h$, $h = \dfrac{1}{2}$, то

$x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + 1\cdot h = 0 + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $x_2 = x_0 + 2\cdot h = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, $x_3 = x_0 + 3\cdot h = 0 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_4 = x_0 + 4\cdot h = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2$.

Тогда $y_0 = f(0) = 0^3 = 0$, $y_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $y_2 = f(1) = 1^3 = 1$, $y_3 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, $y_4 = f(2) = 2^3 = 8$.

Найдем погрешность:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$$

$$f''(x) = 6x,\ M_2 = \max_{[0;\,2]}|6x| = 12,\ \left|R_4(f)\right| \le \frac{(2-0)^3 \cdot 12}{12 \cdot 16} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Следовательно

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) \pm 0{,}5 = 4{,}25 \pm 0{,}5$$

§3. Метод парабол (Метод Симпсона).

Если заменить график функции на каждом отрезке $[x_{i-1};\, x_i]$не отрезками прямых, как в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

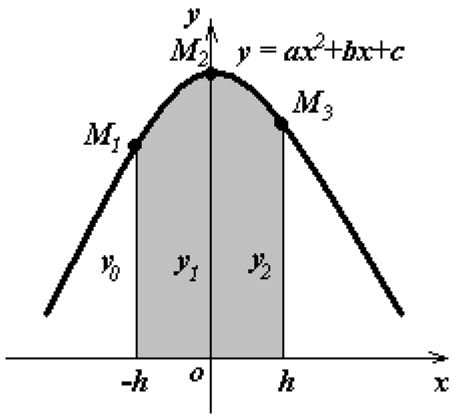

рис 3.3

Предварительно найдем вспомогательную площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y = ax^2 + bx + c$, прямыми $x = -h$, $x = h$ и отрезком $[-h;\ h]$.

Пусть парабола проходит через точки $M_1(-h;\ y_0)$, $M_2(0;\ y_1)$ и $M_3(h;\ y_2)$.

$$\begin{cases} y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c = ah^2 - bh + c \\ y_1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

тогда полученная площадь:

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h} = a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch - \left(a\frac{(-h)^3}{3} + b\frac{(-h)^2}{2} + c(-h)\right) = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch \qquad \textbf{(7)}$$

Выразим полученное значение через y_0, y_1 и y_2. Используя формулы (6) получим $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$. Подставляя полученные значения в (7) получим:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad \textbf{(8)}$$

Вывод формулы парабол (Симпсона).

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная функциями $y = f(x)$, $x = a, x = b, y = 0$.

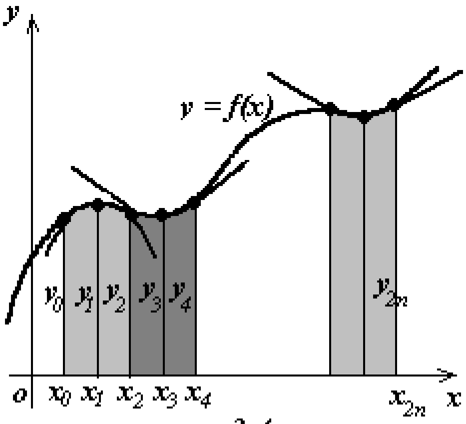

рис 3.4

1. Разобьем отрезок [a ; b] на $2n$ равных частей. Получим отрезки длиной $h = \dfrac{b-a}{2n}$ **(9)**
2. В точках деления вычислим значения функции $y = f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$.
3. Заменим каждую пару соседних криволинейных трапеций параболическими трапециями с основаниями, равными $2h$.

На отрезке $[x_0; x_2]$ парабола проходит через точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$.

Используя формулу (8) получим $S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \dfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Аналогично на отрезке $[x_2; x_4]$: $S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \dfrac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ и т. д. до

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Следовательно:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n})\right]$$

Учитывая погрешность вычислений $|R_n|$ и $h = \dfrac{b-a}{2n}$, получим формулу Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n})\right] \pm |R_n| \qquad \textbf{(10)}$$

Абсолютная погрешность метода оценивается соотношением:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]} \left| f^{IV}(x) \right| \qquad \textbf{(11)}$$

Пример 3.4:

Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3 dx$, используя метод парабол при $n = 4$.

Решение.

Количество разбиений $2n = 8$, $h = \frac{2-0}{2\cdot 4} = \frac{1}{4}$, $f(x) = x^3$

Составим таблицу:

x	y_0, y_8	$y_{четное}$	$y_{нечетное}$
$x_0 = 0$	$y_0 = f(0) = 0^3 = 0$		
$x_1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$			$y_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
$x_2 = 0 + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$		$y_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	
$x_3 = 0 + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$			$y_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$
$x_4 = 0 + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$		$y_4 = f(1) = 1^3 = 1$	
$x_5 = 0 + 5\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$			$y_5 = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$
$x_6 = 0 + 6\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$		$y_6 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	
$x_7 = 0 + 7\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$			$y_7 = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$
$x_8 = 2$	$y_8 = f(2) = 2^3 = 8$		

Рассмотрим погрешность метода:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180\cdot(2n)^4} = 0$$ (Доказать самостоятельно).

По формуле Симпсона получаем:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{2-0}{6\cdot 4}\left[(0+8) + 4\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) + 2\left(\frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{27}{8}\right)\right] \pm 0 = \frac{48}{12} = 4$$

Упражнения.

1. По формуле прямоугольников вычислить $I = \int_1^2 \sqrt{x}dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

(Ответ: $I \approx 1{,}20 \pm 0{,}025$*)*

2. По формуле трапеций вычислить $I = \int_1^2 \sqrt{x}dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

(Ответ: $I \approx 1{,}218 \pm 0{,}002$*)*

3. По формуле Симпсона вычислить $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$, с точностью до 0,001

(Ответ: $I \approx 1{,}148 \pm 0{,}001$*)*

4. По формуле Симпсона вычислить $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$, с точностью до 0,0001

(Ответ: n = 10, $I \approx 0{,}50001 \pm 0{,}0001$*)*

5. По формуле Симпсона вычислить $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, с точностью до 0,01

(Ответ: n = 5, $I \approx 0{,}69 \pm 0{,}01$*)*

6. По формуле Симпсона вычислить $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$, с точностью до 0,01

(Ответ: n = 4, $I \approx 0{,}24 \pm 0{,}01$*)*

7. По формуле трапеций вычислить $I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$, с точностью до 0,01

(Ответ: n = 4, $I \approx 0{,}75 \pm 0{,}01$*)*

8. По формуле трапеций вычислить $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x}dx$, с точностью до 0,01

(Ответ: n = 6, $I \approx 0{,}67 \pm 0{,}01$*)*

ГЛАВА IV.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§1. Метод Эйлера.

Пусть требуется решить **задачу Коши**: найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y) \qquad \textbf{(1)}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

При численном решении дифференциального уравнения (1) задача ставится следующим образом: в точках x_0, x_0, x_1, x_2,...., x_n найти приближения y_k $\left(k = \overline{1, n}\right)$для значений точного решения $y(x_к)$

Разность $\Delta x_к = x_{к-1} - x_к$ называется **шагом сетки**. Во многих случаях величину $\Delta x_к$ принимают постоянной. Пусть $\Delta x_к = h$, тогда

$$x_k = x_0 + kh \text{ где } \left(k = \overline{1, n}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Метод Эйлера основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x;y)\text{, где } \Delta y = y(x+h) - y(x),\ \Delta x = (x+h) - x = h \qquad \textbf{(3)}$$

Приближенное значение $y_к$ в точке $x_k = x_0 + kh$ вычисляется по формуле:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k) \text{ - } \textbf{формула Эйлера} \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 4.1: Методом Эйлера найти значения решения уравнения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - y$, для которого $y(1) = 1$, в пяти точках отрезка [$1; 1,5$], приняв $h = 0,1$

Решение. По формуле (2) находим точки $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,2$, $x_3 = 1,3$, $x_4 = 1,4$, $x_5 = 1,5$. Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, вычисляем по формуле (4). Результаты вычислений занесем в таблицу.

k	x_k	y_k	$2x_k$	$f(x_k, y_k) = 2x_k - y_k$	$hf(x_k, y_k) = 0,1(2x_k - y_k)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	1,0	1,0000	2,0	1,0000	0,1000	1,1000
1	1,1	1,1000	2,2	1,1000	0,1100	1,2100
2	1,2	1,2100	2,4	1,1900	0,1190	1,3290
3	1,3	1,3290	2,6	1,2710	0,1271	1,4561
4	1,4	1,4561	2,8	1,3439	0,1344	1,5905
5	1,5	1,5905	3,0	1,4095	0,1410	1,7315

§2. Метод Рунге – Кутта. (Один из наиболее употребляемых методов повышенной точности).

Пусть функция y определяется дифференциальным уравнением $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. При численном интегрировании такого уравнения по методу Рунге – Кутта определяются четыре числа:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x; y) \\ k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}; y + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}; y + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h \cdot f(x + h; y + k_3) \end{cases} \tag{5}$$

Если положить $y(x+h) = y(x) + \Delta y$, то можно доказать, что

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{6}$$

Получаем следующую схему вычислений:

x	***y***	$\boldsymbol{k_i}$	***Δy***
x_0 $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + \frac{k_1}{2}$ $y_0 + \frac{k_2}{2}$ $y_0 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_0 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
x_1 $x_1 + \frac{h}{2}$ $x_1 + \frac{h}{2}$ $x_1 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$ $y_1 + \frac{k_1}{2}$ $y_1 + \frac{k_2}{2}$ $y_1 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_1 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
x_2 $x_2 + \frac{h}{2}$ $x_2 + \frac{h}{2}$ $x_2 + h$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$ $y_2 + \frac{k_1}{2}$ $y_2 + \frac{k_2}{2}$ $y_2 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_2 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
....	....	....	....

Пример 4.2:

Составь таблицу значений функции *y*, определяемой уравнением $y' = y - \frac{2x}{y}$, при начальном условии $y(0) = 1,\ 0 \le x \le 1$ при $h = 0{,}2$.

Решение.

Используя формулы (5) найдем числа:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x;\, y) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2 \\ k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2};\, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;\, 1{,}1) = 0{,}2 \cdot \left(1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right) = 0{,}1836 \\ k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2};\, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;\, 1{,}0918) = 0{,}1817 \\ k_4 = h \cdot f(x + h;\, y + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2;\, 1{,}1817) = 0{,}1686 \end{cases}$$

Отсюда $\Delta y_0 \approx \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$

Таким образом $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ при $x = 0{,}2$. По этой же схеме находим y_2 и т.д. процесс вычисления ведем по схеме:

x	***y***	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\Delta y}$
$x_0 = 0$ $x_0 + \frac{h}{2} = 0{,}1$ $x_0 + \frac{h}{2} = 0{,}1$ $x_0 + h = 0{,}2$	$y_0 = 1$ $y_0 + \frac{k_1}{2} = 1{,}1$ $y_0 + \frac{k_2}{2}\ 1{,}0918$ $y_0 + k_3 = 1{,}1817$	$k_1 = 0{,}2$ $k_2 = 0{,}1838$ $k_3 = 0{,}1817$ $k_4 = 0{,}1686$	$\Delta y_0 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 0{,}1832$
$x_1 = 0{,}2$ $x_1 + \frac{h}{2} = 0{,}3$ $x_1 + \frac{h}{2} = 0{,}3$ $x_1 + h = 0{,}4$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}1832$ $y_1 + \frac{k_1}{2} = 1{,}2677$ $y_1 + \frac{k_2}{2} = 1{,}2626$ $y_1 + k_3 = 1{,}3407$	$k_1 = 0{,}1690$ $k_2 = 0{,}1589$ $k_3 = 0{,}1575$ $k_4 = 0{,}1488$	$\Delta y_1 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 1{,}1584$
x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	k_1	$\Delta y_2 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
....	....	....	....

Упражнения.

1. Найти, используя метод Эйлера, значения функции *y*, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{y-x}{y+x}$, при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,1*. Ограничиваясь отысканием первых четырех значений *y*.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
y	*1*	*1,1*	*1,18*	*1,25*	*1,31*

2. Найти по методу Эйлера четыре значения функции *y*, определяемой уравнением $y' = x + y$, при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,1*.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
y	*1*	*1,1*	*1,22*	*1,36*	*1,52*

3. Найти по методу Эйлера три значения функции *y*, определяемой уравнением $y' = 1 + x + y^2$, при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,1*.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*
y	*1*	*1,2*	*1,45*	*1,78*

4. Найти по методу Эйлера четыре значения функции *y*, определяемой уравнением $y' = x^2 + y^2$, при начальном условии *y(0) = 0*, принимая *h = 0,1*.

Ответ:

x	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
y	*0*	*0,001*	*0,005*	*0,014*

5. Найти, используя метод Эйлера, значения функции *y*, определяемой дифференциальным уравнением $y' = y^2 + \frac{x}{y}$, при начальном условии *y(2) = 4*, принимая *h = 0,1*. Ограничиваясь отысканием первых четырех значений *y*.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
y	*1*	*1,1*	*1,18*	*1,25*	*1,31*

6. Найти методом Эйлера численной решение уравнения $y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$ на отрезке [0; 1], при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,2*

Ответ:

x	*0*	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*1,0*
y	*1*	*1,1*	*1,18*	*1,24*	*1,27*	*1,27*

7. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $y' = y - x^2$ на промежутке [1; 2], при начальном условии *y(1) = 0*, принимая *h = 0,1*. В первых пяти точках.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
y	*-0,1158*	*-0,1501*	*-0,1925*	*-0,2397*	*-0,2944*

8. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $4y' = y^2 + 4x^2$ на промежутке [0; 1], при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,1*. Вычисление вести с тремя верными знаками.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*1,0*
y	*-1*	*-0,975*	*-0,949*	*-0,921*	*-0,888*	*-0,842*	*-0,802*	*-0,744*	*-0,675*	*-0,593*	*-0,495*

9. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $y' = \frac{x}{y} + 0{,}5y$ на промежутке [0; 1], при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,1*. Вычисление вести с двумя верными знаками.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*1,0*
y	*1*	*1,05*	*1,12*	*1,20*	*1,29*	*1,39*	*1,50*	*1,62*	*1,75*	*1,89*	*2,03*

Литература.

1. С.М. Никольский, М.К. Потапов, Алгебра: Пособие для самообразования. 2-е изд. М.: Наука, 1990
2. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М.Гусак, Е.А. Бричкова. Мн.: ТетраСистемс,1999
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов. 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция Физико-математической литературы, 1985.
4. Ю.И. Клименко Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи: Учебник для вузов / Ю.И. Клименко. – М.: Издательство «Экзамен». 2005г.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб. для вузов. – 4-е изд., М.: Высшая школа. 1998.
6. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. III. Учеб. пособие для втузов. М., «Высш. школа», 1971.
7. Д.Т. Письменный, Конспект лекций по высшей математике: [в 2ч.] – 6-е изд. - М.: Айрис – пресс, 2006.