МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И.Т. Трубилина»

Н. Х. Ворокова, А. Е. Сенникова

Основы финансовых вычислений

Учебное пособие

Краснодар
КубГАУ
2021

УДК 336
ББК 65.261
О753

Р е ц е н з е н т :
В. И. Ксенофонтов – директор, Краснодарский ЦНТИ,
доктор экономических наук

О753 Основы финансовых вычислений: учебное пособие / Н. Х. Ворокова, А. Е. Сенникова – Краснодар: Краснодарский ЦНТИ - филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2021. – 203 с.

ISBN 978-5-91221-482-0

В учебном пособии рассмотрены основные научных и методических основы использования методов финансовых вычислений при расчете процентов, доходности финансово-кредитных операций, анализе потоков платежей в современных экономических условиях.

Издание содержит описание базовых методов количественного финансового анализа. В нем изложены основные модели современных финансовых вычислений от расчетов по кредитным операциям до оценки стоимостей деривативов и анализа временных рядов. Рассматриваются числовые примеры типовых расчетов, а также приводятся задачи для самостоятельного решения.

Для обучающихся по экономическим направлениям подготовки бакалавров, магистров, преподавателей, аспирантов и слушателей курсов повышения квалификации.

Соответствует ФГОС ВО

УДК 336
ББК 65.261

ISBN 978-5-91221-482-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В рыночной экономике требуется умение оценивать возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. При этом следует учитывать, что принятие управленческих решений финансового характера всегда осуществляется в условиях неопределенности. Совершенствование финансовой деятельности сопровождается усложнением всей системы количественного финансового анализа. Появляются новые методы, углубляется теоретическая база, растет уровень автоматизации расчетов.

Для того чтобы сориентироваться во всем многообразии современных финансовых алгоритмов, необходимо прежде всего понять основные принципы базовых вычислений, положенных в основу большинства расчетов. Поэтому в учебном пособии значительное внимание уделено так называемой финансовой математике, посвященной решению простейших задач, связанных с начислением процентов, потоками платежей.

Финансовые вычисления представляют собой учебную дисциплину, в которой раскрывается методика количественного анализа финансовых, кредитных и банковских операций.

Овладение методами и приемами финансовых вычислений является важной составляющей в профессиональной подготовке экономиста, банковского работника, предпринимателя, менеджера и др.

Цель изучения курса «Основы финансовые вычисления» – дать целостную концепцию количественного финансового анализа условий и результатов финансово – кредитных и коммерческих сделок, связанных с предоставлением денег в долг.

Финансовые вычисления охватывают круг задач, в которых присутствуют основные параметры финансовых сделок: величина капитала (кредита, депозита, ссуды), сроков финансовых операций, процентных ставок. Эти параметры связаны между собой определенной функциональной зависимостью. Финансовые вычисления устанавливают количественные связи между параметрами финансовых операций.

Основные теоретические положения излагаются на лекциях и изучаются самостоятельно с помощью рекомендуемой учебной литературы.

В соответствии с современными образовательными стандартами учебное пособие решает задачу формирования необходимых компетенций у студентов бакалавриата, специалитета и магистратуры, обучающихся по экономическим и финансовым специальностям в рамках курса «Основы финансовых вычислений» и других курсов, связанных с методами количественного финансового анализа.

В результате изучения материалов данного учебного пособия студент должен:

Знать: предмет, цели и задачи финансовой математики; понятийный и категориальный аппарат финансовых расчетов; методологические принципы проведения количественного финансового анализа; современные представления о моделировании финансовых вычислений.

Уметь: обобщать и систематизировать методы финансовой математики; идентифицировать и классифицировать финансовые операции и их основные показатели; анализировать и интерпретировать результаты деятельности фондовых рынков; решать задачи, связанные с анализом деятельности предприятий; применять теоретические результаты для прогнозирования финансовых систем; грамотно ориентироваться в условиях финансовых рисков; выбирать необходимые методы для принятия управленческих решений в финансовой сфере; давать самостоятельную оценку эффективности финансовых операций.

Владеть: методами оценки доходности финансовых операций; современными технологиями программного обеспечения финансовых расчетов; спецификой обработки финансовых статистических данных; навыками системного анализа комплексных финансовых операций; навыками работы с учебной и научной литературой по финансовому анализу.

1 ПРЕДМЕТ И МЕТОД ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Основы финансовых вычислений (финансовая математика) — это наука, которая изучает основные методы и модели количественного финансового анализа. Она непосредственно применяется в практической финансовой деятельности, а также используется в качестве инструментария для создания более сложных методов финансового анализа.

Основным методом исследования в финансовой математике является метод математического моделирования, который позволяет решать задачи финансового анализа, отображая взаимосвязи между финансовыми объектами в виде математических моделей. При этом используется принцип системности, который выражается в поэтапном моделировании финансовых операций с переходом от простейших к более сложным моделям.

Любая *финансовая операция* - это действие, которое направлено на получение дохода, характеризуемого финансовыми показателями.

К *основным задачам* финансовой математики относятся:

- анализ эффективности финансовой операции;
- оптимизация финансовой операции;
- планирование финансовой операции;
- сравнение финансовых операций.

В системе количественного финансового анализа финансовые операции разделяют по следующим направлениям:

1) По числу источников дохода:

- операции с одним источником дохода;
- операции с несколькими источниками дохода.

Например, операцией с несколькими источниками дохода является кредитная операция с учетом удержания комиссионных.

2) По характеру распределения денежных сумм во времени:

- операции с одним интервалом времени между платежами;
- операции с потоком платежей.

К операциям первого типа относится, в частности, ссудная операция с возмещением одним платежом. Если долг погашается последовательностью выплат, то выполняется операция с потоком платежей.

3) По форме получения дохода:

- операции с долговыми обязательствами;
- амортизация основных фондов;
- осуществление инвестиционных проектов;
- страхование.

В основу финансового анализа положены модели финансовых операций, связанных с предоставлением денег в долг. Лицо, дающее деньги в долг, называют *кредитором.* Лицо, берущее деньги в долг, называют *заемщиком.*

Предоставление денег в долг происходит в соответствии с кредитным договором и осуществляется в различных формах: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, получение векселя, приобретение облигаций и т.д.

При заключении кредитного договора кредитор и заемщик договариваются о размере кредита, времени и способе его погашения, а также об уровне вознаграждения кредитора.

Среди операций с долговыми обязательствами обычно выделяют три группы операций:

1) депозитные операции;
2) кредитные операции;
3) операции с ценными бумагами, в том числе учетные операции.

Депозитная операция - это операция банка или другой финансовой организации по привлечению денежных средств в форме вкладов от юридических и физических лиц (вкладчиков), а также размещению этих средств в других кредитных учреждениях.

Депозит (вклад) - сумма денег, помещенная в банк на основании договора вклада на определенный срок или до востребования. Банк пускает эти деньги в оборот, а в обмен выплачивает вкладчику проценты. Депозит является долгом банка перед вкладчиком, т.е. подлежит возврату.

Кредитная операция - это операция по предоставлению кредита.

Кредит (ссуда) - денежные средства, предоставленные банком или иной финансовой организацией (кредитором) по договору заемщику на условиях возвратности и платности в форме процентов за пользование кредитом.

Ценная бумага - документ, удостоверяющий с соблюдением установленной формы и обязательных реквизитов имущественные права, осуществление или передача которых возможны только при его предъявлении. К базовым операциям с ценными бумагами, рассматриваемым в финансовой математике, относятся операции с векселями и депозитными сертификатами.

Вексель - ценная бумага, удостоверяющая обязательство векселедателя уплатить по наступлению предусмотренного векселем срока определенную денежную сумму.

Учет векселя - покупка банком или специализированным кредитным учреждением векселей до наступления срока платежа по ним, осуществляемая по цене, равной их номинальной стоимости, за вычетом процента, размер которого определяется количеством времени, оставшимся до наступления срока платежа, и величиной ставки процента.

Учетная операция - операция банка по учету (дисконту) векселей и других долговых обязательств.

Депозитный сертификат — это именная ценная бумага, удостоверяющая сумму депозита, внесенного в банк, и права вкладчика (держателя сертификата) на получение по истечении установленного срока суммы депозита и обусловленного в сертификате дохода в форме процентов.

Финансовые вычисления ведут свое начало с момента появления товарно-денежных отношений. В отдельную отрасль знаний они выделились в XIX в. под названием «коммерческая арифметика».

Выделяют три основных исторических этапа развития финансовых вычислений:

1-й этап: до начала XIX в. К основным методам в финансовых расчетах в данный период относились методы начисления процентов в кредитных операциях.

2-й этап: начало XIX — первая половина XX в. Этот период характеризуется разработкой большого разнообразия схем погашения долгосрочной задолженности с использованием моделей аннуитетов.

3-й этап: вторая половина XX в. — настоящее время. Особенностью этапа является учет неопределенности в анализе финансовых операций и применение инструментария теории вероятностей.

Существует следующая классификация методов финансовых вычислений:

I. Классическая финансовая математика в условиях определенности:

- начисление процентов;
- определение стоимости потоков платежей;
- планирование погашения задолженности;
- анализ эффективности инвестиционных проектов;
- оценка стоимости простейших ценных бумаг.

II. Классическая финансовая математика в условиях неопределенности:

- оптимизация портфеля активов;
- теория иммунизации;
- анализ финансовых рисков;
- ценообразование производных ценных бумаг; • модели эффективного рынка.

III. Современная стохастическая финансовая математика:

- теория арбитража;
- мартингальный подход в теории страхования.

Необходимость учета временного фактора в финансово-экономических расчетах определяется принципом неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени и неравнозначности соответствующих финансовых последствий. Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь там, где фактор времени не имеет значения - например, в бухучете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле. В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

Этот принцип обусловлен следующими основными причинами:

- деньги могут принести доход при инвестировании на определенный срок;

- покупательная способность денег снижается со временем вследствие инфляции.

Универсальной единицей измерения длительности финансовой операции является год.

Неравноценность денег во времени выражается в том, что каждая денежная сумма в финансовом анализе представляет собой датированную сумму, т.е. сумму, отнесенную к определенной дате. Рассредоточение датированных сумм во времени приводит к неправомерности обычных действий с ними.

Всякая финансовая операция осуществляется в течение заданного промежутка времени, которому соответствуют две основные денежные суммы. *Текущая (приведенная) стоимость* — это сумма денег, отнесенная на начало финансовой операции. *Итоговая (будущая) стоимость* — это сумма денег, отнесенная к концу финансовой операции.

В депозитной операции текущая стоимость — это сумма денег, помещаемая сегодня на депозитный счет, итоговая стоимость — это сумма денег, которая накопится на депозитном счете за определенный промежуток времени.

В кредитной операции текущая стоимость - это величина выдаваемой сегодня ссуды, итоговая стоимость - это сумма денег, которую следует вернуть через определенный промежуток времени.

В зависимости от того, какая из указанных сумм дана и какую нужно найти, выделяют два направления финансовых расчетов: *наращение и дисконтирование.*

Наращение - определение величины итоговой стоимости по заданной текущей стоимости. Дисконтирование - определение текущей стоимости по ожидаемой итоговой сумме в будущем.

Термин дисконтирование используется также для определения значения любой стоимостной величины на более ранний момент времени.

Коэффициент наращения - отношение итоговой стоимости S к текущей стоимости P. Этот показатель характеризует темп роста денежных средств за определенный период.

Коэффициент дисконтирования - отношение текущей стоимости P к итоговой стоимости S. Этот показатель характеризует уровень снижения денежных средств при переходе от конца к началу финансовой операции.

Указанные коэффициенты могут выступать в качестве оценок эффективности финансовых операций, например в задачах их сравнения. Однако они неприменимы там, где требуется оптимизировать результаты по критерию времени или просто определить время операции, поскольку последнее в явном виде в выражениях для этих коэффициентов отсутствует.

Результат финансовой операции в абсолютном выражении определяется в виде процента или дисконта с учетом заданного промежутка времени.

Процент - это абсолютная величина дохода, получаемая в результате финансовой операции за определенный период при наращении.

Дисконт - это абсолютная величина убытка, получаемая в результате финансовой операции за определенный период при дисконтировании.

В общем случае для двух субъектов финансовой операции значение процента для одного из них совпадает со значением дисконта для другого. Например, в ссудной операции дисконт заемщика равен проценту банка.

Процентная ставка (ставка) - это величина, характеризующая относительное изменение денежной суммы за этот период. Определенная таким образом процентная ставка измеряется в процентах (%). Если относительное изменение денежной суммы не умножать на 100, то ставка будет измеряться в долях (дробях).

Размер процентной ставки зависит от следующих основных факторов:

- общее состояние экономики;
- прогноз динамики денежно-кредитного рынка;
- вид финансовой операции;
- вид валюты;
- срок финансовой операции.

Ставка применяется для решения следующих основных *задач:*

1. Вычисление процента (дисконта) при начислении процентов на заданную денежную сумму.

2. Определение доходности финансовой операции.

Начисление процентов на данное значение величины Р — это определение абсолютного изменения этой величины Δ Р по ее заданному относительному изменению, выраженному процентной ставкой *i*.

Исходная денежная сумма Р при этом называется базой начисления процентов. Рассматриваемый промежуток времени называется периодом начисления процентов.

В зависимости от вида базы начисления процентов и выбора начала отсчета в периоде начисления процентов различают два метода начисления процентов:

1) декурсивный (последующий);

2) антисипативный (предварительный).

При декурсивном способе проценты начисляются по ставке i в конце периода начисления, базой начисления процентов служит текущая стоимость Р.

При антисипативном способе проценты начисляются по ставке процента i в начале периода начисления, базой начисления служит итоговая стоимость S.

Многообразие схем начисления процентов определяется многообразием ставок.

В зависимости от способа начисления процентов различают:

- ставки наращения - при декурсивном способе начисления процентов;

- дисконтные ставки - при антисипативном способе начисления процентов. Ставка наращения (процентная ставка) i за период — это доля процента I за этот период в текущей стоимости Р· Процент, начисленный с использованием ставки наращения, называется истинным процентом.

Дисконтная ставка d за период — это доля дисконта за этот период в итоговой стоимости· Эту ставку иногда еще называют процент авансом, поскольку она позволяет начислить процент из суммы, возвращаемой в будущем, а также - учетной ставкой, поскольку она используется в операции учета векселя. В последнем случае текущая стоимость Р называется выручкой. Дисконт, начисленный с использованием дисконтной ставки, называется истинным дисконтом. Ставки наращения и ставки дисконтирования используют как в операциях наращения, так и в операциях дисконтирования.

При дисконтировании в зависимости от того, какая из этих ставок задана, различают два вида моделей:

1) модель математического дисконтирования - для ставки наращения;

2) модель банковского учета - для дисконтной ставки.

В зависимости от вариативности базы начисления различают:

- простые ставки - при постоянной базе начисления;

- сложные ставки - при переменной базе начислении.

Простая ставка — это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов на одну и ту же текущую стоимость. Простой процент (дисконт) — это процент (дисконт), полученный при использовании простой ставки за определенный период.

Сложная ставка — это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов, в каждом из которых - на итоговую стоимость предыдущего периода. Сложный процент (дисконт) — это процент (дисконт), полученный при использовании сложной ставки за определенный период.

В зависимости от вариативности размера ставок различают:

- постоянные ставки - при постоянном значении;

- переменные ставки - при переменном значении.

Постоянная процентная ставка — это процентная ставка, размер которой постоянен в течение всего времени финансовой операции. Переменная процентная ставка - это процентная ставка, размер которой изменяется в течение времени финансовой операции. Она может быть определена с помощью задания базовой ставки и маржи (надбавки), а также последовательности ставок разного размера.

В зависимости от способа определения времени различают:

- дискретные процентные ставки - при дискретном времени;

- непрерывные процентные ставки - при непрерывном времени.

Дискретная процентная ставка — это процентная ставка, при которой начисление всякий раз осуществляется за определенный промежуток времени (день, месяц, квартал, год). Непрерывная процентная ставка — это процентная ставка, при которой начисление процентов осуществляется непрерывно. Она используется в теоретических расчетах для моделирования ситуаций, в которых период начисления очень мал. Непрерывный процент (дисконт) - процент (дисконт), полученный при начислении с использованием непрерывной процентной ставки. При решении задач в финансовой математике обычно по умолчанию используется годовая постоянная дискретная ставка наращения.

Доходность финансовой операции — это количественный показатель эффективности финансовой операции, характеризующий долю прибыли во вложенной денежной сумме. Мерой доходности финансовой операции является, как правило, годовая процентная ставка.

Определение доходности финансовой операции зависит от вида операции. В частности, если доход обусловлен только начислением процентов по заданной ставке, то доходность такой операции измеряется именно этой ставкой.

В финансовых операциях с несколькими видами дохода доходность определяется в виде эффективной ставки.

Эффективная ставка — это доля всех начисленных процентов за определенный период в исходной базе начисления. Поскольку при начислении процентов ставка определяется не только количественным значением, но и способом начисления процентов, то ее однозначной характеристикой как меры доходности финансовой операции является результативность применения. Эта характеристика положена в основу сопоставления различных ставок (например, ставки наращения и учетной ставки).

Две процентные ставки называются *эквивалентными*, если при начислении процентов с их использованием получается одинаковый финансовый результат.

Таким образом, различают два способа определения доходности финансовой операции:

- непосредственное вычисление ставки как относительной доли дохода в исходной денежной сумме с использованием моделей наращения;
- переход от ставки, заданной в операции, к эквивалентной ей искомой ставке.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое финансовая математика?
2. Какой основной метод исследования используется в финансовой математике?
3. Какие задачи ставит и решает финансовая математика?
4. Что такое финансовая операция?
5. Каковы основные направления классификации финансовых операций?
6. Какие вы знаете финансовые операции в зависимости от вида получаемого дохода?
7. Чем различаются составная и комплексная финансовые операции?
8. Что представляет собой депозитная операция?
9. Что представляет собой кредитная операция?
10. Что такое учетная операция?
11. Какое место занимает финансовая математика в системе методов количественного финансового анализа?

12. Что означает принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени?

13. Какую роль играет время в финансовых расчетах?

14. Как учитывается время в финансовой математике?

15. Что такое датированная сумма?

16. Каковы основные типы моделей в финансовой математике?

17. Каковы основные виды процентных ставок?

18. Каковы методы начисления процентов?

19. Каковы основные направления финансовых расчетов?

20. Что такое множитель наращения?

21. Что такое множитель дисконтирования?

22. Что такое процент?

23. Что такое дисконт?

24. Что такое процентная ставка?

25. Каковы факторы, влияющие на размер ставки?

26. Для чего используется процентная ставка?

27. Каков принцип начисления процентов?

28. Какие существуют методы начисления процентов?

29. По каким направлениям классифицируются процентные ставки?

30. Что такое простая ставка?

31. Что такое простой процент?

32. Что такое простой дисконт?

33. Что такое истинный дисконт?

34. Что такое сложная ставка?

35. Что такое сложный процент?

36. Что такое сложный дисконт?

37. Что такое ставка наращения?

38. Что такое учетная ставка?

39. Что такое непрерывная ставка?

40. Что такое доходность финансовой операции?

41. Что такое эффективная ставка?

42. Какие ставки называются эквивалентными?

2 ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Несомненно, выгодность банковского вклада, в первую очередь, определяет процентная ставка. Ведь именно на нее ориентируется каждый потенциальный клиент. Но, на самом деле, вкладчику нужно, в частности, обратить внимание не на годовую процентную ставку, а на метод начисления прибыли. Ведь в финансовой системе банка существуют два понятия: простой и сложный процент. А для каждого вкладчика нужно точно знать, что такое простые и сложные проценты понятие и формулы, чтобы определить, какой вклад будет наиболее выгодный для него.

Под *наращенной суммой* ссуды (долга, депозита, других видов, выданных в долг или инвестированных денег) понимают первоначальную ее сумму с начисленными процентами к концу срока начисления *(date of maturity, due date)*. Наращенная сумма определяется умножением первоначальной суммы долга *(principal)* на *множитель наращения,* который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной. Расчетная формула зависит от вида применяемой процентной ставки и условий наращения.

К наращению по простым процентам обычно прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до 1 года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются. Для записи формулы наращения простых процентов *(simple interest)* примем обозначения:
P - величина первоначального капитала, (ссуды, долга, кредита и т.д.);

S – наращенная сумма или конечная стоимость капитала, которая получена прибавлением к первоначальной величине начисленных процентов;

n – число лет наращения;

i – годовая процентная ставка (обычно измеряется десятичной дробью);

t – срок финансовой операции, выраженный в днях;

m – срок операции, выраженный в месяцах;

K – число дней в году (365, 366 или 360);

d – годовая учетная ставка;

I – процентный доход или процент, как величина дохода от сделки.

Сумма процентного дохода, начисленного за весь период:

$$I = Pin \quad . \qquad 2.1$$

Наращенная сумма *декурсивных процентов:*

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni), \qquad 2.2$$

где (1 + ni) – множитель наращения простых декурсивных процентов.

Если срок финансовой сделки выражен в месяцах, то величина наращенной суммы определяется по формуле:

$$S = P\left(1+\frac{m}{n'}i\right), \tag{2.3}$$

где n' - 12 месяцев.

Когда срок финансовой сделки выражается в днях, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P\left(1+\frac{t}{K}i\right). \tag{2.4}$$

Если необходимо определить процентный доход, а срок финансовой сделки определяется в месяцах или днях, то:

доход за один месяц $I = \frac{Pi}{12 \cdot 100}$; 2.5

доход за m – месяцев $I = \frac{Pim}{1200}$; 2.6

доход за один день $I = \frac{Pi}{36500}$; 2.7

доход за t – дней $I = \frac{Pit}{36500}$ *или* $I = \frac{Pit}{36000}$. 2.8

Эти формулы справедливы если процентная ставка выражается в процентах, если ставка выражена в виде десятичной дроби, то знаменатель необходимо разделить на 100.

Выражение (2.2) называют формулой наращения по простым процентам или кратко — *формулой простых процентов,* а множитель $(1 + ni)$ — *множителем наращения простых процентов.* График роста по простым процентам представлен на рисунке 2.1.

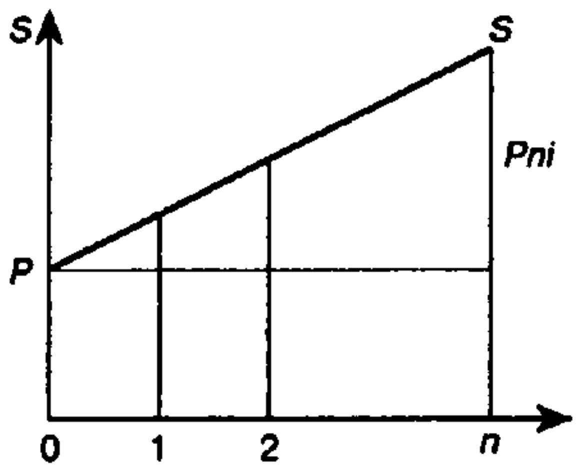

Рисунок 2.1 - Рост по простым процентам

Заметим, что увеличение процентной ставки или срока в *к* раз одинаковым образом влияет на множитель наращения. Последний увеличится в $(1 + kni) / (1 + ni)$ раз.

Поскольку процентная ставка, как правило, устанавливается в расчете за год, то при сроке ссуды менее года необходимо определить, какая часть годового процента уплачивается кредитору. Аналогичная проблема возникает и в случаях, когда срок ссуды меньше периода начисления. Рассмотрим наиболее распространенный в практике случай - с годовыми периодами начисления. Очевидно, что срок ссуды необязательно равен целому числу лет.

Выразим срок n в виде дроби

$$n = \frac{t}{K} \qquad 2.9$$

где t — число дней ссуды, K — число дней в году, или *временная база начисления процентов (time basis).*

При расчете процентов применяют две временные базы: K= 360 дней (12 месяцев по 30 дней) или K = 365, 366 дней. Если K = 360, то получают *обыкновенные* или *коммерческие* проценты *(ordinary interest),* а при использовании действительной продолжительности года (365, 366 дней) рассчитывают *точные* проценты (*exact interest).*

Число дней ссуды также можно измерить приближенно и точно. В первом случае продолжительность ссуды определяется из условия, согласно которому любой месяц принимается равным 30 дням. В свою очередь точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней между датой выдачи ссуды и датой ее погашения. День выдачи и день погашения считаются за один день.

Итак, возможны и применяются на практике три варианта расчета простых процентов.

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды.* Этот вариант, естественно, дает самые точные результаты. Данный способ применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например, в Великобритании, США. В коммерческих документах он обозначается как 365/365 или АСТ/АСТ.

2. *Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.* Этот метод, иногда называемый *банковским (Banker's Rule),* распространен в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков, во внутристрановых — во Франции, Бельгии, Швейцарии. Он обозначается, как 365/360 или АСТ/360. Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов. Заметим, что при числе дней ссуды, превышающем 360, данный

способ приводит к тому, что сумма начисленных процентов будет больше, чем предусматривается годовой ставкой.

3. *Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.* Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах. Он принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании. Метод условно обозначается как 360/360.

Очевидно, что вариант расчета с точными процентами и приближенным числом дней ссуды лишен смысла и не применяется. Поскольку точное число дней ссуды в большинстве случаев, но, разумеется, не всегда, больше приближенного.

Пример 2.1 Банк выдал клиенту кредит 20 января 2013 г. в размере 100 тыс. руб. Срок возврата кредита 17 июня. Процентная ставка установлена 10,5% годовых. Наращенную сумму долга, подлежащую возврату, рассчитать тремя методами.

Решение.

1. Определяем точное число дней ссуды:

январь – с 20-го по 31-е включительно	– 12 дней;
февраль	– 28 дней;
март	– 31 день;
апрель	– 30 дней;
май	– 31 день;
июнь	– 17 дней.
Итого	– 149 дней.

Так как при начислении процентов день выдачи и день погашения ссуды принимают за один день, то $t_{точное} = 149 - 1 = 148$ дней.

2. Определяем приближенное число дней ссуды (продолжительность каждого месяца принимается за 30 дней):

январь – с 20-го по 30-е включительно	– 11 дней;
февраль	– 30 дней;
март	– 30 дней;
апрель	– 30 дней;
май	– 30 дней;
июнь	– 17 дней.
Итого	– 148 дней.

$t_{приближенное} = 148 - 1 = 147$ дней.

Возможные варианты расчета наращенной суммы:

а) по точным процентам с точным числом дней ссуды («английская практика»);

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{148}{365} \cdot 0,105) = 104258 \text{ руб.}$$

б) по обыкновенным процентам с точным числом дней ссуды («французская практика»):

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{148}{360} \cdot 0,105) = 104317 \text{ руб.}$$

в) по обыкновенным процентам с приближенным числом дней ссуды («германская практика»):

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{147}{360} \cdot 0,105) = 104288 \text{ руб.}$$

Ответ: а) S = 104258 руб.; б) S = 104317 руб.; в) S = 104288 руб.

Переменные ставки. В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m) = P(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j), \quad 2.10$$

где i_j - ставка простых процентов в периоде j;

n_j - продолжительность j-ого периода;

m - число периодов начисления процентов;

$j = 1, 2, ..., m$.

При *антисипативном методе* начисления процентов за базу принимается сумма возврата долга, тогда наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = \frac{P}{1 - nd}, \quad 2.11$$

где d – учетная ставка, выраженная десятичной дробью,

$(1 - dn)^{-1}$ - множитель наращения простых антисипативных процентов.

Если d выражается в процентах, то формула примет вид:

$$S = \frac{P100}{100 - nd}. \quad 2.12$$

При *математическом дисконтировании* современная величина суммы S находится по формуле

$$P = S(1 + ni)^{-1}, \quad 2.13$$

где $(1 + ni)^{-1}$ является дисконтным множителем.

При *банковском дисконтировании* сумма, получаемая клиентом в результате учета долгового обязательства, находится по формуле:

$$P' = S - Sn'd = S(1 - n'd), \qquad 2.14$$

где n' – временной интервал между датой учета и датой погашения векселя.

Дисконтный множитель здесь равен $(1 - dn)$. Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе K=360 дней, число дней финансовой операции обычно берется точным.

Дисконт $Д' = S - P'$.

Срок финансовой сделки и величина процентной ставки находятся из формул наращенных сумм:

$$n = \frac{S/P - 1}{i}, \quad n = \frac{1 - P/S}{d}, \qquad 2.15$$

$$t = \frac{S - P}{Pi} K; \quad t = \frac{S - P}{Sd} K; \qquad 2.16$$

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt} K; \quad d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St} K. \qquad 2.17$$

Пример 2.2 Банк выдал клиенту ссуду в размере 400 тыс. руб. сроком на 9 месяцев. Определить наращенную сумму, если применялась: а) процентная ставка 12% годовых; б) учетная ставка 12% годовых. За какой срок наращенная сумма увеличится до 500 тыс. руб.

Решение: P = 400 тыс. руб.; i=0,12; d=0,12; $n = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Наращенную сумму долга найдем по формулам (1) и (4):

а) $S = P(1 + ni) = 400000 \cdot (1 + 0{,}75 \cdot 0{,}12) = 436000{,}00$ руб;

б) $S = \frac{P}{1 - nd} = \frac{400000}{1 - 0{,}75 \cdot 0{,}12} = 439560{,}44$ руб.

Сравнение показывает, что для клиента целесообразнее получать кредит по процентной, а не учетной ставке при прочих равных условиях.

Срок ссуды найдем по формуле (5), где S = 50 тыс. руб.

$$n = \frac{S - P}{pi} = \frac{500 - 400}{400 \cdot 0{,}12} = 2{,}08;$$

$$n = \frac{S - P}{Sd} = \frac{500 - 400}{500 \cdot 0{,}12} = 1{,}67.$$

Срок ссуды составляет 2,08 года при наращении по процентной ставке и 1,67 года по учетной ставке.
Ответ: а) S = 436000 руб.; б) S = 439560,44 руб.; n = 2,08 года; n = 1,67 года.

Пример 2.3 Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие процентная ставка 7% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определить наращенную за год сумму, если вкладчик поместил 600 тыс. руб.

Решение.
P = 600000 руб., $n_1 = 0,5$; $n_2 = n_3 = 0,25$; $i_1 = 0,07$; $i_2 = 0,085$ $i_3 = 0,1$

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m) =$$

$$= 600000 \cdot (1 + 0,5 \cdot 0,07 + 0,25 \cdot 0,085 + 0,25 \cdot 0,1) = 648750 \text{ руб.}$$

Ответ: S = 648750 руб.

Начисление процентов при изменении сумм депозита во времени.

Принципиально ничего не меняется, если сумма, на которую начисляются проценты, изменяет свою величину во времени (размер вклада на сберегательном счете, текущий счет при периодическом его пополнении или снятии денег и т.п.). В этом случае

$$I = \sum_j R_j n_j i \qquad 2.18$$

где R_j – остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств, n_j – срок хранения денег (в годах) до нового изменения остатка средств на счете.

В банковско-сберегательном деле обычно применяют следующий способ, основанный на преобразовании формулы (2.18). Для этого измеряют интервалы между моментами изменений величины остатка на счете в днях, а процентную ставку выражают в процентах (а не в десятичных дробях как выше). После чего получают

$$I = \sum_j R_j n_j i = \frac{\sum R_j t_j}{100} : \frac{K}{i} \qquad 2.19$$

Как и прежде K означает число дней в году, а t_j — срок в днях между последовательными изменениями остатков на счете. Величину $\frac{\sum R_j t_j}{100}$ называют *процентным числом (interest number),* а делитель — *процентным* (или *постоянным) делителем (interest divisor).*

Пример 2.4 Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 05.02 поступило 12 млн руб., 10 .0 7 снято 4 млн руб. и 20.10 поступило 8 млн руб. Найти сумму на счете на конец года. Процентная ставка 18% годовых.

Процентный делитель составит 365 : 18 = 20,27778 . Расчет суммы процентных чисел приведен в следующей таблице.

Дата	Движение средств	Остаток (R_j)	Срок (t_j)	Процентное число
05.02	12	12	155	18,6
10.07	- 4	8	102	8,16
20.10	8	16	73	11,68
31.12	-	16	-	-
Итого	-	-	330	38,44

Сумма процентов за весь срок равна 38,44/20,27778=1,89567 млн руб.

Общая сумма на счете 16+1,89567=17,89567 млн руб.

Наращение процентов в потребительском кредите.

В потребительском кредите проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита *(flat rate of interest, add-on interest).* Условие, прямо скажем, весьма жесткое для должника. Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита.

Если сумма процентных платежей разбивается на погашение по периодам, то существует следующая схема расчета и составления плана погашения потребительского кредита.

1) Сумма начисленных процентов за каждый период:

$$I_{m'} = \frac{Pi}{1200} \times \left(1 - \frac{(m'-1)}{m}\right) \qquad 2.20$$

где:

P – первоначальная сумма долга, руб.

i – процентная ставка, %.

m' – порядковый номер периода начисления процентов и выплаты основного долга.

m – число периодов начислений процентов и выплат основного долга.

2) Выплата основного долга за один период:

$$q' = \frac{P}{m} \qquad 2.21$$

3) Общая сумма начисленных процентов за весь период:

$$\sum I = \frac{Pi}{2400} \times (m + 1) \qquad 2.22$$

4) Вспомогательная таблица для расчетов:

Таблица 1.1 - План погашения кредита

Месяц	Непогашенная сумма основного долга, руб.	Процентный платеж, руб.	Месячная выплата основного долга, руб.	Месячная сумма всей погасительной задолженности, руб.
0		-	-	-
1				
2				
3				
4				
5				
6				
…				
…				
Итого	-			

Пример 2.5 Финансовой организацией клиенту предоставлен потребительский кредит в размере 180 тыс. руб. на срок 12 месяцев под 10 % годовых с ежемесячным погашением кредита. Составить план погашения кредита.

Решение. Предположим, что величина кредита P, и он должен выплачиваться равными месячными платежами m раз с начислением процентов по годовой ставке i.

Тогда, процентный платеж составит:

в первом месяце $I_1 = \frac{Pi}{1200}$

во втором месяце $I_2 = (P - \frac{P}{m}) \cdot \frac{i}{1200} = \frac{Pi}{1200}(1 - \frac{1}{m})$;

в третьем месяце $I_3 = (P - 2\frac{P}{m}) \cdot \frac{i}{1200} = \frac{Pi}{1200}(1 - \frac{2}{m})$;

и так далее.

Общая величина процентных выплат определяется по формуле

$$I = \frac{Pi\,(m + 1)}{2400}.$$

Ежемесячная выплата основного долга составит

$$q = \frac{P}{m}.$$

По условию задачи $P = 180000$ руб.; $m = 12$ месяцев; i=10%.

Ежемесячная величина основного долга: $q = \frac{P}{m} = \frac{180000}{12} = 15000$ руб.

Ежемесячные процентные платежи:

$$I_1 = \frac{P \cdot i}{1200} = \frac{180000 \cdot 10}{1200} = 1500 \text{ руб.;}$$

$$I_2 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{1}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{1}{12}) = 1375 \text{ руб.;}$$

$$I_3 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{2}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{2}{12}) = 1250 \text{ руб.;}$$

$$I_4 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{3}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{3}{12}) = 1125 \text{ руб.;}$$

$$I_5 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{4}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{4}{12}) = 1000 \text{ руб.;}$$

$$I_6 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{5}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{5}{12}) = 875 \text{ руб.;}$$

$$I_7 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{6}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{6}{12}) = 750 \text{ руб.;}$$

$$I_8 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{7}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{7}{12}) = 625 \text{ руб.;}$$

$$I_9 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{8}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{8}{12}) = 500 \text{ руб.;}$$

$$I_{10} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{9}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{9}{12}) = 375 \text{ руб.;}$$

$$I_{11} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{10}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{10}{12}) = 250 \text{ руб.;}$$

$$I_{12} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{11}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{11}{12}) = 125 \text{ руб.}$$

Сумма процентных платежей за пользование кредитом составит:

$$I = \frac{Pi(m+1)}{2400} = \frac{180000 \cdot 10 (12+1)}{2400} = 9750 \text{ руб.}$$

Расчеты по погашению кредита представим в таблице 2.2.

Таблица 2.2 - План погашения кредита, руб.

Месяц	Непогашенная сумма основного долга	Процентный платеж	Месячная выплата основного долга	Сумма месячного погасительного платежа
	180000			
1	165000	1500	15000	16500
2	150000	1375	15000	16375
3	135000	1250	15000	16250
4	120000	1125	15000	16125
5	105000	1000	15000	16000
6	90000	875	15000	15875
7	75000	750	15000	15750
8	60000	625	15000	15625
9	45000	500	15000	15500
10	30000	375	15000	15375
11	15000	250	15000	15250
12	–	125	15000	15125
ИТОГО	–	9750	180000	189750

Пример 2.6 Владелец векселя номинальной стоимостью 65000 руб. и сроком обращения 1 год предъявил его банку- эмитенту для учета за 90 дней до даты погашения. Банк учел его по учетной ставке 12 %. Определить дисконтированную величину (P') и величину дисконта (D').

Решение. По условию S=65000 руб., t=90 дней, K=360 дней, d=0,12.

$$P' = S(1 - \frac{t}{K} \cdot d) = 65000 \cdot \left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}12\right) = 63050 \text{ руб.}$$

D'= $D' = S - P' = 65000 - 63050 = 1950$ руб.

Ответ: P'=63050 руб.; D'=1950 руб.

Задачи для самостоятельного решения

2.1 Банк выдал клиенту ссуду в размере «*P*» тыс. руб. сроком на: 50 дней, 2 месяца, 8 месяцев, 10 месяцев и 1 год по ставке «*i*» простых процентов (и «*d*» учетной ставке процента). Определить наращенную сумму, если проценты начислялись: а) по процентной ставке; б) по учетной ставке. Через какой срок величина ссуды увеличится на: 15 % ;20%; 35%, а также в 1,5 раза.

№ задачи	Величина ссуды, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, % (*i*)	Учетная ставка, % (*d*)	**№ задачи**	Величина ссуды, тыс. руб. (*P*)	Процентная ставка, %. (*i*)	Учетная ставка, % (*d*)
1	500	13,0	13,0	**14**	560	11,5	11,5
2	430	13,5	13,5	**15**	370	12,7	12,7
3	280	11,0	11,0	**16**	620	11,3	11,3
4	360	10,5	10,5	**17**	260	16,7	16,7
5	240	14,0	14,0	**18**	340	12,9	12,9
6	290	11,8	11,8	**19**	580	13,8	13,8
7	380	12,7	12,7	**20**	350	15,1	15,1
8	630	15,1	15,1	**21**	387	14,7	14,7
9	510	12,3	12,3	**22**	671	13,9	13,9
10	470	13,2	13,2	**23**	895	16,5	16,5
11	260	12,5	12,5	**24**	936	15,2	15,2
12	420	9,5	9,5	**25**	811	14,5	14,5
13	390	14,2	14,2	**26**	768	15,6	15,6

2.2 Банк выдал клиенту кредит. Определите сумму, подлежащую возврату по английской, французской и германской практике по данным таблицы. Как изменятся наращенные суммы при использовании всех трех методов, если процентная ставка увеличится в: 1,1раза, 1,3 раза.

№ задачи	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.	**№ задачи**	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.
1	10.01	20.08	10,2	200000	**13**	28.03	30.10	18,5	512000
2	19.01	30.10	14,0	300000	**14**	12.02	5.12	14,3	640000
3	5.02	18.09	12,6	280000	**15**	14.03	5.06	20,4	700000
4	9.01	1.06	18,0	350000	**16**	16.01	26.10	17,0	450000
5	30.01	10.11	14,9	100000	**17**	11.04	24.11	18,9	396000
6	24.03	15.09	10,0	275000	**18**	9.01	12.09	12,0	360000
7	16.02	20.11	14,3	120000	**19**	6.04	7.12	14,3	430000
8	18.03	3.12	18,7	800000	**20**	5.02	6.10	16,7	270000
9	16.04	23.10	21,2	750000	**21**	10.05	12.11	15,8	295000
10	3.01	19.10	13,0	240000	**22**	2.03	14.08	14,7	846000
11	16.01	11.09	13,4	300000	**23**	20.01	15.09	18,1	539000
12	1.02	13.08	11,0	570000	**24**	17.02	10.11	16,9	487000

2.3 Фирма получила кредит с оговоренной суммой возврата. Определите процентную и учетную ставку, если срок кредита составляет: 60 дней; 120 дней; 5 месяцев; 8 месяцев; 1 год (К = 360).

№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	**№ задачи**	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
1	200	250	**14**	450	474
2	180	220	**15**	480	509
3	150	175	**16**	805	845
4	370	410	**17**	610	629
5	250	280	**18**	740	781
6	380	420	**19**	210	242
7	470	500	**20**	280	296
8	620	650	**21**	567	879
9	390	420	**22**	381	490
10	250	286	**23**	285	365
11	370	399	**24**	679	911
12	390	436	**25**	549	726
13	280	307	**26**	369	418

2.4 Ссуда выдана сроком на: 30 дней, 100 дней; 4 месяца; 8 месяцев; 1 год. По данным таблицы. Определить сумму к возврату ссуды и процентный доход, если при расчетах использовалась: а) процентная ставка; б) учетная ставка.

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %	**Вариант**	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %
1	800	16,0	**16**	200	17,4
2	280	18,5	**17**	300	15,0
3	370	16,3	**18**	400	16,2
4	690	14,9	**19**	1000	17,0
5	1100	15,7	**20**	600	15,9
6	1850	19,0	**21**	700	15,2
7	680	18,0	**22**	890	16,4
8	390	14,1	**23**	900	15,2
9	485	13,7	**24**	970	14,9
10	920	18,2	**25**	850	16,4
11	590	19,7	**26**	750	14,8
12	630	14,8	**27**	410	17,5
13	380	13,7	**28**	650	16,9
14	480	15,9	**29**	870	15,7
15	510	16,8	**30**	710	18,5

2.5 Банк выдал клиенту кредит в сумме 900000 руб. на 2 года, по процентной ставке: 8,7%, 10,5% и 14,6 %. Определите, какие суммы должен вернуть клиент банку и процентные доходы банка для каждой из ставок. Сравнить процентные доходы банка, по каждой из ставок, как в абсолютном, так и в относительном выражении.

2.6 При известной годовой ставке простых процентов определить через сколько лет начальная сумма увеличится: в 1,2 раза; 1,5 раза; 1,8 раза; в 2 раза; 2,5 раза; в 3 раза; в 4 раза; в 5 раз.

Как изменятся сроки ссуды, если при расчетах также использовалась простая учетная ставка.

Вариант	Ставка, %	**Вариант**	Ставка, %
1	16,0	**16**	17,4
2	14,5	**17**	15,0
3	16,3	**18**	16,2
4	14,9	**19**	17,0
5	15,7	**20**	15,9
6	14,0	**21**	15,2
7	18,0	**22**	16,4
8	14,1	**23**	15,2
9	13,7	**24**	14,9
10	16,2	**25**	16,4
11	15,7	**26**	14,8
12	14,8	**27**	17,5
13	13,7	**28**	16,9
14	15,9	**29**	15,7
15	16,8	**30**	15,5

2.7 Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 09.01 поступило 350000 рублей, 18.04 снято 45000 рублей, 28.08 поступило 130000 рублей, 7.10 снято 74000 рублей, 27.11 поступило 95000 рублей. Найдите сумму на счете на конец года. Процентная ставка 11 % годовых. При расчетах использовалась английская практика.

2.8 Банк предлагает клиенту следующие условия срочного годового депозита: в первом квартале процентная ставка 8 % годовых, каждые следующие три месяца ставка повышается на 0,8 %. Определите наращенную за год сумму 650000 рублей.

2.9 Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первые пять месяцев ставка – 10 %, в каждом последующем месяце ставка повышается на 0,5 %. Необходимо определить множитель наращения за: полгода; один года.

2.10 Банк выдал клиенту кредит. Определите сумму, подлежащую возврату по английской, французской и германской практике по данным таблицы.

Вариант	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.	**Вариант**	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.
1	10.01	20.08	10,2	200000	**15**	16.01	11.09	13,4	300000
2	19.01	30.10	14,0	300000	**16**	1.02	13.08	11,0	570000
3	5.02	18.09	12,6	280000	**17**	28.03	30.10	18,5	512000
4	9.01	1.06	18,0	350000	**18**	12.02	5.12	14,3	640000
5	30.01	10.11	14,9	100000	**19**	14.03	5.06	20,4	700000
6	24.03	15.09	10,0	275000	**20**	16.01	26.10	17,0	450000
7	16.02	20.11	14,3	120000	**21**	11.04	24.11	18,9	396000
8	18.03	3.12	18,7	800000	**22**	9.01	12.09	12,0	360000
9	16.04	23.10	21,2	750000	**23**	6.04	7.12	14,3	430000
10	3.01	19.10	13,0	240000	**24**	5.02	6.10	16,7	270000
11	18.01	19.05	16,5	260000	**25**	7.01	5.05	10,9	590000
12	12.02	19.11	13,7	160000	**26**	12.02	14.12	13,5	540000
13	2.03	14.07	12,0	298000	**27**	24.02	16.09	21,3	237000
14	10.04	17.12	16,2	175000	**28**	2.01	24.11	16,0	624000

2.11 Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первые пять месяцев ставка – 10 %, в каждом последующем месяце ставка повышается на 0,5 %. Необходимо определить множитель наращения за: полгода; один года.

2.12 Клиентом в банке 19 февраля открыт счет на сумму 400000 рублей, при ставке 9,5 % годовых. 10.04 снято 118000 рублей, 24.07 внесено 224000 рублей, 7.09 снято 97000 рублей, 18.11 внесено 109000 рублей, а в конце года счет был закрыт.

Какую сумму получит клиент, если 1.10 процентная ставка была повышена до 10,5 %.

2.13 Фирма планирует получение кредита в сумме 950000 рублей, при условии возврата 1200000 рублей. На какой срок фирма может взять кредит, если процентная ставка равна: 9 %; 14 %; 19 %; 25%.

2.14 Движение средств на счете характеризуется данными представленными в таблице. Найдите сумму на счете на конец года, если процентная ставка составляет 9,5 % годовых. При расчетах использовалась французская практика.

Вариант	Сумма на счете на 10.01, тыс. руб. (открытие счета)	Движение средств на счете («+» поступление; «–» выбытие)					
		20.03	19.04	5.06	10.08	19.10	6.12
1	800	+800	-680	-120	+300	-90	+270
2	900	-200	-130	-90	+280	+80	-100
3	1100	-190	-320	+180	-410	+390	+110
4	500	-80	+120	-20	+215	+80	-90
5	600	+200	+180	-310	+90	+110	-290
6	750	-350	-120	+240	+420	-370	+100
7	850	-450	+200	+280	-370	+130	-90
8	390	+400	+190	+210	-150	-205	+95
9	680	-280	+290	+110	-170	-85	+95
10	270	+130	+310	-150	-300	+290	+80
11	180	+220	+300	+200	-150	-50	+90
12	490	+110	+205	-280	-200	+80	+130
13	1250	-620	-100	+260	+505	-490	+320
14	1420	-480	-390	+190	+210	+520	-290
15	1730	+170	-700	-180	+380	+250	-480
16	1840	-380	-800	+510	+290	+500	-710
17	490	+130	-90	-200	+300	-150	+250
18	730	-130	-210	+200	-310	+205	-150
19	370	+190	-90	-170	-100	+280	+180
20	820	+130	-320	-270	+180	+320	-240
21	710	-250	+310	-200	+450	-130	+150
22	590	-120	+180	+120	-210	-225	+190
23	780	+110	-210	-255	+185	-325	+200
24	850	+100	-200	+380	-470	-170	+270
25	610	-280	-150	+295	+185	-80	-100
26	705	-170	+180	+200	-250	+80	+150
27	910	-200	+50	-180	+300	-450	-100

2.15 Фирма получила кредит с оговоренной суммой возврата. Определите процентную и учетную ставку, если срок кредита составляет: 60 дней; 120 дней; 5 месяцев; 8 месяцев; 1 год (К = 360).

Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	**Вариант**	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
1	200	250	**16**	370	399
2	180	220	**17**	390	436
3	150	175	**18**	280	307
4	370	410	**19**	450	474
5	250	280	**20**	480	509
6	380	420	**21**	805	845
7	470	500	**22**	610	629
8	620	650	**23**	740	781
9	390	420	**24**	210	242
10	250	286	**25**	280	296
11	810	834	**26**	470	504
12	890	918	**27**	820	853
13	180	202	**28**	705	738
14	290	324	**29**	810	837
15	620	647	**30**	600	624

2.16 По данным таблицы, определить на какой срок (в днях и годах) была выдана ссуда, если использовалась: 1) простая процентная ставка; 2) простая учетная ставка; в размере: 10,0%; 12,5%; 13,0%; 14,9%; 15,7%; 17,8%.

Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	**Вариант**	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
1	210	219	**16**	350	417
2	190	201	**17**	360	399
3	180	189	**18**	240	278
4	350	387	**19**	410	487
5	270	286	**20**	460	499
6	390	410	**21**	835	888
7	440	452	**22**	600	671
8	630	658	**23**	750	824
9	350	389	**24**	230	243
10	270	297	**25**	240	289
11	820	910	**26**	410	488
12	870	965	**27**	850	888
13	190	213	**28**	765	809
14	250	264	**29**	800	875
15	640	698	**30**	650	689

2.17 Клиентом в банке взят кредит под 18 % годовых. В конце периода клиент должен выплатить определенную сумму. Определите процентный доход и сумму кредита, если срок кредита составляет: 65 дней; 90 дней; 110 дней; 4 месяца; 9 месяцев; 1 год (K = 365).

Вариант	Сумма возврата кредита, тыс. руб.	**Вариант**	Сумма возврата кредита, тыс. руб.
1	250	**16**	399
2	220	**17**	436
3	175	**18**	307
4	410	**19**	474
5	280	**20**	509
6	420	**21**	845
7	500	**22**	629
8	650	**23**	781
9	420	**24**	242
10	286	**25**	296
11	834	**26**	504
12	918	**27**	853
13	202	**28**	738
14	324	**29**	837
15	647	**30**	624

2.18 Банк предоставил клиенту ломбардный кредит сроком на 3 месяца, 4 месяца с 7.03 по 7.06 под залог акций. Сумма кредита равна 75 % от курсовой стоимости акций. Определите размер кредита, полученного клиентом в момент его обращения в банк, с учетом того, что проценты и комиссионные удерживаются из суммы выдаваемого кредита, по условиям, представленным в таблице.

Вариант	Количество акций	Курсовая стоимость одной акции, руб.	Процентная ставка, %	Процент за обслуживание кредита	**Вариант**	Количество акций	Курсовая стоимость одной акции, руб.	Процентная ставка, %	Процент за обслуживание кредита
1	50	500	14,0	0,60	**15**	190	1800	15,0	0,60
2	60	600	14,5	0,65	**16**	200	1850	16,5	0,65
3	70	700	18,0	0,70	**17**	210	1200	15,5	0,70
4	80	800	18,5	0,75	**18**	220	1250	19,5	0,75
5	90	900	12,0	0,80	**19**	230	1300	17,0	0,80
6	100	950	20,0	0,85	**20**	240	1350	20,5	0,85
7	110	1000	24,0	0,90	**21**	250	1750	20,0	0,90
8	120	850	16,0	0,95	**22**	260	1700	19,5	0,95
9	130	750	17,5	1,00	**23**	270	1400	16,0	1,00
10	140	1050	13,5	1,05	**24**	280	1450	18,5	1,05
11	150	1100	21,0	1,10	**25**	290	1500	17,0	1,10
12	160	550	19,0	1,15	**26**	300	1550	13,5	1,15
13	170	650	17,0	1,20	**27**	310	1600	21,0	1,20
14	180	1150	19,5	1,25	**28**	320	1650	13,5	1,25

2.19 На какой срок фирма может взять кредит в банке в размере 190000 рублей с условием, что сумма возврата кредита не превысит 220000 рублей, если банк применит учетную ставку в размере: 10 %; 15 %; 21 %.

(Временная база – 365 дней).

2.20 Ссуда в размере 150000 руб., 475000 руб. выдана 20.03 под 17,6 %, 18,2 %, 19 % годовых. Ее нужно погасить 15.11.

Определите наращенную сумму при условии, что проценты начисляются по простой учетной ставке.

2.21 Вексель номинальной стоимостью 150000 руб., 349000 руб. со сроком погашения 6.09 учтен 6.06 по учетной ставке 8,9 %, 11,0 % годовых. Найдите дисконтированную величину векселя и сумму дисконта.

2.22 Вексель учтен 10.04 со сроком погашения 10.07. Определите номинальную стоимость векселя, если процентная ставка дисконтирования – 7,5 %, 11,4 % годовых, а должник получил 10.04 – 248750 рублей.

2.23 Предоставлен потребительский кредит на 7 месяцев, 12 месяцев. Определите сумму возврата кредита, для каждого из сроков используя различные варианты расчета. Составьте план погашения потребительского кредита для каждого срока.

Методические указания:

1) Сумма начисленных процентов за каждый период:

$$I_{m'} = \frac{Pi}{1200} \times \left(1 - \frac{(m' - 1)}{m}\right)$$

где:

P – первоначальная сумма долга, руб.

i – процентная ставка, %.

m' – порядковый номер периода начисления процентов и выплаты основного долга.

m – число периодов начислений процентов и выплат основного долга.

2) Выплата основного долга за один период:

$$q' = \frac{P}{m}$$

3) Общая сумма начисленных процентов за весь период:

$$\sum I = \frac{Pi}{2400} \times (m+1)$$

Вариант	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	**Вариант**	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)
1	100000	15,0	**16**	140000	12,5
2	150000	15,5	**17**	480000	13,0
3	170000	16,0	**18**	430000	13,5
4	190000	16,5	**19**	380000	14,0
5	200000	17,0	**20**	290000	14,5
6	240000	17,5	**21**	430000	15,0
7	250000	18,0	**22**	330000	15,5
8	280000	18,5	**23**	420000	16,0
9	300000	19,0	**24**	500000	16,5
10	340000	19,5	**25**	510000	17,0
11	350000	20,0	**26**	270000	17,5
12	360000	20,5	**27**	370000	18,0
13	390000	11,0	**28**	520000	18,5
14	400000	11,5	**29**	530000	19,0
15	450000	12,0	**30**	600000	19,5

4) Вспомогательная таблица для расчетов:

Месяц	Непогашенная сумма основного долга, руб.	Процентный платеж, руб.	Месячная выплата основного долга, руб.	Месячная сумма всей погаситель-ной задолженно-сти, руб.
0		-	-	-
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Итого	-			

2.22 Клиенту банка предоставлен потребительский кредит сроком на 10 месяцев с ежемесячным погашением кредита в сумме «*P*» руб., под «*i*» % годовых. Составить план погашения кредита.

№ задачи	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	№ задачи	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)
1	189000	15,0	**14**	388000	14,0
2	156000	15,5	**15**	292000	14,5
3	171000	16,0	**16**	437000	15,0
4	193000	16,5	**17**	334000	15,5
5	254000	17,0	**18**	423000	16,0
6	247000	17,5	**19**	528000	16,5
7	259000	18,0	**20**	519000	17,0
8	282000	18,5	**21**	649000	15,4
9	376000	19,0	**22**	711000	18,3
10	342000	19,5	**23**	287000	13,6
11	148000	12,5	**24**	372000	12,8
12	485000	13,0	**25**	483000	17,1
13	439000	13,5	**26**	581000	18,2

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение процентов и процентной ставки.
2. Какие виды процентных ставок применяются в финансовых расчетах и в чем их различие?
3. Как определяется наращенная сумма по формулам простых процентов?
4. Какие варианты расчета простых процентов применяются в мировой практике?
5. Что понимается под дисконтированием? Охарактеризуйте виды дисконтирования?
6. Как определяется современная стоимость платежа при применении математического и банковского дисконтирования?
7. Найдите срок финансовой сделки и величину процентной ставки из формул наращенных сумм по простым процентам.
8. Как называется сумма платы за кредит в кредитной сделке?
9. Как определить процентную ставку сделки?
10. В каких единицах измеряется процентная ставка сделки?
11. В каких единицах измерения в формуле простых процентов задается годовая процентная ставка?
12. Приведите формулу для вычисления обычных простых процентов.
13. Приведите формулу для вычисления точных простых процентов.
14. Как определяется накопленное значение в кредитных сделках с дискретно меняющими во времени процентными ставками?
15. Как определяется точный срок между датами?

16. Как определяется приближенный срок между датами?
17. Как определить учетную ставку за период?
18. Как называется разность между полной стоимостью векселя и
его выкупной ценой?
19. По какой линии изменяется наращенная сумма в случае простого процента?
20. Что называется обыкновенным простым процентом?
21. Что называется точным простым процентом?
22. Какие существуют три варианта расчета простых процентов?
23. Когда применяются расчёты с переменными ставками?
24. Как называется процесс последовательного повторения наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока?

3 СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

В средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяют *сложные проценты (compound interest).* База для начисления сложных процентов в отличие от простых не остается постоянной - она увеличивается с каждым шагом во времени.

Абсолютная сумма начисляемых процентов возрастает, и процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением.

Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления (*running period).* Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют *капитализацией процентов.*

Найдем формулу для расчета наращенной суммы при условии, что проценты начисляются и капитализируются один раз в году (годовые проценты). Для этого применяется *сложная ставка* наращения. Для записи формулы наращения применим те же обозначения, что и в формуле наращения по простым процентам:

P — первоначальный размер долга (ссуды, кредита, капитала и т.д.),

S — наращенная сумма на конец срока ссуды,

n — срок, число лет наращения,

/ — уровень годовой ставки процентов, представленный десятичной дробью.

Очевидно, что в конце первого года проценты равны величине Pi, а наращенная сумма составит $P+Pi = P(1 + i)$. К концу второго года она достигнет величины $P(1 + i) + P(1 + i)\,i == P(1 + i)^2$ и т.д.

В конце «*n* -го года наращенная сумма при начислении декурсивных процентов будет равна

$$S = P(1+i)^n \qquad 3.1$$

Сумма начисленных процентов *I* за весь период составляет:

$$I = S - P = P\left((1+i)^n - 1\right). \qquad 3.2$$

Как показано выше, рост по сложным процентам представляет собой процесс, соответствующий геометрической прогрессии, первый член которой равен *P,* а знаменатель — (1 + i). Последний член прогрессии равен наращенной сумме в конце срока ссуды. Графическая иллюстрация наращения по сложным процентам представлена на рис. 3.1.

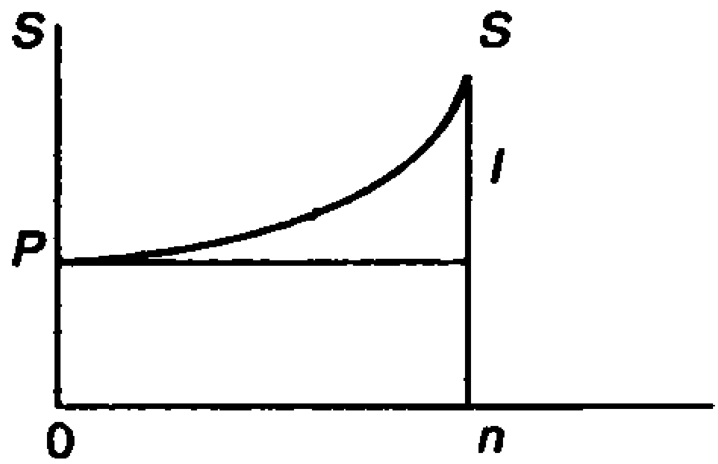

Рисунок 3.1- Наращение по сложным процентам

Величину $(1 + i)^n$ называют *множителем наращения (compound interest factor)* по сложным процентам. Значения этого множителя для целых чисел n чаще приводятся в *таблицах сложных процентов.*

Точность расчета множителя в практических расчетах определяется допустимой степенью округления наращенной суммы (до последней копейки, рубля и т.д.).

Пример 3.1 Сумма 200 тыс. руб. инвестируется под процентную ставку 15 % годовых: 1) на 3 месяца; 2) на 6 месяцев; 3) на 1 год; 4) на 6 лет; 5) на 9 лет. Найти наращенные суммы по схеме простых и сложных процентов.

Решение.

1. По условию задачи n_1=0,25 года, n_2=0,5 года, n_3=1 год, n_4=6 лет, n_5=9 лет, P=200000 руб., i=0,15. При наращении простых процентов по формуле (1.2) получим:

1.1. $S = 200000 \; (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}15) = 207500$ руб.

1.2. $S = 200000 \; (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}15) = 215000$ руб.

1.3. $S = 200000 \; (1 + 1 \cdot 0{,}15) = 230000$ руб.

1.4. $S = 200000 \; (1 + 6 \cdot 0{,}15) = 380000$ руб.

1.5. $S = 200000 \; (1 + 9 \cdot 0{,}15) = 470000$ руб.

2. При наращении сложных процентов по формуле (2.1) получим:

2.1. $S = 200000 \; (1 + 0{,}15)^{0{,}25} = 207112$ руб.

2.2. $S = 200000 \; (1 + 0{,}15)^{0{,}5} = 214476$ руб.

2.3. $S = 200000 \quad (1 + 0{,}15) = 230000$ руб.

2.4. $S = 200000 \quad (1 + 0{,}15)^6 = 462612$ руб.

2.5. $S = 200000 \quad (1 + 0{,}15)^9 = 703575$ руб.

Для владельца капитала более выгодной является схема простых декурсивных процентов, если срок финансовой операции менее одного года; схема сложных декурсивных процентов – если срок превышает один год. При однократном начислении процентов и продолжительности периода один год обе схемы дают равные результаты.

Как видим, величина множителя наращения зависит от двух параметров - i и n. Следует отметить, что при большом сроке наращения даже небольшое изменение ставки заметно влияет на величину множителя.

В свою очередь очень большой срок приводит к устрашающим результатам даже при небольшой процентной ставке. Очевидно, что очень высокая сложная процентная ставка может быть применена только для короткого срока. В противном случае результат наращения окажется бессмысленным.

Сравнение роста по сложным и простым процентам. Для того чтобы сопоставить результаты наращения по простым и сложным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Нетрудно убедиться в том, что при одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. В самом деле, при условии, что временная база для начисления процентов одна и та же, находим следующие соотношения:

- для срока меньше года простые проценты больше сложных:

$(1 + ni) > (1 + i)^n$,

- для срока больше года сложные проценты больше простых:

$(1 + ni) < (1 + i)^n$,

- для срока, равного году, множители наращения равны друг другу.

Заметим также, что при $n > 1$ с увеличением срока различие в последствиях применения простых и сложных процентов усиливается. Графическую иллюстрацию соотношения множителей наращения см. на рис. 3.2.

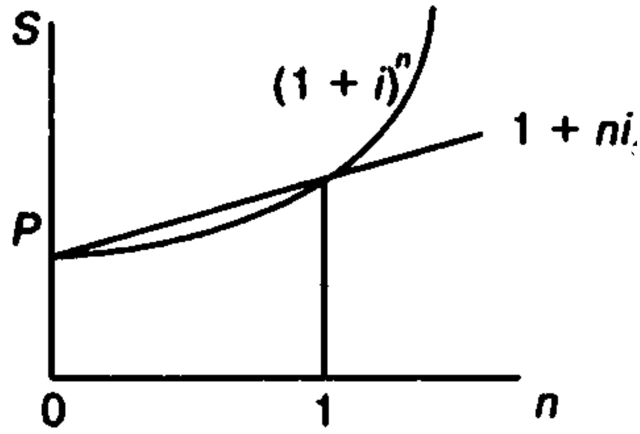

Рисунок 3.2 - Соотношение множителей наращения

Формула наращения по сложным процентам (3.1) получена для годовой процентной ставки и срока, измеряемого в годах. Однако ее можно применять и при других периодах начисления.

В этих случаях i означает ставку за один период начисления (месяц, квартал и т.д.), а n - число таких периодов. Например, если i - ставка за полугодие, то n - число полугодий и т.д.

Формула (2.1) предполагает постоянную ставку на протяжении всего срока начисления процентов.

Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет модернизировать «классическую» схему, например, с помощью применения *плавающих ставок (floating rate).* Естественно, что расчет на перспективу по таким ставкам весьма условен.

Иное дело - расчет постфактум. В этом случае, а также тогда, когда изменения размеров ставок фиксируются в контракте, общий множитель наращения определяется как произведение частных, т.е., если используются *переменные значения* процентной ставки во времени, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \dots (1+i_\ell)^{n_\ell} = P \prod_{k=1}^{\ell}(1+i_k)^{n_k}, \qquad 3.3$$

где $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ – последовательные значения переменной процентной ставки,

$n_1, n_2, \dots, n_\ell$ – продолжительность периодов (лет), к которым приурочены соответствующие значения процентной ставки,

ℓ – число значений процентной ставки.

Пример 3.2 В банке получена ссуда в размере 400 тыс. руб. на 8 лет на следующих условиях: для первых трех лет процентная ставка равна 10% годовых, на следующий год устанавливается маржа в размере 1%, а на последующие годы маржа равна 1,5%. Найдите сумму, которая должна быть возвращена банку по окончании срока ссуды при ежегодных начислениях сложных процентов.

Решение. Поскольку имеем дело с переменной процентной ставкой, то P=400000 руб., n_1=3, n_2=1, n_3=4, i_1=0,10, i_2=0,11, i_3=0,115. Используя формулу

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \dots (1+i_\ell)^{n_\ell} = P \cdot \prod_{k=1}^{\ell}(1+i_k)^{n_k}$$, получим:

$$S = 400000 \ (1+0{,}10)^3(1+0{,}11)(1+0{,}115)^4 = 913398{,}92 \text{ руб.}$$

Часто срок в годах для начисления процентов не является целым числом. В правилах ряда коммерческих банков для некоторых операций проценты начисляются только за целое число лет или других периодов начисления. Дробная часть периода отбрасывается. В большинстве же случаев учитывается полный срок. При «этом применяют два метода. Согласно первому, назовем его *общим (обычным)*, расчет ведется непосредственно по формуле (2.1). Второй, *смешанный*, метод предполагает начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока по формуле простых процентов:

а) общий $S = P(1+i)^{a+b}$, 3.4

б) смешанный $S = P(1+i)^a(1+bi)$, 3.5

где $n = a + b$ – срок финансовой операции, лет; a – целое число лет, b – дробная часть года.

Аналогичный метод применяется и в случаях, когда периодом начисления является полугодие, квартал или месяц, а также при использовании учетной ставки d.

Множитель наращения по смешанному методу оказывается несколько больше, чем по общему.

Пример 3.3 Предприниматель получил в банке ссуду в размере 50 тыс. руб. на 39 месяцев под процентную ставку 17% годовых на условиях начисления процентов: а) ежегодного; б) полугодичного. Какую сумму предприниматель должен будет вернуть банку по истечении срока при использовании схемы: сложных процентов, смешанной?

Решение.

1. Так как срок финансовой операции выражается в месяцах, а проценты в первом варианте начисляются ежегодно, т.е. каждые 12 месяцев, то, разделив 39 месяцев на 12 месяцев, получим общее количество периодов начисления процентов или срок ссуды в годах:

$n = a + b = \frac{39}{12} = 3\frac{3}{12} = 3{,}25$ года, где a = 3, b=0,25. Остальные параметры ссуды составят: P = 50000 руб., i = 0,17.

Наращенная сумма будет равна:

по схеме сложных процентов

$$S = P(1+i)^{a+b} = 50000\ (1+0{,}17)^{3{,}25} = 83286{,}39 \text{ руб.};$$

по смешанной схеме

$$S = P(1+i)^{a}(1+bi) = 50000\ (1+0{,}17)^{3}(1+0{,}25\cdot 0{,}17) = 83484{,}08 \text{ руб.}$$

2. Так как срок финансовой операции выражается в месяцах, а проценты во втором варианте начисляются по полугодиям, т.е. каждые 6 месяцев, то, разделив 39 месяцев на 6 месяцев, получим общее количество периодов начисления процентов или срок ссуды в полугодиях:

$mn = a + b = \frac{39}{6} = 6{,}5$ полугодий, где a=6 (a – целое количество периодов начисления процентов), b=0,5 (b – дробная часть одного периода). Наращенная сумма составит:

по схеме сложных процентов

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a+b} = 50000\ \left(1+\frac{0{,}17}{2}\right)^{6{,}5} = 84969{,}55 \text{ руб.};$$

по смешанной схеме

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a}\left(1+b\frac{j}{m}\right) = 50000\ \left(1+\frac{0{,}17}{2}\right)^{6}\left(1+0{,}5\frac{0{,}17}{2}\right) = 85040{,}24 \text{ руб.}$$

По смешанной схеме итоговая сумма несколько больше, чем при начислении только сложными процентами, кроме того, чем чаще начисляются декурсивные проценты, тем больше наращенная сумма. Значит для кредитора (банка) самым выгодным является последний вариант, а для заемщика (предпринимателя) первый вариант.

Номинальная и эффективная ставки

Номинальная ставка. Проценты капитализируются не только один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам, месяцам. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов.

Параметр n в этих условиях будет означать число периодов начисления, а под ставкой i следует понимать ставку за соответствующий период.

Например, при поквартальном начислении процентов за 5 лет общее число периодов начисления составит 5 х 4 = 20. Множитель наращения по квартальной (сложной) ставке 8% равен в этом случае $1{,}08^{20} = 4{,}6609$.

В контрактах при этом указывается не ставка за период начисления (i), а годовая ставка (j), одновременно указывается период начисления процентов. Годовая процентная ставка j называется *номинальной*.

Формула наращения процентов при этом имеет вид:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}, \qquad 3.6$$

где m – число начисления процентов в году (*ежегодное* начисление $m = 1$; *по полугодиям,* $m = 2$; *ежеквартальное,* $m = 4$; *ежемесячное,* $m = 12$; *ежедневное*, m=365).

Пример 3.4 Клиент имеет в коммерческом банке первоначальную сумму 100 тыс. руб. Годовая сложная процентная ставка составляет 8%.

Определить наращенную сумму, если периоды наращения составляют: а) 90 дней; б) 9 месяцев; в) один год; г) пять лет.

Задачу решить при условии, что начисление процентов производилось: а) один раз в году; б) ежеквартально.

Определить, через какой срок первоначальная сумма денег клиента удвоится.

Решение. P=100000 руб.; i=0,08; $n_1 = \frac{90}{360} = 0{,}25$; $n_2 = \frac{9}{12} = 0{,}75$; $n_3 = 1$; $n_4 = 5$; S=?

1. Наращенная сумма при ежегодном начислении процентов (m=1) будет определяться:

$$S = P(1 + i)^n.$$

а) $S_1 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08)^{0,25} = 101943$ руб.;

б) $S_2 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08)^{0,75} = 105942$ руб.;

в) $S_3 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08) = 108000$ руб.;

г) $S_4 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08)^5 = 146933$ руб.

2. Наращенная сумма при ежеквартальном начислении процентов (m=4) будет определяться:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{n \cdot m}.$$

а) $S_1 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{0{,}25 \cdot 4} = 102000$ руб.;

б) $S_2 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{0{,}75 \cdot 4} = 106121$ руб.;

в) $S_3 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{4} = 108243$ руб.;

г) $S_4 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{5 \cdot 4} = 148595$ руб.

Вывод: с увеличением частоты начислений процентов в течение срока ссуды, при прочих равных условиях, возрастает и наращенная сумма.

Наибольшую “прибавку” в наращении дает переход от ежегодного начисления процентов к полугодовому, наименьший эффект — переход от ежемесячного
к ежедневному.

Найдем срок, необходимый для удвоения первоначального капитала (S:P=2) при наращении по:

а) ставке сложных процентов

$$n = \frac{\ell n(S:P)}{\ell n(1+i)} = \frac{\ell n 2}{\ell n 1{,}08} = 9 \text{ лет;}$$

б) номинальной ставке сложных процентов

$$n = m\frac{\ell n(S:P)}{m \cdot \ell n(1+\frac{j}{m})} = \frac{\ell n 2}{4 \cdot \ell n(1+\frac{0{,}08}{4})} = 8{,}75 \text{ года;}$$

Значит, первоначальная сумма возрастает в два раза за срок 8,75 или 9 лет.

Эффективная ставка. Введем теперь новое понятие — *действительная,* или *эффективная ставка процента (effective rate).* Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Иначе говоря, эффективная ставка — это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке j/m.

Обозначим эффективную ставку через i. По определению множители наращения по двум ставкам (эффективной и номинальной при m-разовом начислении) должны быть равны друг другу:

$$(1 + \mathrm{i})^n = (1 + \frac{j}{m})^{mn} \qquad 3.7$$

Из равенства множителей наращения следует

$$\mathrm{i} = (1 + \frac{j}{m})^{mn} - 1 \qquad 3.8$$

Эффективная ставка при $m > 1$ больше номинальной.

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. *Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении*. Отсюда, кстати, следует, что разные по величине номинальные ставки оказываются эквивалентными, если соответствующие им эффективные ставки имеют одну величину.

Наращение по *сложной учетной* ставке осуществляется по формулам:

а) при ежегодном начислении процентов (m=1)

$$S = \frac{P}{(1 - d)^n} = P(1 - d)^{-n}; \qquad 3.9$$

б) при m-разовом начислении процентов (m>1)

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}} = P(1 - \frac{f}{m})^{-mn}. \qquad 3.10$$

Если используются *переменные значения* учетной ставки, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1 - d_1)^{-n_1}(1 - d_2)^{-n_2} \dots (1 - d_\ell)^{-n_\ell} = P \prod_{k=1}^{\ell} (1 - d_k)^{-n_k}. \qquad 3.11$$

Пример 3.5 Финансовой организацией выдан клиенту кредит в размере 250 тыс. руб. по учетной ставке 10 % годовых. Определить наращенную сумму долга, если срок возврата кредита составляет: а) шесть месяцев; б) два года. Проценты начисляются: а) один раз в году; б) по полугодиям.

Решение.

По условию задачи P=250000 руб.; d=0,1; $n_1 = \frac{6}{12} = 0{,}5$; $n_2 = 2$.

1. Наращенная сумма сложных антисипативных процентов при ежегодном начислении процентов (m=1) будет определяться:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}.$$

а) $S_1 = \frac{250000}{(1-0{,}1)^{0{,}5}} = 263523$ руб.; б) $S_2 = \frac{250000}{(1-0{,}1)^2} = 308642$ руб.

2. Наращенная сумма сложных антисипативных процентов при полугодовом начислении процентов (m=2) будет определяться:

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}.$$

а) $S_1 = \frac{250000}{\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right)^{2\cdot 0{,}5}} = 263158$ руб.; б) $S_2 = \frac{250000}{\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right)^{2\cdot 2}} = 306934$ руб.

Вывод: при увеличении частоты начислений процентов в году наращенная сумма антисипативных процентов уменьшается при прочих равных условиях в отличие от декурсивных процентов.

Дисконтирование по сложной ставке процента может быть также математическим и банковским.

Математическое дисконтирование заключается в определении современной величины капитала P по значению наращенной суммы S с использованием сложной ставки декурсивных процентов. Современная стоимость капитала составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}; \qquad 3.12$$

б) при m-разовом начислении процентов в году

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}. \qquad 3.13$$

Банковское дисконтирование по сложной учетной ставке может быть использовано при учете среднесрочных и долгосрочных долговых обязательств. Дисконтированная величина долгового обязательства составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P = S(1-d)^n; \qquad 3.14$$

б) при m-разовом начислении процентов

$$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}. \qquad 3.15$$

Пример 3.6 Долговое обязательство на сумму 120 тыс. руб. должно быть погашено через 5 лет. Владелец долгового обязательства учел его в банке по сложной ставке 9,5% годовых. Найти сумму дисконта, полученную банком если используется: а) учетная ставка; б) процентная ставка.

Решение:

а) При использовании банковского дисконтирования: S=120000 руб.; d=0,095; n=5.

$$P' = S(1-d)^n;$$

$$P' = 120000 \cdot (1-0{,}095)^5 = 72849 \text{ руб.};$$

$$D' = S - P' = 120000 - 72849 = 47151 \text{ руб.}$$

б) При использовании математического дисконтирования: S=120000 руб.; i=0,095; n=5.

$$P' = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{120000}{(1+0{,}095)^5} = 76227 \text{ руб.};$$

$$D' = S - P' = 120000 - 76227 = 43773 \text{ руб.}$$

Вывод: при банковском дисконтировании владелец векселя получит 72849 руб. а при математическом – 76227 руб. Соответственно банку будет принадлежать сумма в 47151 руб. или 43773 руб.

Таким образом, для клиента выгоднее учитывать вексель по процентной ставке, а для банка – по учетной ставке.

При разработке условий финансовых операций часто сталкиваются с необходимостью решения обратных задач — расчетом продолжительности ссуды или уровня процентной ставки.

Для простых процентов эти задачи рассмотрены в гл. 2. Обратимся к операциям со сложными ставками и решим уравнения, связывающие P и S, относительно интересующих нас величин.

Полученные формулы приводятся без доказательств, поскольку вывод их элементарен.

Таблица 3.1 - Определение срока финансовой операции и ставки процента

Декурсивные проценты		Антисипативные проценты	
m=1	m>1	m=1	m>1
$n=\frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)}$ 3.16	$n=\frac{\ln\frac{S}{P}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ 3.18	$n=\frac{\ln\frac{P}{S}}{\ln(1-d)}$ 3.20	$n=\frac{\ln\frac{P}{S}}{m\ln\left(1-\frac{f}{m}\right)}$ 3.22
$i=\sqrt[n]{\frac{S}{P}}-1$ 3.17	$j=m\left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}}-1\right)$ 3.19	$d=1-\sqrt[n]{\frac{P}{S}}$ 3.21	$f=m\left(1-\sqrt[mn]{\frac{P}{S}}\right)$ 3.23

Непрерывное наращение

В практических финансово-кредитных операциях непрерывное наращение, т.е. наращение за бесконечно малые отрезки времени, применяется крайне редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например при обосновании и выборе инвестиционных решений, в финансовом проектировании.

С помощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например использовать изменяющиеся по определенному закону процентные ставки.

При *непрерывном* наращении процентов применяют *силу роста*, которая характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная сила роста (b) представляет собой номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$. Наращенная сумма капитала составит

$$S = Pe^{bn}, \qquad 3.24$$

а современная стоимость

$$P = \frac{S}{e^{bn}}. \qquad 3.25$$

Пример 3.7 Сумма, на которую начисляются непрерывные проценты, равна 2 млн. руб., сила роста 10% , срок 5 лет. Наращенная сумма составит

$$S = 2000000 \times \mathrm{e}^{0,1\times 5} = 3297744{,}25 \text{ руб.}$$

Непрерывное наращение по ставке = 10% равнозначно наращению за тот же срок дискретных сложных процентов по годовой ставке. Находим

$$i = \mathrm{e}^{0,1} - 1 = 0{,}10517$$

В итоге получим

$$S = 2000000(1 + 0{,}10517)^5 = 3297744{,}25 \text{ руб.}$$

Переменная сила роста (b_t) изменяется во времени, следуя закону, представленному в виде непрерывной функции времени $b_t = f(t)$.

Линейная функция:

$$b_t = b_0 + at \quad , \qquad 3.26$$

где b_0 – начальное значение силы роста, a – прирост силы роста в единицу времени.

Наращенная сумма капитала составит:

$$S = Pe^{b_0 n + \frac{an^2}{2}}, \qquad 3.27$$

а современная стоимость:

$$P = \frac{S}{e^{b_0 n + \frac{an^2}{2}}}. \qquad 3.28$$

Экспоненциальная функция:

$$b_t = b_0 a^t, \qquad 3.29$$

где b_0 – начальное значение силы роста, a – постоянный коэффициент роста.

Наращенная сумма капитала составит:

$$S = Pe^{\frac{b_0}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}, \qquad 3.30$$

а современная стоимость:

$$P = \frac{S}{e^{\frac{b_0}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}} . \qquad 3.31$$

Таблица 2.2 - Определение срока финансовой операции и силы роста

Постоянная сила роста	Переменная сила роста (экспоненциальная)
$n = \dfrac{\ln \dfrac{S}{P}}{b}$ 3.32	$n = \dfrac{\ln \left(\dfrac{\ln a \ln \dfrac{S}{P}}{b_0} + 1 \right)}{\ln a}$ 3.34
$b = \dfrac{\ln \dfrac{S}{P}}{n}$ 3.33	$b_0 = \dfrac{\ln a \ln \dfrac{S}{P}}{a^n - 1}$ 3.35

Определение доходности операций в условиях инфляции

Инфляционные процессы в значительной степени влияют на эффективность любой финансово-кредитной операции. Наиболее простым является следующий алгоритм расчета наращенной суммы и дополнительных параметров с учетом влияния инфляции.

1). Индекс инфляции I_p за весь период в n лет при известных темпах прироста инфляции за составляющие его подпериоды:

$$I_p = \left(1 + \frac{h_1}{100}\right)^{n_1} \left(1 + \frac{h_2}{100}\right)^{n_2} \dots \left(1 + \frac{h_\ell}{100}\right)^{n_\ell} = \prod_{\kappa=1}^{\ell} \left(1 + \frac{h_\kappa}{100}\right)^{n_\kappa}, \qquad 3.36$$

где $h_1, h_2, \dots, h_\ell$ – темпы прироста инфляции за соответствующие подпериоды, %;

$n_\kappa, \kappa = 1, 2, \dots, n_\ell$ – период действия соответствующего темпа прироста инфляции, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = \sum_{\kappa=1}^{\ell} n_\kappa$.

2). Наращенные суммы с учетом инфляции:

Наращенная сумма с учетом *влияния инфляции* (C) по схеме *простых* процентов определяется по формулам:

а) декурсивные проценты

$$C = \frac{P(1 + ni)}{I_p}; \qquad 3.37$$

б) антисипативные проценты

$$C = \frac{P(1 - nd)^{-1}}{I_p} = \frac{P}{I_p(1 - nd)}, \qquad 3.38$$

где I_p – *индекс цен* за соответствующий период n (эту величину также называют *индексом инфляции* за период n).

Соответственно, *темп прироста инфляции* h_n за период времени n лет составит:

$$h_n = (I_p - 1)\,100\ . \qquad 3.39$$

Наращенная сумма с учетом *влияния инфляции* по схеме *сложных* процентов определяется по формулам:

а) декурсивные проценты

$$C = \frac{P(1 + i)^n}{I_p},\ \text{при } m{=}1; \quad C = \frac{P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}}{I_p},\ \text{при } m{>}1; \qquad 3.40$$

б) антисипативные проценты

$$C = \frac{P(1 - d)^{-n}}{I_p} = \frac{P}{I_p(1 - d)^n},\ \text{при } m{=}1; \qquad 3.41$$

$$C = \frac{P\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-mn}}{I_p} = \frac{P}{I_p\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}},\ \text{при } m{>}1; \qquad 3.42$$

в) непрерывные проценты

$$C = \frac{Pe^{bn}}{I_p}. \qquad 3.43$$

3). *Реальная доходность* финансовой операции с учетом инфляции измеряется с помощью соответствующих ставок процента:

а) по схеме простых процентов

$$i_{реальн.} = \frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{I_p} - 1\right); \quad d_{реальн.} = \frac{1-(1-nd)I_p}{n}; \qquad 3.44$$

б) по схеме сложных процентов

$$i_{реальн.} = \frac{(1+i)}{\sqrt[n]{I_p}} - 1, \; d_{реальн.} = 1-(1-d)\sqrt[n]{I_p}, \text{ при } m=1; \qquad 3.45$$

$$j_{реальн.} = m\left(\frac{1+\frac{j}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}} - 1\right), \quad f_{реальн.} = m\left(1-\left(1-\frac{f}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p}\right), \text{ при } m>1; \qquad 3.46$$

$$b_{реальн.} = \delta - \frac{1}{n}\ln I_p, \; m \to \infty. \qquad 3.47$$

4). *Минимальная* ставка процента, нейтрализующая действие инфляции, определяется из равенства индекса инфляции и соответствующего множителя наращения. Если начисляются сложные декурсивные проценты по ставке i за n лет, а индекс инфляции за этот же период составил I_p, то:

$$(1+i)^n = I_p, \text{ откуда } i = \sqrt[n]{I_p} - 1. \qquad 3.48$$

Для обеспечения реального наращения капитала в условиях инфляции должно выполняться неравенство

$$i > \sqrt[n]{I_p} - 1.$$

Все остальные минимальные ставки рассчитываются путем приравнивания каждого соответствующего множителя наращения к индексу инфляции.

5). В целях компенсации потерь от снижения покупательной способности денег ставку процента корректируют с учетом темпа инфляции.

Величина корректирующей *брутто-ставки* r, которая обеспечивает реальную доходность финансовой операции по заданной ставке процента, определяется по формулам:

а) по схеме простых процентов

$$r_{i_{np}} = \frac{(1+ni)I_p - 1}{n}; \quad r_{d_{np}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1-nd}{I_p}\right); \qquad 3.49$$

б) по схеме сложных процентов

$$r_{i_{сл}} = (1+i)\sqrt[n]{I_p} - 1, \quad r_{d_{сл}} = 1 - \frac{1-d}{\sqrt[n]{I_p}}, \text{ при } m=1; \qquad 3.50$$

$$r_j = m\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p} - 1\right), \quad r_f = m\left(1 - \frac{1-\frac{f}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}}\right), \text{ при } m>1; \qquad 3.51$$

$$r_b = b + \frac{1}{n}\ln I_p, \quad m \to \infty. \qquad 3.52$$

Пример 3.8 На сумму 90 тыс. руб. в течение 3,5 лет ежеквартально начисляются сложные проценты по ставке 14% годовых. За этот же период цены росли ежемесячно в течение первого года на 1%, в течение второго года – на 1,1%, в течение третьего – на 1,3%, последние полгода – на 1,1%.

Определить: покупательную способность наращенной суммы через 3,5 года; ставку реальной доходности финансовой операции; минимальную положительную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала. Какова должна быть банковская ставка, которая обеспечит реальную доходность операции 14% годовых при ежеквартальном начислении процентов?

Решение. Имеем: P=90000 руб.; n=3,5 года или 42 месяца, n_1=n_2=n_3=12 месяцев, n_4=6 месяцев; h_1=1, h_2=1,1, h_3=1,3, h_4=1,1; m=4; j=0,14.

1). Найдем индекс инфляции за 3,5 года или 42 месяца по формуле (3.36)

$$I_p = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{12}\left(1+\frac{1,1}{100}\right)^{12}\left(1+\frac{1,3}{100}\right)^{12}\left(1+\frac{1,1}{100}\right)^{6} = 1,6021 .$$

2). Определяем покупательную способность наращенной суммы с учетом инфляции. Так как *m*=4 (т.е. *m*>1), то

$$C = \frac{P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{I_p} = \frac{90000\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{4\cdot 3,5}}{1,6021} = 90932,22 \text{ руб.}$$

Таким образом, реальная наращенная сумма с учетом инфляции оказалась больше первоначальной только на 932,22 руб.

3). Ставка реальной доходности наращения составит:

$$j_{реальн.} = m\left(\frac{1+\frac{j}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}} - 1\right) = 4\left(\frac{1+\frac{0,14}{4}}{\sqrt[4\cdot 3,5]{1,6021}} - 1\right) = 0,0029 \text{ или } 0,29\%,$$

т.е. при исходных параметрах финансовая операция является малоприбыльной.

4). Минимальная ставка, компенсирующая влияние инфляции составит:

$$\left(1+\frac{j_{полож.}}{m}\right)^{mn} = I_p , \qquad 3.53$$

откуда $j_{полож.} = m\left(\sqrt[mn]{I_p} - 1\right) = 4\left(\sqrt[4\cdot 3,5]{1,6021} - 1\right) = 0,137$ или 13,7%.

Таким образом, для обеспечения реального наращения капитала номинальная процентная ставка должна превышать 13,7% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

5). Брутто-ставка, обеспечивающая реальную доходность 14% годовых с поквартальным начислением процентов, при данных темпах инфляции будет определяться по формуле:

$$r_j = m\left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p} - 1\right) = 4\left(\left(1 + \frac{0,14}{4}\right)\sqrt[4 \cdot 3,5]{1,6021} - 1\right) = 0,2817$$ или 28,17%.

Это означает, что если банк увеличит номинальную процентную ставку до 28,17% годовых, то влияние инфляции будет полностью компенсировано.

Задачи для самостоятельного решения

3.1 Определенная сумма инвестируется под годовую процентную ставку: а) на 30 дней; б) 80 дней; в) на 3 месяца; г) на 6 месяцев; д) 1 год; е) 5 лет; ж) 8 лет. Найдите наращенные суммы при условии ежегодного начисления сложных и простых процентов.

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %	**Вариант**	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %
1	800	16,0	**16**	200	17,4
2	280	18,5	**17**	300	15,0
3	370	16,3	**18**	400	16,2
4	690	14,9	**19**	1000	17,0
5	1100	15,7	**20**	600	15,9
6	1850	19,0	**21**	700	15,2
7	680	18,0	**22**	890	16,4
8	390	14,1	**23**	900	15,2
9	485	13,7	**24**	970	14,9
10	920	18,2	**25**	850	16,4
11	590	19,7	**26**	750	14,8
12	630	14,8	**27**	410	17,5
13	380	13,7	**28**	650	16,9
14	480	15,9	**29**	870	15,7
15	510	16,8	**30**	710	18,5

3.2 Депозит в 800 тыс. руб., 934 тыс. руб. положен в банк на: 1 год; 3 года; 5 лет под процентную ставку: 8,0%, 12,0% годовых. Найдите сумму начисленных процентов и наращенную сумму, если ежегодно начисляются сложные проценты.

3.3 На определенную сумму кредита в течении 6 лет, 8 лет, 14 лет начисляются проценты по соответствующей ставке на следующих условиях: первые 4 года ставка первоначальна, каждые следующие 2 года ставка увеличивается на определенную величину. Определить наращенную к концу срока сумму, если проценты начислялись: один раз в году; ежеквартально; каждые два года.

Вари-ант	Сумма, тыс. руб.	Первона-чальная ставка, %	Увели-чение ставки, %	**Вари-ант**	Сумма, тыс. руб.	Первона-чальная ставка, %	Увели-чение ставки, %
1	800	17,4	1,1	**16**	200	16,0	0,8
2	280	15,0	0,9	**17**	300	18,5	1,0
3	370	16,2	1,7	**18**	400	16,3	1,1
4	690	17,0	2,1	**19**	1000	14,9	0,7
5	1100	15,9	0,8	**20**	600	15,7	1,2
6	1850	15,2	0,5	**21**	700	19,0	1,9
7	680	16,4	1,0	**22**	890	18,0	2,0
8	390	15,2	1,4	**23**	900	14,1	0,8
9	485	14,9	0,6	**24**	970	13,7	0,9
10	920	16,4	1,9	**25**	850	18,2	1,0
11	590	14,8	1,4	**26**	750	19,7	1,7
12	630	17,5	2,1	**27**	410	14,8	0,6
13	380	16,9	0,5	**28**	650	13,7	0,9
14	480	15,7	0,9	**29**	870	15,9	0,7
15	510	18,5	1,7	**30**	710	16,8	1,5

3.4 Банк предоставил ссуду на 33 месяца на следующих условиях: а) ежегодного начисления процентов; б) ежеквартального начисления процентов; в) полугодичного начисления процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку по истечении срока ссуды при использовании схемы сложных процентов и при использовании смешанной схемы? Какая схема менее выгодна для банка?

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %	**Вариант**	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %
1	700	16,0	**16**	460	17,4
2	390	18,5	**17**	370	15,0
3	470	16,3	**18**	520	16,2
4	790	14,9	**19**	1200	17,0
5	900	15,7	**20**	610	15,9
6	1150	19,0	**21**	760	15,2
7	780	18,0	**22**	820	16,4
8	290	14,1	**23**	840	15,2
9	585	13,7	**24**	930	14,9
10	620	18,2	**25**	810	16,4
11	390	19,7	**26**	680	14,8
12	430	14,8	**27**	480	17,5
13	580	13,7	**28**	570	16,9
14	680	15,9	**29**	690	15,7
15	310	16,8	**30**	770	18,5

3.5 Банк предоставил ссуду на 37 месяцев под процентную ставку 20% годовых на условиях единовременного возврата основной суммы долга и начислении сложных процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку, если проценты начисляются: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально. Используйте схему сложных процентов и смешанную схему.

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	**Вариант**	Ссуда, тыс. руб.
1	757	**16**	289
2	543	**17**	487
3	345	**18**	456
4	398	**19**	280
5	587	**20**	576
6	567	**21**	274
7	587	**22**	674
8	675	**23**	619
9	690	**24**	805
10	765	**25**	243
11	698	**26**	849
12	481	**27**	703
13	859	**28**	804
14	294	**29**	386
15	849	**30**	523

3.6 Предприниматель взял в банке ссуду под сложную процентную ставку 16% годовых. Через 2 года и 7 месяцев кредит был погашен. Определите наращенную сумму кредита, если проценты начислялись: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) каждые два месяца; г) ежеквартально; в) ежемесячно.

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	**Вариант**	Ссуда, тыс. руб.
1	706	**16**	282
2	586	**17**	354
3	479	**18**	439
4	491	**19**	757
5	803	**20**	668
6	950	**21**	705
7	580	**22**	899
8	690	**23**	950
9	568	**24**	910
10	956	**25**	856
11	596	**26**	776
12	657	**27**	445
13	387	**28**	665
14	434	**29**	824
15	558	**30**	713

3.7 Предприниматель получил в банке ссуду в размере 830 тыс. руб. сроком на 7 лет, 12 лет на следующих условиях: для первых двух лет процентная ставка равна 14% годовых, на следующие три года устанавливается маржа в размере 0,5% и на последующие годы маржа равна 0,8%.

Найдите сумму, которую предприниматель должен вернуть в банк по окончании каждого срока ссуды при ежегодном начислении сложных процентов.

3.8 На вклад в конце каждого полугодия начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. За какой срок первоначальный капитал увеличится в четыре раза? Как изменится результат, если сложные проценты начисляются ежемесячно?

3.9 Вкладчик хотел бы за 6 лет удвоить сумму, помещаемую в банк на депозит. Какую годовую номинальную процентную ставку должен предложить банк при начислении сложных процентов ежеквартально?

3.10 В банк вложены деньги в сумме на срок: 2 года; 5 лет под соответствующую процентную ставку с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите наращенную сумму и проценты. Как изменится итоговая наращенная сумма и сумма процентов при ежемесячном и полугодовом начислении сложных процентов? Какой вывод можно сделать о частоте начисления сложных процентов?

Вариант	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %	**Вариант**	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %
1	700	10,0	**16**	460	7,4
2	390	11,5	**17**	370	10,0
3	470	10,3	**18**	520	9,2
4	790	10,9	**19**	1200	11,0
5	900	9,7	**20**	610	8,9
6	1150	9,0	**21**	760	11,2
7	780	8,0	**22**	820	10,4
8	290	10,1	**23**	840	10,2
9	585	10,7	**24**	930	10,9
10	620	11,2	**25**	810	11,4
11	390	10,7	**26**	680	10,8
12	430	11,8	**27**	480	10,5
13	580	10,7	**28**	570	10,9
14	680	10,9	**29**	690	9,7
15	310	10,8	**30**	770	11,5

3.11 За какой срок исходная первоначальная сумма возрастет до заданной, если сложные проценты по ставке 11% годовых начисляются: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; г) каждые два месяца; д) ежемесячно?

Вари-ант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	**Вари-ант**	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
1	210	289	**16**	350	490
2	190	278	**17**	360	476
3	180	274	**18**	240	312
4	350	458	**19**	410	523
5	270	360	**20**	460	564
6	390	489	**21**	835	1199
7	440	551	**22**	600	871
8	630	724	**23**	750	978
9	350	453	**24**	230	299
10	270	357	**25**	240	367
11	820	1098	**26**	410	534
12	870	1265	**27**	850	1099
13	190	293	**28**	765	999
14	250	389	**29**	800	1124
15	640	789	**30**	650	913

3.12 Вы имеете возможность получить кредит либо на условиях 17% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов, либо на условиях 19% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Какой вариант предпочтительнее?

3.13 На вашем счете в банке 80 тыс. руб. Банк платит 10% годовых. Вам предлагают принять участие всем вашим капиталом в некоторой финансовой сделке. Представленные экономические расчеты показывают, что в случае согласия через пять лет ваш капитал возрастет до 140 тыс. руб. Стоит ли принимать это предложение?

3.14 Клиент имеет в коммерческом банке первоначальную сумму «P» тыс. руб. Годовая сложная процентная ставка составляет «i» процентов.

Определить наращенную сумму, если периоды наращения составляют: а) 70 дней; б) 100 дней; в) 6 месяцев; г) 8 месяцев; д) один год; е) три года; ж) шесть лет. Задачи решить при условии, что начисление процентов производилось: а) один раз в году; б) каждые два месяца; в) ежеквартально; г) ежемесячно. Определить, через какой срок первоначальная сумма денег клиента удвоится; увеличится в три раза.

№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, % (i)
1	350	10,0	**14**	455	7,5
2	275	10,5	**15**	360	7,0
3	400	11,0	**16**	520	8,9
4	325	11,5	**17**	689	6,5
5	530	12,0	**18**	491	5,9
6	458	9,6	**19**	370	9,1
7	490	11,5	**20**	545	8,2
8	678	10,3	**21**	759	5,9
9	720	10,1	**22**	820	8,1
10	810	7,6	**23**	912	7,8
11	435	9,5	**24**	692	9,4
12	240	8,0	**25**	574	7,3
13	245	8,5	**26**	611	9,6

3.15 Вы имеете на счете определенную сумму хотели бы удвоить эту сумму через пять лет. Какое значение сложной процентной ставки удовлетворяет заданным условиям при: а) ежегодном начислении процентов; б) полугодичном начислении; в) ежеквартальном начислении; г) ежемесячном начислении.

Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.	Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.
1	800	**16**	200
2	280	**17**	300
3	370	**18**	400
4	690	**19**	1000
5	1100	**20**	600
6	1850	**21**	700
7	680	**22**	890
8	390	**23**	900
9	485	**24**	970
10	920	**25**	850
11	590	**26**	750
12	630	**27**	410
13	380	**28**	650
14	480	**29**	870
15	510	**30**	710

3.16 Клиент поместил в банк 250 тыс. руб. на условиях начисления сложных процентов по процентной ставке 10% годовых. Через 1 год 9 месяцев клиент снял со счета 80 тыс. руб., еще через 3 года положил на свой счет 40 тыс. руб., а после этого через 2 года 3 месяца он закрыл счет. Определите сумму, полученную клиентом при закрытии счета.

3.17 По условиям финансового контракта на депозит, положенный в банк на 5 лет, начисляются проценты по сложной учетной ставке. Определите наращенную сумму, если начисление процентов производится: а) ежегодно; б) каждое полугодие; в) ежеквартально; г) каждые два месяца; д) ежемесячно.

Сравните полученные величины с результатами наращения сложными процентами по процентной ставке.

Вариант	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %	**Вариант**	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %
1	500	10,0	**16**	470	7,4
2	320	11,5	**17**	365	10,0
3	650	10,3	**18**	820	9,2
4	490	10,9	**19**	950	11,0
5	900	9,7	**20**	710	8,9
6	950	9,0	**21**	790	11,2
7	780	8,0	**22**	520	10,4
8	390	10,1	**23**	640	10,2
9	485	10,7	**24**	950	10,9
10	620	11,2	**25**	820	11,4
11	550	10,7	**26**	630	10,8
12	220	11,8	**27**	580	10,5
13	440	10,7	**28**	590	10,9
14	610	10,9	**29**	490	9,7
15	330	10,8	**30**	720	11,5

3.18 Сроком на 6 лет выпущена облигация номиналом 10000 руб., причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке: первые три года – 12% годовых, в последующие два года – 16% годовых и в оставшийся год – 18% годовых. Найдите наращенную сумму.

3.19 Вексель был учтен за 21 месяц до срока погашения, при этом владелец векселя получил 80% от написанной на векселе суммы. По какой сложной годовой учетной ставке был учтен этот вексель?

3.20 Вы имеете вексель на сумму и хотели бы при его учете по сложной учетной ставке за 2 года до срока погашения получить две трети этой суммы. Какая должна быть годовая номинальная учетная ставка при дисконтировании поквартально? Как изменится ответ, если дисконтирование осуществляется раз в год?

Вариант	Сумма, руб.	**Вариант**	Сумма, руб.
1	80000	**16**	20000
2	28000	**17**	30000
3	37000	**18**	40000
4	69000	**19**	100000
5	11000	**20**	60000
6	18500	**21**	70000
7	68000	**22**	89000
8	39000	**23**	90000
9	48500	**24**	97000
10	92000	**25**	85000
11	59000	**26**	75000
12	63000	**27**	41000
13	38000	**28**	65000
14	48000	**29**	87000
15	51000	**30**	71000

3.21 За какое время до срока погашения был учтен вексель на сумму 500 тыс. руб., если предъявитель векселя получил 350 тыс. руб., а дисконтирование по номинальной учетной ставке 14% годовых производилось: а) поквартально; б) помесячно?

3.22 Наращенная к концу седьмого года сумма составит 840 тыс. руб. Найдите ее современное значение, если начисляются сложные проценты: а) по полугодиям по процентной ставке 10% годовых; б) ежеквартально по процентной ставке 15% годовых.

3.23 Долговое обязательство на выплату 420 тыс. руб., 875 тыс. руб. со сроком погашения через 5 лет учтено за 3 года до срока с дисконтом по сложной учетной ставке 14% годовых. Найдите величину дисконта. Как изменится величина дисконта, если долговое обязательство учтено сразу после его выдачи?

3.24 Из какого капитала можно получить сумму (таблица) через 4 года, 7 лет при наращением по сложной процентной ставке 11% годовых, если наращение осуществлять: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; г) каждые два месяца; д) ежемесячно; е) каждые полмесяца?

Вариант	Сумма на счете, руб.	**Вариант**	Сумма на счете, руб.
1	180000	**16**	120000
2	280000	**17**	330000
3	137000	**18**	240000
4	690000	**19**	190000
5	111000	**20**	260000
6	185000	**21**	470000
7	268000	**22**	389000
8	239000	**23**	290000
9	348500	**24**	197000
10	392000	**25**	585000
11	459000	**26**	375000
12	463000	**27**	241000
13	538000	**28**	465000
14	548000	**29**	287000
15	251000	**30**	171000

3.25 Банк начисляет ежеквартально сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 10%. Определите современную ценность денежной суммы, которая должна быть выплачена через: а)1 год 2 месяца; б) 3 года 3 месяца; в) 5 лет 9 месяцев; в) 7 лет 4 месяца.

Как изменится современная сумма если проценты будут начисляться ежемесячно?

Вариант	Сумма на счете, руб.	**Вариант**	Сумма на счете, руб.
1	380000	**16**	620000
2	480000	**17**	337000
3	337000	**18**	740000
4	290000	**19**	490000
5	511000	**20**	269000
6	195000	**21**	570000
7	468000	**22**	381000
8	289000	**23**	690000
9	398500	**24**	297000
10	302000	**25**	505000
11	759000	**26**	575000
12	468000	**27**	249000
13	508000	**28**	415000
14	567000	**29**	387000
15	255600	**30**	571000

3.26 Долговое обязательство на выплату 600 тыс. руб. со сроком погашения через 6 лет учтено за три года до срока. Определите полученную сумму и дисконт, если дисконтирование производилось: а) полугодовое; б) поквартальное; в) помесячное по номинальной учетной ставке 18% годовых.

3.27 Определите современное значение суммы в 800 тыс. руб., если она будет выплачена через 4 года 9 месяцев и дисконтирование производится по полугодиям по номинальной годовой учетной ставке 15%.

3.28 Клиент поместил в банк сумму сроком на: а). 2 года; б) 3 года; в) 4 года. Какая сумма будет на счете клиента, если банк начисляет сложные проценты: а) по номинальной процентной ставке 11,5% годовых с полугодовым начислением процентов; б) по номинальной учетной ставке 11,5% годовых с ежеквартальным начислением процентов; в) по непрерывной ставке с силой роста 11,5% за год?

Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.	**Вариант**	Сумма на счете, тыс. руб.
1	800	**16**	200
2	280	**17**	300
3	370	**18**	400
4	690	**19**	1000
5	1100	**20**	600
6	1850	**21**	700
7	680	**22**	890
8	390	**23**	900
9	485	**24**	970
10	920	**25**	850
11	590	**26**	750
12	630	**27**	410
13	380	**28**	650
14	480	**29**	870
15	510	**30**	710

3.29 Какую сумму необходимо поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 680 тыс. руб., если происходит непрерывное начисление процентов по ставке 12%?

3.30 За какой срок сумма 500 тыс. руб. достигнет величины 900 тыс. руб. при непрерывном начислении процентов и силе роста 14%? Как изменится ответ при начислении сложных процентов ежеквартально по номинальной процентной ставке 14% годовых?

3.31 Под какую непрерывную ставку можно поместить деньги на депозит, если первоначальная сумма сейчас эквивалентны определенной наращенной сумме через: 2 года; 4 года; 6 лет; 8 лет? Какая сложная процентная ставка с начислением процентов по полугодиям решает эту задачу?

Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Наращенная сумма, тыс. руб.	**Вариант**	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Наращенная сумма, тыс. руб.
1	200	290	**16**	370	599
2	180	320	**17**	390	536
3	150	275	**18**	280	407
4	370	510	**19**	450	674
5	250	380	**20**	480	709
6	380	520	**21**	805	1245
7	470	700	**22**	610	929
8	620	950	**23**	740	981
9	390	520	**24**	210	342
10	250	386	**25**	280	496
11	810	1034	**26**	470	804
12	890	1118	**27**	820	1253
13	180	302	**28**	705	1138
14	290	424	**29**	810	1337
15	620	847	**30**	600	1024

3.32 Определите наращенную сумму сроком за: 1 год; 2 года; 3 года; 4 года, 7 лет, если начальное значение силы роста составляет 9%, процентная ставка непрерывно и линейно увеличивается со скоростью 2% в год.

Вариант	Сумма, тыс. руб.	**Вариант**	Сумма, тыс. руб.
1	800	**16**	200
2	280	**17**	300
3	370	**18**	400
4	690	**19**	1000
5	1100	**20**	600
6	1850	**21**	700
7	680	**22**	890
8	390	**23**	900
9	485	**24**	970
10	920	**25**	850
11	590	**26**	750
12	630	**27**	410
13	380	**28**	650
14	480	**29**	870
15	510	**30**	710

3.33 Определите современную стоимость 500 тыс. руб., которые должны быть выплачены через 5 лет, если начальное значение силы роста составляет 7%, процентная ставка непрерывно и линейно изменяется со скоростью 1,5% в год.

3.34 Определите начальное значение силы роста, необходимое для увеличения начального капитала в 3 раза за 8 лет, если процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста 2% в год.

3.35 Клиент поместил в банк сумму на определенный срок. Определите наращенную величину вклада, если начальный уровень силы роста 10%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста 1,5% в год.

Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.	Срок, лет.	**Вариант**	Сумма на счете, тыс. руб.	Срок, лет.
1	800	3	**16**	200	5
2	280	2	**17**	300	3
3	370	5	**18**	400	2
4	690	2	**19**	1000	4
5	1100	4	**20**	600	5
6	1850	3	**21**	700	3
7	680	5	**22**	890	4
8	390	4	**23**	900	2
9	485	2	**24**	970	4
10	920	3	**25**	850	3
11	590	6	**26**	750	2
12	630	4	**27**	410	3
13	380	2	**28**	650	6
14	480	3	**29**	870	4
15	510	2	**30**	710	5

3.36 Определите современную стоимость 780 тыс. руб., которые должны быть выплачены через 6 лет, если начальный уровень силы роста 9,5%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста 0,7% в год.

3.37 За какой срок произойдет: а) удвоение капитала; б) увеличение в 2,5 раза; в) увеличение в 3 раза; г) увеличение в 4 раза; если начальный уровень силы роста, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста в год.

Вариант	Начальный уровень силы роста, %	Темп прироста в год, %	Вариант	Начальный уровень силы роста, %	Темп прироста в год, %
1	10,0	3,0	**16**	11,9	1,7
2	13,8	2,0	**17**	11,6	2,8
3	12,8	1,5	**18**	12,3	2,2
4	14,7	2,1	**19**	10,8	1,1
5	12,0	1,8	**20**	14,0	1,2
6	11,9	3,1	**21**	13,7	3,2
7	12,8	1,3	**22**	14,2	1,5
8	13,6	2,2	**23**	12,7	2,4
9	14,7	2,0	**24**	13,4	1,6
10	14,1	3,0	**25**	12,4	3,0
11	15,1	1,4	**26**	13,1	2,0
12	14,2	2,3	**27**	11,9	3,1
13	14,9	2,2	**28**	14,6	1,6
14	14,2	3,0	**29**	13,9	1,7
15	13,2	2,3	**30**	11,9	1,9

Какова должна быть минимальная положительная сила роста, чтобы при такой инфляции обеспечить реальное наращение капитала. Определите компенсирующую брутто-ставку, обеспечивающую реальную доходность финансовой операции 9,0% годовых.

3.38 По данным таблицы определить индекс инфляции за: а) полгода; б) год; в) полтора года; г) два года.

Вариант	Инфляция, %	Число раз прироста инфляции в течение года	Вариант	Инфляция, %	Число раз прироста инфляции в течение года
1	0,8	12	**16**	2,0	4
2	1,0	12	**17**	2,5	2
3	0,9	2	**18**	2,1	4
4	1,2	4	**19**	1,7	12
5	1,3	4	**20**	0,9	12
6	0,7	2	**21**	2,4	2
7	0,8	12	**22**	2,7	2
8	1,4	4	**23**	3,0	2
9	0,9	4	**24**	2,1	4
10	0,6	12	**25**	0,9	12
11	1,0	12	**26**	2,8	2
12	1,8	4	**27**	4,0	2
13	2,0	2	**28**	4,7	2
14	1,7	4	**29**	2,6	12
15	1,9	4	**30**	2,4	4

3.39 На сумму в течение: а) трех месяцев; б) полугода, начислялись простые проценты. Цены по месяцам для первого срока росли соответственно на 0,7; 1,5 и 1,4%, а для второго срока цены росли в этом же размере, но каждые два месяца. Для каждого из сроков, найдите: наращенную сумму с учетом инфляции; ставку реальной доходности операции; минимальную положительную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала; компенсирующую брутто-ставку. Как изменятся искомые параметры этой операции, если банк применит простую учетную ставку?

Вариант	Сумма, тыс. руб.	Простая процентная ставка, %	**Вариант**	Сумма, тыс. руб.	Простая учетная ставка, %
1	800	10,0	**16**	200	11,9
2	280	13,8	**17**	300	11,6
3	370	12,8	**18**	400	12,3
4	690	14,7	**19**	1000	10,8
5	1100	12,0	**20**	600	14,0
6	1850	11,9	**21**	700	13,7
7	680	12,8	**22**	890	14,2
8	390	13,6	**23**	900	12,7
9	485	14,7	**24**	970	13,4
10	920	14,1	**25**	850	12,4
11	590	15,1	**26**	750	13,1
12	630	14,2	**27**	410	11,9
13	380	14,9	**28**	650	14,6
14	480	14,2	**29**	870	13,9
15	510	13,2	**30**	710	11,9

3.40 Определите реальную силу роста за год в условиях начисления непрерывных процентов при годовом темпе инфляции 8,4 %, если исходная сила роста составляет 9,0% за год.

3.41 Среднемесячный темп прироста инфляции в течение года составлял 1,5%. Определите индекс и темп прироста инфляции: а) за квартал; б) за полгода; в) за год.

3.42 На вклад начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке. Оцените: сумму вклада через а) 2,5 года; б) 5 лет; реальную доходность финансовой операции; минимальную положительную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала; брутто-ставку, если ожидаемый темп прироста инфляции – 1,5% в месяц. Как изменится ситуация, если банк применит номинальную учетную ставку?

Вари-ант	Сум-ма, тыс. руб.	Число раз начис-ления процен-тов в го-ду	Номи-нальная процент-ная став-ка, %	**Вари-ант**	Сум-ма, тыс. руб.	Число раз начис-ления процен-тов в го-ду	Номи-нальная процент-ная став-ка, %
1	800	12	10,0	**16**	200	6	11,9
2	280	2	13,8	**17**	300	4	11,6
3	370	4	12,8	**18**	400	2	12,3
4	690	6	14,7	**19**	1000	12	10,8
5	1100	12	12,0	**20**	600	6	14,0
6	1850	4	11,9	**21**	700	4	13,7
7	680	2	12,8	**22**	890	12	14,2
8	390	12	13,6	**23**	900	6	12,7
9	485	2	14,7	**24**	970	6	13,4
10	920	6	14,1	**25**	850	2	12,4
11	590	4	15,1	**26**	750	12	13,1
12	630	4	14,2	**27**	410	12	11,9
13	380	2	14,9	**28**	650	2	14,6
14	480	2	14,2	**29**	870	4	13,9
15	510	12	13,2	**30**	710	6	11,9

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит отличие сложных процентов от простых?
2. Как соотносятся величины наращенных сумм при начислении по схеме простых и сложных процентов?
3. Как определяется наращенная сумма капитала при дробном числе лет (периодов)?
4. Какая годовая процентная ставка называется номинальной?
5. Какая ставка называется эффективной годовой процентной ставкой и в каких целях она используется?
6. Охарактеризуйте два основных способа начисления сложных процентов.
7. Какая годовая учетная ставка называется номинальной?
8. Какая ставка называется эффективной годовой учетной ставкой и в каких целях она используется?
9. Что представляют собой математическое и банковское дисконтирование?
10. Какая ставка называется силой роста?
11. Как влияет налог на проценты на наращение капитала?
12. Как оценить наращенную сумму капитала с учетом ее обесценения в условиях инфляции? Что такое «эрозия» капитала?

13. Как определить реальную доходность финансовой операции?
14. Что представляет собой минимальная положительная ставка процента?
15. Какая ставка называется брутто-ставкой и для чего она используется?
16. Что называется сложным процентом?
17. Какой способ начисления сложных процентов называется декурсивным?
18. Какой способ начисления сложных процентов называется антисипативным?
19. По какому закону изменяется наращенная сумма при декурсивном методе?
20. В каких случаях дисконтный множитель по ставке простых процентов больше, чем по ставке сложных процентов?

4 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК. КОНСОЛИДАЦИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

Как было показано ранее, для процедур наращения и дисконтирования могут применяться различные виды процентных ставок. Определим теперь те их значения, которые в конкретных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам.

Иначе говоря, замена одного вида ставки на другой при соблюдении принципа эквивалентности не изменяет финансовых отношений сторон в рамках одной операции. Для участвующих в сделке сторон в общем безразлично, какой вид ставки фигурирует в контракте. Такие ставки назовем *эквивалентными.*

Проблема эквивалентности ставок уже затрагивалась в гл. 3 при определении эффективной ставки процента: сложная годовая ставка i эквивалентна ставке j при начислении процентов m раз в году.

Рассмотрим теперь проблему эквивалентности ставок более полно и систематизировано. В принципе соотношение эквивалентности можно найти для любой пары различного вида ставок — простых и сложных, дискретных и непрерывных.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получим исходя из равенства взятых попарно множителей наращения.

Приведем простой пример. Определим формулы эквивалентности простых и сложных процентов.

$(1 + ni_n) = (1 + i_c)^n$ отсюда $i_c = \sqrt{1 + ni} - 1$ или $i_n = \dfrac{(1 + i_c)^n}{n} - 1$. Аналогично выводятся все другие формулы эквивалентности.

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Вид ставки</th><th colspan="2">Формула эквивалентности</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1</td><td rowspan="6">$i_{пр}$ и $d_{пр}$</td><td colspan="2">Срок сделки выражен в годах (n)</td></tr>
<tr><td>$i_{пр} = \dfrac{d_{пр}}{1 - d_{пр}\, n}$ 4.1</td><td>$d_{пр} = \dfrac{i_{пр}}{1 + i_{пр}\, n}$ 4.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Срок сделки выражен в месяцах (m)</td></tr>
<tr><td>$i_{пр} = \dfrac{12\, d_{пр}}{12 - d_{пр}\, m}$ 4.3</td><td>$d_{пр} = \dfrac{12\, i_{пр}}{12 + i_{пр}\, m}$ 4.4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Срок сделки выражен в днях (временная база для обеих ставок 360 дней)</td></tr>
</table>

№ п/п	Вид ставки	Формула эквивалентности	
		$i_{пр} = \dfrac{360\ d_{пр}}{360 - d_{пр}\, t}$ 4.5	$d_{пр} = \dfrac{360\ i_{пр}}{360 + i_{пр}\, t}$ 4.6
		Срок сделки выражен в днях (временная база для процентной ставки 365 дней, а для учетной ставки 360 дней)	
		$i_{пр} = \dfrac{365\ d_{пр}}{360 - d_{пр}\, t}$ 4.7	$d_{пр} = \dfrac{360\ i_{пр}}{365 + i_{пр}\, t}$ 4.8
2	$i_{сл}$ *и* $i_{пр}$	$i_{сл} = \sqrt[n]{(1 + i_{пр}\, n)} - 1$ 4.9	$i_{пр} = \dfrac{(1 + i_{сл})^{n} - 1}{n}$ 4.10
3	$d_{пр}$ *и* $d_{сл}$	$d_{сл} = 1 - \sqrt[n]{1 - d_{пр}\, n}$ 4.11	$d_{пр} = \dfrac{1 - (1 - d_{сл})^{n}}{n}$ 4.12
4	$d_{сл}$ *и* $i_{сл}$	$i_{сл} = \dfrac{d_{сл}}{1 - d_{сл}}$ 4.13	$d_{сл} = \dfrac{i_{сл}}{1 + i_{сл}}$ 4.14
5	$i_{пр}$ *и* $d_{сл}$	$i_{пр} = \dfrac{(1 - d_{сл})^{-n} - 1}{n}$ 4.15	$d_{сл} = 1 - \sqrt[n]{(1 + i_{пр}\, n)^{-1}}$ 4.16
6	$i_{сл}$ *и* $d_{пр}$	$i_{сл} = \sqrt[n]{(1 - d_{пр}\, n)^{-1}} - 1$ 4.17	$d_{пр} = \dfrac{1 - (1 + i_{сл})^{-n}}{n}$ 4.18
7	$i_{пр}$ *и* j	$i_{пр} = \dfrac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n}$ 4.19	$j = m \cdot (\sqrt[nm]{1 + i_{пр}\, n} - 1)$ 4.20
8	$i_{сл}$ *и* j	$j = m\,(\sqrt[m]{(1 + i_{сл})} - 1)$ 4.21	$i_{сл} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1$ 4.22
9	$i_{пр}$ *и* f	$i_{пр} = \dfrac{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-nm} - 1}{n}$ 4.23	$f = m\,(1 - \sqrt[nm]{(1 + i_{пр}\, n)^{-1}})$ 4.24
10	$i_{сл}$ *и* f	$i_{сл} = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-m} - 1$ 4.25	$f = m\,(1 - \sqrt[m]{(1 + i_{сл})^{-1}})$ 4.26
11	$d_{пр}$ *и* j	$j = m\,(\sqrt[mn]{(1 - d_{пр}\, n)^{-1}} - 1)$ 4.27	$d_{пр} = \dfrac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{n}$ 4.28
12	$d_{сл}$ *и* j	$d_{сл} = 1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m}$ 4.29	$j = m\,(\sqrt[m]{(1 - d_{сл})^{-1}} - 1)$ 4.30

№ п/п	Вид ставки	Формула эквивалентности	
13	$d_{пр}$ и f	$d_{пр} = \dfrac{1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}}{n}$ 4.31	$f = m(1-\sqrt[nm]{(1-d_{пр}\,n)})$ 4.32
14	$d_{сл}$ и f	$d_{сл} = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m}$ 4.33	$f = m(1-\sqrt[m]{1-d_{сл}})$ 4.34
15	j и f	$j = m(\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-1}-1)$ 4.35	$f = m\left(1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-1}\right)$ 4.36

Пример 4.1 Клиенту банком выдан кредит на пять лет под 9 % годовых.

Определить эквивалентную:

а) ставку сложных процентов, если кредит был выдан по ставке простых процентов;

б) ставку простых процентов, если кредит был выдан по ставке сложных процентов;

в) учетную ставку простых процентов, если кредит был выдан по процентной ставке простых процентов;

г) учетную ставку сложных процентов, если кредит был выдан по процентной ставке сложных процентов.

Решение: n=5.

а) $i_n = 0{,}09$; $i_c = ?$

$$i_c = (1 + n \cdot i_n)^{\frac{1}{n}} - 1 = (1 + 5 \cdot 0{,}09)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}077 \; .$$

Значит, при одинаковой величине начального капитала одну и ту же наращенную сумму можно получить при простой процентной ставке 9% годовых или сложной процентной ставке 7,7% годовых, если срок сделки составляет 5 лет.

б) $i_c = 0{,}09$; $i_n = ?$

$$i_n = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n} = \frac{(1 + 0{,}09)^5 - 1}{5} = 0{,}108 \; .$$

Кредит, выданный под 9% сложных годовых процентов, эквивалентен кредиту под 10,8% простых процентов на срок 5 лет.

в) $i_n = 0{,}09$; d_n =?

$$d_n = \frac{i_n}{1 + n \cdot i_n} = \frac{0,09}{1 + 5 \cdot 0,09} = 0,062 \;;$$

Кредит, выданный по простой процентной ставке 9% годовых, будет эквивалентен кредиту, выданному по простой учетной ставке 6,2% годовых.

г) $i_c = 0,09$; $d_c =?$

$$d_c = \frac{i_c}{1 + i_c} = \frac{0,09}{1 + 0,09} = 0,083 \;.$$

Таким образом, кредит, выданный по сложной процентной ставке 9% годовых, обеспечивает ту же наращенную сумму, что и по сложной учетной ставке 8,3% годовых.

Пример 4.2 При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 28% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно, поквартально?

Решение.

$$j = 12\left(\sqrt[12]{1 + 0,28} - 1\right) = 0,24942 \;; \qquad j = 4\left(\sqrt[4]{1 + 0,28} - 1\right) = 0,25464 \;.$$

Пример 4.3 Вексель учтен за год до даты его погашения по учетной ставке 15,0 %. Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки?

Решение.

По формуле находим:

$$i_{пр} = \frac{0,15}{1 - 1 \cdot 0,15} = 0,17647$$, или 17,647%.

Пример 4.4 Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 18% (K=365), не изменяя финансовых последствий? Срок операции 580 дней.

Решение.

Находим эквивалентную сложную ставку

$$i_{сл} = \sqrt[580/365]{1 + \frac{580}{365} 0,18} - 1 = 0,17153$$ или 17,153%.

Эквивалентность сложных дискретных и непрерывных ставок.

Теоретически можно найти соотношение эквивалентности между силой роста и любой дискретной процентной ставкой. Однако в этом, вероятно, нет необходимости. Ограничимся несколькими такими соотношениями, необходимость в которых может возникнуть в практических расчетах.

Обозначим силу роста через – b.

Эквивалентность сложной процентной ставки и силы роста:

$$b = \ln(1 + i_{сл}); \qquad i_{сл} = e^{b} - 1. \qquad 4.37$$

Эквивалентность номинальной процентной ставки и силы роста:

$$j = m\left(e^{b/m} - 1\right); \qquad b = m\ln\left(1 + j/m\right). \qquad 4.38$$

Эквивалентность силы роста и учетной ставки:

$$b = -\ln(1 - d_{сл}); \quad d_{сл} = 1 - e^{-b}; \quad b = \frac{-\ln(1 - nd_{пр})}{n}; \quad d_{пр} = \frac{1 - e^{-b}}{n}. \qquad 4.39$$

Формулы эквивалентности дискретных и непрерывных ставок позволяют расширить применение непрерывных процентов. Как уже говорилось выше, непрерывные проценты во многих сложных расчетах позволяют существенно упростить выкладки. Вместе с тем такие ставки непривычны для практика, поэтому используя формулы эквивалентности, нетрудно представить полученные результаты в виде общепринятых характеристик.

Средние процентные ставки

Если в финансовой операции размер процентной ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней. *Замена всех усредняемых значений ставок на среднюю процентную ставку* по определению *не изменяет результатов наращения или дисконтирования.*

Пусть за периоды $n_1, n_2, \ldots n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Средние процентные ставки получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу: $1 + N\bar{i}_{пр} = 1 + \sum_{t=1}^{к} n_t i_t$,

отсюда

$$\bar{i}_{пр} = \frac{\sum_{t=1}^{к} n_t i_t}{N} \qquad 4.40$$

Аналогично получим $\overline{d}_{np} = \frac{\sum_{t=1}^{\kappa} n_t d_t}{N}$, 4.41

где N = $\sum_{t=1}^{\kappa} n_t$ - общий срок наращения процентов,

$\overline{d}_{np}$ и $\overline{i}_{np}$ - средняя учетная и процентная ставка.

Если изменяются во времени и первоначальные суммы, то

$$\overline{i}_{np} = \frac{\sum_{t=1}^{\kappa} i_t n_t P_t}{\sum_{t=1}^{\kappa} n_t P_t} \qquad 4.42$$

Если усредняются переменные во времени ставки сложных процентов, то:

$$\overline{i}_{сл} = \sqrt[N]{\Pi\left(1 + i_t\right)^{n_t}} - 1; \qquad 4.43$$

$$\overline{d}_{сл} = 1 - \sqrt[N]{\Pi\left(1 - d_t\right)^{n_t}}. \qquad 4.44$$

Пример 4.5 Для первых двух лет ссуды применяется ставка 20%, для следующих трех лет она составляет 24%. Нужно найти среднюю ставку.

Решение.

$\overline{i} = \sqrt[5]{(1 + 0{,}20)^2 \cdot (1 + 0{,}24)^3} - 1 =$ 0,22384, или 22,384%.

Иногда меняются только суммы ссуд и проценты, а сроки операций равны.

Если применяются простые проценты, то

$$\overline{i}_{np} = \frac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}. \qquad 4.45$$

Когда усредняются сложные процентные ставки, то средняя ставка составит

$$\overline{i}_{сл} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t\left(1 + i_t\right)^n}{\sum P_t}} - 1. \qquad 4.46$$

Консолидирование (объединение) задолженности.

Как уже было сказано выше, принцип финансовой эквивалентности платежей применяется при различных изменениях условий выплат денежных сумм: их объединении, изменении сроков (досрочном погашении задолженности или, наоборот, пролонгировании срока) и т.п. Общий метод решения подобного рода задач заключается в разработке так называемого *уравнения эквивалентности* (*equation of value),* в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

Для краткосрочных обязательств приведение осуществляется обычно на основе простых ставок, для средне- и долгосрочных — с помощью сложных процентных ставок. Заметим, что в простых случаях часто можно обойтись без разработки и решения уравнения эквивалентности.

Одним из распространенных случаев изменения условий контрактов является *консолидация* (объединение) платежей.

Пусть платежи S_1, S_2,..., Sm со сроками n_1, n_2,..., n_m заменяются одним в сумме S_0 и сроком n_0. В этом случае возможны две постановки задачи: если задается срок n_0, то находится сумма S_0 и наоборот, если задана сумма консолидированного платежа S_0, то определяется срок n_0. Рассмотрим обе постановки задачи.

Определение размера платежа.

1) Если используется простая процентная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{m} S_j \left(1 + t_j i\right), \qquad 4.47$$

где S_j - размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$.

2) Если используется простая процентная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j \left(1 + t_j i\right) + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 + t_k i\right)^{-1}, \qquad 4.48$$

где S_j – размеры платежей со сроками погашения $n_j < n_o$, S_k - размеры платежей со сроками $n_k > n_0$, $t_j = n_0 - n_j$, $t_k = n_k - n_0$.

3) Если используется простая учетная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{m} S_j \left(1 - t_j d\right)^{-1}. \qquad 4.49$$

4) Если используется простая учетная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j \left(1 - t_j d\right)^{-1} + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 - t_k d\right). \quad 4.50$$

5) Если используется сложная процентная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j \left(1 + i\right)^{t_j}, \text{ при } n_o > n_j. \quad 4.51$$

6) Если используется сложная процентная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j \left(1 + i\right)^{t_j} + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 + i\right)^{-t_k}, \text{ при } n_j < n_o < n_к. \quad 4.52$$

7) Если используется сложная учетная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j \left(1 - d\right)^{-t_j}. \quad 4.53$$

8) Если используется сложная учетная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j \left(1 - d\right)^{-t_j} + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 - d\right)^{t_k}. \quad 4.54$$

Определение срока консолидированного платежа.

При начислении простых процентов срок консолидированного платежа n_o находится по формуле:

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j \left(1 + n_j i\right)^{-1}} - 1\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right), \quad 4.55$$

где P_0 – современная стоимость консолидируемых платежей,

$$P_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j \left(1 + n_j i\right)^{-1}. \quad 4.56$$

При использовании сложных процентов:

$$n_0 = \frac{\ln \frac{S_0}{P_0}}{\ln\left(1 + i\right)}, \quad 4.57$$

где $P_0 = \sum_{j=1}^{\ell} S_j (1+i)^{-n_j}$. 4.58

Задачи для самостоятельного решения

4.1 Банк принимает депозиты на 1 год с ежеквартальным начислением процентов по ставке 12,0 %, с полугодовым начислением процентов по ставке 13,0 % годовых и с ежегодным начислением процентов по ставке 14,0 % годовых.

Определите наилучший вариант вложения средств (определить сложную процентную ставку, при известной номинальной процентной ставке в первом и втором варианте, и результат сравнить со сложной процентной ставкой).

4.2 Определите:
- простую процентную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке;
- простую процентную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- простую процентную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке.

Вари-ант	Срок предостав-ления кредита	Ставка, %	**Вари-ант**	Срок предостав-ления кредита	Ставка, %
1	2 года	10,0	**16**	4 года	20,0
2	3 месяца	11,0	**17**	240 дней	19,0
3	120 дней	10,5	**18**	5 месяцев	19,5
4	1 год	11,5	**19**	5 лет	15,5
5	9 месяцев	11,9	**20**	300 дней	16,5
6	200 дней	10,3	**21**	13 месяцев	16,0
7	4 года	12,0	**22**	3 года	17,0
8	320 дней	12,5	**23**	6 месяцев	17,5
9	4 месяца	12,8	**24**	320 дней	17,9
10	3 года	13,0	**25**	4 года	15,8
11	90 дней	13,5	**26**	8 месяцев	18,0
12	7 месяцев	13,2	**27**	270 дней	18,5
13	2 года	14,0	**28**	3 года	17,1
14	180 дней	14,5	**29**	11 месяцев	16,7
15	5 лет	15,0	**30**	190 дней	12,3

4.3 Какая сложная процентная ставка соответствует номинальной процентной ставке в размере (таблица) при начислении процентов 2 раза в месяц; 3 раза в месяц; 4 раза в месяц; 6 раз в месяц.

Вари-ант	Процентная ставка, %	**Вари-ант**	Процентная ставка, %
1	9,0	**16**	12,0
2	8,0	**17**	13,0
3	9,5	**18**	12,5
4	10,5	**19**	13,5
5	10,9	**20**	12,1
6	11,3	**21**	11,8
7	11,0	**22**	11,6
8	8,5	**23**	12,1
9	9,8	**24**	11,9
10	10,1	**25**	12,8
11	10,7	**26**	12,2
12	10,2	**27**	12,3
13	11,1	**28**	14,1
14	11,5	**29**	13,7
15	10,6	**30**	12,9

4.4 Вексель учтен в банке до даты погашения за: 60 дней; 90 дней; 120 дней; 180 дней; 7 месяца; 9 месяцев; 11 месяцев по учетной ставке (таблица). Какова ставка простых процентов, дающая такой же доход?

Вари-ант	Процентная ставка, %	**Вари-ант**	Процентная ставка, %
1	9,0	**16**	12,0
2	8,0	**17**	13,0
3	9,5	**18**	12,5
4	10,5	**19**	13,5
5	10,9	**20**	12,1
6	11,3	**21**	11,8
7	11,0	**22**	11,6
8	8,5	**23**	12,1
9	9,8	**24**	11,9
10	10,1	**25**	12,8
11	10,7	**26**	12,2
12	10,2	**27**	12,3
13	11,1	**28**	14,1
14	11,5	**29**	13,7
15	10,6	**30**	12,9

4.5 Определите значение простой учетной ставки, эквивалентной ставке простых процентов, равной годовых, при сроке ссуды: 90 дней, 120 дней, 150 дней, 6 месяца, 8 месяцев, 11 месяцев.

Вари-ант	Процентная ставка, %	**Вари-ант**	Процентная ставка, %
1	13,0	**16**	12,8
2	11,0	**17**	12,1
3	11,5	**18**	14,5
4	12,5	**19**	15,5
5	11,9	**20**	14,1
6	10,3	**21**	14,8
7	10,0	**22**	15,6
8	8,9	**23**	15,1
9	9,5	**24**	14,9
10	10,7	**25**	16,8
11	10,8	**26**	16,2
12	13,2	**27**	17,3
13	13,1	**28**	18,1
14	13,5	**29**	17,7
15	10,6	**30**	12,9

4.6 Банк при выдаче ссуды сроком на 3,5 года использовал номинальную процентную ставку в размере 18,3 % годовых, при: а) ежеквартальной; б) полугодовой; в) ежемесячной капитализации процентов. Определите эквивалентную учетную ставку простых и сложных процентов.

4.7 Определите номинальную ставку сложных процентов при начислении процентов: а) каждые два месяца; б) ежеквартально; в) полугодичном; г) ежемесячном, эквивалентную сложной учетной ставке в размере 18,7 %.

4.8 На сумму денег в течение 6 лет непрерывно начисляются проценты с начальной силой роста 10,3 % и ежегодным абсолютным приростом в 2,0 %. Определите эквивалентную ставку сложных процентов.

4.9 Определите величину силы роста при начислении непрерывных процентов, эквивалентную учетной ставке в размере 16,7 % годовых, как простых, так и сложных.

4.10 Клиент имеет в банке счет, по которому: каждые два месяца; ежеквартально и ежемесячно в течение: 2 лет, 3 лет; 5 лет начисляются сложные проценты по номинальной ставке. Определите эквивалентную:
- простую процентную ставку;
- простую учетную ставку;
- сложную процентную ставку;
- сложную учетную ставку.

Вариант	Процентная ставка, %	**Вариант**	Процентная ставка, %
1	8,0	**16**	8,8
2	9,0	**17**	9,1
3	7,5	**18**	10,5
4	9,5	**19**	12,5
5	10,9	**20**	14,1
6	11,3	**21**	14,8
7	10,0	**22**	11,6
8	8,9	**23**	12,1
9	9,8	**24**	11,9
10	10,7	**25**	10,8
11	10,1	**26**	11,2
12	13,2	**27**	12,3
13	11,1	**28**	7,7
14	11,5	**29**	11,7
15	10,6	**30**	12,6

4.11 Кредит выдан по номинальной процентной ставке.

Определите эквивалентную: простую процентную ставку; простую учетную ставку; сложную процентную ставку; сложную учетную ставку; номинальную учетную ставку.

Вари-ант	Ставка, %	Число раз начислений процентов в году (m)	Срок кредита	**Вари-ант**	Ставка, %	Число раз начислений процентов в году (m)	Срок кредита
1	10,9	2	100 дней	**16**	10,5	12	4 месяца
2	23,0	4	10 месяцев	**17**	10,0	2	6 лет
3	21,5	6	2 года	**18**	12,4	4	240 дней
4	24,3	12	3 года	**19**	12,8	6	9 месяцев
5	20,7	2	1 год	**20**	13,7	12	5 лет
6	18,9	4	120 дней	**21**	13,9	2	7 месяцев
7	17,3	6	90 дней	**22**	15,8	4	220 дней
8	13,8	12	3 месяца	**23**	13,1	6	6 лет
9	20,9	2	11 месяцев	**24**	19,7	12	270 дней
10	14,5	4	4 года	**25**	18,5	2	13 месяцев
11	12,3	6	5 лет	**26**	8,3	4	10 лет
12	13,2	12	180 дней	**27**	16,8	6	5 месяцев
13	11,2	2	6 месяцев	**28**	17,9	12	210 дней
14	9,5	4	5 лет	**29**	16,3	2	5 лет
15	11,4	6	200 дней	**30**	14,7	4	300 дней

4.12 Кредит выдан по номинальной учетной ставке по следующим условиям.

Вари-ант	Ставка, %	Число раз начислений процентов (m)	Срок кредита	Вари-ант	Ставка, %	Число раз начислений процентов (m)	Срок кредита
1	8,9	2	70 дней	**16**	14,5	2	4 месяца
2	13,0	4	10 месяцев	**17**	17,0	4	5 лет
3	11,5	6	2 года	**18**	14,4	6	245 дней
4	7,2	12	3 года	**19**	12,8	12	18 месяцев
5	10,7	24	1 год	**20**	11,7	24	6 лет
6	12,9	2	120 дней	**21**	13,9	2	7 месяцев
7	7,3	4	90 дней	**22**	15,8	4	205 дней
8	9,8	6	15 месяцев	**23**	13,1	6	5 лет
9	10,9	12	11 месяцев	**24**	9,7	12	250 дней
10	14,5	24	4 года	**25**	18,5	24	19 месяцев
11	9,3	2	7 лет	**26**	8,3	2	8 лет
12	13,2	4	180 дней	**27**	11,8	4	5 месяцев
13	21,2	6	6 месяцев	**28**	7,9	6	110 дней
14	14,5	12	5 лет	**29**	9,3	12	7 лет
15	10,4	24	200 дней	**30**	14,7	24	330 дней

Определите эквивалентную: сложную процентную ставку; простую процентную ставку; сложную учетную ставку; простую учетную ставку; номинальную процентную ставку.

4.13 Клиент получил в банке три ссуды.

Вари-ант	Ссуда 1		Ссуда 2		Ссуда 3	
	Срок	Ставка, %	Срок	Ставка, %	Срок	Ставка, %
1	10 дней	11,5	15 дней	12,3	20 дней	13,5
2	1 месяц	10,8	2 месяца	12,3	3 месяца	14,7
3	30 дней	9,8	40 дней	11,5	50 дней	12,3
4	60 дней	10,0	75 дней	11,0	80 дней	11,8
5	80 дней	10,5	90 дней	11,4	100 дней	11,9
6	1 год	10,0	2 года	12,0	3 года	13,6
7	4 года	11,0	6 лет	12,5	9 лет	13,0
8	3 месяца	11,2	4 месяца	11,9	7 месяцев	12,3
9	4 месяца	11,3	5 месяцев	11,8	6 месяцев	12,2
10	4 месяца	11,4	7 месяцев	12,8	9 месяцев	13,2
11	2 года	11,2	3 года	12,3	6 лет	12,9
12	90 дней	11,9	120 дней	12,8	150 дней	13,2
13	5 месяцев	11,7	6 месяцев	13,9	7 месяцев	14,9
14	3 месяца	11,8	5 месяцев	13,7	8 месяцев	14,3
15	110 дней	10,8	140 дней	12,9	160 дней	14,5
16	4 года	12,3	7 лет	14,8	8 лет	16,7
17	150 дней	13,8	180 дней	14,9	200 дней	15,6
18	2 месяца	14,5	3 месяца	15,9	6 месяцев	16,8
19	170 дней	13,5	190 дней	13,9	210 дней	14,8
20	3 месяца	13,2	6 месяцев	14,8	9 месяцев	15,6
21	2 года	16,8	4 года	17,7	6 лет	18,2
22	6 месяцев	15,9	8 месяцев	16,3	11 месяцев	17,2
23	180 дней	12,8	220 дней	14,3	240 дней	15,2
24	3 года	12,4	5 лет	13,5	10 лет	14,1
25	6 месяцев	13,2	9 месяцев	14,8	12 месяцев	16,5
26	210 дней	13,4	240 дней	13,9	280 дней	14,8
27	1 год	14,5	3 года	15,8	4 года	16,7
28	4 месяца	13,2	7 месяцев	14,7	10 месяцев	15,4
29	250 дней	12,5	300 дней	13,8	330 дней	14,7
30	5 лет	14,8	7 лет	15,0	10 лет	15,9

Определите среднюю: простую процентную ставку; сложную учетную ставку; сложную процентную ставку.

4.14 По условиям погашения кредита, полученного под 15,0 % (простые проценты) 10 марта, фирма должна выплатить суммы в 4 срока: 15 апреля – 280000 руб.; 15 июня – 250000 руб.; 30 августа – 240000 руб.; 28 сентября – 300000 руб. В связи со сложившимися обстоятельствами фирма просит банк объединить эти платежи в один и перенести дату выплаты долга на 10 августа.

Определите величину консолидированного платежа. Определите величину консолидированного платежа, если использовалась сложная учетная ставка в размере 14,5 %.

4.15 Какая непрерывная ставка заменит: начисление процентов каждые два месяца; полугодовое; поквартальное начисление; ежемесячное начисление по номинальной ставке (таблица) годовых.

Вариант	Процентная ставка, %	**Вариант**	Процентная ставка, %
1	9,0	**16**	10,4
2	8,0	**17**	7,0
3	9,5	**18**	7,9
4	7,5	**19**	6,5
5	10,9	**20**	7,1
6	6,3	**21**	10,8
7	11,0	**22**	8,6
8	8,5	**23**	9,1
9	9,8	**24**	10,5
10	10,1	**25**	9,3
11	7,7	**26**	7,2
12	10,2	**27**	8,3
13	11,1	**28**	8,1
14	9,2	**29**	8,7
15	10,6	**30**	8,9

4.16 Предприятие имеет ряд обязательств перед кредитором: 450000 руб., 689000 руб., 897000 руб., которые должны быть выплачены соответственно через 80, 100 и 130 дней после заключения контракта. По согласованию сторон было решено эти платежи заменить одним платежом равным 2300 тыс. руб. (S_0) с продлением срока оплаты, используя:

а) простую процентную ставку 14,7 %;

б) сложную процентную ставку 12,5 %.

Определите:

а) срок погашения задолженности, если использовалась французская практика;

б) современную стоимость платежей.

4.17 Клиент взял в банке три кредита. Платежи по этим кредитам клиент желает объединить в один. Найдите консолидированную сумму платежа, если использовалась: а) простая процентная ставка в размере 11,0%; б) про-

стая учетная ставка в размере 12,5 %; в) сложная процентная ставка в размере 13,0 %; г) сложная учетная ставка в размере 13,5 %.
Задачу решите для двух согласованных сроков.

Вариант	Кредит 1		Кредит 2		Кредит 3		Согласованные сроки платежей	
	Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита	Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита	Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита	первый	второй
1	10,0	40 дней	20,0	60 дней	30,0	70 дней	80 дней	65 дней
2	15,0	2 года	20,0	4 года	25,0	6 лет	7 лет	5 лет
3	30,0	60 дней	35,0	70 дней	40,0	100 дней	120 дней	90 дней
4	20,0	1 месяц	30,0	3 месяца	40,0	6 месяцев	8 мес.	5 мес.
5	30,0	1 год	40,0	3 года	50,0	6 лет	8 лет	5 лет
6	35,0	2 месяца	40,0	4 месяца	45,0	6 месяцев	7 мес.	5 мес.
7	40,0	80 дней	45,0	100 дней	50,0	150 дней	180 дней	120 дней
8	45,0	3 года	50,0	5 лет	55,0	7 лет	9 лет	6 лет
9	50,0	3 месяца	55,0	7 месяцев	60,0	8 месяцев	10 мес.	5 мес.
10	57,0	45 дней	60,0	90 дней	63,0	140 дней	200 дней	120 дней
11	60,0	200 дней	65,0	240 дней	70,0	330 дней	350 дней	290 дней
12	20,0	2 года	40,0	5 лет	60,0	6 лет	8 лет	4 года
13	25,0	100 дней	40,0	180 дней	55,0	240 дней	280 дней	170 дней
14	10,0	3 месяца	25,0	6 месяцев	35,0	9 месяцев	11 мес.	7 мес.
15	30,0	4 года	60,0	5 лет	70,0	6 лет	8 лет	6 лет
16	38,0	120 дней	45,0	180 дней	60,0	250 дней	300 дней	200 дней
17	40,0	2 месяца	58,0	3 месяца	63,0	7 месяцев	8 мес.	5 мес.
18	50,0	170 дней	67,0	220 дней	80,0	290 дней	320 дней	210 дней
19	60,0	150 дней	65,0	190 дней	70,0	280 дней	340 дней	210 дней
20	65,0	3 года	73,0	5 лет	78,0	7 лет	9 лет	6 лет
21	65,0	140 дней	75,0	190 дней	85,0	270 дней	300 дней	240 дней
22	60,0	4 месяца	70,0	7 месяцев	80,0	10 мес.	11 мес.	8 мес.
23	70,0	80 дней	78,0	120 дней	83,0	190 дней	220 дней	150 дней
24	70,0	4 года	80,0	5 лет	100,0	7 лет	10 лет	6 лет
25	80,0	5 месяцев	85,0	8 месяцев	99,0	11 мес.	14 мес.	10 мес.
26	79,0	95 дней	90,0	130 дней	103,0	200 дней	230 дней	180 дней
27	22,0	6 месяцев	45,0	10 мес.	63,0	12 мес.	15 мес.	9 мес.
28	95,0	160 дней	104,0	250 дней	110,0	340 дней	350 дней	290 дней
29	30,0	2 года	64,0	4 года	80,0	6 лет	8 лет	5 лет
30	37,0	4 месяца	59,0	9 месяцев	78,0	11 мес.	12 мес.	10 мес.

4.18 На определенную сумму денег в течение: 2 лет, 3 лет и 4 лет непрерывно начисляются проценты с силой роста (таблица). Определите эквивалентную номинальную процентную ставку, если проценты начислялись: по полугодиям, ежеквартально, ежемесячно, каждые два месяца.

Вариант	Процентная ставка, %	**Вариант**	Процентная ставка, %
1	8,0	**16**	8,8
2	9,0	**17**	9,1
3	7,5	**18**	10,5
4	9,5	**19**	12,5
5	10,9	**20**	11,4
6	11,3	**21**	14,8
7	10,0	**22**	11,6
8	8,9	**23**	12,1
9	9,8	**24**	11,9
10	10,7	**25**	10,8
11	10,1	**26**	11,2
12	13,2	**27**	12,3
13	11,1	**28**	7,7
14	11,5	**29**	11,7
15	10,6	**30**	12,6

Вопросы для самоконтроля

1. Какие процентные ставки называются эквивалентными?
2. Как производится усреднение процентных и учетных ставок?
3. Каким образом учитывается принцип финансовой эквивалентности обязательств?
4. Напишите уравнение эквивалентности размеров консолидированных платежей?
5. Составьте уравнение эквивалентности сроков консолидированного платежа?
6. Можно ли говорить об эквивалентности денежных сумм, относящихся к разным моментам времени по ставке а) простых процентов? б) сложных процентов?
7. Как сравнить две денежные суммы, относящиеся к разным моментам времени?
8. Приведите формулу для нахождения эквивалентного значения в заданный момент времени для произвольного потока платежей.

5 ПОСТОЯННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени, например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсии и т. д.

Такого рода последовательность, или ряд платежей, называют *потоком платежей.* (В западной финансовой литературе в аналогичном смысле применяется термин *cash flows stream* — буквально, потоки наличности, хотя речь идет о потоке денег в любом виде.)

Отдельный элемент такого ряда платежей назовем *членом потока (cash flow).* Введение понятия поток платежей в финансовый количественный анализ, что произошло сравнительно недавно, заметно расширило рамки и возможности последнего.

Классификация потоков.

В практике встречаются разнообразные потоки платежей. Причем один и тот же вид потока может быть использован в анализе различных финансово-кредитных операций.

Поэтому в этой и следующей главах основное внимание уделяется формальным соотношениям, а не конкретным экономическим показателям, связанным с этими операциями.

Потоки платежей могут быть *регулярными* (размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу, предусматривающему равные интервалы между платежами) и *нерегулярными.*

Члены потоков могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными величинами (выплаты).

Поток платежей, все члены которого — положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют *финансовой рентой,* или просто *рентой (rent) (или аннуитетом).*

Например, рентой является последовательность получения процентов по облигации, платежи по потребительскому кредиту, выплаты в рассрочку страховых премий и т.д. Иногда подобного рода поток платежей называют *аннуитетом (annuity),* что, строго говоря, применимо только к ежегодным выплатам.

Использование в финансово-банковской операции условий, предполагающих выплаты в виде финансовой ренты, существенно упрощает количественный их анализ, дает возможность применять стандартные формулы и таблицы значений многих, необходимых для финансовых расчетов коэффициентов.

Рента описывается следующими параметрами:

- *член ренты(rent)* - величина отдельного платежа (R);

- *срок ренты (term)* - время от начала первого периода ренты до конца последнего (n);

- *процентная ставка* - годовые сложные процентные ставки, используемые для наращения ренты или дисконтирования платежей (i или j). Размер ставки не всегда прямо оговаривается в условиях финансовой операции;

- частота начислений процентов в году (m);

- *период ренты (rent period, payment period)* — временной интервал между двумя последовательными платежами;

- число рентных платежей в году (p);

- наращенная сумма ренты, т.е. сумма всех платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты (S);

- современная величина ренты (приведенная стоимость), т.е. сумма всех платежей, уменьшенная (дисконтированная) на величину процентной ставки на определенный момент времени (как правило, на начало ренты) (A).

Наращенная сумма может представлять собой общую сумму накопленной задолженности к концу срока, итоговый объем инвестиций, накопленный денежный резерв и т. д.

В свою очередь современная стоимость характеризует приведенные к началу осуществления проекта инвестиционные затраты, суммарный капитализированный доход или чистую приведенную прибыль от реализации проекта и т. п.

Обобщающие поток платежей характеристики, особенно его современная стоимость, широко применяются в различных финансовых расчетах. Так, без них, например, невозможно разработать план последовательного погашения задолженности, измерить финансовую эффективность проекта, осуществить сравнение или безубыточное изменение условий контрактов, решать многие другие практические задачи.

В зависимости от различных условий ренты подразделяются на следующие виды:

1) По количеству выплат членов ренты на протяжении года ренты делятся на:

- *годовые* (выплата раз в году);

- *p-срочные (p* - количество выплат в году).

2) В анализе производственных инвестиций иногда применяют ренты:

- с периодами, превышающими год. Перечисленные виды рент называют *дискретными* (с фиксированным числом выплат).

- с такими последовательностями платежей, которые производятся так часто, что их практически можно рассматривать как *непрерывные* (когда промежутки между выплатами стремятся к нулю).

3) По числу раз начислений процентов на протяжении года различают:

- ренты с ежегодным начислением;
- с начислением *m* раз в году;
- с непрерывным начислением.

Моменты начисления процентов необязательно совпадают с моментами выплат членов ренты. Однако, расчеты заметно упрощаются, если два указанных момента совпадают.

4) По величине своих членов ренты делятся на:

- *постоянные* (с одинаковыми размерами члена ренты);
- *переменные* (члены переменных рент изменяют свои размеры во времени, следуя какому-либо закону, например арифметической или геометрической прогрессии, или несистематично (задаются таблицей)).

Постоянные ренты — наиболее распространенный вид ренты.

5) По вероятности выплат ренты делятся на:

- *верные (annuity certain)* (верные ренты подлежат безусловной уплате, например, при погашении кредита. Число членов такой ренты заранее известно);
- *условные (contingent annuity)* (в свою очередь выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, число ее членов заранее неизвестно).

К такого рода рентам относятся *страховые аннуитеты* — последовательные платежи в имущественном и личном страховании. Типичным примером страхового аннуитета является пожизненная выплата пенсии.

6) По количеству членов различают ренты:

- с конечным числом членов;
- *ограниченные* ренты (их срок заранее оговорен);
- *бесконечные,* или *вечные* ренты *(perpetuity).*

С вечной рентой встречаются на практике в ряде долгосрочных операций, когда предполагается, что период функционирования анализируемой системы или срок операции весьма продолжителен и не оговаривается конкретными датами. В качестве вечной ренты логично рассматривать и выплаты процентов по бессрочным облигационным займам.

7) По соотношению начала срока ренты и какого-либо момента времени, упреждающего начало ренты (например, начало действия контракта или даты его заключения), ренты делятся на:

- *немедленные;*

- *отложенные,* или *отсроченные (deffered annuity).* Пример отсроченной ренты: погашение долга в рассрочку после льготного периода.

8) По моменту выплат платежей в пределах периода ренты:

- *обыкновенными,* или *постнумерандо (ordinary annuity)* (если платежи осуществляются в конце этих периодов);

- *пренумерандо (annuity due)* (если платежи производятся в начале периодов).

Иногда контракты предусматривают платежи или поступления денег в середине периодов.

Приведем пример: Контракт предусматривает периодическое погашение задолженности путем выплаты в конце каждого полугодия одинаковых погасительных платежей на протяжении фиксированного числа лет, таким образом, предусматривается постоянная, полугодовая, верная, ограниченная рента постнумерандо.

Расчет наращенной суммы и современной стоимости потока платежей. Определение наращенной суммы и современной стоимости, в зависимости от вида ренты, представлено в следующих таблицах.

Таблица 5.1 – Определение наращенной суммы и современной стоимости постоянной ренты постнумерандо

Число платежей в году	Число начисления процентов в году	Наращенная сумма	Современная стоимость
p=1	*m=1*	$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ 5.1	$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ 5.2
	m>1	$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1}$ 5.3	$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1}$ 5.4
	$m \to \infty$	$S = R\frac{e^{bn} - 1}{e^{b} - 1}$ 5.5	$A = R\frac{1 - e^{-bn}}{e^{b} - 1}$ 5.6

Продолжение таблицы 5.1

Число платежей в году	Число начисления процентов в году	Наращенная сумма	Современная стоимость
$p>1$	$m=1$	$S=R\dfrac{(1+i)^n-1}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}$ 5.7	$A=R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}$ 5.8
	$m=p$	$S=R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}$ 5.9	$A=R\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$ 5.10
	$m\neq p$	$S=R\dfrac{(1+\dfrac{j}{m})^{mn}-1}{p((1+\dfrac{j}{m})^{m/p}-1)}$ 5.11	$A=R\dfrac{1-(1+\dfrac{j}{m})^{-mn}}{p((1+\dfrac{j}{m})^{m/p}-1)}$ 5.12
	$m\to\infty$	$S=R\dfrac{e^{bn}-1}{p(e^{b/p}-1)}$ 5.13	$A=R\dfrac{1-e^{-bn}}{p(e^{b/p}-1)}$ 5.14

Пример 5.1 Фирма создает инвестиционный фонд. В течение 5 лет в фонд вносятся платежи в размере 75000 руб. в год под 12% годовых. Найти величину инвестиционного фонда через 5 лет, если: 1) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются один раз в году; 2) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются ежеквартально; 3) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются один раз в году; 4) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям; 5) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально.

Решение. По формулам (5.1), (5.3), (5.7), (5.9), (5.11) находим величину наращенной суммы ренты постнумерандо.

1) p=1, m=1, $S=75000\cdot\dfrac{(1+0{,}12)^5-1}{0{,}12}=476463{,}55$ руб.;

2) p=1, m=4, $S = 75000 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{0,12}{4}\right)^{4\cdot 5}-1}{\left(1+\dfrac{0,12}{4}\right)^{4}-1} = 481705,97$ руб.;

3) p=2, m=1, $S = 75000 \cdot \dfrac{(1+0,12)^5-1}{2\cdot\left((1+0,12)^{1/2}-1\right)} = 490352,59$ руб.;

4) p=2, m=2, $S = 75000 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{0,12}{2}\right)^{2\cdot 5}-1}{0,12} = 494279,81$ руб.;

5) p=2, m=4, $S = 75000 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{0,12}{4}\right)^{4\cdot 5}-1}{2\cdot\left(\left(1+\dfrac{0,12}{4}\right)^{4/2}-1\right)} = 496373,91$ руб.

Пример 5.2 Фирма предусматривает создание в течение 4-х лет фонда развития и имеет возможность вносить ежегодно 34700 руб. под 8% годовых. Какая сумма потребовалась бы фирме изначально для создания фонда, если бы она поместила ее в банк на 4 года под 8% годовых, если: 1) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются один раз в году; 2) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются ежеквартально; 3) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются один раз в году; 4) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям; 5) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально.

Решение: Найдем современную величину ренты постнумерандо, используя формулы (5.2), (5.4), (5.8), (5.10), (5.12).

1) p=1, m=1, $A = 34700 \cdot \dfrac{1-(1+0,08)^{-4}}{0,08} = 114930,80$ руб.;

2) p=1, m=4, $A = 34700 \cdot \dfrac{1-\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{-4\cdot 4}}{\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{4}-1} = 114311,33$ руб.;

3) p=2, m=1, $A = 34700 \cdot \frac{1-(1+0{,}08)^{-4}}{2\cdot\left((1+0{,}08)^{1/2}-1\right)} = 117185{,}20$ руб.;

4) p=2, m=2, $A = 34700 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{-2\cdot 4}}{0{,}08} = 116813{,}12$ руб.;

5) p=2, m=4, $A = 34700 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{-4\cdot 4}}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4/2}-1\right)} = 116620{,}42$ руб.

Сравнение результатов наращения годовых **и *p* -срочных рент постнумерандо с разными условиями выплат и наращения процентов.**

Как видно из приведенных выше примеров, частота платежей и наращения процентов заметно влияют на размер наращенной суммы. Для практика, очевидно, представляет определенный интерес соотношения этих сумм.

Обозначим сравниваемые суммы как *S(p;m)*: так, S(1; 1) означает наращенную сумму годовой ренты с ежегодным начислением процентов, *S(1;m)* - аналогичную характеристику для ренты с начислением процентов *m* раз в году, наконец, *S(p*; ∞) - наращенную сумму *p* -срочной ренты с непрерывным начислением процентов.

Для одних и тех же сумм годовых выплат, продолжительности рент и размеров процентных ставок (*i = j =b)* получим следующие соотношения:

$$\underset{}{S(1;1)} < \underset{m>1}{S(1;m)} < S(1;\infty) < \underset{p>1}{S(p;1)} < \underset{p>m>1}{S(p;m)} < \underset{p=m>l}{S(p;m)} < \underset{m>p>1}{S(p;m)} < S(p;\infty)$$

Приведенные неравенства могут быть использованы при выборе условий контрактов, так как позволяют заранее (до расчета) получить представление о результатах, связанных с конкретными условиями.

Например, можно заранее сказать, что рента с условиями: $p = 2$ и $m = 4$ дает меньшую наращенную сумму, чем $p = 4$ и $m = 2$ при равенстве всех прочих условий. При разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик – *S* или *A*, а необходимо рассчитать значение недостающего параметра.

Таблица 5.2 – Расчет величины годового платежа постоянных рент постнумерандо

Число платежей в году	Частота начисления процентов в году	Исходные параметры	
		S	A
p=1	*m=1*	$R=\frac{Si}{(1+i)^n-1}$ 5.15	$R=\frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$ 5.16
	m>1	$R=\frac{S\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1\right)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$ 5.17	$R=\frac{A\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1\right)}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}$ 5.18
	m→ ∞	$R=\frac{S\left(e^b-1\right)}{e^{bn}-1}$ 5.19	$R=\frac{A\left(e^b-1\right)}{1-e^{-bn}}$ 5.20
p>1	*m=1*	$R=\frac{Sp\left((1+i)^{1/p}-1\right)}{(1+i)^n-1}$ 5.21	$R=\frac{Ap\left((1+i)^{1/p}-1\right)}{1-(1+i)^{-n}}$ 5.22
	m=p	$R=\frac{Sj}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$ 5.23	$R=\frac{Aj}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}$ 5.24
	m≠p	$R=\frac{Sp\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$ 5.25	$R=\frac{Ap\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}$ 5.26
	m→ ∞	$R=\frac{Sp\left(e^{b/p}-1\right)}{e^{bn}-1}$ 5.27	$R=\frac{Ap\left(e^{b/p}-1\right)}{1-e^{-bn}}$ 5.28

В случае согласования остальных параметров финансовой сделки *срок ренты* можно рассчитать с помощью величины наращенной суммы или современной стоимости ренты.

Таблица 5.3 – Расчет срока постоянных рент постнумерандо

Число платежей в году	Число начислений процентов в году	Исходные параметры: S	Исходные параметры: A
$p=1$	$m=1$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$ 5.29	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$ 5.30
	$m>1$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right)+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ 5.31	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ 5.32
	$m\to\infty$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}b+1\right)}{b}$ 5.33	$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{A}{R}b\right)}{b}$ 5.34
$p>1$	$m=1$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left((1+i)^{1/p}-1\right)+1\right)}{\ln(1+i)}$ 5.35	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left((1+i)^{1/p}-1\right)\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$ 5.36
	$m=p$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}j+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ 5.37	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ 5.38
	$m\neq p$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ 5.39	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ 5.40
	$m\to\infty$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(e^{b/p}-1\right)+1\right)}{b}$ 5.41	$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left(e^{b/p}-1\right)\right)}{b}$ 5.42

При расчете срока ренты нужно принять во внимание следующее:

а) расчетные значения срока будут, как правило, дробные, тогда для годовой ренты в качестве n удобно принять ближайшее целое число лет;

б) в связи с округлением величины n до целого значения необходимо пересчитать величину годового рентного платежа R с тем, чтобы наращенная сумма (или современная стоимость) ренты осталась неизменной.

Необходимость в определении величины процентной ставки возникает всякий раз, когда речь идет о выяснении эффективности (доходности) соответствующей финансово-банковской или коммерческой операции. Заметим, что расчет процентной ставки по остальным параметрам ренты не так прост, как это может показаться на первый взгляд. Нетрудно убедиться в том, что алгебраического решения нет.

Величину *процентной ставки* ренты определяют обычно методом линейной интерполяции следующим образом:

а) при известных величинах наращенной суммы ренты S, годового платежа R и коэффициента наращения ренты

$$s_{n;i} = \frac{S}{R}$$

$$i = i_{(н)} + \frac{s_{n;i} - s_{(н)}}{s_{(в)} - s_{(н)}}\left(i_{(в)} - i_{(н)}\right), \quad 5.43$$

где $i_{(н)}$ и $i_{(в)}$ – нижнее и верхнее значения предполагаемой процентной ставки;

$s_{(н)}$ и $s_{(в)}$ – нижнее и верхнее значения коэффициентов наращения ренты для ставок $i_{(н)}$ и $i_{(в)}$;

б) при известных величинах современной стоимости ренты A, годового платежа R и коэффициента приведения ренты $a_{n;i} = \frac{A}{R}$

$$i = i_{(н)} + \frac{a_{n;i} - a_{(н)}}{a_{(в)} - a_{(н)}}\left(i_{(в)} - i_{(н)}\right), \quad 5.44$$

где $a_{(н)}$ и $a_{(в)}$ – значения коэффициентов приведения ренты для ставок $i_{(н)}$ и $i_{(в)}$.

При расчетах рентных платежей в финансовой практике чаще всего используются сложные проценты. Однако существуют рентные платежи, в которых начисление производится по ставкам простых процентов, при этом наращенная сумма и современная стоимость ренты определяются по формулам:

$$S = Rn\left(1 + \frac{np - 1}{2p} i\right); \qquad 5.45$$

$$A = Rnp\,(1 + npi)^{-1}, \qquad 5.46$$

где p – число рентных платежей в году.

Пример 5.3 Какой срок необходим для накопления 400 тыс. руб., если ежеквартально будет вноситься 10 тыс. руб. под 12 % годовых при ежегодном начислении процентов?

Решение. Так как величина наращенной суммы S=400 тыс. руб., число начислений процентов в году m = 1, рентные платежи вносятся ежеквартально (p=4), а R-величина годового взноса составляет $10000 \cdot 4$ =40 000 руб. то по формуле (4.35)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{400000}{40000} \cdot 4 \cdot \left((1 + 0{,}12)^{1/4} - 1\right) + 1\right)}{\ln(1 + 0{,}12)} = 6{,}75 \approx 6$$

Вследствие округления срока ренты необходимо пересчитать величину годового взноса по формуле (5.21)

$$R = \frac{400000 \cdot 4 \cdot \left((1 + 0{,}12)^{1/4} - 1\right)}{(1 + 0{,}12)^{6} - 1} = 47215{,}73 \text{ руб.},$$

$$47215{,}73 : 4 = 11803{,}93 .$$

Таким образом, ежеквартально необходимо вносить 11803,93 руб.

Пример 5.4 Акционерное общество создает инвестиционный фонд. Ежегодно в фонд вносится 500 тыс. руб. под 7% годовых. Найти наращенную величину фонда, если он формируется в течение 5 лет. Как изменится срок ренты, если процентная ставка снизится в два раза? Определить современную величину ренты.

Решение.

а) Платежи производятся одинаковыми суммами в конце каждого периода (постнумерандо), через равные промежутки времени один раз в году.
R=500000 руб., *i*=0,07; *n*=5; *S*=?

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^{n} - 1}{i},$$

$$S = 500000 \cdot \frac{(1+0{,}07)^{5} - 1}{0{,}07} = 2875370$$

Значит, к концу пятилетнего срока инвестиционный фонд составит 2875370 руб.

б) Рентные платежи осуществляются равными суммами два раза в году, а проценты начисляются ежеквартально.
R=500000 руб.; *j*=0,07; *n*=5; *p*=2; *m*=4; *S*=?

$$S = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)} = 500000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 5} - 1}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1\right)} = 2937003$$

Видно, что наращенная сумма возрастает с увеличением частоты начислений процентов и числа рентных платежей в году.

в) Определим срок ренты, если процентная ставка снизится в два раза. Учтем оба варианта расчета.

В первом варианте параметры ренты составят:
R=500000 руб.; *i*=0,035; *S*=2875370 руб.; *n*=?
Срок ренты находится по формуле:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\cdot i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{2875370}{500000}\cdot 0{,}035 + 1\right)}{\ln(1+0{,}035)} = 5{,}33$$

Во втором варианте параметры ренты составят:
R=500000 руб.; *j*=0,035; *S*=2937003; *p*=2; *m*=4; *n*=?

$$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}\cdot p\cdot\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)+1\right)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}=\frac{\ln\left(\frac{2937003}{500000}\cdot 2\cdot\left(\left(1+\frac{0,035}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1\right)+1\right)}{4\cdot\ln\left(1+\frac{0,035}{4}\right)}=5,39$$

Срок образования инвестиционного фонда увеличился до 5,39 года.

г) Современная величина постоянной ренты постнумерандо по первому варианте расчета составит:

$$A=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=500000\cdot\frac{1-(1+0,07)^{-5}}{0,07}=2050099$$

Значит, для создания инвестиционного фонда в размере 2875370 руб. через 5 лет, можно было вложить единовременно 2050099 руб. под 7% годовых сложных процентов.

Во втором варианте современная величина составит:

$$A=R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\cdot\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)}=500000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0,07}{4}\right)^{-4\cdot 5}}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0,07}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1\right)}=2075946$$

Современная величина ренты несколько возросла и составила 2075946 руб., но и наращенная сумма равна 2937003 руб.

Ренты пренумерандо.

Напомним, что под рентой пренумерандо понимается рента с платежами в начале периодов. Легко понять, что каждый член такой ренты “работает” на один период больше, чем в ренте постнумерандо.

Отсюда наращенная сумма ренты пренумерандо, обозначим ее здесь как *S*, больше в $(1 + i)$ раз аналогичной ренты постнумерандо.

Таблица 5.4 – Определение наращенной суммы и современной стоимости ренты пренумерандо

Число платежей в году	Частота начислений процентов в году	Наращенная сумма	Современная стоимость
p=1	m=1	$S' = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$ 5.47	$A' = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$ 5.48
	m>1	$S' = R\dfrac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ 5.49	$A' = R\dfrac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ 5.50
	m→ ∞	$S' = R\dfrac{e^{bn} - 1}{e^{b} - 1}e^{b}$ 5.51	$A' = R\dfrac{1-e^{-bn}}{e^{b} - 1}e^{b}$ 5.52
p>1	m=1	$S' = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}(1+i)^{1/p}$ 5.53	$A' = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}(1+i)^{1/p}$ 5.54
	m=p	$S' = R\dfrac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j}\left(1+\frac{j}{m}\right)$ 5.55	$A' = R\dfrac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}\left(1+\frac{j}{m}\right)$ 5.56
	m≠p	$S' = R\dfrac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right)}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$ 5.57	$A' = R\dfrac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right)}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$ 5.58
	m→ ∞	$S' = R\dfrac{e^{bn} - 1}{p\left(e^{b/p} - 1\right)}e^{b/n}$ 5.59	$A' = R\dfrac{1-e^{-bn}}{p\left(e^{b/p} - 1\right)}e^{b/n}$ 5.60

Задачи для самостоятельного решения

5.1 Страховая компания заключила договор с предприятием на: 2 года, 3 года, 4 года, 7 лет, установив годовой страховой взнос в сумме (таблица). Страховые взносы помещаются в банк под сложную процентную ставку 12% годовых. Определите сумму, которую получит страховая компания по этому контракту, если взносы будут поступать: а) в конце каждого года при ежегодном начислении процентов; б) в конце каждого года при полугодовом начислении процентов; в) равными долями в конце каждого полугодия при ежегодном начислении процентов; г) равными долями в конце каждого квартала при ежеквартальном начислении процентов; д) равными долями в конце каждого квартала при ежемесячном начислении процентов.

Вариант	Сумма, тыс. руб.	**Вариант**	Сумма, тыс. руб.
1	100	**14**	98
2	180	**15**	105
3	150	**16**	120
4	170	**17**	145
5	110	**18**	180
6	90	**19**	120
7	75	**20**	130
8	162	**21**	220
9	200	**22**	215
10	250	**23**	285
11	170	**24**	300
12	210	**25**	228
13	135	**26**	305
27	175	**29**	195
28	255	**30**	240

5.2 Определите современную стоимость всех платежей по всем вариантам задачи **5.1.**

5.3 Для создания фонда фирма вкладывает ежегодно в банк по 124 тыс. руб. под годовую номинальную процентную ставку 12%. Определите сумму, которая будет накоплена в фонде через 8 лет, если: а) взносы делаются в конце года, а сложные проценты начисляются по полугодиям; б) взносы делаются равными долями в конце каждого месяца, а сложные проценты начисляются ежеквартально; в) взносы делаются равными долями в конце каждого квартала и начисляются непрерывные проценты.

5.4 Страховая компания, заключив на 4 года договор с некоторой фирмой, получает от нее страховые взносы по 150 тыс. руб. в конце каждого квартала. Эти взносы компания помещает в банк под годовую номинальную процентную ставку 11% годовых.

Найдите приведенную стоимость суммы, которую получит страховая компания по данному контракту, если сложные проценты начисляются: а) ежеквартально; б) ежемесячно; в) непрерывно.

5.5 Клиент хочет накопить на своем счете сумму (таблица), осуществляя в конце каждого года равные вклады в банк под сложную процентную ставку 10% годовых.

Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы клиент мог накопить требуемую сумму за: а) 3 года; б) 5 лет; в) 7 лет; г) 10 лет?

Вариант	Сумма, тыс. руб.	**Вариант**	Сумма, тыс. руб.
1	1000	**16**	980
2	800	**17**	1050
3	970	**18**	1200
4	700	**19**	1450
5	1100	**20**	1800
6	900	**21**	1200
7	750	**22**	1300
8	820	**23**	2200
9	2000	**24**	2150
10	2500	**25**	2850
11	1700	**26**	3000
12	2100	**27**	2280
13	1350	**28**	3050
14	1750	**29**	1950
15	2550	**30**	2400

5.6 Предприниматель, с целью покупки оборудования, делает в конце каждого квартала равные вклады в банк под годовую номинальную процентную ставку 14%, причем сложные проценты начисляются по полугодиям.

Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы предприниматель мог накопить 1000 тыс. руб. за: а) 3 года; б) 5 лет; в) 8 лет.

5.7 Предприятие намеревается создать за 5 лет фонд развития в размере (таблица). Какую сумму предприятие должно ежегодно ассигновать на эту цель при условии помещения денег в банк в конце каждого года под процентную ставку 14% годовых с начислением сложных процентов:

а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; б) ежемесячно; д) непрерывно?

Вариант	Сумма, тыс. руб.	**Вариант**	Сумма, тыс. руб.
1	1000	**16**	980
2	800	**17**	1050
3	500	**18**	1200
4	700	**19**	450
5	1100	**20**	1800
6	900	**21**	1200
7	750	**22**	1300
8	620	**23**	2200
9	2000	**24**	2150
10	2500	**25**	2850
11	1700	**26**	3000
12	2100	**27**	2280
13	1350	**28**	3050
14	1750	**29**	1950
15	2550	**30**	2400

5.8 Для создания за 5 лет фонда в размере 1 млн. руб. фирма делает ежегодные равные взносы в банк под годовую номинальную процентную ставку 11%. Определите, какой величины взнос должна ежегодно делать фирма, если:

а) взносы делаются в конце года, а сложные проценты начисляются ежемесячно;

б) взносы делаются равными долями в конце каждого полугодия, а сложные проценты начисляются ежеквартально;

в) взносы делаются равными долями в конце каждого квартала и начисляются непрерывные проценты.

5.9 Анализируются два варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо:

а) вносить на депозит сумму в размере 15 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет 10% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов;

б) делать ежегодный вклад в размере 52 тыс. руб. на условиях 12% годовых при ежегодном начислении сложных процентов. Какая сумма будет на счете через 8 лет при реализации каждого плана?

Какой план более предпочтителен? Изменится ли Ваш выбор, если процентная ставка во втором плане будет увеличена до 13%?

5.10 Предприятие создает инвестиционный фонд. Ежегодно для создания фонда в банк вносится «R» тыс. руб. под «i» % годовых.

Найти наращенную сумму ренты, если фонд создается в течении «n» лет, при условии, что:

а) рентные платежи осуществляются один раз в году, начисление процентов производится один раз в конце периода начисления;

б) рентные платежи осуществляются один раз в году, а проценты начисляются ежеквартально;

в) рентные платежи осуществляются ежеквартально, а проценты начисляются один раз в году;

г) рентные платежи осуществляются два раза в году, и проценты начисляются два раза в год.

д) рентные платежи осуществляются каждые два месяца в году, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить срок, для каждого варианта, который необходим для создания инвестиционного фонда, если процентная ставка снизится в полтора раза.

Определить современную величину постоянной ренты для каждого варианта.

№ задачи	Величина ежегодного платежа, тыс. руб. (R)	Процентная ставка, % (i)	Срок ренты, лет (n)	**№ задачи**	Величина ежегодного платежа, тыс. руб. (R)	Процентная ставка, % (i)	Срок ренты, лет (n)
1	250	9,0	7	**15**	270	11,0	8
2	190	10,5	4	**16**	280	10,8	5
3	270	11,0	6	**17**	195	10,0	6
4	180	11,5	5	**18**	230	10,5	7
5	190	12,0	3	**19**	245	12,5	4
6	320	9,1	4	**20**	240	10,9	8
7	475	10,9	7	**21**	295	11,4	2
8	420	11,3	3	**22**	360	12,3	5
9	290	10,5	5	**23**	185	10,2	6
10	310	9,2	3	**24**	255	12,7	4
11	264	8,8	6	**25**	277	11,6	7
12	183	10,1	7	**26**	319	9,9	5
13	219	9,7	5	**27**	172	10,5	8
14	272	10,5	7	**28**	280	9,6	6

5.11 Клиент хочет накопить на своем счете 800 тыс. руб., осуществляя в конце каждого года равные вклады в банк в размере 150 тыс. руб. под сложную процентную ставку 13% годовых.

За какой срок он сможет это сделать? Как изменится ответ задачи, если проценты будут начисляться: по полугодиям; ежеквартально; ежемесячно?

5.12 Определите срок, необходимый для создания инвестиционного фонда в размере 10 млн. руб., если планируется а) вносить по полугодиям 100 тыс. руб. под 12% годовых; б) ежемесячно осуществлять взносы в размере 15 тыс. руб. под 14% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

5.13 Путем ежегодных взносов постнумерандо по 300 тыс. руб. предполагается за 3 года накопить 1200 тыс. руб. Какова должна быть годовая процентная ставка?

5.14 Клиент в конце каждого года вкладывает 14 тыс. руб. в банк, выплачивающий простые проценты по ставке 10% годовых. Определите сумму, которая будет на счете клиента через 3 года. Как изменится ответ задачи, если деньги вносятся по полугодиям по 7 тыс. руб.?

Вопросы для самоконтроля

1. Какой денежный поток называется потоком постнумерандо?
2. Какой денежный поток называется потоком пренумерандо?
3. В рамках решения каких двух задач может выполняться оценка денежного потока?
4. Какой денежный поток называют аннуитетом?
5. Что называется членом аннуитета, периодом аннуитета?
6. Какой аннуитет называется срочным?
7. Какой аннуитет называется p-срочным?
8. Какой аннуитет называется постоянным?
9. Что такое наращенная сумма ренты?
10. Что такое приведенная стоимость ренты?
11. Что называется коэффициентом наращения и приведения ренты?
12. Какие проценты в основном используются при оценке ренты?
13. Какой аннуитет называется отсроченным?
14. Что такое вечная рента?

15. Дайте определение текущего значения потока платежей по ставке сложных процентов
16. Как вычисляется текущее значение обычной ренты с заданным сроком?
17. Как вычисляется наращенное значение обычной ренты с заданным сроком?
18. Выплаты пенсии в конце каждого месяца задают ренту. Какая это рента – обычная или приведенная?
19. Какие существуют ренты по количеству платежей в году?
20. Чем отличается годовая рента от а-срочной?
21. Какие различают ренты по частоте начислений процентов в году?
22. Какие различают ренты по величине своих членов?
23. Какие различают ренты по моменту выплат платежей в пределах периода ренты?
24. Какие различают ренты по вероятности выплат?
25. По какой формуле определяется коэффициент аккумуляции вкладов?

6 ПЕРЕМЕННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ. КОНВЕРСИЯ ФИНАНСОВЫХ РЕНТ

В практике встречаются случаи, когда члены потока платежей изменяются в течение срока ренты. Изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка, а иногда и случайными факторами.

Поток последовательных платежей, члены которого не являются постоянными величинами, называется *переменной рентой*.

Изменение величины платежей может быть описано каким-либо законом или носить нерегулярный характер. При этом определяются параметры следующих видов рент:

а) ренты с разовыми изменениями платежей:

Наращенная сумма годовой ренты

$$S = R_1 \cdot s_{n_1;i_1} \cdot (1+i_1)^{n-n_1} + R_2 \cdot s_{n_2;i_2} \cdot (1+i_2)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k \cdot s_{n_k;i_k}, \quad 6.1$$

где $s_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коэффициент наращения годовой ренты.

Современная величина годовой ренты

$$A = R_1 \cdot a_{n_1;i_1} + R_2 \cdot a_{n_2;i_2} \cdot v^{n_1} + \ldots + R_k \cdot a_{n_k;i_k} \cdot v^{n-n_k}, \quad 6.2$$

где $a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$v = \dfrac{1}{(1+i)}$ – дисконтный множитель по ставке i;

n – срок ренты, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_к$;

$n_1, n_2, \ldots, n_к$ – продолжительность временных отрезков;

$R_1, R_2, \ldots, R_к$ - годовой платеж в соответствующем временном отрезке;

$i_1, i_2, \ldots, i_к$ – процентные ставки.

Если платежи вносятся несколько раз в году, то коэффициенты наращения ($s_{n;i}^{(p)}$) или приведения ($a_{n;i}^{(p)}$) рассчитываются как для p-срочной ренты.

б) ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов:

Наращенная сумма переменной ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов составит:

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right), \qquad 6.3$$

где d – разность арифметической прогрессии (величина абсолютного годового изменения членов ренты с соответствующим знаком),

R – первый член ренты.

Современная величина данной ренты составит:

$$A = R \cdot a_{n;i} + \frac{d}{i}\left(a_{n;i} - nv^{n}\right). \qquad 6.4$$

Зная значение постоянного прироста d, процентной ставки i, наращенной суммы S или текущей суммы долга A, определяется размер первого платежа R:

$$R = \frac{S - \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right)}{s_{n;i}}; \qquad 6.5$$

$$R = \frac{A - \frac{d}{i}\left(a_{n;i} - nv^{n}\right)}{a_{n;i}}. \qquad 6.6$$

Величина абсолютного прироста d определяется по формулам:

$$d = \frac{i\left(S - R \cdot s_{n;i}\right)}{s_{n;i} - n}; \qquad 6.7$$

$$d = \frac{i\left(A - R \cdot a_{n;i}\right)}{a_{n;i} - nv^{n}}. \qquad 6.8$$

Для переменной p-срочной ренты с постоянным абсолютным приростом платежей наращенная сумма и современная стоимость определяются по формулам:

$$S = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{d}{p}(t-1)\right)(1+i)^{n-t/p}; \qquad 6.9$$

$$A = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{d}{p}t\right)v^{t/p}. \qquad 6.10$$

в) ренты с постоянным относительным приростом платежей:

Наращенная сумма и современная стоимость ренты составят:

а) при ежегодных платежах

$$S = R\frac{q^{n} - (1+i)^{n}}{q - (1+i)}; \quad 6.11$$

$$A = R\frac{(qv)^{n} - 1}{q - (1+i)}, \quad 6.12$$

где q – знаменатель прогрессии, т.е. коэффициент роста;

б) при *р*-срочной ренте

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^{n}}{q - (1+i)^{1/p}}; \quad 6.13$$

$$A = R\frac{q^{np}v^{n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}}. \quad 6.14$$

Виды конверсий.

В практике иногда сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или даже в ходе его выполнения необходимо в силу каких-либо причин изменить условия выплаты ренты.

Иначе говоря, речь идет о *конвертировании условий, предусматриваемых при выплате финансовой ренты.* Простейшими случаями конверсии являются:

- замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты)*;

- замена разового платежа рентой *{рассрочка* платежа).

К более сложному случаю относится объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну - *консолидация рент.*

Общий случай конверсии - замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, например, немедленной ренты на отложенную, годовой - на ежеквартальную и т.д. Ясно, что все перечисленные изменения не могут быть произвольными.

Если предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих сторон, то конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности (раздел 4).

Конверсия рент широко применяется при *реструктурировании задолженности.* Как известно, при этом нередко условия погашения долга смягчаются, однако принцип эквивалентности соблюдается и в этих случаях, обычно, правда, в урезанном, если так можно сказать, виде.

Рассмотрим несколько основных случаев конверсии рент.

Выкуп ренты. Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом. Решение проблемы здесь очень простое. Искомый размер выкупа должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты. Для решения задачи в зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей.

Естественно, что применяемая при расчете современной стоимости процентная ставка должна удовлетворять обе участвующие стороны.

Рассрочка платежей. Обсудим теперь задачу, обратную выкупу ренты. Если есть обязательство уплатить некоторую крупную сумму и стороны согласились, что задолженность будет погашена частями — в рассрочку, то последнюю удобно осуществить в виде выплаты постоянной ренты.

Для решения задачи приравниваем современную стоимость ренты, с помощью которой производится рассрочка, сумме долга. Задача обычно заключается в определении одного из параметров этой ренты — члена ренты или ее срока — при условии, что остальные параметры заданы.

Объединение (консолидация) рент. Объединение рент, очевидно, заключается в замене нескольких рент одной, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых (консолидированных) рент.

Замена нескольких рент одной, параметры которой надо определить, называется *консолидацией* рент. Современная величина вновь образованной консолидированной ренты должна быть равна сумме современных величин консолидируемых рент:

$$A = \sum_{q=1}^{K} A_q = \sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}, \qquad 6.15$$

где A – современная величина консолидированной ренты;

A_q – современная величина q-ой заменяемой ренты, q=1, 2, …, K;

K – число консолидируемых рент;

R_q – член q-ой ренты;

n_q и i_q – соответственно продолжительность и процентная ставка q-ой ренты.

Член консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$R = \frac{A}{a_{n;i}} = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{a_{n;i}} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n;i}}, \qquad 6.16$$

где $a_{n;i}$ – коэффициент приведения консолидированной ренты.

Член консолидированной отсроченной ренты определяется по формуле:

$$R_{отсроч.} = \frac{A}{a_{n-t;i} \cdot v^t} = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{a_{n-t;i} \cdot v^t} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n-t;i} \cdot v^t}, \qquad 6.17$$

где $a_{n-t;i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{i}$ – коэффициент приведения отсроченной консолидированной ренты;

t – продолжительность отсрочки, лет;

i – процентная ставка консолидированной ренты;

$v^t = \frac{1}{(1+i)^t}$ – дисконтный множитель за период t, на который отложена рента.

Срок консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$n = \frac{-\ln\left(\frac{1}{K}\sum_{q=1}^{K}\frac{1-(1+i_q)^{-n_q}}{i_q}\right)}{\ln(1+i)}. \qquad 6.18$$

Если процентные ставки объединяемых рент и вновь создаваемой равны между собой, т.е. $i_1 = i_2 = \ldots = i_q = i$, то

$$n = \frac{\ln K - \ln \sum_{q=1}^{K}(1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}. \qquad 6.19$$

Замена немедленной ренты на отсроченную, т.е. когда первый платеж по ренте переносится на более поздний срок в t лет. При этом возможны следующие варианты конверсии:

1) общая продолжительность ренты остается прежней, т.е. $n_1 = n_2 = n$, рентный платеж составит:

$$R_2 = \frac{A_1}{a_{n;i} \cdot v^t} = \frac{R_1}{v^t} = R_1 (1 + i)^t, \qquad 6.20$$

где R_1 и R_2 – годовые платежи соответственно первоначальной и отсроченной ренты;

$a_{n;i}$ – коэффициент приведения первоначальной годовой ренты;

t - продолжительность отсрочки;

2) общая продолжительность ренты изменяется, т.е. $n_1 \neq n_2$, рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = \frac{A_1 \cdot (1 + i)^t}{a_{n_1;i}} = R_1 \cdot \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} \cdot (1 + i)^t, \qquad 6.21$$

где $a_{n_1;i}$ и $a_{n_2;i}$ – коэффициенты приведения соответственно первоначальной и отложенной рент;

3) члены ренты остаются неизменными, т.е. $R_1 = R_2$, тогда срок отложенной ренты составит:

$$n_2 = \frac{-\ln\left(1 - \left(1 - (1 + i)^{-n_1}\right)(1 + i)^t\right)}{\ln(1 + i)}. \qquad 6.22$$

Замена годовой ренты на p-срочную. Годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1 заменяется на p-срочную с параметрами R_2, n_2, p. Если заданы срок заменяющей ренты, ее периодичность и ставка, то

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a^{(p)}_{n_2;i}}, \qquad 6.23$$

где $a_{n_1;i} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n_1}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$a_{n_2;i}^{(p)} = \dfrac{1-(1+i)^{-n_2}}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}$ – коэффициент приведения p-срочной ренты.

Если $n_1 = n_2 = n$, то

$$R_2 = R_1 \frac{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}{i}. \qquad 6.24$$

При *изменении продолжительности ренты* размер нового рентного платежа составит

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}. \qquad 6.25$$

При *изменении срочности ренты* (числа выплат в году) годовой рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n;i}^{(p_1)}}{a_{n;i}^{(p_2)}} = R_1 \frac{p_1\left((1+i)^{1/p_1}-1\right)}{p_2\left((1+i)^{1/p_2}-1\right)}, \qquad 6.26$$

где p_1 и p_2 – характеристики срочности двух рент.

Пример 6.1 По условиям контракта платежи вносятся в конце года, первый платеж составляет 2 млн. руб., каждый год его величина возрастает на 200 тыс. руб., срок выплат 4 года, процентная ставка 8%.

Определить наращенную сумму.

Решение. Параметры ренты:

$R = 2000000$ руб.; $n = 4$; $i = 0{,}08$; $d = 200000$ руб.;

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}08)^4 - 1}{0{,}08} = 4{,}506112 .$$

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right) = 2000000 \cdot 4{,}506112 + \frac{200000}{0{,}08}\left(4{,}506112 - 4\right) = 10277504$$

руб.

Пример 6.2 Клиентом получен кредит сроком на 7 лет, при следующих условиях погашения: первый платеж 2 млн. руб., каждый следующий возрастает на 10%, платежи вносятся два раза в году, процентная ставка 8% годовых.

Определить размер полученного кредита и сумму долга, подлежащую возврату.

Решение.

Параметры ренты:

$$R = 2000000 \text{ руб.}; \; n = 7; \; i = 0{,}08; \; p = 2; \; q = 1{,}1.$$

Размер полученного кредита – это современная стоимость ренты.

$$A = R\frac{q^{np}v^{n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000\frac{1{,}1^{14}\cdot 1{,}08^{-7} - 1}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 40000000 \text{ руб.}$$

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^{n}}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000\frac{1{,}1^{14} - 1{,}08^{7}}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 68576300 \text{ руб.}$$

Потоки платежей в производственной деятельности

Определение оптимального уровня денежных средств

Денежные средства предприятия включают в себя деньги в кассе и на расчетном счете в коммерческих банках. Эти средства необходимы предприятию в денежной форме для осуществления текущих платежей по поставкам сырья, оборудования, услуг.

В качестве цены за поддержание необходимого уровня денежных средств принимают возможный (упущенный) доход от инвестирования среднего остатка в государственные ценные бумаги, как в безрисковые. Таким образом встает задача определения оптимального запаса денежных средств, минимизирующего издержки, связанные с поддержанием уровня ликвидности.

Для решения этой задачи часто применяются модели, разработанные в теории управления. На Западе наибольшее распространение получили модель Баумоля (1952) и Модель Миллера- Орра (1966).

Модель Баумоля

Предполагается пилообразный график изменения остатка средств на расчетном счете предприятия.

Предприятие начинает работать, имея некоторый разумный запас денежных средств Q. Затем расходует их в течение некоторого периода времени. Все средства, поступающие от реализации товаров и услуг, предприятие вкладывает в краткосрочные ценные бумаги.

Как только запас денежных средств достигает нулевого или минимально допустимого уровня, предприятие продает ценные бумаги с тем чтобы восстановить первоначальный запас денежных средств *Q*.

Алгоритм расчета следующий. Сумма *Q* вычисляется по формуле

$$Q = \sqrt{\frac{2Vc}{r}} \qquad 6.27$$

где *V* – прогнозируемая потребность в денежных средствах в периоде (годе);

c – расходы по конвертации ценных бумаг в денежные средства;

r – процентный доход по краткосрочным вложениям в ценные бумаги.

Средний запас денежных средств составляет Q/2, а общее количество сделок по конвертации ценных бумаг в денежные средства за период равно *K=V/Q*.

Общие расходы по реализации такой политики управления денежными средствами составят *R=ck+rQ/2*.

Модель Миллера-Орра

Недостаток предыдущей модели в том, что в ней предполагается равномерный расход денежных средств. В действительности такое встречается редко. В модели, разработанной Миллером и Орром, исходят из того, что предсказать каждодневный отток и приток денежных средств невозможно. Авторы используют при построении модели процесс Бернулли – стохастический процесс, в котором поступление и расходование денег от периода к периоду являются независимыми случайными событиями.

Остаток средств на расчетном счете хаотически меняется до тех пор, пока не достигает верхнего предела $Q_в$. В этот момент предприятие начинает покупать ценные бумаги с тем, чтобы вернуть запас денежных средств к нормальному уровню (к точке возврата $T_в$). Если запас достигает нижнего предела $Q_н$, то предприятие продает свои ценные бумаги пока не восстановит нормальный уровень запаса.

Алгоритм построения модели складывается из следующих шагов:

1. Экспертным путем задается минимальный предел денежных средств $Q_н$

2. По статистическим данным определяется дисперсия *V* ежедневных колебаний денежного потока.

3. Определяются расходы P_x по хранению средств на р/с, обычно их выражают в виде ставки ежедневного дохода по краткосрочным ценным бума-

гам, и расходы P_m по взаимной трансформации денежных средств и ценных бумаг – операционные издержки (предполагаются постоянными).

4. Рассчитывается размах вариации остатка

5. Рассчитывают верхнюю границу денежных средств на р/с

$Q_в=Q_н+S$

6. Определяют точку возврата $T_в$ – нормальный уровень запаса

$T_в=Q_н+S/3$

Показатели эффективности производственных инвестиций

В инвестиционном процессе имеется два потока: потока инвестиций и последовательное получение дохода. Эти два потока могут следовать один за другим, между ними может быть некоторый разрыв или наложение во времени. При изучении эффективности инвестиций оба эти потока могут рассматриваться и сопоставляться по отдельности или как одна последовательность. В последнем случае инвестиционные расходы включаются в поток с отрицательным знаком.

Под чистым доходом понимают общий доход (выручку), полученный в каждом временном отрезке, за вычетом всех платежей, связанных с его созданием и получением. В эти платежи входят прямые и косвенные расходы по оплате труда и материалов, налоги. Элемент объединенного потока инвестиций и доходов в момент t определяется следующим образом:

$$R_t=(G_t-C_t)-(G_t-C_t-D_t)T-K_t+S,$$

где R_t - элемент потока наличности,

G_t – ожидаемый брутто-доход от реализации проекта, например, объем выручки от продажи продукции,

C_t – общие текущие расходы, прямые и косвенные (амортизационные отчисления сюда не включаются),

D_t – расходы, на которые распространяются налоговые льготы,

T – налоговая ставка,

K_t – инвестиционные расходы,

S_t – различные виды компенсаций, дотаций.

Анализ производственных инвестиций в основном заключается в оценке и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. В качестве измерителей обычно используются характеристики, основанные на дисконтировании потоков ожидаемых поступлений и расходов и приведении их к одному моменту времени.

Ставку, по которой производится дисконтирование, называют ставкой сравнения. При выборе ставки сравнения ориентируются на существующий или ожидаемый уровень ссудного процента и корректируют ее с учетом ожидаемого риска. Ясно, что будущая ставка является не вполне определенной величиной, поэтому расчеты носят условный характер и могут выполняться не для одного, а для нескольких значений ставки.

В финансовом анализе обычно применяют четыре показателя эффективности инвестиций:

1. чистый приведенный доход (ЧПД, по-английски NPV – Net Present Value),
2. срок окупаемости (payback method),
3. внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return – IRR),
4. рентабельность.

Чистый приведенный доход

Этот показатель часто считается основным. Будем обозначать его как *NPV*. Эта величина характеризует конечный абсолютный результат, рассчитываемый как разность дисконтированных на один момент времени показателей дохода и капиталовложений, то есть

$$NVP = \sum R_t v^t$$

где R_t – член потока платежей (объединенного потока инвестиций и доходов),
v – дисконтный множитель, $v=1/(1+q)$, где q – ставка сравнения.

Если инвестиции и доходы равномерные и дискретные, то W можно найти как разность современных величин двух рент (одной, представляющей инвестиции, и другой, отсроченной до начала периода отдачи, представляющей поток доходов).

Несмотря на то, что этот показатель чистого приведенного дохода является основой для определения других измерителей эффективности, у него есть ряд существенных недостатков. Один недостаток его состоит в том, что он предполагает известными все будущие члены потока, что на практике нереально. Кроме того, являясь абсолютным показателем, он не дает представления об относительной эффективности вложения финансовых средств.

Срок окупаемости

Под сроком окупаемости в финансовом анализе понимают продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме приведенных на этот же момент инвестиций.

Внутренняя норма доходности

Под внутренней нормой доходности (*IRR*) понимают ту расчетную ставку процентов, применение которой к инвестициям порождает данный поток доходов. Чем выше эта ставка (мы ее будем обозначать *IRR*), тем больше эффективность капитальных вложений. Если капиталовложения осуществляются только за счет привлеченных средств, причем кредит получен по ставке i, то разность (IRR-i) показывает эффект предпринимательской деятельности. При $IRR=i$ доход только окупает инвестиции, при $IRR<i$ инвестиции для предпринимателя убыточны.

За рубежом расчет внутренней нормы доходности часто применяют в качестве первого шага количественной оценки эффективности капиталовложений. Для дальнейшего анализа отбирают те инвестиционные проекты, у которых этот показатель не ниже 15-20%.

В последние 15 лет в анализе эффективности капиталовложений применяется модифицированный показатель внутренней нормы доходности *MIRR*. В литературе описаны различные варианты построения этого показателя.

Рентабельность

Этот показатель представляет собой отношение приведенных по ставке сравнения доходов к приведенным на ту же дату капиталовложениям. Иногда этот показатель называют индексом рентабельности.

Задачи для самостоятельного решения

6.1 Предприятием был получен кредит на 10 лет. Условия погашения кредита, следующие:

- в первые пять лет платежи размером 6 млн. руб. вносятся каждый год под 11% годовых;
- следующие три года платежи размером 4 млн. руб. вносятся по полугодиям под 9% годовых;
- последние два года ежеквартально вносятся платежи размером 3 млн. руб. под 8% годовых.

Определите наращенную сумму долга по кредиту. Рассчитайте современную стоимость кредита.

6.2 Согласно условиям финансового соглашения, на счет в банке в течение 7 лет:

а) в конце года поступают денежные суммы, первая из которых равна 60 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 3000 руб.;

б) каждое полугодие будут поступать платежи, первый из которых составит 35 тыс. руб., а каждый последующий будет увеличиваться на 1700 руб.

Определите наращенную стоимость и приведенную величину этого аннуитета, если банк применяет процентную ставку 12% годовых, а сложные проценты начисляются один раз в конце года.

6.3 По условиям контракта на счет клиента в банке поступают в течение 6 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 150 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 11%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 10% годовых.

6.4 За 5 лет необходимо накопить 1000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 15%, а процентная ставка равна 11% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Как изменится величина первого вклада, если предполагается ежеквартальный рост поступлений на 6%?

6.5 За 10 лет необходимо накопить 5000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 10000 руб., а процентная ставка равна 10% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 150 тыс. руб.

6.6 Три немедленные годовые ренты постнумерандо, с характеристиками: R_q = 130; 220 и 300 тыс. руб.; n_q = 5; 12 и 8 лет; i_q = 14; 22 и 18% ; заменяются: а) одной немедленной рентой постнумерандо со сроком 10 лет и процентной ставкой 20% годовых; б) одной отсроченной на 3 года рентой с общим сроком 10 лет, включая отсрочку, и процентной ставкой 20% годовых. Определите величину годового платежа консолидированной ренты.

6.7 Объединяются три ренты со сроками n_q = 7; 4 и 9 лет, члены рент равны между собой, а R_q = 500 тыс. руб.; процентные ставки также равны и составляют i_q = 8%. Размер консолидированного годового платежа равен 1,5 млн. руб., процентная ставка сохраняется на уровне 8% годовых. Определите срок новой ренты.

6.8 Фирма по торговле недвижимостью продает объект стоимостью 3,5 млн. руб. При этом предлагаются следующие варианты оплаты: а) оплата в течение трех лет равными платежами, вносимыми в конце года под 9% годовых; б) оплата с отсрочкой платежа в один год, остальные условия аналогичны предыдущему варианту; в) оплата с отсрочкой в один год, но срок ренты возрастает до четырех лет. Определите финансовые последствия для каждого варианта.

6.9 По условиям договора немедленная годовая рента сроком четыре года, величиной годового платежа 200 тыс. руб. и процентной ставкой 10 % годовых, заменяется отсроченной на два года рентой. Определите срок новой ренты при сохранении остальных параметров.

6.10 По условиям соглашения между кредитором и заемщиком годовая рента постнумерандо с величиной годового платежа 180 тыс. руб., сроком три года и ставкой 14% годовых, заменяется на квартальную при сохранении остальных параметров. Оцените новый аннуитет. Как изменятся параметры аннуитета, если срок ренты увеличится до четырех лет?

Вопросы для самоконтроля

1. Какой аннуитет называется переменным?
2. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
3. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным относительным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
4. Перечислите виды конверсии ренты.
5. Что такое консолидация ренты?
6. Что такое отсроченная рента?

7 РИСК И ДИВЕРСИФИКАЦИЯ

В финансовом анализе производственных инвестиций неизбежно сталкиваются с неопределенностью, неоднозначностью показателей затрат и отдачи.

В связи с этим возникает проблема измерения *риска* и его влияния на результаты инвестиций. Широко распространенный термин “риск”, как известно, понимается неоднозначно.

Его содержание определяется той конкретной задачей, где этот термин используется. Достаточно просто перечислить такие понятия как *кредитный, валютный, инвестиционный, политический, технологический риски, риск ликвидности активов и т.д.*

Отметим, что даже самое общее определение этого понятия не оставалось неизменным во времени. Говоря о первом в экономике научном определении риска, обычно ссылаются на Ф. Найта (1921), который предложил различать *риск и неопределенность.*

Риск имеет место тогда, когда некоторое действие может привести к нескольким взаимоисключающим исходам с известным распределением их вероятностей.

Если же такое распределение неизвестно, то соответствующая ситуация рассматривается как неопределенность. Как нам представляется, здесь речь идет, скорее, не об определении риска, а лишь о наличии информации, характеризующей риск.

В экономической практике, особенно финансовой, обычно не делают различия между риском и неопределенностью. Чаще всего под ***риском*** *понимают некоторую возможную потерю, вызванную наступлением случайных неблагоприятных событий.*

В некоторых областях экономической деятельности сложились устойчивые традиции понимания и измерения риска. Наибольшее внимание к измерению риска проявлено в страховании.

Объяснять причину такого внимания нет необходимости. Измеритель риска, как возможная потеря страховщика, был использован еще в конце XVIII в. В других направлениях финансовой деятельности под риском также понимается некоторая потеря.

Она может быть *объективной,* т.е. определяться внешними воздействиями на ход и результаты деятельности хозяйствующего субъекта. Так, например, потеря покупательной способности денег (инфляционный риск) не зависит от воли и действий их владельца. Однако, часто риск, как возможная потеря, может быть связан с выбором того или иного решения, той или иной линии поведения. Заметим также, что в некоторых областях деятельности риск понимается как *вероятность* наступления некоторого неблагоприятного события. Чем выше эта вероятность, тем больше риск. Такое понимание риска оправданно в тех случаях, когда событие может наступить или не наступить (банкротство, крушение и т.д.).

Когда невозможны непосредственные измерения размеров потерь или их вероятностей, риск можно квантифицировать с помощью *ранжирования* соответствующих объектов, процессов или явлений в отношении возможного ущерба, потерь и т.д.

Ранжирование обычно основывается на экспертных суждениях. Естественной реакцией на наличие риска в финансовой деятельности является стремление компенсировать его с помощью так называемых *рисковых премий (risk premium),* которые представляют собой различного рода надбавки (к цене, уровню процентной ставки, тарифу и т.д.), выступающие в виде “платы за риск”. Второй путь ослабления влияния риска заключается в *управлении риском.* Последнее осуществляется на основе различных приемов, например, с помощью заключения форвардных контрактов, покупки валютных или процентных опционов и т.д.

Одним из приемов сокращения риска, применяемым в инвестиционных решениях, является *диверсификация,* под которой понимается распределение общей инвестиционной суммы между несколькими объектами.

Диверсификация — общепринятое средство сокращения любого вида риска. С увеличением числа элементов набора (портфеля) уменьшается общий размер риска. Однако только в случае, когда риск может быть измерен и представлен в виде статистического показателя, управление риском получает надежное основание, а последствия диверсификации поддаются анализу с привлечением методов математической статистики.

В инвестиционном анализе и страховом деле риск часто измеряется с помощью таких стандартных статистических характеристик, как *дисперсия* и *среднее квадратическое (стандартное) отклонение.* Обе характеристики измеряют колебания, в данном случае — *колебания дохода.* Чем они больше, тем выше рассеяние показателей дохода вокруг средней и, следовательно, степень риска.

Напомним, что между дисперсией (D) и средним квадратическим отклонением (σ) существует следующее соотношение:

$$\sigma = \sqrt{D} \qquad 7.1$$

В свою очередь дисперсия относительно выборочной средней ($\overline{x}$) находится как

$$D = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad 7.2$$

где n – количество наблюдений, $\bar{x}$ – средняя случайной переменной x.

Как известно, среднее квадратическое отклонение имеет то неоспоримое достоинство, что при близости наблюдаемого распределения (например, распределении дохода от инвестиций) к нормальному, что, строго говоря, должно быть статистически проверено, этот параметр может быть использован для определения границ, в которых с заданной вероятностью следует ожидать значение случайной переменной. Так, например, с вероятностью 68% можно утверждать, что значение случайной переменной x (в нашем случае доход) находится в границах $x \pm \sigma$, а с вероятностью 95% — в пределах $x \pm 2\sigma$ и т.д. Что видно на рисунке 7.1

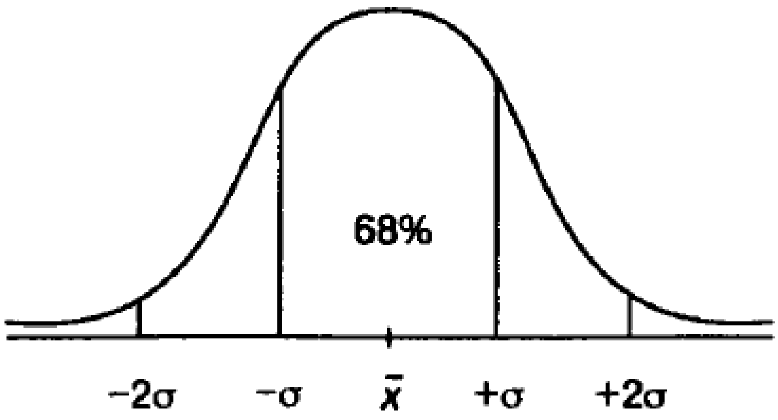

Рисунок 7.1 - Изменение случайной переменной x

Определим теперь что дает *диверсификация* для уменьшения риска и выявим условия, когда эта цель достигается. В качестве объекта анализа примем некоторый абстрактный портфель ценных бумаг (далее для краткости - портфель).

Такой выбор объясняется методологическими преимуществами - в этом случае проще выявить зависимости между основными переменными. Однако многие из полученных результатов без большой натяжки можно распространить и на производственные инвестиции.

Выше отмечалось, что в качестве измерителя риска в долгосрочных финансовых операциях широко распространена такая мера, как дисперсия дохода во времени. *Диверсификация портфеля* при правильном ее применении приводит к уменьшению этой дисперсии при всех прочих равных условиях. Диверсификация базируется на простой гипотезе. Если каждая компонента портфеля (в рассматриваемой задаче - вид ценной бумаги) характеризуется

некоторой дисперсией дохода, то доход от портфеля имеет дисперсию, определяемую его
составом. Таким образом, *изменяя состав портфеля, можно менять суммарную дисперсию дохода, а в некоторых случаях свести ее к минимуму.*

Итак, пусть имеется портфель из *n* видов ценных бумаг. Доход от одной бумаги вида *i* составляет величину d_i. Суммарный доход *(А),* очевидно, равен

$$A = \sum_i a_i\, d_i \qquad 7.3$$

где a_i - количество бумаг вида i.

Если d_i представляет собой средний доход от бумаги вида i, то величина *А* характеризует средний доход от портфеля бумаг в целом.

Для начала положим, что показатели доходов различных видов бумаг являются статистически независимыми величинами (иначе говоря, не коррелируют между собой). Дисперсия дохода портфеля (обозначим ее как *D)* в этом случае находится как

$$D = \sum a_i^2\, D_i \qquad 7.4$$

где D_i - дисперсия дохода от бумаги вида i, *n* — количество видов ценных бумаг.

Для упрощения, которое нисколько не повлияет на результаты дальнейших рассуждений, перейдем от абсолютного измерения количества ценных бумаг к относительному. Пусть теперь a_i, характеризует долю в портфеле бумаги вида i, т.е. $0 \le a_i \le 1$, $\sum a_i = 1$.

Для зависимых в статистическом смысле показателей дохода отдельных бумаг дисперсию суммарного дохода находим следующим образом:

$$D = \sum a_i^2\, D_i \; + 2 \sum a_i a_j\, r_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

7.5

где D_i - дисперсия дохода от бумаги вида i, r_{ij} – коэффициент корреляции дохода от бумаг вида i и j, σ_i и σ_j - среднее квадратическое отклонение дохода у бумаг вида i и j.

Коэффициент корреляции двух случайных переменных *х* и *у,* определяется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y} \qquad 7.6$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние (в нашем случае средние доходы двух видов бумаг).

Поскольку коэффициент корреляции может быть как положительной, так и отрицательной величиной, то, *при положительной корреляции дисперсия суммарного дохода увеличивается, при отрицательной она сокращается.*

В самом деле, при заметной отрицательной корреляции положительные отклонения от среднего дохода одних бумаг погашаются отрицательными отклонениями у других. И наоборот, при положительной корреляции отклонения суммируются, что увеличивает общую дисперсию и риск.

Изучим далее, каково влияние масштаба диверсификации на размер риска. Под ***масштабом диверсификации*** здесь будем понимать количество объектов, выбранных для инвестиции (количество видов ценных бумаг).

Обратимся к условному примеру, который позволяет наиболее отчетливо выделить влияние указанного фактора. Итак, пусть портфель состоит из бумаг различного вида, но имеющих одинаковую дисперсию дохода (σ_0^2). Удельные веса в портфеле каждого вида бумаг также одинаковы, а общая сумма вложений равна 1. Предположим, что показатели доходности у отдельных видов бумаг статистически независимы, т.е. применима формула (7.4). В этих условиях для оценки величины среднего квадратического отклонения дохода портфеля получим

$$D = \frac{1}{n}\sigma_0^2 \qquad 7.7$$

где n – количество видов ценных бумаг.

Воспользуемся приведенной формулой и определим дисперсию дохода для портфеля, состоящего из двух и трех видов бумаг.

Так, для двух бумаг имеем

$$D = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \text{ и } \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\sigma_0 = 0{,}71\sigma_0 \qquad 7.8$$

Для трех видов бумаг квадратическое отклонение портфеля составит $0{,}58\sigma_0$. Таким образом, *с увеличением числа составляющих портфеля риск уменьшается* даже при одинаковой дисперсии составляющих элементов. Однако прирост действенности диверсификации уменьшается. Соответствующая зависимость изображена на рисунке 7.2.

Как видим, наибольшее влияние увеличение масштабов диверсификации оказывает на начальных стадиях, т.е. при малых значениях *n*. Например, переход от одного вида бумаг к четырем сокращает квадратическое отклонение на 50%, а от одного к восьми — на 65%.

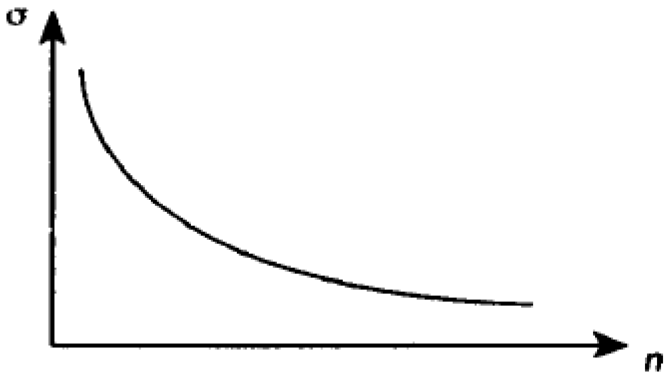

Рисунок 7.2 -Вариация дохода портфеля

Полученные выше выводы в отношении тенденции изменения среднего квадратического отклонения в зависимости от числа составляющих при условии, когда дисперсии составляющих одинаковы, очевидно, справедливы и для более общих случаев. Однако, зависимость этих параметров от степени диверсификации проявляется здесь не столь четко.

Посмотрим теперь, как изменяются доход и величина риска при изменении структуры портфеля. Такой анализ вряд ли имеет практическое значение.

Однако с его помощью наглядно демонстрируются последствия “смешения” ценных бумаг с различными доходностью и дисперсией. Запишем формулу только для двух видов ценных бумаг (*X* и *Y*).

Для независимых доходов получим

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y \qquad 7.9$$

и для *зависимых доходов*

$$D = a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2 + 2 a_x a_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y \qquad 7.10$$

Причем $a_y = 1 - a_x$

В этом случае среднее значение суммарного дохода определяется как

$$A = a_x d_x + (1 - a_x) d_y \qquad 7.11$$

Пусть $d_y > d_x$ и $\sigma_y > \sigma_x$.

Очевидно, что в силу этих условий рост доли бумаг второго вида увеличивает доходность портфеля. Так, на основе (7.11) получим

$$A = d_y + (d_y - d_x) a_y \qquad 7.12$$

Что касается дисперсии дохода портфеля, то, как это следует из (7.10), положение не столь однозначно и зависит от знака и степени корреляции. В связи с этим подробно рассмотрим три ситуации:

- полная положительная корреляция доходов;
- полная отрицательная корреляция;
- независимость доходов или нулевая корреляция.

В первом случае увеличение дохода за счет включения в портфель бумаги вида *У* помимо *X* сопровождается ростом как дохода, так и дисперсии. Для портфеля, содержащего оба вида бумаг, квадратическое отклонение находится в пределах $\sigma_x < \sigma < \sigma_y$.

Для частного случая, когда $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, получим по формуле (7.10) $D = \sigma^2$. Иначе говоря, при *полной положительной корреляции* “смешение” инвестиций не окажет никакого влияния на величину дисперсии.

При *полной отрицательной корреляции* доходов динамика квадратического отклонения доходов от портфеля более сложная. По мере движения от точки *X* к точке *У* эта величина сначала сокращается и доходит до нуля в точке *B,* затем растет (см. рисунок 7.3).

Следует обратить внимание на то, что при движении от *X* до *B* рост дохода сопровождается уменьшением риска (квадратического отклонения).

В последней из рассматриваемых ситуаций квадратическое отклонение при увеличении доли бумаги *У* проходит точку минимума, равного σ_m , далее оно растет до σ_y (см. рисунок 7.4).

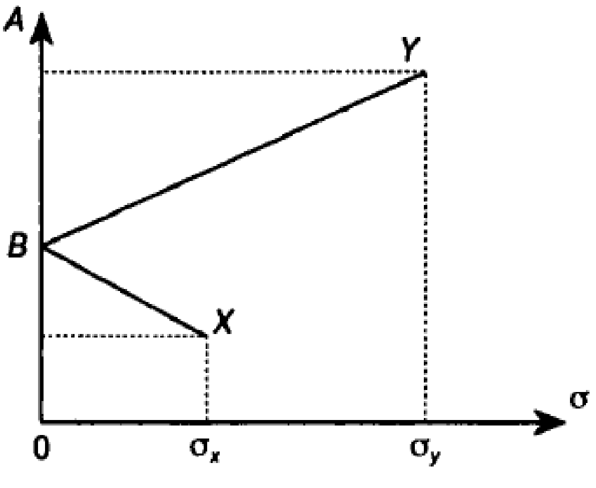

Рисунок 7.3

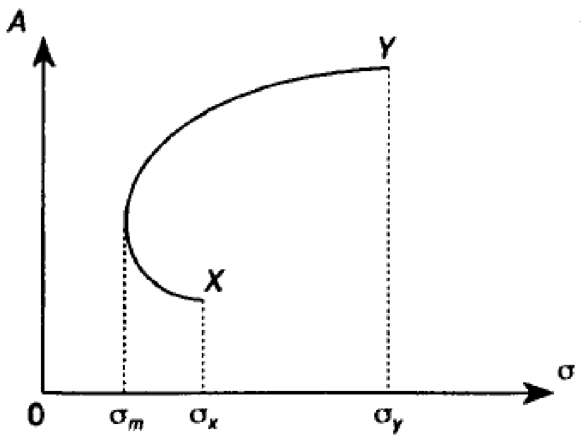

Рисунок 7.4

Из сказанного непосредственно следует, что эффективность диверсификации (в отношении сокращения риска) наблюдается только при отрицательной или, в крайнем случае, нулевой корреляции.

Пример 7.1 Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 2$; $\sigma_x = 0{,}8$; $d_y = 3$; $\sigma_y = 1{,}1$.

Доход от портфеля: $A = 2a_x + 3a_y$. Таким образом, доход в зависимости от величины долей находится в пределах $2 \leq A \leq 3$.

Дисперсия суммы дохода составит:

$$D = a_x^2 0{,}8^2 + a_y^2 1{,}1^2 + a_x a_y r_{xy} 0{,}8 \times 1{,}1$$

Определим доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,3 и 0,7. Получим по формулам (7.10) и (7.11): $D = 0{,}651 + 0{,}37 r_{xy}$ и $A = 2{,}7$.

Таким образом, при полной положительной корреляции $D=1{,}021$, при полной отрицательной корреляции D=0,281. В итоге с вероятностью 95% можно утверждать, что суммарный доход находится:

- в первом случае в пределах $2{,}7 \pm 2 \times \sqrt{1{,}021} = 2{,}7 \pm 2{,}02$

- во втором - он определяется пределами $2{,}7 \pm 2 \times \sqrt{0{,}281} = 2{,}7 \pm 1{,}06$

- при нулевой корреляции доходов искомые пределы составят

$$2{,}7 \pm 2 \times \sqrt{0{,}651} = 2{,}7 \pm 1{,}64$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1 Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 2$; $\sigma_x = 0{,}9$; $d_y = 3$; $\sigma_y = 1{,}2$.

Доход от портфеля: $A = 2a_x + 3a_y$. Определить доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,4 и 0,6.

7.2 Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 3$; $\sigma_x = 0{,}8$; $d_y = 4$; $\sigma_y = 1{,}1$.

Доход от портфеля: $A = 3a_x + 4a_y$. Определить доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,2 и 0,8.

7.3 Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 2$; $\sigma_x = 0{,}78$; $d_y = 3$; $\sigma_y = 1{,}3$.

Доход от портфеля: $A = 2a_x + 3a_y$. Определить доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,38 и 0,62.

7.4 Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 4$; $\sigma_x = 0{,}7$; $d_y = 5$; $\sigma_y = 1{,}4$.

Доход от портфеля: $A = 3a_x + 4a_y$.

Определить доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,49 и 0,51.

7.5 Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 2$; $\sigma_x = 0{,}8$; $d_y = 3$; $\sigma_y = 1{,}5$.

Доход от портфеля: $A = 2a_x + 3a_y$. Определить доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,24 и 0,76.

Вопросы для самоконтроля

1. Кто первым ввел понятие риска в экономике?
2. Что такое риск?
3. В какой сфере деятельности уделяется наибольшее внимание к определению риска?
4. Что такое рисковая премия?
5. Дайте определение диверсификации.
6. Что такое максимизация дохода?

8 ПОГАШЕНИЕ ДОЛГОСРОЧНЫХ КРЕДИТОВ

Можно выделить, по крайней мере, три цели для количественного анализа долгосрочной задолженности -:

- разработка плана погашения займа, адекватного условиям финансового соглашения;
- оценка стоимости долга с учетом всех поступлений для его погашения и состояния денежного рынка на момент оценивания;
- анализ эффективности (доходности) финансовой операции для кредитора.

В банковской практике стран со стабильной экономикой и невысокой инфляцией (до 10% в год) среднесрочным считается кредит, выданный на срок от 2 до 5 лет, если срок кредита составляет 5 и более лет, то он является долгосрочным.

Разработка плана погашения займа заключается в составлении графика (расписания) периодических платежей должника. Стороны сделки выбирают удобные для них условия погашения долгосрочных кредитов в виде постоянных и переменных финансовых рент, а также нерегулярных потоков платежей. Затем, в соответствии с условиями контракта, составляется план погашения задолженности. Одним из важных элементов этого плана является определение числа срочных выплат и их величины.

Такие расходы должника обычно называют *расходами по обслуживанию долга (debt service)* или, более кратко, *срочными уплатами, расходами по займу.*

Срочные выплаты – это денежные средства, предназначенные для погашения как основного долга, так и текущих процентных платежей.

Величина срочных уплат зависит от суммы кредита, его срока, наличия и продолжительности льготного периода, размера процентной ставки и других условий.

Расходы по обслуживанию долга включают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения основного долга.

Методы определения размера срочных уплат существенно зависят от условий погашения долга, которые предусматривают: *срок займа, продолжительность льготного периода (grace period), уровень и вид процентной ставки, методы уплаты процентов и способы погашения основной суммы долга.*

В льготном периоде основной долг не погашается, обычно выплачиваются проценты. Впрочем, не исключается возможность присоединения процентов к сумме основного долга.

В долгосрочных займах проценты обычно выплачиваются на протяжении всего срока займа. Значительно реже они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма долга иногда погашается одним платежом, чаще она выплачивается частями - в рассрочку.

Каждый из рассмотренных ниже методов планирования погашения долга в той или иной степени, но обязательно использует результаты, полученные выше при анализе финансовых рент.

При определении срочных уплат используем следующие основные обозначения:

D - сумма задолженности;

Y - срочная уплата;

I - проценты по займу;

R - расходы по погашению основного долга;

i - ставка процента по займу;

n - общий срок займа;

L - продолжительность льготного периода.

По определению расходы по обслуживанию долга (срочная уплата) находятся как $Y = I + R$. Если в льготном периоде выплачиваются проценты, то расходы по долгу в этом периоде сокращаются до $Y = I$.

Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для обеспечения этого. При значительной сумме долга обычная мера заключается в создании *погасительного фонда (sinking fund).*

Необходимость формирования такого фонда иногда оговаривается в договоре выдачи займа в качестве гарантии его погашения. Разумеется, создание фонда необязательно надо связывать с погашением долга.

На практике возникает необходимость накопления средств и по другим причинам, например, для накопления амортизационных отчислений на закупку изношенного оборудования и т.п.

Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника (например, на специальный счет в банке), на которые начисляются проценты. Таким образом, должник имеет возможность последовательно инвестировать средства для погашения долга.

Сумма взносов в фонд вместе с начисленными процентами, накопленная в погасительном фонде к концу срока, должна быть равна его сумме. Взносы могут быть как постоянными, так и переменными во времени.

Погашение долга в рассрочку

В практической финансовой деятельности, особенно при значительных размерах задолженности, долг обычно погашается в рассрочку, частями. Такой метод погашения часто называют *амортизацией долга.* Он осуществляется различными способами:

а) *Погашение займа производится равными срочными выплатами,* когда каждая срочная выплата *Y* является суммой двух величин: годового расхода по погашению основного долга *R* и процентного платежа по займу *I*, т.е. $Y = R + I$

В соответствии с этим методом расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжении всего срока его погашения. Из общей суммы расходов должника часть выделяется на уплату процентов, остаток идет на погашение основного долга.

Величина долгосрочного кредита *D* равна сумме всех дисконтированных платежей, т.е. является современной величиной всех срочных выплат:

$$D = \frac{Y_1}{(1+i)} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Y_n}{(1+i)^n} \qquad 8.1$$

Если все срочные выплаты по кредиту равны между собой, т.е. $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n$ с одинаковой процентной ставкой, то величина кредита составит:

$$D = Y \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}, \qquad 8.2$$

а величина срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y = D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}. \qquad 8.3$$

Зная первую процентную выплату $I_1 = i \cdot D$ и величину срочной выплаты *Y*, можно определить сумму первого погашения основного долга $R_1 = Y - I_1$. Это, в свою очередь, дает остаток долга на второй расчетный период $D_2 = D - R_1$, который является базой для начисления процентов в следующем году $I_2 = i \cdot D_2$, что позволит определить величину платежа основного долга во втором году $R_2 = Y - I_2$ и т.д.

Выплата основного долга R_k в *k*-ом периоде времени

$$R_k = Y(1+i)^{-n+k-1}, \qquad 8.4$$

где $k = 1,2,...n$ - порядковый номер расчетного периода времени.

Остаток основной суммы задолженности в *k*-ом периоде

$$D_k = \frac{D((1+i)^n - (1+i)^{k-1})}{(1+i)^n - 1}. \qquad 8.5$$

Сумма начисленных процентов в *k*-ом периоде времени

$$I_k = Y(1 - (1+i)^{-n+k-1}). \qquad 8.6$$

Если процентная ставка по займу изменяется во времени, то величина годовой срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y_k = D_k \frac{i_k (1+i_k)^{n-k+1}}{(1+i_k)^{n-k+1} - 1}. \qquad 8.7$$

б) *Погашение займа производится равными выплатами основного долга,* то в этом случае размеры платежей по основному долгу будут равными

$$R_1 = R_2 = ... = R_k = ... = R_n = \frac{D}{n}, \qquad 8.8$$

а остаток основного долга в начале *k*-го расчетного периода определится как

$$D_k = D - R(k-1), \qquad 8.9$$

где D – величина всего долга.

Величина срочной выплаты в *k*-ом расчетном периоде равна:

$$Y_k = D_k \cdot i + R = (D - R(k-1)) \cdot i + R. \qquad 8.10$$

Величина процентного платежа для *k*-го расчетного периода находится по формуле:

$$I_k = D_k \cdot i = (D - R(k-1)) \cdot i. \qquad 8.11$$

в) *Погашение займа производится переменными выплатами основного долга, а выплаты изменяются в арифметической прогрессии,* то есть контрактом предусмотрено погашение основного долга осуществлять платежами, возрастающими или убывающими в арифметической прогрессии с разностью *d*, тогда выплаты основного долга в *k*-ом периоде составляют

$$R_k = R_1 \pm (n-k) \cdot d. \qquad 8.12$$

Для возрастающей арифметической прогрессии величина первого платежа по погашению основной суммы долга по займу составит:

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d \ , \tag{8.13}$$

а для убывающей арифметической прогрессии

$$R_1 = \frac{D}{n} + \frac{n-1}{2} \cdot d \ . \tag{8.14}$$

г) *Если выплаты изменяются в геометрической прогрессии,* то погашение основного долга производится платежами, каждый из которых больше или меньше предыдущего в q раз.

Эти платежи являются членами возрастающей или убывающей геометрической прогрессии, где q – знаменатель прогрессии.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}, \text{ при } q > 1 \ ; \tag{8.15}$$

$$R_1 = D \cdot \frac{1-q}{1-q^n}; \text{ при } 0 < q < 1 \ . \tag{8.16}$$

Пример 8.1 Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 300 тыс. руб. на 5 лет под 10% годовых. Начисление процентов производится раз в году.

Погашение кредита должно производиться:

а) равными срочными выплатами;

б) равными выплатами основного долга;

в) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 10 тыс. руб.;

г) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 5%. Составить план погашения займа для каждого варианта.

Решение. Параметры кредита: D = 300000 руб.; n = 5; i = 0,1; d = 10000 руб.;
q = 1,05.

а) Определяется величина срочной выплаты

$$Y = D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 300000 \quad \frac{0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^5}{(1+0{,}1)^5 - 1} = 79139 \quad \text{руб.}$$

Далее последовательно рассчитываются процентные платежи, годовой расход по погашению основной суммы долга, остаток долга за каждый год и составляется план погашения задолженности.

Таблица 8.1 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая Срочная выплата, Y
1	300000	30000	49139	79139
2	250861	25086	54053	79139
3	196808	19681	59458	79139
4	137350	13735	65404	79139
5	71946	7193	71946	79139
Итого	—	95695	300000	395695

б) Определяем величину годового расхода по погашению основной суммы долга

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_k = \ldots = R_n = \frac{D}{n} = \frac{300000}{5} = 60000 \text{ руб.}$$

Остальные параметры сделки определяются последовательно по годам и составляется план погашения кредита.

Таблица 8.2 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	60000	90000
2	240000	24000	60000	84000
3	180000	18000	60000	78000
4	120000	12000	60000	72000
5	60000	6000	60000	66000
Итого	—	90000	300000	390000

в) Определяем величину первого платежа для возрастающей арифметической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d = \frac{300000}{5} - \frac{5-1}{2} \cdot 10000 = 40000 \quad \text{руб.}$$

Таблица 8.3 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	40000	70000
2	260000	26000	50000	76000
3	210000	21000	60000	81000
4	150000	15000	70000	85000
5	80000	8000	80000	88000
Итого	—	100000	300000	400000

г) Определяем величину первого платежа для возрастающей геометрической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 300000 \quad \frac{1,05 - 1}{1,05^5 - 1} = 54292 \quad \text{руб.}$$

Таблица 8.4 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	54292	84292
2	245708	24571	57007	81578
3	185851	18585	59857	78442
4	125994	12599	62850	75449
5	63144	6314	65994	72308
Итого	—	92069	300000	392069

Конверсия займов

Конверсией (реструктурированием) называется изменение условий займов, когда могут меняться сроки их погашения, процентные ставки и т.п.

На практике одновременно применяют несколько из указанных способов. Например, известны случаи, когда к одной части обязательства применяли сокращение суммы основного долга, к другой — снижение процентной ставки, снижение процентной ставки иногда сопровождается увеличением льготного периода и т.п.

Какой бы способ реструктурирования ни был принят, обычным ее следствием является уменьшение современной стоимости выплат и снижение процентной ставки за задолженность.

В силу того, что при реструктурировании изменяются многие условия погашения задолженности, точные финансовые последствия этих изменений неочевидны. Поэтому выбор варианта реструктурирования и оценка финансовых последствий заключаются в сравнении соответствующих расчетных параметров.

Для получения последних необходимо сформировать варианты потоков платежей от должника. Далее на основе принятой для дисконтирования процентной ставки (превалирующая для данного срока кредита рыночная ставка) рассчитать современную стоимость поступлений.

Что касается фактической доходности для кредитора новых условий займа, то здесь ограничимся лишь очевидным замечанием, что она будет ниже, чем до реструктурирования.

Обозначим параметры займов:

n – первоначальный срок погашения займов до конверсии;

n_1 – срок, на который продлен период погашения в результате конверсии;

k – число оплаченных расчетных периодов до конверсии;

i – процентная ставка до конверсии;

i_1 – процентная ставка после конверсии;

Y – величина срочной выплаты до конверсии;

Y_1 – величина срочной выплаты после конверсии;

D – величина основного долга;

D_{n-k} – остаток долга на момент конверсии.

Для составления плана погашения конверсионного займа определяют:

а) величину срочной выплаты по старым условиям:

$$Y = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; \qquad 8.17$$

б) остаток долга на момент конверсии:

$$D_{n-k} = Y\frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k}\cdot i}; \qquad 8.18$$

в) величину срочной выплаты по новым условиям:

$$Y_1 = D_{n-k} \frac{i(1+i)^{n-k+n_1}}{(1+i)^{n-k+n_1} - 1}. \qquad 8.19$$

Льготные кредиты

В ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются по тем или иным причинам (иногда политическим) под льготные для заемщика условия.

Низкая (относительно ставки на рынке кредитов) процентная ставка в сочетании с большим его сроком и льготным периодом дают должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Кредитор в этих условиях несет некоторые потери, так как он *мог бы* инвестировать деньги на более выгодных условиях.

При льготном долгосрочном кредитовании заемщик фактически получает субсидию, а кредитор теряет определенную сумму в результате данной сделки. Эта добровольно упущенная выгода кредитора называется ***грант-элементом*** и может быть рассчитана в виде *абсолютной* или *относительной* величины.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность номинальной суммы займа и современной величины платежей по погашению займов, рассчитанной по рыночной ставке.

Проблема, как видим, сводится к выбору надлежащей ставки процента для расчета современной величины. Рекомендации по выбору конкретного значения этой ставки весьма расплывчаты.

Обычно используют превалирующую на рынке долгосрочных кредитов ставку.

Обозначим параметры льготных займов:

D – сумма предоставленного кредита;

n – срок кредита, лет;

g – льготная процентная ставка, по которой предоставлен кредит;

i – общепринятая процентная ставка ($i > g$);

L – продолжительность льготного периода погашения кредита, лет;

w – относительный грант-элемент;

W – абсолютный грант-элемент.

$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i;

$a_{n;g} = \frac{1-(1+g)^{-n}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g;

$a_{L;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-L}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком L;

$a_{n-L;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком $n-L$;

$a_{n-L;g} = \dfrac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g со сроком $n-L$;

$v^L = \dfrac{1}{(1+i)^L}$ – дисконтный множитель по ставке i;

Для всех вариантов льготного кредитования абсолютный грант-элемент может быть рассчитан по формуле:

$$W = D \cdot w. \qquad 8.20$$

Варианты льготного кредита:

а) кредит предоставляется по льготной ставке:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}; \qquad 8.21$$

б) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого выплачиваются только проценты:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot v^L + g \cdot a_{L;i} \right); \qquad 8.22$$

в) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого проценты не выплачиваются:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \right) \cdot \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^L; \qquad 8.23$$

г) беспроцентный кредит:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{n}; \qquad 8.24$$

д) беспроцентный кредит с наличием льготного периода погашения:

$$w = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{n} \cdot v^L . \qquad 8.25$$

Пример 8.2 Льготный заем в сумме 500000 руб. выдан на 10 лет под 8% годовых. Обычная ставка для подобных займов составляет 14%.

Погашение займа предусматривает льготный период 2 года, в течение которых будут выплачиваться только проценты. Определить абсолютную и относительную величину грант-элемента.

Решение. По условию задачи имеем: D =500000 руб., n =10; i =14%; g = 0,08; L =2,

$$a_{L;i} = \frac{1-(1+i)^{-L}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-2}}{0{,}14} = 1{,}646661 \quad ;$$

$$a_{n-L;i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-(10-2)}}{0{,}14} = 4{,}638864 \quad ;$$

$$a_{n-L;g} = \frac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g} = \frac{1-(1+0{,}08)^{-(10-2)}}{0{,}08} = 5{,}746639 \quad ;$$

$$v^L = \frac{1}{(1+i)^L} = \frac{1}{(1+0{,}14)^2} = 0{,}769468 \quad .$$

Определяем величину относительного грант-элемента:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot v^L + g \cdot a_{L;i} \right) = 1 - \left(\frac{4{,}638843}{5{,}746639} \cdot 0{,}769468 + 0{,}08 \cdot 1{,}646661 \right) = 0{,}2471$$

или 24,11%.

Абсолютная величина грант-элемента, т.е. добровольно упущенной выгоды кредитора, составит:

$$W = D \cdot w = 500000 \cdot 0{,}2411 = 123550 \text{ руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

8.1 Составьте план погашения кредита по данным таблицы задачи 8.1, если банк выдал долгосрочный кредит под 14 % годовых. Начисление процентов производится раз в году. Погашение кредита должно производиться равными выплатами основного долга.

8.2 Составьте план погашения кредита по данным таблицы задачи 8.1 если банк выдал долгосрочный кредит под 9 % годовых. Выплаты основного долга должны ежегодно возрастать на 3 млн. руб. проценты начисляются один раз в году.

8.3 Банк выдал долгосрочный кредит в сумме (таблица) на несколько лет под 12 % годовых. Погашение кредита должно производиться равными срочными выплатами при ежегодном начислении сложных декурсивных процентов. Составьте план погашения кредита.

Вариант	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.	**Вариант**	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.
1	80	7	**16**	29	7
2	70	6	**17**	35	10
3	100	5	**18**	40	8
4	88	7	**19**	99	9
5	50	6	**20**	60	6
6	55	8	**21**	75	9
7	68	5	**22**	89	8
8	39	8	**23**	90	7
9	45	7	**24**	97	10
10	92	9	**25**	85	8
11	59	6	**26**	77	7
12	63	7	**27**	41	9
13	38	10	**28**	65	7
14	59	7	**29**	87	6
15	20	8	**30**	71	9

8.4 Составьте план погашения кредита по данным таблицы задачи 8.1 если банк выдал долгосрочный кредит под 8,5 % годовых. Выплаты основного долга должны ежегодно сокращается на 1,8 млн. руб. проценты начисляются один раз в году.

8.5 Кредит в размере (таблица задачи 8.1) должен быть погашен в течение нескольких лет ежегодными выплатами. Процентная ставка сложных декурсивных процентов составляет 15 % годовых. Платежи основного долга ежегодно возрастают на 7 %. Составьте план погашения кредита.

8.6 Кредит в размере (таблица задачи 8.1) должен быть погашен в течение нескольких лет ежегодными выплатами. Процентная ставка сложных декурсивных процентов составляет 11,9 % годовых. Платежи основного долга ежегодно сокращаются на 5,8 %. Составьте план погашения кредита.

8.7 Клиентом банка получен кредит в размере 10 млн. руб. сроком на 7 лет. Первые два года ставка составляет 8% годовых, следующие два года – 10%, последние три года – 15%. Погашение основного долга и выплата процентов осуществляется в конце года. Составьте план погашения займа.

8.8 Кредит в сумме 40 млн. руб., выданный на 5 лет под 6% годовых, погашается равными срочными выплатами в конце каждого года. После погашения третьего платежа кредитор и заемщик договорились о продлении срока погашения займа на 2 года и увеличении процентной ставки с момента конверсии до 10%. Составьте план погашения оставшейся части долга.

8.9 Льготный заем в сумме (таблица задачи 8.1) выдан на несколько лет под 7% годовых. Обычная ставка для подобных займов 12%. Погашение долга предусматривается равными срочными выплатами. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 3 года, в течение которого выплачиваются только проценты; в) имеется льготный период 3 года, в течение которого проценты не выплачиваются.

8.10 Предоставлен льготный беспроцентный заем в размере (таблица задачи 8.1) на несколько лет. Существующая процентная ставка на момент выдачи займа 9%. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 2 года.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие кредиты считаются кратко, средне и долгосрочными?
2. Что такое срочные выплаты?
3. От каких параметров зависит величина срочных выплат?
4. Назовите варианты погашения долгосрочного кредита в рассрочку.
5. Что такое конверсия займов?
6. Что представляет собою грант-элемент?
7. Перечислите варианты льготных кредитов.
8. Чем отличаются абсолютный и относительный грант-элементы?

9 ЭФФЕКТИВНОСТЬ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок имеют различную форму: проценты от выдачи ссуд, комиссионные, дисконт при учете векселей, доходы от облигаций и других ценных бумаг и т.д.

Само понятие “доход” определяется конкретным содержанием операции. Причем в одной операции часто предусматривается два, а то и три источника дохода.

Например, ссуда приносит кредитору проценты и комиссионные, владелец облигации помимо процентов (поступлений по купонам) получает разницу между выкупной ценой облигации и ценой ее приобретения. В связи со сказанным возникает проблема измерения доходности операции с учетом всех источников поступлений.

Обобщенная характеристика доходности должна быть сопоставимой и применима к любым видам операций и ценных бумаг. Обычно степень финансовой эффективности (доходности) этих операций измеряется в виде годовой ставки процентов — чаще сложных, реже простых.

Искомые показатели получают исходя из общего принципа — *все вложения и доходы с учетом конкретного их вида условно приравниваются эквивалентной (равнодоходной) ссудной операции.*

Решение проблемы измерения и сравнения степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета условной годовой ставки для каждого вида операций с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения. Такие операции различаются между собой во многих отношениях.

Эти различия на первый взгляд могут и не представляться существенными, однако практически все условия операции в большей или меньшей мере влияют на конечные результаты - финансовую эффективность.

Расчетная процентная ставка, отражающая общую доходность финансовой операции, имеет различные названия.

В простых депозитных и ссудных операциях она называется *эффективной,* в расчетах по оценке облигаций ее часто называют *полной доходностью,* в анализе производственных инвестиций для аналогичного по содержанию показателя применяется термин – *внутренняя норма доходности.*

В целом для всех случаев, кроме анализа производственных инвестиций, эта годовая ставка называется – *полной доходностью (ПД)*.

Итак, под ПД понимают ту расчетную ставку процента, при которой капитализация всех видов доходов от операции равна сумме инвестиций и, следовательно, капиталовложения окупаются, иначе говоря, начисление процентов на вложения по ставке, равной ПД, обеспечит выплату всех предусмотренных платежей.

Применительно к облигации это означает равенство цены приобретения облигации сумме дисконтированных по ПД купонных платежей и выкупной цены; для ссудной операции - равенство действительной суммы кредита (т.е. кредит за вычетом комиссионных) сумме дисконтированных поступлений (процентов и погашений долга).

Чем выше ПД, тем больше эффективность операции. При неблагоприятных условиях ПД может быть нулевой или даже отрицательной величиной. Показатель ПД является не только измерителем доходности операции для кредитора, но и характеризует цену кредита для должника.

Следует отметить, что при получении кредита должник может нести какие-либо дополнительные разовые расходы, которые увеличат цену кредита, но оставят без изменения доходность кредитной операции для владельца денег.

Минимальная полная доходность – это расчетная ставка процента, при которой капитализация всех видов доходов от операции равна сумме инвестиций и, следовательно, капиталовложения окупаются. Чем выше полная доходность, тем больше эффективность операции.

Можно показать, что все подобного рода формулы базируются на равенстве, которое назовем *балансом финансовой операции* или *уравнением эквивалентности.*

Ссудные операции.

Доходность этих операций измеряется с помощью эквивалентной годовой ставки сложных процентов. За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые заметно повышают доходность операций, так как сумма фактически выданной ссуды сокращается.

Условные обозначения:

D – размер ссуды;

n – срок ссуды, выраженный в годах;

G – сумма удержанных комиссионных;

$i_э$ – ставка полной доходности;

D – G – размер фактически выданной суммы.

Пусть ссуда в размере *D* выдана на срок *n.* При ее выдаче удерживаются комиссионные за операцию *(G).* Наращение величины *D – G* по ставке по лной доходности $i_э$ должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке простых процентов – i, т.е.

$$(D - G)\cdot(1 + i_э)^n = D\cdot(1 + ni)\,. \qquad 9.1$$

Так как сумма удержанных комиссионных G определяется в процентах от номинальной стоимости кредита D, то $G=Dq$, где q – доля комиссионных в сумме кредита, тогда:

$$i_э = \left(\frac{1 + ni}{1 - q}\right)^{1/n} - 1\,. \qquad 9.2$$

Если полная доходность финансовой операции измеряется в виде ставки простых процентов, получим:

$$i_{эп} = \frac{1 + ni}{(1 - q)n} - 1\,. \qquad 9.3$$

Когда ссуда выдается под сложные проценты i, то исходное уравнение для определения сложной процентной ставки полной доходности $i_э$, имеет вид: $(D - G)\cdot(1 + i_э)^n = D\cdot(1 + i)^n$, откуда

$$i_э = \frac{1 + i}{(1 - q)^{1/n}} - 1\,. \qquad 9.4$$

Пример 9.1 При выдаче ссуды на 200 дней под 12 % годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,8 % от суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов, если кредит выдан:

а) по простым процентам; б) по сложным процентам.

Решение. По условию задачи: n = 200/365; i = 0,12; q = 0,008.
Используя формулы (9.2) и (9.4), получим:

а) $i_э = \left(\dfrac{1 + 0{,}12\cdot\dfrac{200}{365}}{1 - 0{,}008}\right)^{\frac{365}{200}} - 1 = 0{,}1398$ или 13,98%;

б) $i_э = \dfrac{1 + 0{,}12}{(1 - 0{,}008)^{365/200}} - 1 = 0{,}1365$ или 13,65%.

Учетные операции. При определении ставки доходности операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$**,** если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке d, с удержанием комиссионных и дисконта, то заемщик получит сумму $D\,(1 - n'd - q)$ или $D - Dn'd - Dq$.

D – номинальная стоимость векселя;

$Dn'd$ - дисконт;

$G = Dq$ – сумма комиссионных удержаний;

d – простая учетная ставка;

n' - временной интервал между датой учета и датой погашения векселя.

Тогда $D\,(1 - n'd - q\,)\,(1 + i_э)^n = D$, отсюда:

$$i_э = (1 - n'd - q)^{-\frac{1}{n}} - 1\,. \qquad 9.5$$

Если эффективность измеряется в виде ставки простых процентов – $i_{эп}$, то $D\,(1 - n'd - q\,)\,(1 + ni_{эп}) = D,$ отсюда

$$i_{эп} = \frac{1}{(1 - n'd - q)n} - 1\,. \qquad 9.6$$

Пример 9.2 Вексель учтен в банке по учетной ставке 8 % годовых за 90 дней до даты погашения. При учете с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 % (К=360 дней). Определить полную доходность операции по ставке сложных процентов.

Решение. По условию задачи $n' = \frac{90}{360}$, d = 0,08; q = 0,004.

$$i_э = (1 - \frac{90}{360}0{,}08 - 0{,}004\,)^{-\frac{360}{90}} - 1 = 0{,}102$$ или 10,2%.

Покупка и продажа векселя (простая учетная ставка).

Если вексель или другое долговое обязательство через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить с помощью ставок простых и сложных процентов.

Финансовая результативность операции здесь связана с разностью цен купли-продажи, которые в свою очередь определяются сроками этих активов до погашения векселя и уровнем учетных ставок.

Обозначим:

S – номинал векселя;

K = 365 дней; К' = 360 дней;
d_1 – учетная ставка, по которой вексель был куплен;
t_1 – число дней до наступления срока погашения векселя;
t_2 – число дней, до продажи векселя;
d_2 – учетная ставка, по которой вексель был продан;
P_1 – цена векселя в момент его покупки (учета);
P_2 – цена продажи векселя;
$t_1 - t_2$ – время между моментом покупки и продажи векселя.
Доходность купли продажи (в виде ставки простых процентов $i_{эп}$).

$$i_{эп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1(t_1 - t_2)} \cdot K \text{ или } i_{эп} = \frac{(t_1 d_1 - t_2 d_2)}{(K' - t_1 d_1)} \cdot \frac{K}{(t_1 - t_2)} \qquad 9.7$$

При использовании годовой сложной процентной ставки доходность сделки составит:

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1 \text{ или } i_э = \left(\frac{K' - t_2 d_2}{K' - t_1 d_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1\,. \qquad 9.8$$

Пример 9.3 Вексель номинальной стоимостью 1 млн. руб. был учтен в банке за 120 дней до его погашения по учетной ставке 9%. Через 30 дней он был переучтен в другом банке по учетной ставке 8%. Определить эффективность данной операции в виде простой и сложной ставки.

Решение. По условию: S = 1 млн. руб., t_1 = 120 дней; t_2 = 120-30 = 90 дней;
d_1 = 0,09; d_2 = 0,08.

Найдем эффективность сделки по формуле (9.7):

$$i_{эп} = \frac{(120 \cdot 0{,}09 - 90 \cdot 0{,}08)}{(360 - 120 \cdot 0{,}09)} \cdot \frac{365}{(120 - 90)} = 0{,}125\,.$$

Эффективность операции составляет 12,5%.

Если использовать ставку сложных процентов, то эффективность сделки определяется по формуле (9.8):

$$i_э = \left(\frac{360 - 90 \cdot 0{,}08}{360 - 120 \cdot 0{,}09}\right)^{\frac{365}{30}} - 1 = 0{,}133\,.$$

Эффективность операции составляет 13,3%.

Операции с депозитными сертификатами.

Если депозитный сертификат, или другой подобного рода краткосрочный инструмент, через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения вновь продан, то доходность такой операции можно измерить в виде ставки простых или сложных процентов.

Если сертификат с разовым начислением процентов, со сроком погашения t_1, покупается по номиналу, продается за t_2 дней до погашения, а процентная ставка сертификата изменилась с i_1 до i_2, то эффективность по простой ставке находится по формуле:

$$i_{эп} = \left(\frac{1 + \frac{t_1}{K} i_1}{1 + \frac{t_2}{K} i_2} - 1 \right) \frac{K}{t_1 - t_2}, \text{ где К = 365 или 360 дней.} \qquad 9.9$$

Если мерой эффективности служит сложная процентная ставка, то:

$$i_э = \left(\frac{K + t_1 i_1}{K + t_2 i_2} \right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1. \qquad 9.10$$

Сертификат покупается после выпуска и погашается в конце срока:
P_1 – номинал финансового инструмента;
P_2 – цена приобретения финансового инструмента;
i – объявленная эмитентом процентная ставка.

$$i_{эп} = \left(P_1 \frac{1 + \frac{t_1}{K} i}{P_2} - 1 \right) \frac{K}{t_2}; \qquad 9.11$$

$$i_э = \left(\frac{P_1 \left(1 + \frac{t_1}{K} i \right)}{P_2} \right)^{365/t_2} - 1. \qquad 9.12$$

Пример 9.4 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 185 дней до срока его погашения и продан через 120 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была 15,0 %, в момент продажи

– 12,7 %. Определить доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.

Решение. По условию t_1 = 185 дней, t_2 = 120 дней, i_1 = 0,15; i_2 = 0,127. Используем формулу (9.10)

$$i_э = \left(\frac{365 + 185 \cdot 0,15}{365 + 120 \cdot 0,127} \right)^{365/(185-120)} - 1 = 0,1993 \quad \text{или } 19,93\%.$$

Задачи для самостоятельного решения

9.1 Банк предоставил кредит в сумме 200 тыс. руб. на 250 дней под 18,0 % годовых простых процентов. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,8 % от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности простых и сложных процентов.

9.2 Банком предоставлен кредит на 300 дней под 12,0 % годовых в сумме 180 тыс. рублей. При выдаче кредита были удержаны комиссионные в сумме 0,5 %. Определите годовую ставку полной доходности сложных процентов, если проценты начислялись: а) по простым процентам; б) по сложным процентам.

9.3 Банком предоставлен кредит сроком на 5 лет в сумме 245 тыс. рублей, под 11,8 % годовых (проценты сложные). При выдаче кредита были удержаны комиссионные в размере 0,7% от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности операции по сложным процентам. На какую величину повысилась стоимость кредита для заемщика вследствие удержания комиссионных?

9.4 Вексель учтен в банке по учетной ставке 12,0 % годовых за 130 дней до его оплаты. При учете векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 %. Определите доходность операции в виде простых и сложных процентов.

9.5 Вексель куплен за 158 дней до его погашения с учетной ставкой 8,0 % годовых. Через 67 дней его реализовали по учетной ставке 7,3 %. Определите эффективность операции в виде простой и сложной ставки.

9.6 Вексель стоимостью 140 тыс. рублей учтен банком по учетной ставке 18,0 % годовых за 140 дней до оплаты. Через 60 дней банк переучел его в другом банке по учетной ставке 14,7 % годовых. Определите эффективность данной финансовой операции для банка по простой и сложной ставке. Как изменится эффективность операции, если переучет векселя проведен по учетной ставке 19,8 % годовых?

9.7 Банком выпущен депозитный сертификат номинальной стоимостью 400 тыс. рублей сроком на 11 месяцев по ставке 17,0 % годовых. Определите эффективность следующих финансовых операций:

- клиент приобрел сертификат по номиналу в момент его выпуска и продал его через 90 дней после приобретения по ставке 14,0 % годовых;
- клиент приобрел сертификат через 45 дней после его выпуска и погасил его в конце установленного срока;
- клиент приобрел сертификат через 50 дней после выпуска под 17,0 % годовых, а через 180 дней после приобретения реализовал его по ставке 15,8 % годовых.

9.8 Сертификат с номиналом 140 тыс. рублей, с объявленной доходностью 12,7 % (простые проценты) сроком 640 дней куплен за 165 тыс. рублей за 190 дней до его оплаты. Какова доходность инвестиции?

9.9 Денежный сертификат был приобретен за 170 дней до срока погашения в сумме 90 тыс. рублей и продан за 115 тыс. рублей через 90 дней. Определите доходность операции, если применялась простая и сложная ставка процентов.

9.10 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 250 дней до срока его погашения и продан через 140 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была равна 14,7 %, в момент продажи – 12,5 %. Определите доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под полной доходностью финансовой операции?
2. Как определяется годовая ставка полной доходности в виде ставки простых и сложных процентов?
3. Из какого уравнения выводится показатель доходности учетных операций?
4. Как определяется доходность операций с векселями?
5. Как оценивается доходность перепродажи депозитного сертификата?

10 ОБЛИГАЦИИ

Наиболее распространенным видом ценных бумаг с фиксированным доходом *{fixed income securities),* как известно, являются облигации *(bonds).*

При необходимости привлечения значительных денежных ресурсов (для финансирования крупных проектов, покрытия текущих расходов и т.д.) государство, муниципалитеты, банки и другие финансовые институты, а также отдельные компании или их объединения, часто прибегают к выпуску и продаже облигаций.

Под ***облигацией*** понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги.

Облигация обеспечивает ее владельцу некоторый доход — в большинстве случаев он регулярно получает проценты по купонам и в конце срока выкупную цену.

Доход от облигаций обычно ниже, чем от других видов ценных бумаг, в то же время он более надежен, так как в меньшей степени зависит от конъюнктурных колебаний и фазы экономического цикла, чем, например, доход от акций. В связи со сказанным в облигации инвестируют свободные резервы пенсионные фонды, страховые компании, различного рода инвестиционные фонды и т.д.

Основные параметры облигации: номинальная цена или *номинал (face value), выкупная цена (redemption value)* или правило ее определения, если она отличается от номинала, *дата погашения (date o f maturity),* норма доходности или *купонная процентная ставка (coupon rate), даты выплат процентов.* В современной практике выкуп по номиналу является преобладающим.

Выплаты процентов производятся ежегодно, по полугодиям или поквартально, а иногда в конце срока.

В практике применяются облигации различных видов. Что касается зарубежных облигаций, то для них можно предложить **классификацию** по следующим признакам:

1. По методу обеспечения:

- государственные и муниципальные облигации, выплаты по которым обеспечиваются гарантиями государства или муниципалитета;

- облигации частных корпораций (*corporate bonds)* — обеспечиваются залогом имущества, передачей прав на недвижимость, доходами от различных программ и проектов;

- облигации частных корпораций без специального обеспечения (*corporate debentures).*

2. По сроку:

- облигации с фиксированной датой погашения *(term bonds);*

- без указания даты погашения или бессрочные *(perpetuities),* точнее, эмитент не связывает себя конкретным сроком, соответственно облигации могут быть выкуплены в любой момент.

3. По способу погашения номинала (выкупа облигации):

- разовым платежом *(bullet bonds);*

- распределенными во времени погашениями оговоренных долей номинала;

- последовательным погашением доли общего количества облигаций, соответствующие облигации называются *серийными (serial bonds);* часто этот метод погашения осуществляется с помощью лотерей — *лотерейные* или *тиражные займы.*

4. По методу выплаты дохода:

- выплачиваются только проценты, срок выкупа не оговаривается (бессрочные облигации);

- выплата процентов не предусматривается; так назваемые *облигации с нулевым купоном (zero coupon bonds);*

- проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока;

- периодически выплачиваются проценты, а в конце срока - номинал или выкупная цена; этот вид облигаций является преобладающим.

Процентная ставка обычно постоянная, правда, иногда выпускают облигации с “плавающей” процентной ставкой, уровень которой ставится в зависимость от каких-либо внешних условий.

Облигации являются важным объектом долгосрочных инвестиций. С момента их эмиссии и до погашения они продаются и покупаются на кредитно- денежном рынке по *рыночным ценам.*

Рыночная цена в момент выпуска может быть равна номиналу *(at par),* ниже номинала, или с дисконтом (*discount bond),* и выше номинала, или с премией *(premium bond).* Нетрудно догадаться, что премия - это “переплата” за будущие высокие доходы, а дисконт - скидка с цены, связанная с низкими доходами от облигации.

Различают два вида рыночных цен. Облигации реализуются по так называемой *грязной* или *полной* цене *(dirty, full, gross price),* которая включает не только собственно цену облигации, но и сумму процентов за период после последней их выплаты и до момента продажи *(accrued interest).* Рыночная цена за вычетом суммы начисленных процентов называется *чистой (clean, flat price).*

Поскольку номиналы у разных облигаций существенно различаются между собой, то часто возникает необходимость в сопоставимом измерителе рыночных цен. Таким показателем является *курс (quote, quoted price).* Под курсом понимают цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала:

$$K = \frac{P}{N} 100 \qquad 10.1$$

где K – курс облигации, P – рыночная цена, N – номинал облигации.

Например, если облигация с номиналом 100000 руб. продается за 97000 руб., то ее курс составит 97.

Доход от облигации состоит из двух основных слагаемых:
- периодически получаемых по купонам процентов;
- разности между номиналом и ценой приобретения облигации *(capital gain),* если последняя меньше номинала; разумеется, если облигация куплена с премией, то эта разность отрицательна *(capital loss),* что, естественно, сокращает общий доход.

Количественный анализ облигаций нацелен на:
а) расчет доходности облигаций и ряда дополнительных характеристик,
б) определение расчетной цены облигации на любой момент ее “жизни”,
в) измерение динамики дисконта или премии по облигации.

Рейтинг облигаций. Инвестиции в ценные бумаги сопряжены с определенным риском.

Выделим два основных вида риска - ***кредитный (credit risk)*** и ***рыночный (market risk).*** Под *первым* понимают возможность отказа в выплате процентов и основной суммы долга (выкупной цены). *Рыночный риск,* который иногда называют *процентным (interest rate risk),* связан с колебаниями рыночной цены облигации, в значительной мере определяемыми изменениями процентной ставки на денежно-кредитном рынке.

Очевидно, что рыночный, да и кредитный риски в значительной мере связаны со сроком облигации - чем больше срок, тем выше риск.

Обратимся к кредитному риску. Очевидно, что он характеризует кредитоспособность и надежность самого эмитента. Поэтому за рубежом государственные обязательства принято считать наиболее надежными, с наименьшим кредитным риском.

Ценные бумаги коммерческих институтов обычно рассматриваются как менее надежные, так как всегда остается некоторая вероятность их банкротства.

Качество облигаций в отношении кредитного риска оценивается специальными агентствами путем отнесения конкретных облигаций к той или другой категории. Такая операция называется *рейтингом (raiting).*

Облигации по степени надежности выплат процентов и номинала относят к одной из девяти категорий. Наивысшими по качеству являются облигации ААА. К этой категории относят бумаги с предельно высокой надежностью как в отношении их выкупа, так и выплат процентов. В других странах для рейтинга облигаций применяют иные обозначения и число категорий качества.

Доходность облигаций. Доходность облигаций характеризуется несколькими показателями.

Различают *купонную (coupon rate), текущую (current, running yield)* и *полную доходности (yield to maturity, redemption yield, yield).*

Купонная доходность определена при выпуске облигации и, следовательно, нет необходимости ее рассчитывать.

Текущая доходность характеризует отношение поступлений по купонам к цене приобретения облигации. Этот параметр не учитывает второй источник дохода — получение номинала или выкупной цены в конце срока. Поэтому он непригоден при сравнении доходности разных видов облигаций. Достаточно отметить, что у облигаций с нулевым купоном текущая доходность равна нулю. В то же время они могут быть весьма доходными, если учитывать весь срок их "жизни".

Наиболее информативным является показатель ***полной доходности,*** который учитывает оба источника дохода. Именно этот показатель пригоден для сравнения доходности инвестиций в облигации и в другие ценные бумаги.

Итак, ***полная доходность*** или, применив старую коммерческую терминологию, *ставка помещения,* измеряет реальную эффективность инвестиций в облигацию для инвестора в виде годовой ставки сложных процентов. Иначе говоря, начисление процентов по ставке помещения на цену приобретения облигации строго эквивалентно выплате купонного дохода и сумме погашения облигации в конце срока.

Рассмотрим методику определения показателей доходности различных видов облигаций:

1). Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов.

Хотя подобного вида облигации встречаются крайне редко, знакомство с ними необходимо для получения полного представления о методике измерения доходности. При анализе данного вида облигаций выплату номинала в необозримом будущем во внимание не принимаем.

Введем обозначения:

g — объявленная норма годового дохода (купонная ставка процента);

i_t — текущая доходность;

i — полная доходность (ставка помещения).

Текущая доходность находится следующим образом:

$$i_t = \frac{gN}{P} = \frac{g}{K}100 \qquad 10.2$$

Если по купонам выплата производится p раз в году, каждый раз по ставке g/p, то и в этом случае на практике применяется формула (10.2).

Поскольку купонный доход постоянен, то текущая доходность продаваемых облигаций изменяется вместе с изменением их рыночной цены. Для владельца облигации, который уже инвестировал в нее некоторые средства, эта величина постоянна.

Перейдем к полной доходности. Поскольку доход по купонам является единственным источником текущих поступлений от данного вида облигации, то очевидно, что полная доходность у рассматриваемых облигаций равна текущей в случае, когда выплаты по купонам ежегодные, т.е. $i = i_t$. Если же проценты выплачиваются раз в году, каждый раз по норме $g\ /p$, то согласно получим

$$i = \left(1 + \frac{g}{p}\frac{100}{K}\right)^p - 1 = \left(1 + \frac{i_t}{p}\right)^p - 1 \qquad 10.3$$

Пример 10.1 Вечная рента, приносящая 4 ,5 % дохода, куплена по курсу 90. Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются раз в году, поквартально (p = 4)?

$$i = i_t = \frac{g}{K}100 = \frac{0{,}045}{90}100 = 0{,}05$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}0509$$

2). Облигации без выплаты процентов. Данный вид облигации обеспечивает ее владельцу в качестве дохода разность между номиналом и ценой приобретения.

Курс такой облигации всегда меньше 100. Для определения ставки помещения приравняем современную стоимость номинала цене приобретения:

$$Nv^n = P \qquad 10.4$$

Или

$$v^n = \frac{P}{N} = \frac{K}{100}$$

10.5

где n – срок до выкупа облигации. Получим:

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 \qquad 10.6$$

Пример 10.2 Корпорация *X* выпустила облигации с нулевым купоном с погашением через 5 лет. Курс реализации 45. Доходность облигации на дату погашения:

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{45}{100}}} - 1 = 0{,}17316$$

т.е. облигация обеспечивает инвестору 1 7 ,3 1 6 % годового дохода.

3). Облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока.

Проценты здесь начисляются за весь срок и выплачиваются одной суммой (*lump sum*) вместе с номиналом. Купонного дохода нет. Поэтому текущую доходность условно можно считать нулевой, поскольку соответствующие проценты получают в конце срока.

Найдем полную доходность, приравняв современную стоимость дохода цене облигации:

$$i = \frac{1+g}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 \qquad 10.7$$

Если курс облигации меньше 100, то $i > g$.

Пример 10.3 Облигация, приносящая 10% годовых относительно номинала, куплена по курсу 65, срок до погашения 3 года. Если номинал и проценты выплачиваются в конце срока, то полная доходность для инвестора составит

$$i = \frac{1+g}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 = \frac{1+0{,}1}{\sqrt[3]{\frac{65}{100}}} - 1 = 0{,}26956$$

4). Облигации с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока. Этот вид облигаций получил наибольшее распространение в современной практике.

Для такой облигации можно получить все три показателя доходности — купонную, текущую и полную.

Текущая доходность рассчитывается по полученной выше формуле (10.2). Что касается *полной доходности,* то для ее определения необходимо современную стоимость всех поступлений приравнять цене облигации.

Поскольку поступления по купонам представляют собой постоянную ренту постнумерандо, то член такой ренты равен gN, а современная ее стоимость составит $gNa_{n;i}$, если купоны оплачиваются ежегодно, и $gNa_{n;i}^{(p)}$, если эти выплаты производятся p раз в году, каждый раз по ставке g/p.

Дисконтированная величина номинала равна Nv^n. В итоге получим следующие равенства. Для облигации с годовыми купонами:

$$P = Nv^n + gN\sum_{1}^{n} v^t = Nv^n + gNa_{n;i}$$

откуда

$$\frac{K}{100} = v^n + ga_{n;i} \qquad 10.8$$

Для облигации с погашением купонов по полугодиям и поквартально часто применяют

$$\frac{K}{100} = v^n + ga_{n;i}^{(p)} \qquad 10.9$$

$a_{n;i}^{(p)}$ – коэффициент приведения p-срочной ренты ($p=2$, $p=4$).

Во всех приведенных формулах v^n означает дисконтный множитель по неизвестной годовой ставке помещения i.

В зарубежной практике, однако, для облигаций с полугодовыми и квартальными выплатами текущего дохода для дисконтирования применяется годовая номинальная ставка, причем число раз дисконтирования в году обычно принимается равным числу раз выплат купонного дохода *($p = m$).*

Искомые значения ставки помещения рассчитываются или с помощью интерполяции, или каким-либо итерационным методом.

В финансовой литературе иногда рекомендуют метод приближенной оценки, согласно которому:

$$i = \frac{gN+(N-P)/n}{(P+N)/2} = \frac{g+(1-\frac{K}{100})/n}{(1+\frac{K}{100})/2} \qquad 10.10$$

В этой формуле средний годовой доход от облигации соотносится со средней ее ценой. За простоту расчета, впрочем, приходится платить потерей точности оценки. Чем больше курс отличается от 100, тем больше погрешность.

Пример 10.4 Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в году по норме 8%, куплена по курсу 65.

Текущая доходность по облигации: 8/65 = 0,12308.

Для расчета полной доходности запишем исходное равенство (см. (10.8)):

$$\frac{K}{100} = v^n + g a_{n;i} \qquad \frac{65}{100} = (1+i)^{-5} + 0{,}08 a_{5;i}$$

Приближенное решение по формуле 10.10 дает:

$$i = \frac{8+(100-65)/5}{(100+65)/2} = 0{,}18182$$

Все рассмотренные выше формулы для расчета полной доходности предполагают, что оценка производится на начало срока облигации или на дату выплаты процентов при условии, что проценты на эту дату уже выплачены.

Для случая, когда оценка производится на момент между двумя датами выплат процентов, приведенные формулы дадут смещенные оценки, так как не учитывают накопленные проценты.

Задачи для самостоятельного решения

10.1 Вечная рента, приносящая доход, куплена по курсу (таблица). Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются раз в году, поквартально (p = 4)?

№	% дохода	Курс	№	% дохода	Курс	№	% дохода	Курс
1	4,1	88	**7**	4,5	87	**13**	4,8	90
2	3,8	90	**8**	3,9	91	**14**	4,6	86
3	5,2	79	**9**	6,0	93	**15**	4,3	91
4	4,7	78	**10**	5,1	79	**16**	5,0	88
5	6,1	89	**11**	5,7	88	**17**	5,9	90
6	7,0	90	**12**	5,2	85	**18**	4,6	92

10.2 Корпорация *X* выпустила облигации с нулевым купоном с погашением через 2 года, 5 лет, 8 лет. Курс реализации 45. Определить доходность облигации на дату погашения?

10.3 Облигация, приносящая X % годовых относительно номинала (таблица), куплена по определенному курсу, со сроком до погашения. Определить полную доходность для инвестора, если номинал и проценты выплачиваются в конце срока.

№	% дохода относительно номинала	Курс покупки	Срок до погашения, лет	**№**	% дохода относительно номинала	Курс покупки	Срок до погашения, лет
1	9,6	88	2	**16**	7,9	89	3
2	10,5	61	4	**17**	9,2	64	4
3	8,8	74	2	**18**	10,6	66	3
4	9,4	65	3	**19**	11,4	74	2
5	7,7	69	4	**20**	10,3	82	4
6	8,5	79	2	**21**	9,9	66	3
7	10,0	85	4	**22**	8,5	75	2
8	10,9	71	2	**23**	10,5	77	4
9	10,3	79	3	**24**	9,6	85	3
10	11,0	65	4	**25**	8,5	71	2
11	9,5	73	3	**26**	10,8	67	4
12	8,3	81	2	**27**	11,7	67	3
13	11,9	64	3	**28**	9,0	83	2
14	10,4	69	4	**29**	8,6	72	4
15	9,7	82	2	**30**	10,6	87	3

10.4 Облигации со сроком 5 лет, 7 лет, проценты по которым выплачиваются раз в году по норме 8%, 9,5 % куплены по курсу 65 и 75. Определить полную доходность для каждого срока и курса.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое облигация?
2. Опишите основные параметры облигация.
3. Как часто могут производиться выплаты по облигациям?
4. Какие есть облигации по методу обеспечения?
5. Виды облигаций по сроку?
6. Какие есть облигации по способу погашения номинала (выкупа облигации)?
7. Виды облигаций по методу выплаты дохода?
8. Охарактеризуйте два вида рыночных цен облигаций?

ГЛОССАРИЙ

Актуарный метод расчета - один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами.

Аннуитет - поток платежей с ежегодными выплатами.

Антисипативный метод - метод начисления сложных процентов, когда проценты начисляются и добавляются к капиталу в начале каждого расчётного
периода на сумму, которая будет наращена в конце этого расчётного периода.

Банковское дисконтирование при сложных процентах - это операция, обратная операции наращения по антисипативному методу.

Брутто-ставка - ставка процентов, скорректированная на инфляцию.

Внутренняя норма доходности – расчетная ставка процентов, применение которой к инвестициям порождает соответствующий поток доходов.

Декурсивный метод - метод начисления сложных процентов, когда проценты начисляются и добавляются к капиталу в конце каждого расчётного периода.

Дисконт - процентный платёж при дисконтировании (проценты в виде разности D=S-P, где S - сумма на конец срока, P - сумма на начало срока).

Дисконтирование - операция нахождения первоначальной суммы по величине наращенной суммы.

Дисконтный множитель - множителем, который показывает, какую долю составляет первоначальная сумма долга в окончательной.

Индекс инфляции (цен) - коэффициент, показывающий, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Индекс покупательной способности денег - равен обратной величине индекса цен.

Инфляция - обесценение денег относительно товаров и услуг, то есть снижение покупательной способности денег вследствие роста цен на товары и услуги.

Инфляционная премия - корректировка ставки процентов для компенсации обесценения денег.

Капитализация - начисление сложных процентов.

Капитализация процентов - присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения.

Комиссионные за выдачу кредита - сбор, который осуществляет банк непосредственно при выдаче кредита. Чаще всего такие комиссии снимаются при «наличном» кредитовании.

Комиссионные сборы в банке - это платежи, которые вносятся заёмщиком за различные услуги банка. В такие услуги могут включаться: рассмотрение кредитной заявки, выдача кредита, выдача наличных средств или перечисление безналичных средств.

Контур финансовой операции - графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами.

Коэффициент наращения ренты - отношение наращенной суммы ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа.

Коэффициент приведения ренты - отношение современной стоимости ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа.

Математическое дисконтирование - *дисконтирование, при котором* применяется процентная ставка (наращения).

Математическое дисконтирование при сложных процентах – это операция, обратная операции наращения по декурсивному методу.

Множитель наращения - коэффициент, который показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

Наращенная сумма – итоговая сумма в конце срока ссуды.

Наращение или рост первоначальной суммы - процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга.

Наращенная сумма потока платежей - сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Наращенная сумма ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) - первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Номинальная процентная ставка - ставка, при которой сложные проценты по годовой процентной ставке начисляются не 1 раз в году (годовая ставка сложных процентов j при числе периодов начисления в году m. Тогда за каждый период проценты начисляют по ставке j/m).

Номинальная учётная ставка - ставка, при которой сложные проценты по годовой учётной ставке начисляются не 1 раз в году (сложная годовая учетная ставка f, применяется при дисконтировании m раз в году. Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m).

Первоначальный капитал - сумма денег, данных взаймы.

Переменная рента - рента с изменяющимися членами.

Период начисления - интервал времени, к которому относится (применяется) процентная ставка.

Период ренты - временной интервал между двумя последовательными платежами.

Погашение кредита по амортизационному плану - форма погашения кредита, при которой в каждом расчетном периоде процентный платёж начисляется на сумму долга, уменьшенную на уже выплаченную часть долга.

Постоянная рента - рента с равными членами

Поток платежей - ряд последовательных выплат и поступлений.

Правило торговца - один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. актуарный метод расчета).

Практика расчета простых процентов различает три варианта расчета: (1) точные проценты с точным числом дней ссуды (британская практика); (2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (французская практика); (3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская практика).

Приведение – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение.

Принцип неравноценности денег - деньги, относящиеся к разным моментам времени имеют различную текущую стоимость: Процент обыкновенный или коммерческий получают, когда за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом) Процент точный получают, когда за базу измерения времени берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Процентные деньги или, кратко, проценты в финансовых расчетах – это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой форме.

Проценты дискретные предполагают, что начисление процентов производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени, причем, в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц.

Проценты непрерывные предполагают непрерывное начисление процентов во времени.

Процентная ставка - отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби.

Реальное значение суммы *S* - отношение этой суммы к индексу инфляции.

Реальный доход - разность между реальным значением суммы S и первоначальной суммой.

Реинвестирование - неоднократное последовательное повторение наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока.

Релятивная процентная ставка - ставка, получающаяся делением номинальной процентной ставки на количество m начислений сложных процентов в году.

Релятивная учётная ставка - ставка, получающаяся делением номинальной учётной ставки на количество m начислений сложных процентов в году.

Рента верная - рента, члены которой подлежат безусловной выплате.

Ренты годовые - ренты с платежами, производимыми 1 раз в году.

Рента немедленная - рента, срок которой начинается немедленно.

Рента отложенная или отсроченная - рента, начало срока которой запаздывает.

Рента постнумерандо (или обычная рента) - рента, платежи которой осуществляются в конце каждого периода.

Рента пренумерандо - рента, платежи которой осуществляются в начале каждого периода.

Ренты р-срочные - ренты с платежами, производимыми р раз в году.

Рента условная - рента, выплата членов которой ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события.

Рентабельность - отношение приведенных по ставке сравнения доходов к приведенным на ту же дату капиталовложениям.

Ренты с абсолютным изменением платежей - переменные финансовые ренты, члены которой изменяются по закону арифметической прогрессии.

Ренты с относительным изменением платежей - переменные финансовые ренты, члены которой изменяются по закону геометрической прогрессии.

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$, где m - число начислений процентов в году.

Сложный процент - процент, начисляемый в каждом расчётном периоде на наращенную сумму.

Современная стоимость (текущая стоимость) - величина, найденная с помощью дисконтирования.

Современная величина потока платежей - сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Срок окупаемости - продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме приведенных на этот же момент инвестиций.

Срок ренты - время от начала первого периода ренты до конца последнего.

Ставка процентов простая – это ставка, которая применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды.

Ставка процентов сложная – это ставка, которая применяется к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.

Уравнение эквивалентности - уравнение, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Разрабатывается при изменении условий контракта.

Учет, банковский или коммерческий учет – учет (покупка) векселей заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или др. платежному обязательству покупает его у владельца (кредитора) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Уровень инфляции - коэффициент, показывающий, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период.

Финансовая рента - сумма денег, данных взаймы.

Член ренты - размер отдельного платежа.

Эквивалентные ставки - ставки, которые при прочих равных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам.

Эффективная процентная ставка – годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же финансовый результат, что m-разовое начисление процентов по релятивной процентной ставке.

Эффективная учётная ставка – годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же финансовый результат, что m-разовое начисление процентов по релятивной учётной ставке.

Форфейтная кредитная операция (операция а форфэ) – операция, в которой участвуют продавец, покупатель и банк-кредитор. Покупатель выписывает продавцу комплект векселей на сумму стоимости товара плюс проценты за кредит, сроки векселей равномерно распределены во времени. Продавец сразу же учитывает портфель векселей в банке без права оборота на себя. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя.

Чистый приведенный доход – разность дисконтированных на один момент времени показателей дохода и капиталовложений.

ВАРИАНТЫ ПРИМЕРНЫХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

Задача 1

Вклад в размере 50 тыс. руб. вложен в банк на 9 месяцев при 18%. Найти наращенную величину вклада.

Задача 2

Определить число лет, которое необходимо для увеличения первоначального капитала в 2,5 раза при сложной процентной ставке 15% годовых.

Задача 3

Определить значение простой учетной ставки, которая эквивалентна ставке сложных процентов 16% годовых при сроке ссуды 2 года.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 1300 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 12% годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся раз в году, проценты начисляются раз в году.

Вариант 2

Задача 1

Вексель номинальной стоимостью 25000 руб. был учтен в банке за 120 дней до срока погашения по учетной ставке 12% годовых. Определить дисконтированную величину векселя и сумму дисконта.

Задача 2

Клиент банка имеет на счете 150 тыс. руб. и желал бы утроить данную сумму через 4 года. Какова должна быть годовая процентная ставка при ежегодной капитализации процентов?

Задача 3

Определить величину номинальной ставки сложных процентов при их ежеквартальном начислении, которая эквивалентна сложной учетной ставке 12% годовых.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 80 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 15% годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся раз в году, проценты начисляются ежемесячно.

Вариант 3

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 10 февраля в размере 500 тыс. руб. с процентной ставкой 14% годовых. Срок возврата кредита установлен 22 декабря. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по английской практике. Год не високосный.

Задача 2

Какую сумму необходимо поместить в банк, чтобы через 5 лет клиент получил 500 тыс. руб. при 10% годовых, если проценты начислялись раз в квартал?

Задача 3

Клиент получил в банке четыре ссуды. Первую ссуду на 4 месяца под 10% годовых, вторую — на 8 месяцев под 17% годовых, третью — на 14 месяцев под 15% годовых, четвертую — на 10 месяцев под 20% годовых. Определить эквивалентную среднюю ставку простых процентов.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 95 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 10% годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся ежеквартально, проценты начисляются раз в году.

Вариант 4

Задача 1

Фирма получила кредит на 9 месяцев в размере 720 тыс. руб. при условии возврата в конце года 785 тыс. руб. Определить процентную и учетную ставки.

Задача 2

Фирма имеет на счете 900 тыс. руб. Банк ежеквартально начисляет проценты по сложной ставке 7% годовых. Найти процентный доход фирмы через 3 года.

Задача 3

Определить величину номинальной ставки сложных процентов при их ежеквартальном начислении, которая эквивалентна простой учетной ставке 15% годовых. Срок ссуды 2 года.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 300 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 8% годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям.

Вариант 5

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 21 января в размере 350 тыс. руб. с процентной ставкой 8% годовых. Срок возврата кредита установлен 28 августа. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по французской практике. Год не високосный.

Задача 2

Определить смешанным методом сумму долга через 35 месяцев, если первоначальная величина долга составляла 120 тыс. руб. при процентной ставке 9% годовых и ежеквартальном начислении процентов.

Задача 3

Вексель учтен в банке по учетной ставке 18% годовых за 35 дней до окончания срока его обращения. Определить доходность операции по ставке простых процентов (К=360).

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 142 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 14% годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся ежеквартально, а проценты начисляются ежемесячно.

Вариант 6

Задача 1

Банк предоставил клиенту ломбардный кредит на 4 месяца с 15 мая под залог 370 акций по 1800 руб. каждая по курсовой стоимости. Сумма кредита составляет 80% стоимости залога. Процентная ставка составляет 15% годовых. За обслуживание кредита взимается 0,7% номинальной стоимости кредита. Определить сумму кредита, полученную клиентом.

Задача 2

Банк выдал клиенту кредит в размере 480 тыс. руб. на 6 лет под 14% годовых. На третий год предусмотрена маржа 1,5% годовых, при увеличении ее каждый следующий год на 0,5%. Определить сумму долга на конец периода.

Задача 3

Ставка простых процентов — 10% годовых. Определить эквивалентную ей сложную учетную ставку процентов при сроке начисления 4 года.

Задача 4

Определить современную величину ренты, если в течение 6 лет в банк ежегодно будут вноситься рентные платежи в размере 135 тыс. руб. Проценты начисляются ежегодно по ставке 12% годовых.

Вариант 7

Задача 1

На какой срок фирма может взять кредит в банке в размере 425 тыс. руб. с условием, что сумма возврата кредита не превысит 432 тыс. руб., если банк применит учетную ставку 13% годовых, при К=365 дней?

Задача 2

Клиент имеет в банке срочный вклад в размере 55 тыс. руб. на 5 лет по сложной учетной ставке 17% годовых. Определить наращенную величину вклада, если начисление процентов производится а) раз в году; б) ежеквартально.

Задача 3

Долгосрочный кредит был предоставлен фирме на 8 лет по ставке сложных процентов за первые 4 года 8% годовых. Затем каждые следующие 2 года ставка возрастает на 3%. Определить эквивалентную среднюю процентную ставку.

Задача 4

Определить современную величину ренты, если в течение 6 лет в банк ежегодно будут вноситься рентные платежи в размере 80 тыс. руб. Проценты начисляются ежеквартально по ставке 16% годовых.

Вариант 8

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 17 февраля в размере 280 тыс. руб. с процентной ставкой 14% годовых. Срок возврата кредита установлен 15 августа. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по германской практике. Год високосный.

Задача 2

Клиент имеет на счете 95 тыс. руб. Годовая процентная ставка — 12% годовых. Определить наращенную сумму, если счет будет закрыт а) через полгода, б) через 3 года. Проценты начисляются ежеквартально в обоих вариантах.

Задача 3

Банк при выдаче ссуды на 2 года использовал учетную ставку простых процентов.20% годовых. Найти эквивалентную сложную процентную ставку.

Задача 4

Определить современную величину ренты, если в течение 6 лет в банк ежеквартально будут вноситься рентные платежи в размере 140 тыс. руб. Проценты начисляются ежегодно по ставке 18% годовых.

Вариант 9

Задача 1

Банк предлагает вкладчику следующие условия по срочному годовому депозиту: процентная ставка за первое полугодие составляет 13% годовых; каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%. Проценты начисляются на первоначально внесенную сумму, которая составляет 80 тыс. руб. Определить наращенную за год сумму.

Задача 2

Клиент имеет на счете 100 тыс. руб. На эту сумму начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых. Через 4 года и 187 дней клиент закрыл счет. Сколько составит сумма, полученная клиентом при закрытии счета? (Задачу решить смешанным методом).

Задача 3

Ставка простых процентов при сроке ссуды 3 года составляет 12% годовых. Определить эквивалентную ставку сложных процентов.

Задача 4

Определить современную величину ренты, если в течение 6 лет в банк ежеквартально будут вноситься рентные платежи в размере 132 тыс. руб. Проценты начисляются ежеквартально по ставке 11% годовых.

Вариант 10

Задача 1

Вексель номинальной стоимостью 50000 руб. был учтен в банке за 90 дней до срока погашения по учетной ставке 13% годовых. Определить величину дисконта.

Задача 2

Клиент внес на депозитный счет в банке 250 тыс. руб. по непрерывной ставке 10% годовых. Срок депозита 3 года. Определить сумму депозита к концу третьего года.

Задача 3

Определить значение учетной ставки, эквивалентной ставке простых процентов, равной 12% годовых, при сроке ссуды 9 месяцев.

Задача 4

Определить современную величину ренты, если в течение 6 лет в банк по полугодиям будут вноситься рентные платежи в размере 150 тыс. руб. Проценты начисляются ежеквартально по ставке 16% годовых.

Вариант 11

Задача 1

Банк предоставил клиенту ломбардный кредит на 4 месяца с 1 марта под залог 250 акций по 2000 руб. каждая по курсовой стоимости. Сумма кредита составляет 75% стоимости залога. Процентная ставка составляет 20% годовых. За обслуживание кредита взимается 0,9% номинальной стоимости кредита. Определить сумму кредита, полученную клиентом.

Задача 2

Цены на товары и услуги ежемесячно увеличивались на 2% в течение первого года, на 3% в течение второго года. Клиент в начале периода имеет в банке 60 тыс. руб. под 18% годовых на срок 2 года. Определить компенсирующую брутто–ставку процента, а также наращенную сумму с учетом компенсации банком потерь от инфляции по схеме простых процентов.

Задача 3

Клиент банка должен осуществить 2 платежа на сумму 50 тыс. руб., 65 тыс. руб. со сроками уплаты 120 и 160 дней соответственно. Эти платежи объединяются в один, а согласованный срок платежа составляет 210 дней. Найти консолидированную сумму долга при простой процентной ставке 12 % годовых.

Задача 4

Предприятие решило создать специальный фонд в размере 750 тыс. руб. в течение 5 лет. Для этой цели в банк ежегодно будут вноситься платежи под 18 % годовых. Определить величину годового взноса.

Вариант 12

Задача 1

Фирма приобрела в коммерческом банке вексель, по которому через 9 месяцев должна получить 150 тыс. руб. Цена покупки векселя составила 120 тыс. руб. Определить доходность сделки.

Задача 2

Какую сумму необходимо поместить в банк, чтобы через 3 года клиент получил 540 тыс. руб. при сложной годовой процентной ставке 10 % годовых, если начисление процентов производится раз в полугодие?

Задача 3

Долгосрочный кредит был предоставлен фирме на 8 лет по ставке сложных процентов за первые 2 года 8 % годовых. Затем каждые следующие 2 года ставка возрастает на 3 %. Определить эквивалентную среднюю процентную ставку.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 8 млн руб. предприятие собирается вносить в банк 850 тыс. руб. ежегодно под 12 % годовых (проценты начисляются по полугодиям). Определить срок, который необходим для создания фонда.

Вариант 13

Задача 1

При открытии сберегательного счета по ставке 12% годовых 20.05.2018 г. на счет была положена сумма 50 тыс. руб. Затем на счет 05.07.2018 г. была добавлена сумма 15 тыс. руб., 10.09.2018 г. со счета была снята сумма 12,5 тыс. руб., а 20.11.2018 г. счет был закрыт. Определить общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Задача 2

Клиент внес на депозитный счет в банке 550 тыс. руб. по непрерывной ставке 9% годовых. Срок депозита 2 года. Определить сумму депозита к концу срока.

Задача 3

Клиент банка должен осуществить 2 платежа на сумму 400 тыс. руб., 550 тыс. руб. со сроками уплаты 60 и 100 дней соответственно. Эти платежи объединяются в один, а согласованный срок платежа составляет 80 дней. Найти консолидированную сумму долга при простой учетной ставке 10% годовых.

Задача 4

Предприятие создает специальный фонд. Ежегодно в течение 4-х лет в него будет вноситься 165 тыс. руб. под 15% годовых (проценты простые). Найти величину фонда, если платежи производятся раз в году.

Вариант 14

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 6 февраля в размере 300 тыс. руб. с процентной ставкой 12% годовых. Срок возврата кредита установлен 5 октября. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по французской практике. Год не високосный.

Задача 2

Определить число лет, которое необходимо для увеличения первоначального капитала в 3 раза при сложной процентной ставке 17% годовых.

Задача 3

Определить сложную учетную ставку, которая эквивалентна номинальной ставке сложных процентов 15% годовых при их полугодичном начислении.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 350 тыс. руб. предприятие собирается. ежегодно вносить в банк 50 тыс. руб. под 14% годовых (проценты начисляются поквартально). Определить срок, который необходим для создания фонда.

Вариант 15

Задача 1

Банк предоставил клиенту ломбардный кредит на 3 месяца с 15 сентября под залог 150 акций по 4500 руб. каждая по курсовой стоимости. Сумма кредита составляет 75% стоимости залога. Процентная ставка составляет 18% годовых. За обслуживание кредита взимается 1% номинальной стоимости кредита. Определить сумму кредита, полученную клиентом.

Задача 2

Клиент имеет на счете 8 тыс. руб. На эту сумму начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых. Через 3 года и 167 дней клиент закрыл счет. Сколько составит сумма, полученная клиентом при закрытии счета, если банк применит французскую практику? (Задачу решить смешанным методом).

Задача 3

Определить простую учетную ставку, эквивалентную номинальной ставке сложных процентов 17% годовых при их полугодичном начислении. Срок ссуды 4 года.

Задача 4

Предприятие создает инвестиционный фонд на основе взносов пренумерандо. Каждое полугодие будет вноситься 130 тыс. руб. под 12% годовых в течение пяти лет. Определить размер инвестиционного фонда.

Вариант 16

Задача 1

Вклад в размере 200 тыс. руб. был положен в банк 12.03.2018 г. и востребован 25.12.2018 г. Ставка процентов банка составила 11% годовых. Определить сумму начисленных процентов по английской практике.

Задача 2

Клиент внес на счет в банке 220 тыс. руб. на 3 года. Определить наращенную сумму вклада, если начальное значение силы роста составило под 7,2 %, а ежегодный прирост 2,1 %.

Задача 3

Определить сложную номинальную учетную ставку при полугодичном начислении процентов, которая эквивалентна ставке простых процентов 20 % годовых при сроке ссуды 4 года.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 400 тыс. руб. предприятие собирается. вносить в банк 25 тыс. руб. по полугодиям под 10% годовых (проценты начисляются по полугодиям). Определить срок, который необходим для создания фонда.

Вариант 17

Задача 1

Банк предлагает вкладчику следующие условия по срочному годовому депозиту: процентная ставка за первый квартал составляет 15 % годовых; каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5 %. Проценты начисляются на первоначально внесенную сумму, которая составляет 12 тыс. руб. Определить величину начисленных за год процентов.

Задача 2

Какую сумму надо положить в банк, чтобы через 4 года накопить 50 тыс. руб. при номинальной учетной ставке 22 % годовых и полугодичном начислении процентов?

Задача 3

Сложная учетная ставка составляет 15 % годовых. Определить простую процентную ставку при сроке ссуды 4 года.

Задача 4

Для накопления 700 тыс. руб. в банк каждое полугодие вносятся деньги под 15% годовых в течение 3 лет (проценты начисляются ежемесячно). Определить размер ежегодных взносов.

Вариант 18

Задача 1

Предоставлен потребительский в размере 180 тыс. руб. на срок 9 месяцев под 14 % годовых с ежемесячным погашением. Составить план погашения кредита.

Задача 2

Срочный вклад в размере 80 тыс. руб. положен в банк на 3 года. По условиям договора начисление процентов производится по сложной учетной ставке 14 % годовых ежеквартально. Определить наращенную сумму.

Задача 3

Определить величину простой процентной ставки, эквивалентной номинальной учетной ставке 18 % годовых при полугодичном начислении и сроке ссуды 2 года.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 4 года. Ежегодные страховые взносы в размере 130 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 17 % годовых. Определить размер наращенной суммы через 4 года, если рентные платежи вносятся ежеквартально, проценты начисляются раз в году.

Вариант 19

Задача 1

Фирме необходим кредит в сумме 160 тыс. руб. Банк согласен на выдачу кредита при условии, что он будет возвращен через 180 дней в размере 175 тыс. руб. При расчете использовалась учетная ставка и германская практика. Определить величину ставки.

Задача 2

Банк выдал клиенту кредит в размере 320 тыс. руб. на 6 лет под 10 % годовых. На третий год предусмотрена маржа 2% годовых, при увеличении ее каждый следующий год на 0,5 %. Определить сумму долга на конец периода.

Задача 3

Определить величину простой процентной ставки, эквивалентной ставке сложных процентов 14 % годовых при сроке ссуды 4 года.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 500 тыс. руб. предприятие собирается. вносить в банк 25 тыс. руб. по полугодиям под 12 % годовых (проценты начисляются по ежеквартально). Определить срок, который необходим для создания фонда.

Вариант 20

Задача 1

Фирма получила ссуду в банке в размере 160 тыс. руб. сроком на 3 месяца, сумма погашения составляет 170 тыс. руб. Определить доходность сделки.

Задача 2

Депозит в размере 50 тыс. руб. положен в банк на 3 года. Определить сумму начисленных процентов при простой и сложной ставках процентов, равных 12% годовых.

Задача 3

Какова величина номинальной учетной ставки, если номинальная процентная ставка составляет 25% годовых при ежеквартальном начислении процентов?

Задача 4

Предприятие создает специальный фонд. Ежегодно в течение 4 лет в него будет вноситься 60 тыс. руб. под 14 % годовых (проценты простые). Найти величину фонда, если платежи производятся по полугодиям.

Вариант 21

Задача 1

Вклад в размере 15 тыс. руб. вложен в банк на 280 дней при 15 % годовых (проценты простые). Найти наращенную величину вклада по германской практике.

Задача 2

Определить число лет, которое необходимо для увеличения первоначального капитала в 3 раза при сложной процентной ставке 12 % годовых.

Задача 3

Определить значение сложной учетной ставки, которая эквивалентна ставке сложных процентов 19 % годовых при сроке ссуды 3 года.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 7 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 150 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 10 % годовых. Определить размер наращенной суммы через 7 лет, если рентные платежи вносятся раз в году, проценты начисляются по полугодиям.

Вариант 22

Задача 1

На какой срок фирма может взять кредит в банке в размере 150 тыс. руб. с условием, что сумма возврата кредита не превысит 220 тыс. руб., если банк применит учетную ставку 9 % годовых, при К=360 дней?

Задача 2

Клиент имеет в банке срочный вклад в размере 55 тыс. руб. на 5 лет по сложной учетной ставке 27 % годовых. Определить наращенную величину вклада, если начисление процентов производится а) раз в году; б) ежеквартально.

Задача 3

Долгосрочный кредит был предоставлен фирме на 16 лет по ставке сложных процентов за первые 4 года 12 % годовых. Затем каждые следующие 2 года ставка возрастает на 0,5 %. Определить эквивалентную среднюю процентную ставку.

Задача 4

Определить современную величину ренты, если в течение 6 лет в банк ежегодно будут вноситься рентные платежи в размере 40 тыс. руб. Проценты начисляются ежеквартально по ставке 15 % годовых.

Вариант 23

Задача 1

Банк предоставил клиенту ломбардный кредит на 3 месяца с 1 марта под залог 400 акций по 1000 руб. каждая по курсовой стоимости. Сумма кредита составляет 80 % стоимости залога. Процентная ставка составляет 15 % годовых. За обслуживание кредита взимается 0,7 % номинальной стоимости кредита. Определить сумму кредита, полученную клиентом.

Задача 2

Цены на товары и услуги ежемесячно увеличивались на 0,8 % в течение первого года, ежеквартально на 1,5 % в течение второго года. Клиент в начале периода имеет в банке 250 тыс. руб. под 12 % годовых на срок 2 года. Определить компенсирующую брутто–ставку процента, по схеме сложных процентов.

Задача 3

Клиент банка должен осуществить 2 платежа на сумму 120 тыс. руб., 250 тыс. руб. со сроками уплаты 3 и 6 месяцев соответственно. Эти платежи объединяются в один, а согласованный срок платежа составляет 9 месяцев. Найти консолидированную сумму долга при сложной процентной ставке 12 % годовых.

Задача 4

Предприятие решило создать специальный фонд в размере 800 тыс. руб. в течение 6 лет. Для этой цели в банк ежегодно будут вноситься платежи под 12 % годовых. Определить величину годового взноса.

Вариант 24

Задача 1

Фирма приобрела в коммерческом банке вексель, по которому через 6 месяцев должна получить 75 тыс. руб. Цена покупки векселя составила 70 тыс. руб. Определить доходность сделки.

Задача 2

Какую сумму необходимо поместить в банк, чтобы через 5лет клиент получил 32 тыс. руб. при сложной ставке 13% годовых, если начисление процентов производится раз в квартал?

Задача 3

Клиент банка должен осуществить 2 платежа на сумму 280 тыс. руб., 300 тыс. руб. со сроками уплаты 3 и 9 месяцев соответственно. Эти платежи объединяются в один, а согласованный срок платежа составляет 6 месяцев. Найти консолидированную сумму долга при сложной учетной ставке 8% годовых.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 200 тыс. руб. предприятие собирается вносить в банк по 40 тыс. руб. по полугодиям под 12 % годовых (проценты начисляются ежегодно). Определить срок, который необходим для создания фонда.

Вариант 25

Задача 1

При открытии сберегательного счета по ставке 15 % годовых 20.02.2018 г. на счет была положена сумма 200 тыс. руб. Затем на счет 05.07.2018 г. была добавлена сумма 50 тыс. руб., 10.09.2018 г. со счета была снята сумма 75 тыс. руб., а 20.11.2018 г. счет был закрыт. Определить общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Задача 2

Клиент внес на депозитный счет в банке 700 тыс. руб. по непрерывной ставке 11% годовых. Срок депозита 4 года. Определить сумму депозита к концу срока.

Задача 3

Клиент банка должен осуществить 2 платежа на сумму 40 тыс. руб., 55 тыс. руб. со сроками уплаты 60 и 100 дней соответственно. Эти платежи объединяются в один, а согласованный срок платежа составляет 80 дней. Найти консолидированную сумму долга при простой учетной ставке 20 % годовых.

Задача 4

Предприятие создает специальный фонд. Ежегодно в течение 7 лет в него будет вноситься 45 тыс. руб. под 12 % годовых (проценты простые). Найти величину фонда, если платежи производятся раз в году; ежеквартально.

Вариант 26

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 10 февраля в размере 130 тыс. руб. с процентной ставкой 17 % годовых. Срок возврата кредита установлен 21 октября. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по английской практике. Год високосный.

Задача 2

Определить число лет, которое необходимо для увеличения первоначального капитала в 4 раза при сложной учетной ставке 11% годовых.

Задача 3

Определить сложную учетную ставку, которая эквивалентна номинальной ставке сложных процентов 15% годовых при их полугодичном начислении.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 350 тыс. руб. предприятие собирается по полугодиям вносить в банк по 50 тыс. руб. под 7% годовых (проценты начисляются поквартально). Определить срок, который необходим для создания фонда.

Вариант 27

Задача 1

Банк предоставил клиенту ломбардный кредит на 3 месяца с 15 сентября под залог 150 акций по 4500 руб. каждая по курсовой стоимости. Сумма кредита составляет 75% стоимости залога. Процентная ставка составляет 11% годовых. За обслуживание кредита взимается 1% номинальной стоимости кредита. Определить сумму кредита, полученную клиентом.

Задача 2

Клиент имеет на счете 100 тыс. руб. На эту сумму начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых. Через 4 года и 90 дней клиент закрыл счет. Сколько составит сумма, полученная клиентом при закрытии счета, если банк применит германскую практику? (Задачу решить смешанным методом).

Задача 3

Определить простую учетную ставку, эквивалентную номинальной ставке сложных процентов 17% годовых при их полугодичном начислении. Срок ссуды 4 года.

Задача 4

Предприятие создает инвестиционный фонд на основе взносов пренумерандо. Каждое полугодие будет вноситься 30 тыс. руб. под 12% годовых в течение 5 лет (проценты начисляются ежегодно). Определить размер инвестиционного фонда.

Вариант 28

Задача 1

Вклад в размере 120 тыс. руб. был положен в банк 17.06.2018 г. и востребован 20.12.2018 г. Ставка процентов банка составила 15% годовых. Определить сумму начисленных процентов по французской практике.

Задача 2

Клиент внес на счет в банке 130 тыс. руб. на 4 года. Определить наращенную сумму вклада, если начальное значение силы роста составило под 8,3 %, а ежегодный прирост 1,7 %.

Задача 3

Определить сложную номинальную учетную ставку при полугодичном начислении процентов, которая эквивалентна ставке простых процентов 20 % годовых при сроке ссуды 4 года.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 400 тыс. руб. предприятие собирается. Вносить в банк 25 тыс. руб. по полугодиям под 10 % годовых (проценты начисляются по полугодиям). Определить срок, который необходим для создания фонда.

Вариант 29

Задача 1

На какой срок фирма может взять кредит в банке в размере 190 тыс. руб. с условием, что сумма возврата кредита не превысит 220 тыс. руб., если банк применит учетную ставку 13 % годовых, при К=365 дней?

Задача 2

Клиент имеет в банке срочный вклад в размере 155 тыс. руб. на 5 лет по сложной учетной ставке 17 % годовых. Определить наращенную величину вклада, если начисление процентов производится а) раз в году; б) ежемесячно.

Задача 3

Долгосрочный кредит был предоставлен фирме на 16 лет по ставке сложных процентов за первые 4 года 12% годовых. Затем каждые следующие 2 года ставка возрастает на 0,5%. Определить эквивалентную среднюю процентную ставку.

Задача 4

Определить современную величину ренты пренумерандо, если в течение 6 лет в банк ежегодно будут вноситься рентные платежи в размере 140 тыс. руб. Проценты начисляются ежеквартально по ставке 15% годовых.

Вариант 30

Задача 1

Вклад в размере 130 тыс. руб. вложен в банк на 7 месяцев при 8 % годовых. Найти наращенную величину вклада.

Задача 2

Определить число лет, которое необходимо для увеличения первоначального капитала в 2 раза при сложной процентной ставке 15 % годовых.

Задача 3

Определить значение простой учетной ставки, которая эквивалентна ставке сложных процентов 16 % годовых при сроке ссуды 2 года.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 130 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 12 % годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся раз в году, проценты начисляются раз в году.

Вариант 31

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 25 февраля в размере 50 тыс. руб. с процентной ставкой 14 % годовых. Срок возврата кредита установлен 11 сентября. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по английской практике. Год не високосный.

Задача 2

Какую сумму необходимо поместить в банк, чтобы через 5 лет клиент получил 250 тыс. руб. при 10 % годовых, если проценты начислялись раз в полугодие?

Задача 3

Клиент получил в банке четыре ссуды. Первую ссуду на 4 месяца под 10 % годовых, вторую — на 8 месяцев под 7 % годовых, третью — на 14 месяцев под 11 % годовых, четвертую — на 10 месяцев под 12 % годовых. Определить эквивалентную среднюю ставку простых процентов.

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 125 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 10 % годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся ежеквартально, проценты начисляются раз в году.

Вариант 32

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 21 февраля в размере 235 тыс. руб. с процентной ставкой 18 % годовых. Срок возврата кредита установлен 18 июля. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по французской практике. Год не високосный.

Задача 2

Определить смешанным методом сумму долга через 29 месяцев, если первоначальная величина долга составляла 320 тыс. руб. при процентной ставке 10% годовых и ежеквартальном начислении процентов.

Задача 3

Вексель учтен в банке по учетной ставке 8 % годовых в день окончания срока его обращения, который составил 180 дней. Определить доходность операции по ставке простых процентов (К=360).

Задача 4

Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы ренты пренумерандо в размере 142 тыс. руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 14% годовых. Определить размер наращенной суммы через 5 лет, если рентные платежи вносятся ежеквартально, а проценты начисляются ежемесячно.

Вариант 33

Задача 1

Банк предоставил клиенту ломбардный кредит на 3 месяца с 3 июня под залог 280 акций по 2500 руб. каждая по курсовой стоимости. Сумма кредита составляет 80 % стоимости залога. Процентная ставка составляет 10 % годовых. За обслуживание кредита взимается 0,6 % номинальной стоимости кредита. Определить сумму кредита, полученную клиентом.

Задача 2

Клиент имеет на счете 90 тыс. руб. Годовая процентная ставка — 7 % годовых. Определить наращенную сумму, если счет будет закрыт а) через полгода, б) через 4 года. Проценты начисляются а) ежегодно; б) ежемесячно.

Задача 3

Ставка простых процентов — 10 % годовых. Определить эквивалентную ей сложную учетную ставку процентов при сроке начисления 4 года.

Задача 4

Определить современную величину ренты, если в течение 6 лет в банк ежегодно будут вноситься рентные платежи в размере 135 тыс. руб. Проценты начисляются ежегодно по ставке 12 % годовых.

Вариант 34

Задача 1

Банк выдал клиенту кредит 17 февраля в размере 128 тыс. руб. с процентной ставкой 14 % годовых. Срок возврата кредита установлен 15 августа. Определить наращенную сумму долга, подлежащую возврату, по германской практике. Год високосный.

Задача 2

Банк выдал клиенту кредит в размере 148 тыс. руб. на 6 лет под 14 % годовых. На третий год предусмотрена маржа 1,5 % годовых, при увеличении ее каждый следующий год на 0,5 %. Определить сумму долга на конец периода.

Задача 3

Банк при выдаче ссуды на 2 года использовал учетную ставку простых процентов.20% годовых. Найти эквивалентную сложную процентную ставку.

Задача 4

Определить современную величину ренты пренумерандо, если в течение 6 лет в банк ежеквартально будут вноситься рентные платежи в размере 124 тыс. руб. Проценты начисляются ежегодно по ставке 18 % годовых.

Вариант 35

Задача 1

Банк предлагает вкладчику следующие условия по срочному годовому депозиту: процентная ставка за первое полугодие составляет 13 % годовых; каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5 %. Проценты начисляются на первоначально внесенную сумму, которая составляет 80 тыс. руб. Определить наращенную за год сумму.

Задача 2

Клиент имеет на счете 120 тыс. руб. На эту сумму начисляются сложные проценты по ставке 8 % годовых. Через 2 года и 185 дней клиент закрыл счет. Сколько составит сумма, полученная клиентом при закрытии счета? (Задачу решить смешанным методом).

Задача 3

Ставка простых процентов при сроке ссуды 3 года составляет 12 % годовых. Определить эквивалентную ставку сложных процентов.

Задача 4

Определить современную величину ренты пренумерандо, если в течение 4 лет в банк ежеквартально будут вноситься рентные платежи в размере тыс. руб. Проценты начисляются ежемесячно по ставке 12% годовых.

Вариант 36

Задача 1

При открытии сберегательного счета по ставке 12% годовых 02.03.2018 г. на счет была положена сумма 105 тыс. руб. Затем на счет 10.07.2018 г. была добавлена сумма 30 тыс. руб., 10.09.2018 г. со счета была снята сумма 45 тыс. руб., а 15.12.2018 г. счет был закрыт. Определить общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Задача 2

Клиент внес на депозитный счет в банке 500 тыс. руб. по непрерывной ставке 13% годовых. Срок депозита 3 года. Определить сумму депозита к концу срока.

Задача 3

Клиент банка должен осуществить 2 платежа на сумму 140 тыс. руб., 255 тыс. руб. со сроками уплаты 60 и 100 дней соответственно. Эти платежи объединяются в один, а согласованный срок платежа составляет 80 дней. Найти консолидированную сумму долга при простой процентной ставке 12% годовых.

Задача 4

Предприятие создает специальный фонд. Ежегодно в течение 4-х лет в него будет вноситься 65 тыс. руб. под 15 % годовых (проценты простые). Найти величину фонда, если платежи производятся раз в году.

Вариант 37

Задача 1

Фирма приобрела в коммерческом банке вексель, по которому через 9 месяцев должна получить 150 тыс. руб. Цена покупки векселя составила 120 тыс. руб. Определить доходность сделки.

Задача 2

Какую сумму необходимо поместить в банк, чтобы через 3 года клиент получил 540 тыс. руб. при сложной годовой процентной ставке 10 % годовых, если начисление процентов производится раз в полугодие?

Задача 3

Долгосрочный кредит был предоставлен фирме на 8 лет по ставке сложных процентов за первые 2 года 8 % годовых. Затем каждые следующие 2 года ставка возрастает на 3 %. Определить эквивалентную среднюю процентную ставку.

Задача 4

Для создания специального фонда в размере 800 тыс. руб. организация собирается вносить в банк 140 тыс. руб. ежегодно под 12 % годовых (проценты начисляются по полугодиям). Определить срок, который необходим для создания фонда.

ТЕСТЫ

1. Консолидированием платежей является:
а) разность наращенных сумм;
б) объединение платежей;
б) замена платежей;
г) разность дисконтных платежей

2. Выберите величину срока помещения денежной суммы под простую процентную ставку 28% годовых, чтобы она увеличилась в 1,5 раза.
а) 1,5;
б) 1,786;
в) 2,0;
г) 2,53.

3. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год 16%. В каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Множитель наращения за 2,5 года:
а) 1,2;
б) 1,43;
в) 1,7;
г) 2,5.

4. Определите в рублях с копейками величину консолидированного платежа по простой схеме начисления процентов при величине процентной ставки 16,5% годовых и французской практике (промежуточные расчеты не округлять):

Кредит 1		Кредит 2		Согласованный срок платежа
Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита, дней	Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита, дней	
100,0	36	200,0	72	108 дней

Ответ: **315013,35**

5. Вклад помещен в банк на 2 года под 10 % годовых с ежегодной капитализацией. Оцените в процентах реальную доходность финансовой операции, если ожидаемый темп прироста инфляции в первом году составил 4,5% в год, а во втором году – 5 % в год (промежуточные расчеты не округлять):
Ответ: **5**

6. Страховая компания заключила договор с производственной фирмой на 5 лет. Ежегодные страховые взносы в размере 5 млн руб., поступающие от фирмы, страховая компания помещает в банк под 8 % годовых. Определите в рублях с копейками размер страхового фонда фирмы через 5 лет, если рент-

ные платежи вносятся по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально (промежуточные расчеты не округлять):

Ответ: **13551621,30**

7. Сущность британской практики начисления простых процентов:
а) в использовании обыкновенных процентов и приближенного срока ссуды;
б) в использовании точных процентов и приближенного срока ссуды;
в) в использовании точных процентов и точного срока ссуды;
г) в использовании обыкновенных процентов и точного срока ссуды.

8. При французском методе
а) **число дней - точное, продолжительность года - 360 дней**
б) число дней - точное, продолжительность года - 365 дней
в) число дней — исходя из продолжительности месяцев -30 дней, продолжительность года - 360 дней
г) число дней - приближенное, продолжительность года - 365 дней

9. Учетная ставка применяется при
а) декурсивном методе
б) антисипативном методе
в**) дисконтировании**
г) все ответы верны

10. Номинальная ставка процентов используется, если
а) используется сложная ставка процентов
б) используется простая ставка процентов
в) начисление сложных процентов производится несколько раз в году
г) начисление простых процентов производится несколько раз в году

11. Проценты начисляются на одну и ту же величину капитала при
а) сложных процентах
б) **простых процентах**
в) простых и сложных процентах
г) все ответы верны

12. Математическое дисконтирование осуществляется на основе
а) процентной ставки
б) учетной ставки
в) ставки рефинансирования
г) все ответы верны

13. Математическое дисконтирование не осуществляется на основе
а) процентной ставки
б) учетной ставки
в) ставки рефинансирования

14. Номинальная ставка процентов не используется, если
а) используется сложная ставка процентов
б) используется простая ставка процентов
в) начисление сложных процентов производится несколько раз в году

15. Процентные ставки считаются простыми если:
а) применяются к одной и той же первоначальной денежной сумме в течение всего периода начисления;
б) применяются по прошествии каждого интервала к сумме долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов;
в) применяются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.

16. При английском методе
а) число дней - точное, продолжительность года - 360 дней
б) число дней - точное, продолжительность года - 365 дней
в) число дней — исходя из продолжительности месяцев -30 дней, продолжительность года - 360 дней
г) число дней - приближенное, продолжительность года - 365 дней

17. При германском методе
а) число дней - точное, продолжительность года - 360 дней
б) число дней - точное, продолжительность года - 365 дней
в) число дней — исходя из продолжительности месяцев -30 дней, продолжительность года - 360 дней
г) число дней - приближенное, продолжительность года - 365 дней

18. Если известны индексы инфляции за каждый из нескольких периодов, расположенных последовательно друг за другом, то индекс инфляции сразу за эти несколько периодов определяется путем их:
а) сложения;
б) деления;
в) умножения;
г) вычитания.

19. Если срок ссуды более одного года, то при ежегодном начислении процентов для кредитора более выгодным является:
а) применение схемы простых процентов
б) применение схемы сложных процентов
в) обе схемы дают одинаковый результат
г) нет верного ответа

20. Если срок ссуды более одного года, то при ежегодном начислении процентов для заемщика более выгодным является:
а) применение схемы простых процентов
б) применение схемы сложных процентов

в) обе схемы дают одинаковый результат
г) нет верного ответа

21. Если на некоторую сумму начисляются ежемесячно сложные проценты по процентной ставке 4% ежемесячных, то удвоение этой суммы приблизительно произойдет через:
а) 1,5 года
б) 2 года
в) 2,5 года
г) 1,8 года.

22. Связана ли доходность финансовой операции с риском при проведении этой операции:
никак не связана
а) чем больше риск, тем меньше доходность
б) чем больше риск, тем больше доходность
в) независимо от риска доходность остается постоянной

23. Обозначение 365/365 означает:
а) обыкновенные проценты с приблизительным числом дней предоставления ссуды
б) точные проценты с приблизительным числом дней предоставления ссуды
в) точные проценты с точным числом дней предоставления ссуды
г) обыкновенные проценты с точным числом дней предоставления ссуды

24. Сравнительная эффективность финансовых операций с использованием сложных процентов может быть выявлена с помощью:
а) эффективных ставок;
б) номинальных ставок;
в) любых из упомянутых ставок;
г) номинальных ставок, если речь идет о краткосрочных операциях.

25. Точные проценты определяются исходя из:
а) точного числа дней в году
б) точного числа дней предоставления ссуды
в) точного числа дней в году и приблизительного числа дней предоставления ссуды
г) точного числа дней предоставления ссуды и приблизительного числа дней в году

26. Обыкновенные проценты определяются исходя из:
а) приблизительного числа дней предоставления ссуды
б) приблизительного числа дней в году
в) приблизительного числа дней в году и точного числа дней предоставления ссуды

г) приблизительного числа дней предоставления ссуды и точного числа дней в году

27. Денежный поток, каждый элемент которого относится к концу соответствующего временного интервала, называется:
а) потоком пренумерандо;
б) потоком постнумерандо;
в) потоком авансовым;
г) аннуитетом.

28. Денежный поток, каждый элемент которого относится к началу соответствующего временного интервала, называется:
а) потоком пренумерандо;
б) потоком постнумерандо;
в) потоком авансовым;
г) аннуитетом.

29. Верно ли утверждение: «При учете влияния инфляции на начисление простых процентов необходимо инфляцию учитывать по сложным процентам»:
а) да
б) нет

30. Чтобы определить член аннуитета, достаточно знать:
а) приведенную стоимость аннуитета и его срок;
б) будущую стоимость аннуитета, его срок и ставку;
в) приведенную и будущую стоимости аннуитета;
г) срок аннуитета и ставку.

31. Если продолжительность финансовой операции длится более п периодов начисления процентов, но менее (п+1) периодов начисления процентов, то для кредитора более выгодным является применение:
а) сложных процентов для целого числа базисных периодов и простых процентов для дробной части базисного периода;
б) сложных процентов для дробной части базисного периода и простых процентов для целого числа базисных периодов;
в) сложных процентов для всей операции;
г) простых процентов для всей операции.

32. Деньги размещены в банке на 27 месяцев на условиях единовременного возврата основной суммы долга и начисленных процентов. В случае квартального начисления процентов для банка более выгодна:
а) схема сложных процентов;
б) схема простых процентов;
в) схема простых процентов для целого числа кварталов и схема сложных

процентов для
г) дробной части квартала.

33. Если период p-срочного аннуитета один год, то это:
а) аннуитет с денежными поступлениями p раз в году;
б) аннуитет сроком p лет;
в) аннуитет, при оценке которого используется сложная процентная ставка с начислением процентов p раз за год;
г) аннуитет, при оценке которого используется сила роста.

34. Средняя арифметическая простая величина равна:
а) сумме произведений вариантов признака и частот, деленной на сумму частот;
б) сумме всех значений признака, деленной на их число;
в) корню степени n из произведения n вариантов признака.

35. Средняя арифметическая взвешенная величина равна:
а) сумме произведений вариантов признака и частот, деленной на сумму частот;
б) сумме всех значений признака, деленной на их число;
в) корню степени n из произведения n вариантов признака.

36. Средняя геометрическая величина равна:
а) сумме произведений вариантов признака и частот, деленной на сумму частот;
б) сумме всех значений признака, деленной на их число;
в) корню степени n из произведения n вариантов признака.

37. Формулу средней арифметической простой величины целесообразно применять, если:
а) значения вариантов повторяются;
б) необходимо рассчитать средний темп роста;
в) информация задана в виде произведений вариантов и частот (объемов явлений);
г) значения вариантов не повторяются.

38. Формулу средней гармонической величины целесообразно применять, если:
а) значения вариантов повторяются;
б) необходимо рассчитать средний темп роста;
в) информация задана в виде произведений вариантов и частот (объемов явлений);
г) значения вариантов не повторяются.

39. Формулу средней арифметической взвешенной величины целесооб-

разно применять, если:
а) значения вариантов повторяются;
б) необходимо рассчитать средний темп роста;
в) информация задана в виде произведений вариантов и частот (объемов явлений);
г) значения вариантов не повторяются.

40. Формулу средней геометрической величины целесообразно применять, если:
а) информация задана в виде произведений вариантов и частот (объемов явлений);
б) значения вариантов повторяются;
в) необходимо рассчитать средний темп роста;
г) значения вариантов не повторяются.

41. Среднее линейное отклонение характеризует:
а) среднее значение квадрата отклонений вариантов признака от средней величины;
б) среднее отклонение вариантов признака от средней величины;
в) квадратный корень из среднего квадрата отклонений.

42. Дисперсия характеризует:
а) среднее значение квадрата отклонений вариантов признака от средней величины;
б) среднее отклонение вариантов признака от средней величины;
в) квадратный корень из среднего квадрата отклонений.

43. Среднее квадратическое отклонение характеризует:
а) среднее значение квадрата отклонений вариантов признака от средней величины;
б) среднее отклонение вариантов признака от средней величины;
в) квадратный корень из среднего квадрата отклонений.

44. Дисперсия признака равна 3600, коэффициент вариации равен 50%. Чему равна средняя величина признака?
а) 1200
б) 600
в) 300
г) 7200

45. Если коэффициент вариации составляет 25%, то совокупность
а) неоднородна
б) умеренной однородности
в) однородная
г) средней однородности

46. Значение признака, делящее данную совокупность на две равные части, в статистике называют
а) децилем
б) модой
в) медианой
г) квартилем

47. Колеблемость, многообразие, изменчивость значения признака у отдельных единиц совокупности называется:
а) разбросом
б) рассеиванием
в) множеством
г) вариацией

48. Коэффициент вариации является ___________ показателем вариации
а) средним
б) абсолютным
в) относительным
г) натуральным

49. Размахом вариации называется: ________ максимального и минимального значений признака
а) разность
б) произведение
в) сумма
г) частное от деления

50. Средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от средней величины называется:
а) размахом вариации
б) дисперсией
в) средним квадратическим отклонением
г) средним линейным отклонением

51. Уровень однородности статистической совокупности определяется значением
а) размаха вариации
б) дисперсией
в) среднего квадратического отклонения
г) коэффициента вариации

52. Абсолютные показатели вариации:
а) дисперсия

б) коэффициент вариации
в) размах вариации
г) среднее квадратическое отклонение

53. К относительным показателям вариации относятся:
а) мода
б) медиана
в) размах
г) коэффициент вариации

54. Коммерческий банк приобрел на 200,0 млн. рублей государственные краткосрочные облигации (ГКО) со сроком погашения шесть месяцев. По истечению указанного срока банк рассчитывает получить 402,0 млн. рублей. Указать доходность ГКО.
а) 150%;
б) 202%;
в) 210%;
г) 250%.

55. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год 16%. В каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определить множитель наращения за 2,5 года.
а) 1,2;
б) 2,5;
в) 1,7;
г) 1,43.

56. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 100 тыс. рублей вырос до 120 тыс. рублей при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25% годовых (ACT/ACT)?
а) 251 день;
б) 292 дня;
в) 305 дней;
г) 360 дней.

57. Из какого капитала можно получить 24 тыс. рублей через 2 года наращением по простым процентам по процентной ставке 25%?
а) 10 тыс. рублей;
б) 12 тыс. рублей;
в) 16 тыс. рублей;

г) 20 тыс. рублей.

58. Укажите наращенную стоимость годовой ренты постнумерандо со следующими параметрами: ежегодный платеж 1000, срок ренты – 5 лет, процентная ставка – 20%.

а) 6354;

б) 3600;

в) 8224;

г) 7442.

59. Укажите наращенную стоимость годовой ренты постнумерандо со следующими параметрами: ежегодный платеж 1000, срок ренты – 5 лет, процентная ставка – 20%, проценты начисляются раз в квартал.

а) 6954;

б) 6530;

в) 8875;

г) 7672.

60. Укажите наращенную стоимость годовой ренты постнумерандо со следующими параметрами: ежегодный платеж 1000, срок ренты – 5 лет, процентная ставка – 20%, ежегодный платеж вносится равными суммами раз в квартал.

а) 6854;

б) 7979;

в) 8975;

г) 7662.

61. Долг в сумме 100 тыс. выдан на срок 4 года под 12% годовых. Для его погашения создается погасительный фонд, на средства которого начисляются проценты по ставке 20%.Фонд формируется 4 года, взносы производятся в конце каждого года равными суммами. Укажите размеры срочных выплат.

а) 32,685 тыс.;

б) 29,313 тыс.;

в) 30,629 тыс.;

г) 33,654 тыс.

62. Долг в сумме 100 тыс. выдан на срок 4 года под 12% годовых. Для его погашения создается погасительный фонд, на средства которого начис-

ляются проценты по ставке 20%. Фонд формируется 4 года, взносы производятся в конце каждого года равными суммами. Укажите размеры выплат, если проценты присоединяются к основной сумме долга.
а) 33,685 тыс.;
б) 29,313 тыс.;
в) 30,629 тыс.;
г) 33,654 тыс.

63. Долг в сумме 100 тыс. выдан на срок 4 года под 12% годовых. Для его погашения создается погасительный фонд, на средства которого начисляются проценты по ставке 20%.Фонд формируется в течении 3 последних лет, взносы производятся в конце каждого года равными суммами. Укажите размеры взносов в погасительный фонд, если проценты присоединяются к основной сумме долга.
а) 33,685 тыс.;
б) 27,47 тыс.;
в) 30,54 тыс.;
г) 33,21 тыс.

64. Два платежа считаются эквивалентными, если:
а) равны процентные ставки;
б) приведенные к одному моменту времени они оказываются равными;
в) равны наращенные суммы;
г) равны учетные ставки.

65. Консолидирование платежей это:
а) объединение платежей;
б) замена платежей;
в) разность наращенных сумм;
г) разность дисконтных платежей.

66. Принцип финансовой эквивалентности состоит в том, что:
а) процентные ставки одинаковые;
б) учетные ставки одинаковые;
в) неизменность финансовых отношений участников до и после изменения финансового соглашения;
г) сложные учетные ставки равны.

67. При использовании сложных процентов расчет приведенных стоимостей при замене платежей можно осуществлять:

а) на любой момент времени;
б) на момент заключения контракта;
в) на начальный момент;
г) на момент времени по договоренности.

68. Имеются два обязательства. Условие первого: выплатить 400 рублей через четыре месяца; условие второго: выплатить 450 рублей через 8 месяцев. Барьерная процентная ставка (при простой процентной ставке 20%) равна:
а) 40,5%;
б) 41%;
в) 42,8%;
г) 45%.

69. Два платежа 1 и 2 млн. рублей и сроками уплаты через 2 и 3 года объединяются в один. Укажите точный срок консолидированного платежа в сумме 3 млн. руб. Используется сложная ставка 20%.
а) 1,12 года;
б) 1,35 года;
в) 1,5 года;
г) 1,646 года.

70. Платеж в 5 тыс. рублей сроком уплатить 4 месяца, заменить платежом со сроком уплаты 3 месяца. Использовать простую процентную ставку 10%.
а) l4,5 тыс. рублей;
б) 4,959 тыс. рублей;
в) 5,51 тыс. рублей;
г) 6,7 тыс. рублей.

71. Имеются два договора. Условие 1: выплатить 200 тыс. рублей через 4 месяца. Условие 2: выплатить 300 тыс. рублей через 8 месяцев. Простая процентная ставка 20%. Барьерная процентная ставка i0 равна:
а) 40%;
б) 30%;
в) 300%;
г) 150%.

72. Укажите к какому виду ценных бумаг относится акция:
а) долевая;

б) долговая;
в) Вторичный финансовый инструмент;
г) ордерная ценная бумага.

73. Укажите к какому виду ценных бумаг относится облигация:
а) долевая;
б) долговая;
в) Вторичный финансовый инструмент;
г) ордерная ценная бумага.

74. Доход по облигациям номиналом 1000 рублей выплачивается каждые полгода по ставке 50% годовых. Вычислить сумму дохода по каждой выплате.
а) 150 руб.;
б) 200 руб.;
в) 250 руб.;
г) 400 руб.

75. Облигации номиналом 1000 рублей со сроком обращения 90 дней продаются по курсу 85. Укажите сумму дохода от покупки 5 облигаций.
а) 100,5 руб.;
б) 100,0 руб.;
в) 150,0 руб.;
г) 300,0 руб.

ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Анализ эффективности инвестиционных проектов и выработка стратегических решений.
2. Прогнозирование конъюнктуры финансового рынка и ее учет в финансовом менеджменте.
3. Изучение динамики и связи различных секторов финансового рынка России, как макроэкономического фактора финансового менеджмента.
4. Анализ и управление кредитными операциями на конкретном предприятии.
5. Анализ и корректировка инвестиционной деятельности конкретного инвестора.
6. Теории управления портфелем ценных бумаг и их применимость на российском фондовом рынке.
7. Анализ динамики котировок и доходности ГКО и управление структурой инвестиций.
8. Технический анализ на российском рынке ценных бумаг.
9. Анализ влияния мировых кризисных ситуаций на российский фондовый рынок.
10. Исследование связи отдельных ценных бумагс конъюнктурой фондового рынка.
11. Арбитражные операции на валютном рынке.
12. Максимизация доходностидепозита путем реинвестирования и применения конверсии валют.
13. Сравнение динамики валютных курсов и темпов инфляции на российском рынке.
14. Расчет реальной доходности портфеля ценных бумаг в условиях инфляции, накладных расходов и условий налогообложения.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература:

1. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика, 2-е изд. – М.: ИНФРА – М, 2010. – 416 с.
2. Самаров К.Л. Финансовая математика. Сборник задач с решениями. – М.: Альфа-М, Инфра-М, 2011. – 80 с.
3. Четыркин Е.М. Финансовая математика: – М.: Издательский дом "Дело" РАНХиГС, 2011. – 392 с.

Дополнительная учебная литература:

4. Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Финансовая математика. – М.: КноРус, 2010. – 224 с.
5. Бухвалов А. В., Бухвалова В. В. Финансовые вычисления для менеджеров: учебник., 3-е издание – СПб: Высшая школа менеджмента, 2010. – 368 с.
6. Капитоненко В.В. Задачи и тесты по финансовой математике. - 2-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2011. − 368 с.: ил.
7. Ковалев В.В. Курс финансовых вычислений. М.: Финансы и статистика, 2005. − 559 с.: ил.
8. Статистика финансов: Учебник / Под ред. проф. В.Н. Салина. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 816с.: ил.
9. Ширяев В.И. Финансовая математика. Потоки платежей, производные финансовые инструменты: – М.: Либроком, 2009. – 232 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Порядковые номера дней не високосного года

Ден	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Учебное издание

Ворокова Нодира Хасановна, **Сенникова** Алина Евгеньевна

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 26.01.2021 Формат бумаги 60×84 1/16. Усл. печ. л. – 11,82. Уч.-изд. л. – 7,4 . Тираж 500 экз. Заказ №

ISBN 978-5-91221-482-0

9 785912 214820 >