

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ**  
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет  
имени И. Т. Трубилина»

Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В.

**«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ»**

**Методические указания**

Краснодар 2018

**УДК 631.6**

**ББК 40.6**

**Г 94**

Рецензент

доктор технических наук, профессор Кузнецов Е.В.

Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению  
«Строительство»

Публикуется в соответствии с решением методической комиссии архитектурно-строительного факультета. Протокол №5 от 21.12.2017г.

© Пасниченко П.Г., Долобешкин Е.В. 2018г.  
© ФГБОУ ВПО КубГАУ 2018г.

## Пояснения к расчету:

1. Выполнение задания следует начинать с выборавспомогательных осей, которые рекомендуется располагать параллельно полкам профиля так, чтобы все сечение лежало в первой четверти.

Координаты центра тяжести сечения определяются по формулам:

$$z_c = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}.$$

Здесь числители представляют собой сумму статических моментов отдельных элементов сечения относительно вспомогательных осей  $z$  и  $y$ . Значения площадей и координаты центров тяжести (ц.т.) элементов сечения берутся из таблицы соответствующих им ГОСТов.

2. Через найденный ц.т. сечения проводятся две взаимно перпендикулярные оси  $y_c$  и  $z_c$ , параллельные вспомогательным осям, и относительно этих осей вычисляются осевые и центробежный моменты инерции.

При этом используются формулы моментов инерций сложного сечения:

$$I_{Zc} = \sum I_{Zc}^{(i)}; I_{Yc} = \sum I_{Yc}^{(i)}; I_{YcZc} = \sum I_{YcZc}^{(i)}$$

и моментов инерции относительно оси, параллельно центральной

$$I_{Zc}^{(i)} = I_{Zi}^{(i)} + F_i a_i^2; I_{Yc}^{(i)} = I_{Yi}^{(i)} + F_i b_i^2;$$

$$I_{YcZc}^{(i)} = I_{YiZi}^{(i)} + F_i a_i b_i,$$

Здесь  $I_{YiZi}^{(i)}$  – центробежный момент инерции профиля относительно его центральных осей, параллельным осям  $Y_c$  и  $Z_c$ . Если эти оси будут главными, момент  $Z_{YiZi}$  равен нулю, в противном случае он находится по формуле:

$$I_{YiZi} = \frac{I_{\max}^{(i)} - I_{\min}^{(i)}}{2} \sin 2\beta,$$

где  $I_{\max}^{(i)}$  и  $I_{\min}^{(i)}$  – главные моменты инерции профиля, принимаемые по таблицам. Значение угла  $\beta$  отсчитывается от оси максимум профиля до горизонтальной оси с учетом знака.

3. Главные моменты инерции определяются по формулам:

$$I_{\max} = \frac{I_{Yc} + I_{Zc}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Yc} - I_{Zc})^2 + 4I_{YcZc}^2};$$

$$I_{\min} = \frac{I_{Yc} + I_{Zc}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Yc} - I_{Zc})^2 + 4I_{YcZc}^2}.$$

Проверка найденных значений главных моментов производится по формуле:

$$I_{Yc} + I_{Zc} = I_{\max} + I_{\min}; \quad I_{\max} = I_v; \quad I_{\min} = I_u.$$

4. Положение главных осей инерции определяется значениями углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ , которые находятся по формулам:

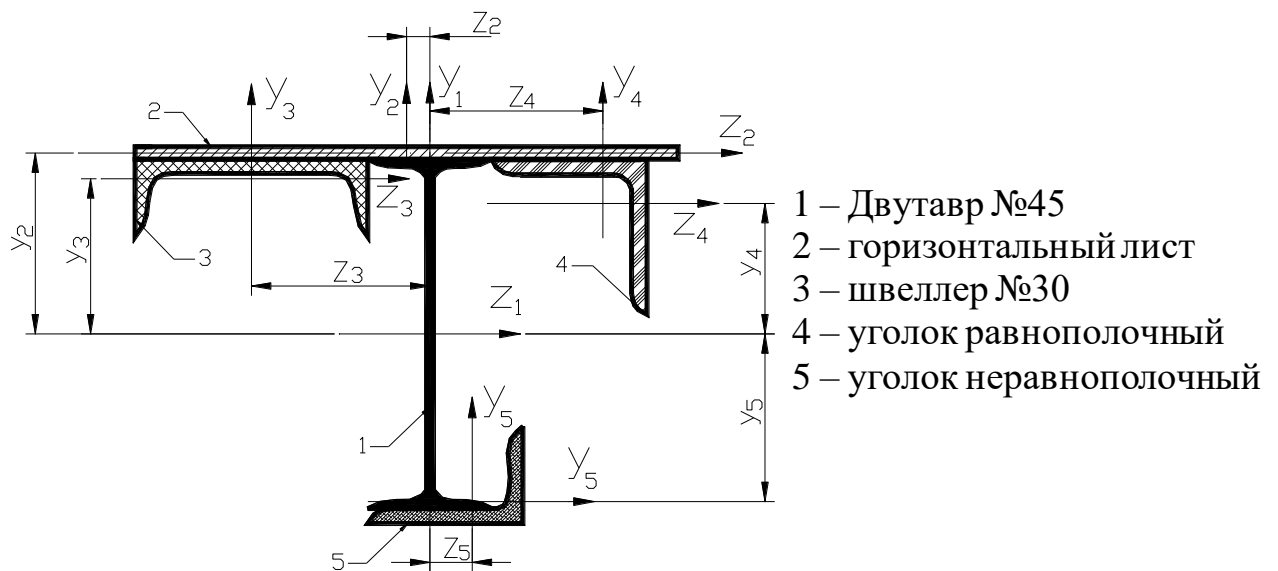
$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2I_{YcZc}}{I_{Yc} - I_{Zc}}.$$

Решение.

1. Выписываем исходные данные

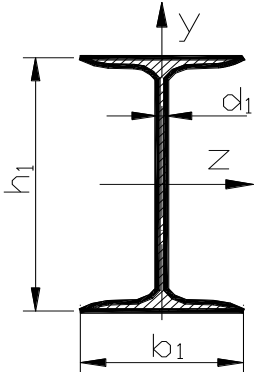
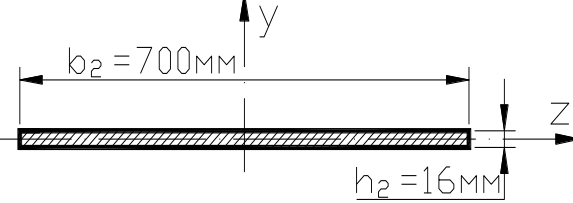
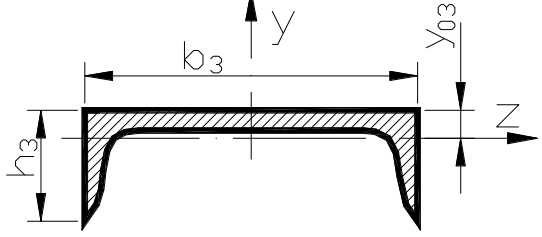
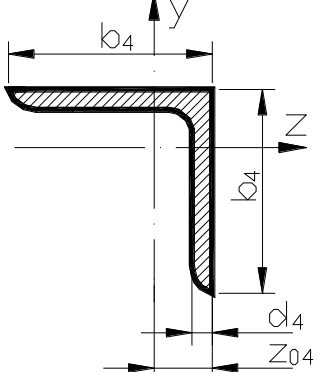
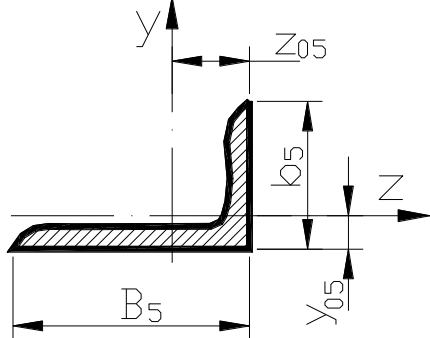
Вариант №	Уголок равнобокий	Уголок неравнобокий	Горизонтальный лист (мм)	Двутавр №	Швеллер №
8	200×200×20	200×125×12	700×16	45	30

2. Изображаем схему сложного сечения №33, разбиваем его на 5 элементов.



1. Для удобства расчета показываем размеры элементов и выписываем или вычисляем геометрические характеристики.

Элемент 1 – двутавр №45

	$h_1 = 450\text{мм}$ $b_1 = 160\text{мм}$ $A_1 = 83\text{ см}^2$ $d_1 = 9,5\text{мм}$ $J_{y_1} = 807\text{ см}^4$ $J_{z_1} = 27450\text{ см}^4$
<b>Элемент 2 – горизонтальный лист</b>	
	$h_2 = 16\text{мм}$ $b_2 = 700\text{мм}$ $A_2 = 112\text{ см}^2$ $J_{y_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 70^3}{12} = 45733,3\text{ см}^4$ $J_{z_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{70 \cdot 1,6^3}{12} = 23,89\text{ см}^4$
<b>Элемент 3 – швеллер №30</b>	
	$h_3 = 100\text{мм}$ $b_3 = 300\text{мм}$ $A_3 = 40,5\text{ см}^2$ $y_{03} = 2,52\text{см}$ $J_{y_3} = 5810\text{ см}^4$ $J_{z_3} = 327\text{ см}^4$
<b>Элемент 4 – уголок равнобокий</b>	
	$d_4 = 20\text{мм}$ $b_4 = 200\text{мм}$ $A_4 = 74,5\text{ см}^2$ $z_{04} = 5,7\text{см}$ $J_{y_3} = 2871\text{ см}^4$ $J_{z_3} = 2871\text{ см}^4$
<b>Элемент 5 – уголок неравнополочный</b>	
	$b_5 = 125\text{мм}$ $B_5 = 200\text{мм}$ $d_5 = 12\text{мм}$ $A_5 = 37,9\text{ см}^2$ $z_{05} = 6,54\text{см}$ $y_{05} = 2,83\text{см}$ $J_{y_5} = 1568\text{ см}^4$ $J_{z_5} = 482\text{ см}^4$

2. Определяем положение центра тяжести сечения по отношению к вспомогательным осям. В нашем случае к главным центральным осям двутавра.

Находим расстояния между центральными осями наших элементов и вспомогательными осями.

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 23,3 \text{ см}, \quad y_3 = 19,98 \text{ см}, \quad y_4 = 16,8 \text{ см}, \quad y_5 = -20,87 \text{ см}, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -3,0 \text{ см}, \\ z_3 = -23 \text{ см}, \quad z_4 = 22,3 \text{ см}, \quad z_5 = 5,46 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести сложного сечения вычисляются по формулам:

$$y_c = \frac{\sum_1^5 y_i A_i}{\sum_1^5 A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}, \\ y_c = \frac{0 + 23,3 \cdot 112 + 19,98 \cdot 40,5 + 16,8 \cdot 76,5 - 20,87 \cdot 37,9}{83 + 112 + 40,5 + 76,5 + 37,9} = \frac{3913,017}{349,9} = 11,18 \text{ см}, \\ z_c = \frac{\sum_1^5 z_i A_i}{\sum_1^5 A_i} = \frac{0 - 3 \cdot 112 - 23 \cdot 40,5 + 22,3 \cdot 76,5 + 5,46 \cdot 37,9}{83 + 112 + 40,5 + 76,5 + 37,9} = \frac{645,384}{349,9} = 1,84 \text{ см}.$$

Через найденный центр тяжести  $C(11,18; 1,84)$  проводим оси  $z_c$  и  $y_c$ .

3. Проверяем правильность определения центра тяжести.

Для проверки вычисляем статические моменты площади всей фигуры относительно этих осей. Для чего находим координаты центров тяжести элементов сечения.

$$a_1 = -y_c = -11,18 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 23,3 - 11,18 = 12,12 \text{ см}, \quad a_3 = y_3 - y_c = 19,98 - 11,18 = 8,8 \text{ см},$$

$$a_4 = y_4 - y_c = 16,8 - 11,18 = 5,62 \text{ см}, \quad a_5 = y_5 - y_c = -20,87 - 11,18 = -32,05 \text{ см}.$$

$$b_1 = z_1 - z_c = 0 - 1,84 = -1,84 \text{ см}, \quad b_2 = z_2 - z_c = -3 - 1,84 = -4,84 \text{ см}, \quad b_3 = z_3 - z_c =$$

$$= -23 - 1,84 = -24,84 \text{ см}, \quad b_4 = z_4 - z_c = 22,3 - 1,84 = 20,46 \text{ см}, \quad b_5 = z_5 - z_c = \\ = 5,46 - 1,84 = 3,62 \text{ см}.$$

$$S_{z_c} = \sum A_i a_i = -83 \cdot 11,18 + 112 \cdot 12,12 + 40,5 \cdot 8,8 + 76,5 \cdot 5,62 - 37,9 \cdot 32,05 = -927,94 + 1357,44 + 356,4 + \\ + 429,93 - 1214,695 = -2142,635 + 2142,77 = 1,135 \text{ см} \approx +0,05\%,$$

$$S_{y_c} = \sum A_i b_i = -83 \cdot 1,84 - 112 \cdot 4,84 - 40,5 \cdot 24,84 + 76,5 \cdot 20,46 + 37,9 \cdot 3,62 = -152,72 - 542,08 - 1006,02 + \\ + 1565,19 + 137,198 = -1700,82 + 1702,388 = +1,568 \text{ см} \approx 0,09\%.$$

Погрешность расчета 0,05% и 0,09%, что в допустимых пределах точности.

Если погрешность расчета превышает  $\pm 5\%$ , то следует уточнить положение центра тяжести.

4. Вычисляем осевые и центральный моменты инерции относительно центральных осей  $Z_c$  и  $Y_c$ .

$$Y_{Z_c} = \sum (Y_{Z_i} + a_i^2 A_i) = 27450 + 11.18^2 \cdot 83 + 23,89 + 12.12^2 \cdot 112 + 327 + 8.8^2 \cdot 40.5 + 2871 + 5.62^2 \cdot 76.5 + 482 + 32.05^2 \cdot 37.9 = 27450 + 10374,37 + 23,89 + 16452,17 + 327 + 3136,32 + 2871 + 2416,21 + 482 + 38930,97 = 103463,94 \text{ см}^4.$$

$$Y_{Y_c} = \sum (Y_{Y_i} + b_i^2 A_i) = 807 + 1.84^2 \cdot 83 + 45733,3 + 4.84^2 \cdot 112 + 5810 + 24.84^2 \cdot 40.5 + 2871 + 20.46^2 \cdot 76.5 + 1568 + 3.62^2 \cdot 37.9 = 807 + 281 + 45733,3 + 2623,67 + 5810 + 24989,54 + 2871 + 32023,79 + 1568 + 496,67 = 117204 \text{ см}^4.$$

При вычислении центробежного момента инерции  $Y_{Z_c, Y_c}$  необходимо предварительно определить центробежные моменты инерции уголков относительно их центральных осей  $Z_4$  и  $Y_4$ , а также  $Z_5$  и  $Y_5$ .

Для равнобокого уголка:

$$Y_{Z_4, Y_4} = \sqrt{(Y_{Z_4} - Y_{4\min})^2} = \sqrt{(2871 - 1182)^2} = -1689 \text{ см}$$

уголка:

$$Y_{Z_5, Y_5} = \sqrt{(Y_{Z_5} - Y_{5\min})(Y_{Y_5} - Y_{5\min})} = \sqrt{(1568 - 285) \cdot (482 - 285)} = \sqrt{253000} = -502 \text{ см}^4.$$

Берем знак минус, так как оси  $Y_{\min}$  уголка повернуты к оси  $u$  против часовой стрелки.

Центробежный момент инерции  $Y_{Z_c, Y_c}$  всего сечения:

$$Y_{Z_c, Y_c} = \sum (Y_{Y_i Z_i} + a_i b_i A_i) = 0 + (-11.18) \cdot (-1.84) \cdot 83 + 0 + 12.12 \cdot (-4.84) \cdot 112 + 8.8 \cdot (-24.84) \cdot 40.5 - 1689 + 5.62 \cdot 76.5 \cdot 20.46 - 502 + (-32.05) \cdot 37.9 \cdot 3.62 = 1707,41 - 657,01 - 8852,98 - 1689 + 8796,37 - 502 - 4397,2 = -5594,41 \text{ см}^4$$

5. Определение главных центральных моментов инерции:

$$Y_{\frac{\max}{\min}} = \frac{Y_{Z_c} + Y_{Y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Y_{Z_c} - Y_{Y_c})^2 + 4Y_{Z_c, Y_c}^2} = \frac{103463,94 + 117204}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(103463,94 - 117204)^2 + 4 \cdot 5594,41^2} = 110333,97 \pm \frac{1}{2} \sqrt{6870,03^2 + 4 \cdot 5594,41^2} = 110333,97 \pm 8859,73;$$

$$Y_{\max} = Y_u = 119193,7 \text{ см}^4.$$

$$Y_{\min} = Y_v = 101474,2 \text{ см}^4.$$

6. Находим положение главных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2Y_{Z_c, Y_c}}{Y_{Y_c} - Y_{Z_c}} = \frac{2 \cdot (-5594,41)}{117204 - 103463,94} = -0,814$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -0,814; \quad 2\alpha_0 = -39^\circ 16'; \quad \alpha_0 = -19^\circ 58'.$$

Положительный угол отсчитывается от оси –  $U$  по ходу часовой стрелки.



Проверяем правильность вычислений.

Первая проверка:

$$Y_u + Y_V = Y_{Zc} + Y_{Yc}$$

$$119193,7 + 101474,2 = 103463,94 + 117204 \text{ см}^4.$$

$$220667,9 = 220667,94 \text{ см}^4.$$

Для составного поперечного сечения по заданной схеме при геометрических размерах согласно шифру, требуется:

1. Аналитически определить положение центра тяжести сечения.
2. Вычислить главные центральные моменты инерции и определить положение главных центральных осей инерции.
3. Построить круг инерции и определить графически величины главных моментов инерции и направление главных осей.
4. Вычислить радиусы инерции относительно главных осей и построить эллипс инерции.
5. Определить аналитически и графически по кругу инерции и эллипсу инерции осевые и центробежные моменты инерции относительно главных осей, проходящих под вычисленным углом относительно первоначальных центральных осей выбранного элемента.

#### Профили и геометрические размеры

№ строк и	Равнобокий уголок	Вертикаль- ный лист	Горизонталь- ный лист	дву- тавр	швел- лер	
1	90x90x8	600x10	400x10	24	16а	
2	110x70x8	600x12	400x10	24а	16а	
3	125x80x10	600x12	400x12	27	18а	
4	125x80x8	600x10	400x10	27а	22а	
5	140x90x10	600x12	400x12	30	22	
6	160x100x12	600x16	500x12	30а	24	
7	180x110x12	600x12	500x10	40	24а	
8	200x125x12	600x20	500x16	45	16	
	9	110x70x8	600x12	400x10	24а	14

Примечание:

Все размеры даны в миллиметрах.

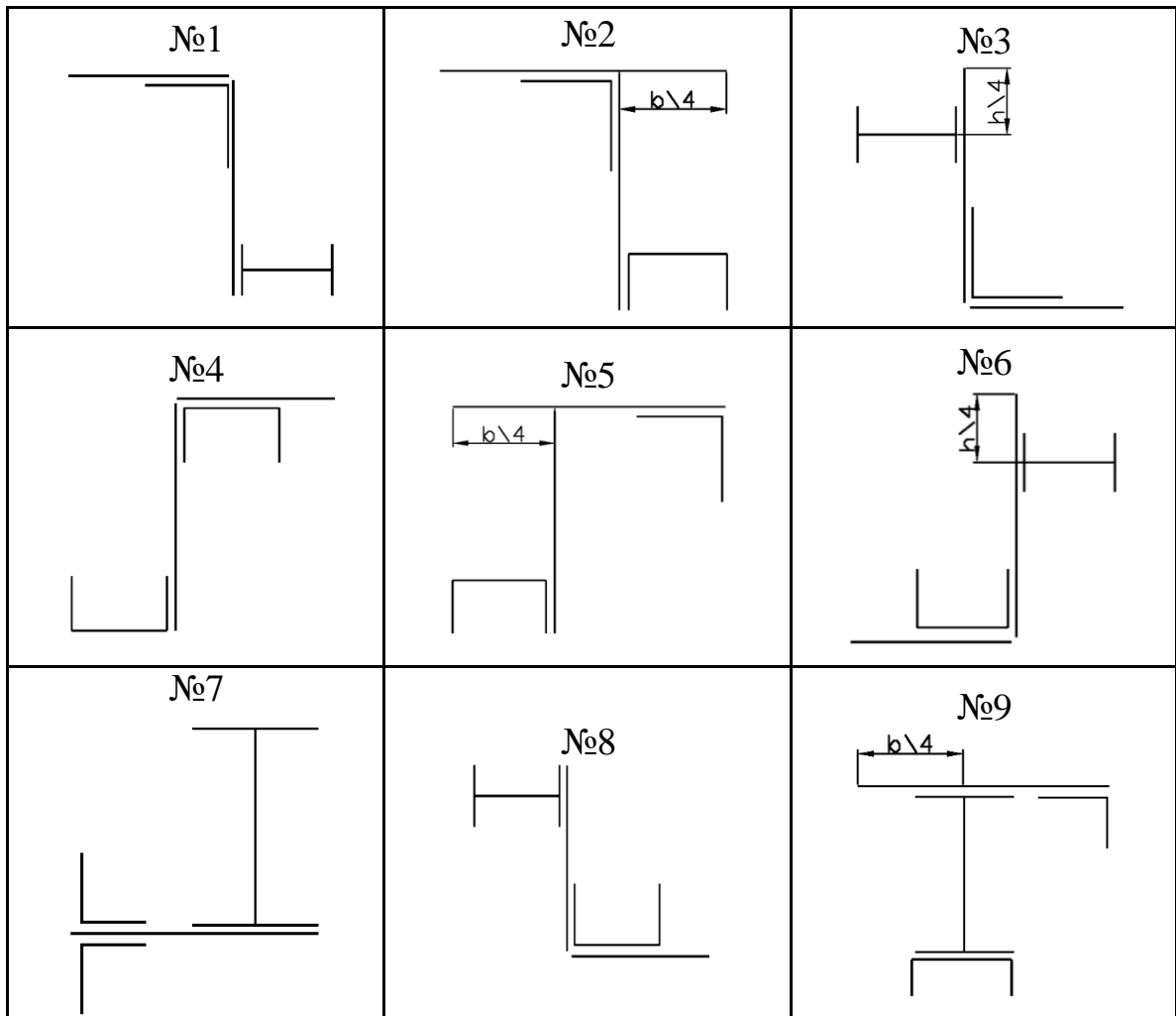


Рисунок 1. Схемы 1-9 к расчету моментов инерции несимметричного сечения.

