

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет  
имени И. Т. Трубилина»  
Учетно-финансовый факультет  
Кафедра статистики и прикладной математики

# **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

**Методические указания**  
к выполнению контрольной работы  
для студентов-бакалавров направлений подготовки  
«Агрономия», «Садоводство»

Краснодар  
КубГАУ  
2017

УДК 51  
ББК 22.1  
М 34

*Составители:*

И. А. Кацко, Н. Х. Ворокова, А. Е. Жминько,  
А. Е. Сенникова

**М 34**      **Математическая статистика** : метод. указания к выполнению контрольной работы / сост. И. А. Кацко, Н. Х. Ворокова, А. Е. Жминько, А. Е. Сенникова. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – 45 с.

Изложены теоретические основы, а также практические указания и задания по выполнению контрольной работы. По каждой теме приводятся примеры решения задач. Методические указания предназначены для студентов–бакалавров направления 35.03.04 «Агрономия», 35.03.05 «Садоводство»

Рассмотрено и одобрено методической комиссией учетно-финансового факультета Кубанского госагроуниверситета, протокол № 2 от 02.10.2017.

Председатель методической комиссии З. И. Кругляк

УДК 51  
ББК 22.1

- © Кацко И. А., Ворокова Н. Х., Жминько А. Е., Сенникова А. Е., составление, 2017
- © ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина», 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4	
1 АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....	6	
2 СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.....	9	
3 ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД.....	16	
4 ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.....	20	
5 ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	24	
6 РЯДЫ ДИНАМИКИ.....	28	
7 КОРРЕЛЯЦИОННО–РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	33	
ПРИЛОЖЕНИЕ А	Размер посевной площади различных культур в сельскохозяйственных организациях, га.....	38
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	Показатели производства озимой пшеницы.....	39
ПРИЛОЖЕНИЕ В	Различие в урожайности сортов озимой пшеницы, ц/га.....	41
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	Урожайность риса при разных дозах удобрений, ц/га.....	41
ПРИЛОЖЕНИЕ Д	Производство отдельных видов пищевых продуктов в Краснодарском крае, тыс. т.....	42
ЛИТЕРАТУРА.....	44	

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из основных подходов к обоснованию и последующему принятию решений является статистический, основанный на использовании статистических методов и приемов анализа.

Цель заданий – оказать помощь студентам в овладении приемами и методами статистико-математического исследования, в закреплении теоретических знаний, полученных на лекциях и при самостоятельной работе во внеучебное время. Большая часть заданий выполняется по данным сельскохозяйственных предприятий и научных учреждений Краснодарского края. Для систематизации и закрепления изучаемого материала даются теоретические пояснения.

Настоящие методические указания предназначены для студентов биологических специальностей заочного факультета. Студент, на основании изучения рекомендуемой литературы, выполняет контрольную работу, которая представляется на кафедру до начала экзаменационной сессии в соответствии с указанным в таблице 1 вариантом. Контрольная работа, выполненная по другому варианту, не рецензируется.

Контрольная работа содержит семь заданий по основным темам. По каждой теме предусмотрено выполнение студентами индивидуальных заданий, с последующей проверкой преподавателем. Задания выполняются в отдельной тетради. По заданию записывается условие, даются подробные расчеты с необходимыми пояснениями, пишутся выводы по полученным результатам. В конце контрольной работы приводится список использованной литературы, ставится дата и подпись студента.

Для облегчения выполнения контрольной работы по всем заданиям изложены необходимые краткие методические указания и приводится решение типовых заданий.

Контрольная работа выполняется студентом по одному варианту заданий в соответствии с первой буквой фамилии и последней цифрой номера зачетной книжки. Номера задач указаны в таблице.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОМЕРА ВАРИАНТА

Первая буква фамилии	Последняя цифра зачетной книжки	Варианты заданий
А, К, У	0, 1, 2, 3	1
	4, 5, 6	2
	7, 8, 9	3
Б, Л, Ф	0, 1, 2, 3	4
	4, 5, 6	5
	7, 8, 9	6
В, Д, М, Х	0, 1, 2, 3	7
	4, 5, 6	8
	7, 8, 9	9
Г, Н, Ц, Ю	0, 1, 2, 3	10
	4, 5, 6	11
	7, 8, 9	12
Д, М, О, Ч	0, 1, 2, 3	13
	4, 5, 6	14
	7, 8, 9	15
Е, П, Ш	0, 1, 2, 3	16
	4, 5, 6	17
	7, 8, 9	18
Ж, Р, Щ	0, 1, 2, 3	19
	4, 5, 6	20
	7, 8, 9	21
З, С, Э	0, 1, 2, 3, 4	22
	5, 6, 7, 8, 9	23
И, Т, Я	0, 1, 2, 3, 4	24
	5, 6, 7, 8, 9	25

## 1 АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ

## ВЕЛИЧИНЫ

Абсолютными статистическими величинами называются величины, выражающие размеры, объемы и уровни общественных явлений и процессов. Они имеют определенные единицы измерения: натуральные (килограммы, штуки, центнеры, гектары, кубометры, километры); стоимостные (рубли, доллары, евро) и трудовые (человеко–часы, человеко–дни). Часто применяются комбинированные (кВт–час, машино–день, тонно–километр), а также условные (эталонные га, условные банки консервов и т.п.), единицы измерения.

Относительными величинами называются обобщающие показатели, характеризующие количественные соотношения сопоставляемых статистических величин.

Для выражения результата сопоставления одноименных величин используются коэффициенты (если база сравнения принимается за 1), проценты (если база сравнения принимается за 100), промилле (если база сравнения принимается за 1000), продецимилле (если база сравнения принимается за 10000). Относительные величины могут быть выражены именованными числами. Например, плотность населения на 1 км<sup>2</sup>, количество произведенного молока на 100 га сельскохозяйственных угодий и т.п.

По характеру, назначению и сущности выражаемых количественных соотношений различают следующие виды относительных величин: структуры; координации; выполнения плана; планового задания; динамики; интенсивности; сравнения.

Относительные величины структуры характеризуют состав изучаемой совокупности и показывают, какой удельный вес (какую долю) в общем итоге составляет каждая ее часть. Они получаются в результате деления значения каждой части совокупности на их общий итог.

Относительные величины координации характеризуют соотношение отдельных частей целого, одна из которых принимается за базу сравнения. К таким показателям относится число сельских жителей на 100 городских, число женщин на 100 мужчин, площадь посева технических культур на 100 га зерновых и т.п.

Относительная величина выполнения плана выражает степень выполнения планового задания за определенный период времени и исчисляется как отношение фактически достигнутого уровня ( $Y_1$ ) к плановому заданию ( $Y_n$ )

$$K_{\text{в.п.}} = \frac{Y_1}{Y_n}. \quad (1.1)$$

Относительная величина планового задания показывает степень напряженности плана по сравнению с базисным периодом и определяется как отношение планового уровня на предстоящий период к фактически достигнутому уровню за предшествующий период ( $Y_0$ )

$$K_{п.з} = \frac{Y_{п.}}{Y_{о.}} \quad (1.2)$$

Относительная величина динамики характеризует изменение одноименного явления во времени, получается в результате сопоставления фактического уровня в текущем периоде с базисным:

$$K_{д} = \frac{Y_1}{Y_0} \quad (1.3)$$

Относительные величины динамики, планового задания и выполнения плана взаимосвязаны:

$$K_{д} = K_{в.п.} \cdot K_{п.з} \quad (1.4)$$

Относительные величины интенсивности показывают степень распространения данного явления в определенной среде. Обычно это отношение двух различных, но связанных между собой абсолютных величин (численность населения к площади территории, на которой оно проживает, фондообеспеченность (среднегодовая стоимость основных производственных фондов на 100 га сельхозугодий)).

Относительные величины сравнения представляют соотношение одноименных показателей, относящихся к различным объектам или территориям, но за один и тот же период или момент времени. При помощи этих величин сопоставляются показатели по разным странам, регионам, предприятиям, объектам.

**Пример 1.1.** На основании данных о посевной площади различных культур определить структуру севооборота и различные виды относительных величин (коэффициент выполнения плана, коэффициент планового задания и коэффициент динамики). Структуру севооборота изобразить графически. Сделать вывод.

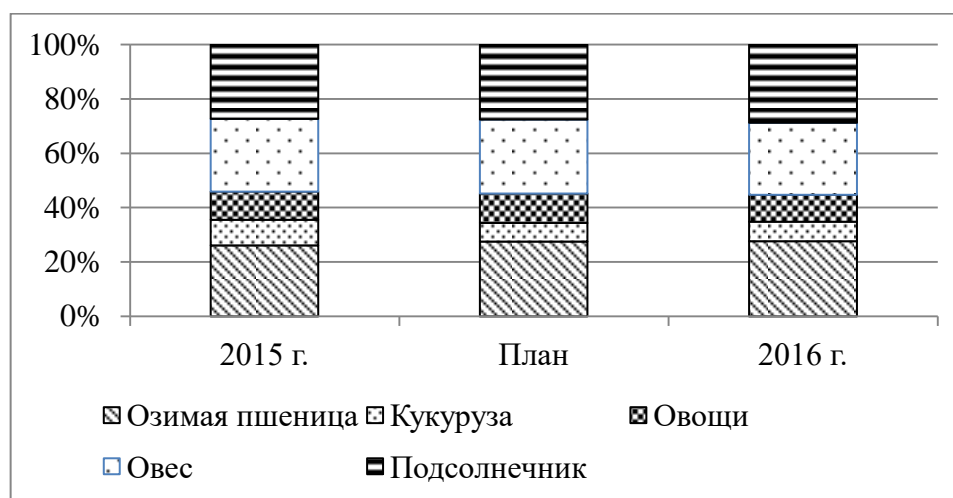
**Решение.** Построим вспомогательную таблицу 1.1 и проведем расчет показателей.

**Таблица 1.1** – Динамика и структура посевных площадей

Культура	Площадь посева, га			Структура, %			Относительные величины		
	2015г.	План на 2016г.	2016 г.	2015г.	План на 2016г.	2016г.	планового задания	выполнения плана	динамики
Озимая пшеница	1265	1300	1350	26,1	27,6	27,7	1,028	1,038	1,067
Кукуруза	459	320	350	9,5	6,8	7,2	0,697	1,094	0,763
Овощи открытого грунта	500	510	480	10,3	10,8	9,8	1,020	0,941	0,960

Культура	Площадь посева, га			Структура, %			Относительные величины		
	2015г.	План на 2016г.	2016 г.	2015г.	План на 2016г.	2016г.	планового задания	выполнения плана	динамики
Овес	1300	1280	1300	26,8	27,2	26,6	0,985	1,016	1,000
Подсолнечник	1320	1300	1400	27,3	27,6	28,7	0,985	1,077	1,061
Итого	4844	4710	4880	100,0	100,0	100,0	0,972	1,036	1,007

Для наглядного представления статистических данных построим график (рисунок 1.1) структуры севооборота.



**Рисунок 1.1** – Структура посевных площадей, %

**Вывод.** В отчетном году по сравнению с базисным площадь посева озимой пшеницы увеличилась на 6,7% или на 85 га, при этом план посева перевыполнен на 3,8%, что составляет 50 га. Посевы кукурузы в отчетном году сократились на 23,7% (109 га), но план был перевыполнен на 9,4% (30 га). Площадь посадки овощей открытого грунта в отчетном году снизилась (на 4,0% или 20 га), план посадок не довыполнен (5,9% или 30 га). Площадь посева овса за два года не изменилась, план посева перевыполнен на 1,6%, что составляет 20 га. Посев подсолнечника в отчетном году по сравнению с базисным возрос на 0,7% (80 га), план посева перевыполнен на 7,7% (100 га).

В целом по севообороту отмечается повышение посевной площади по сравнению с базисным периодом на 0,7%, что составляет 36 га. План посева перевыполнен на 3,6% (170 га).

**Задача 1.** По одному варианту, на основании данных приложения А, определить относительные величины структуры, планового задания, выполнения плана и динамики посевных площадей. Структуру посевов изобразить графически. Сделать вывод.



## 2 СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Статистика изучает количественную сторону массовых явлений и процессов по варьирующим признакам.

Признак – это особенность или характерная черта, присущая отдельным единицам совокупности.

Результаты статистического наблюдения оформляются в виде статистических рядов распределения. Статистический ряд распределения представляет собой упорядоченное распределение единиц изучаемой совокупности на группы по определенному признаку. Они характеризуют состав (структуру) изучаемого явления, позволяют судить об однородности совокупности, границах ее изменения, закономерностях развития наблюдаемого объекта. В соответствии с характером выражения признаков статистические ряды распределения подразделяются на атрибутивные (качественные) и вариационные (количественные).

Атрибутивные ряды образуются по качественным (описательным) признакам, которыми могут выступать занимаемая должность работников, профессия, пол, образование, национальность, сорт и т.п.

Вариационные ряды строятся по количественным признакам. По способу построения бывают дискретными (прерывными) и непрерывными. Дискретный ряд распределения основан на прерывной вариации, в котором значения признака выражены целыми числами (тарифный разряд рабочих, число касс в магазине, число раскрытых преступлений и т.д.). Если признак непрерывный, т.е. на определенном промежутке может принимать любое значение или если число значений дискретного признака велико, то строится интервальный ряд распределения. Вариационные ряды состоят из двух элементов: вариант и частот.

Вариант – это отдельное значение варьирующего признака, которое он принимает в ряду распределения.

Частота – это численность отдельных вариант или каждой группы вариационного ряда. Сумма частот составляет объем вариационного ряда ( $n$ ). Частоты ряда ( $f$ ) могут быть заменены **частостями** ( $w$ ), которые представляют собой частоты, выраженные в относительных числах (долях или процентах) и рассчитанные путем деления частоты каждого интервала на их общую сумму, т. е.

$$w_i = \frac{f_i}{\sum f_i}, \quad \sum f_i = n. \quad (2.1)$$

При построении интервального вариационного ряда сначала, по формуле Стэрджесса, определяется число групп, на которые разбивается совокупность, а затем – величина интервала ( $h$ ):

$$k = 1 + 3,322 \lg n, \quad (2.2)$$

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} \quad (2.3)$$

Вариационные ряды строятся с закрытыми и открытыми крайними интервалами. Если признак изменяется неравномерно, то применяются неравные интервалы, когда с ростом значений признака величина интервала прогрессивно возрастает или убывает. Иногда используется принцип равенства частот в каждой группе. По данным вариационных рядов распределения исчисляются структурные средние – моду и медиану. Модой ( $M_o$ ) называется значение признака, которое чаще всего встречается в исследуемой совокупности и имеет наибольшую частоту. В интервальном вариационном ряду мода рассчитывается по формуле:

$$M_o = x_{M_o} + h_{M_o} \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o+1}) + (f_{M_o} - f_{M_o-1})}, \quad (2.4)$$

где  $x_{M_o}$  – нижняя граница модального интервала;

$h_{M_o}$  – величина модального интервала;

$f_{M_o}$  – частота модального интервала;

$f_{M_o-1}$  – частота предмодального интервала;

$f_{M_o+1}$  – частота послемодального интервала.

Медиана ( $Me$ ) – значение признака, которое находится в середине вариационного ряда и делит ряд пополам, при этом половина единиц совокупности имеют значения признака меньше медианного, а половина – больше.

Для определения места медианы необходимо подсчитать сумму накопленных частот до числа, превышающего половину объема совокупности. Если в вариационном ряду нечетное число единиц, то надо к сумме накопленных частот этого ряда прибавить единицу и полученное число разделить на 2. Если вариационный ряд имеет четное число единиц, то медиана будет половиной суммы двух срединных вариантов. Для интервальных вариационных рядов с равными интервалами медиана определяется по формуле:

$$Me = x_{Me} + h_{me} \frac{\frac{\sum_{i=1}^k f_i}{2} - S_{Me-1}}{f_{Me}}, \quad (2.5)$$

где  $x_{me}$  – нижняя граница медианного интервала;

$h_{me}$  – величина медианного интервала;

$f_{me}$  – частота медианного интервала;

$S_{me-1}$  – накопленная частота интервала, предшествующего медианному.

**Пример 2.1.** По списку на предприятии числится 110 рабочих, которые имеют следующие разряды: 3, 5, 6, 4, 3, 4, 6, 4, 5, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 1, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 6, 4, 2, 4, 4, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 3, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 4, 4, 5, 6, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 1, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 3, 6, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 2, 6, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 6, 5, 4, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 5, 6, 1, 5, 6, 4, 3, 4, 5, 6, 4, 3, 5.

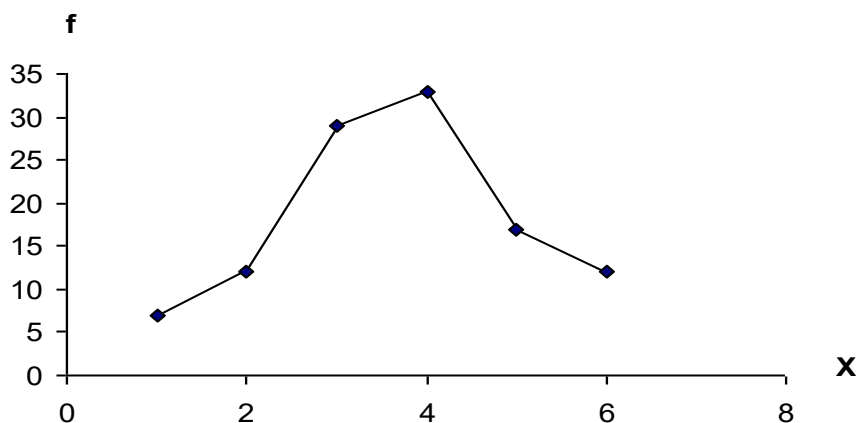
Составить ряд распределения рабочих по разрядам. Найти накопленные частоты и частоты. Определить средний разряд рабочего, модальный и медианный разряд, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вариационный ряд изобразить графически.

**Решение.** Подсчитаем число рабочих, имеющих определенный разряд, которые запишем в таблицу 2.1. Определим накопленные частоты и частоты. В результате получим дискретный вариационный ряд.

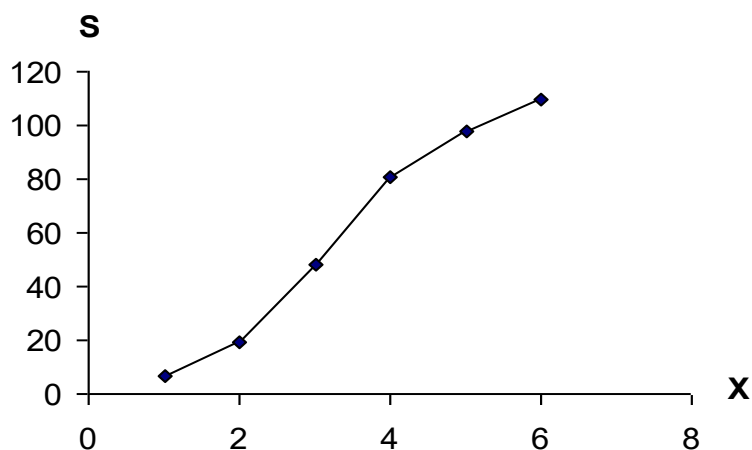
**Таблица 2.1** – Распределение рабочих по разрядам

Разряд рабочего	Число рабочих, $f$	Накопленное число рабочих, $S$	Относительная частота, $w$
1	7	7	0,064
2	12	19	0,109
3	29	48	0,264
4	33	81	0,300
5	17	98	0,154
6	12	110	0,109
Сумма	110	–	1,000

Дискретный ряд распределения можно изобразить графически в виде полигона частот или частостей, а также кумуляты. В этом случае по оси абсцисс откладываются значения признака, а по оси ординат соответствующие им частоты или частоты. Полученные точки соединяются отрезками.



**Рисунок 2.1** – Полигон распределения рабочих по разрядам



**Рисунок 2.2** – Кумулята распределения рабочих по разрядам

Средний разряд рабочих определим по формуле средней арифметической взвешенной (2.2):

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 29 + 4 \cdot 33 + 5 \cdot 17 + 6 \cdot 12}{110} = \frac{407}{110} = 3,7.$$

Наибольшее число рабочих имеет четвертый разряд, значит  $Mo = 4$ . Так как всего на предприятии 110 рабочих, то медиана соответствует разряду 55 рабочего в ранжированном ряду, т.е. четвертому разряду,  $Me = 4$ .

Дисперсию определим по формуле 2.16.

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \frac{(1 - 3,7)^2 \cdot 7 + (2 - 3,7)^2 \cdot 12 + (3 - 3,7)^2 \cdot 29 + (4 - 3,7)^2 \cdot 33 + (5 - 3,7)^2 \cdot 17 + \\ & + (6 - 3,7)^2 \cdot 12}{110} = \frac{195,1}{110} = 1,774. \end{aligned}$$

Среднее квадратическое отклонение определяется по формуле 2.18.

$$\sigma = \sqrt{1,774} = 1,33.$$

Коэффициент вариации:  $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{1,33}{3,7} \cdot 100 = 35,9 \%$ .

**Вывод.** На предприятии наиболее часто встречается четвертый разряд рабочего, половина рабочих имеет разряд до четвертого, а другая половина четвертый и выше. Средний разряд рабочего по предприятию составляет 3,7. Разряд рабочих в среднем варьирует в границах от 2,4 до 5,0, а с учетом округления результатов, то от 2 до 5. Коэффициент вариации показывает, что имеются очень большие различия в квалификации рабочих.

**Пример 2.2.** По 46 районам Краснодарского края за 2016 г. имеются следующие данные по урожайности кукурузы на зерно (ц/га) в организациях: 44,0; 37,1; 24,8; 37,9; 51,5; 52,5; 50,3; 47,5; 30,7; 39,0; 56,9; 62,3; 51,9; 53,9; 46,6; 32,0; 50,7; 50,5; 37,4; 54,4; 47,5; 52,1; 48,4; 50,0; 28,5; 57,8; 33,8; 24,4; 48,6; 47,5; 21,6; 38,9; 52,3; 54,4; 37,1; 36,5; 47,2; 47,9; 22,5; 43,0; 29,1; 53,7; 25,0; 30,5; 28,5; 38,6.

Составить вариационный ряд с равными интервалами. Найти накопленные частоты. Вариационный ряд изобразить графически. Определить среднюю урожайность кукурузы на зерно, модальное и медианное значения, а также показатели вариации.

**Решение.** По формуле 2.2 найдем число групп, на которые необходимо разбить вариационный ряд.

$$k = 1 + 3,322 \lg 46 = 6,52 .$$

Учитывая небольшой объем вариационного ряда, примем  $k = 6$ . По формуле 2.3 определим величину интервала:

$$h = \frac{62,3 - 21,6}{6} = 6,8 .$$

Границы интервалов составят:

$$\begin{aligned} &21,6 - 28,4; \\ &28,4 - 35,2; \\ &35,2 - 42,0; \\ &42,0 - 48,8; \\ &48,8 - 55,6; \\ &55,6 - 62,4. \end{aligned}$$

Подсчитав число районов в каждой группе, получим вариационный ряд. Все промежуточные расчеты проведем в таблице 2.2.

**Таблица 2.2** – Вспомогательная таблица расчета показателей вариационного ряда

Группы районов по урожайности кукурузы на зерно, ц/га	Число районов в группе ( $f_i$ )	Накопленное число районов ( $S_i$ )	Среднее значение интервала ( $x_i$ )	$xf$	$ x - \bar{x} f$	$(x - \bar{x})^2 f$
21,6–28,4	5	5	25,0	125	88,5	1566,45
28,4–35,2	7	12	31,8	222,6	76,3	831,67
35,2–42,0	8	20	38,6	308,8	32,8	134,48
42,0–48,8	10	30	45,4	454	27,0	72,9
48,8–55,6	13	43	52,2	678,6	123,5	1173,25
55,6–62,4	3	46	59,0	177	48,9	797,07
Итого:	46	–	–	1966	397,0	4575,81

Вариационный ряд изображается графически с помощью гистограммы и кумуляты распределения. На оси абсцисс откладываются границы интервалов варьирующего признака, а по оси ординат – частоты. Каждому интервалу соответствует прямоугольник по высоте равный частоте или частости.

Средняя урожайность кукурузы на зерно составит:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{1966}{46} = 42,7 \text{ ц/га}.$$

Найдем моду вариационного ряда, используя формулу 2.4.

$$Mo = 48,8 + 6,8 \frac{13 - 10}{(13 - 10) + (13 - 3)} = 50,4 \text{ ц/га}$$

Медиана определяется по формуле 2.5.

$$Me = 42,0 + 6,8 \frac{\frac{46}{2} - 20}{10} = 44,0 \text{ ц/га}$$

Определим показатели вариации:

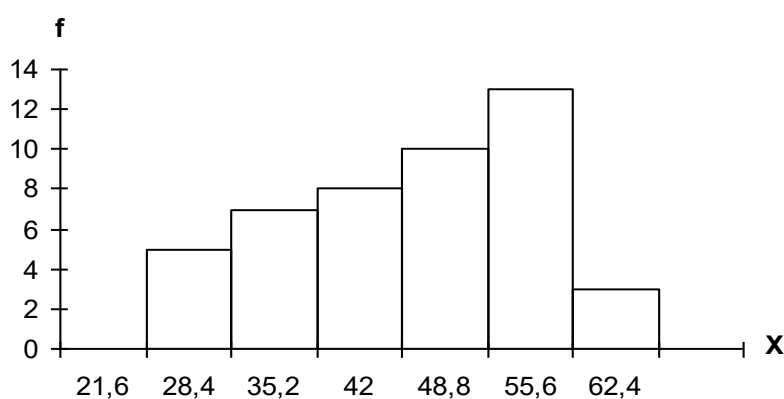
а) размах вариации:  $R = 62,3 - 21,6 = 40,7 \text{ ц/га}$

б) среднее линейное отклонение:  $L = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} = \frac{397,0}{46} = 8,6 \text{ ц/га}$

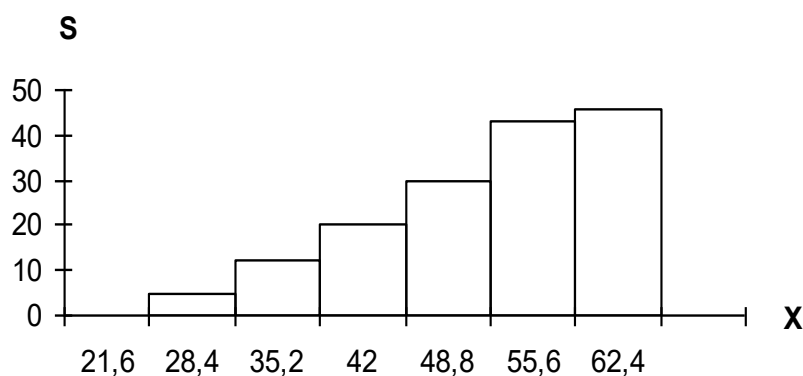
в) дисперсия:  $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{4575,82}{46} = 99,474;$

г) среднее квадратическое отклонение:  $\sigma = \sqrt{99,474} = 10,0 \text{ ц/га};$

д) коэффициент вариации:  $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{10,0}{42,7} \cdot 100 = 23,4\%.$



**Рисунок 2.3** – Гистограмма распределения районов по урожайности кукурузы на зерно в организациях, ц/га



**Рисунок 2.4** – Кумулята распределения районов по урожайности кукурузы на зерно в организациях, ц/га

**Вывод.** Расчеты показали, что в хозяйствах наиболее часто встречается урожайность кукурузы на зерно 50,4 ц/га (*Mo*), половина районов имеют урожайность кукурузы на зерно до 44,0 ц/га, а половина – выше (*Me*).

Средняя урожайность кукурузы на зерно в организациях составила 42,7 ц/га. Урожайность по районам колебалась в среднем в границах  $42,7 \pm 8,6$  ц/га согласно среднего линейного отклонения и в пределах  $42,7 \pm 10,0$  ц/га согласно среднего квадратического отклонения, т.е. от 32,7 до 52,7 ц/га. Коэффициент вариации свидетельствует о небольшой колеблемости урожайности кукурузы на зерно в хозяйствах между районами края.

**Задача 2.** По одному варианту, на основании данных об урожайности озимой пшеницы (приложения Б) по 45 организациям составить вариационный ряд с равными интервалами. Найти накопленные частоты. Вариационный ряд изобразить графически. Определить среднюю урожайность озимой пшеницы, модальное и медианное значения, а также показатели вариации.

#### Варианты задач по теме

Вариант	Предприятия	Вариант	Предприятия
<b>1</b>	с 1 по 45	<b>14</b>	с 14 по 58
<b>2</b>	с 2 по 46	<b>15</b>	с 15 по 59
<b>3</b>	с 3 по 47	<b>16</b>	с 16 по 60
<b>4</b>	с 4 по 48	<b>17</b>	с 17 по 61
<b>5</b>	с 5 по 49	<b>18</b>	с 18 по 62
<b>6</b>	с 6 по 50	<b>19</b>	с 19 по 63
<b>7</b>	с 7 по 51	<b>20</b>	с 20 по 64
<b>8</b>	с 8 по 52	<b>21</b>	с 21 по 65
<b>9</b>	с 9 по 53	<b>22</b>	с 22 по 66
<b>10</b>	с 10 по 54	<b>23</b>	с 23 по 67
<b>11</b>	с 11 по 55	<b>24</b>	с 24 по 68

Вариант	Предприятия	Вариант	Предприятия
12	с 12 по 56	25	с 25 по 69
13	с 13 по 57	–	–

### 3 ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Сбор данных для статистического изучения явлений может проводиться *сплошным* и *выборочным* методами. При сплошном наблюдении обследуются все единицы изучаемой совокупности. При выборочном наблюдении отбирается часть единиц генеральной совокупности, а показатели, найденные по отобранной части единиц, должны достаточно точно характеризовать показатели всей совокупности единицы.

По процедуре отбора различают два вида отбора – *повторный*, при котором отобранная единица возвращается назад в генеральную совокупность и может попасть в выборку более чем один раз; *бесповторный*, когда каждая отобранная из совокупности единица один раз участвует в процессе отбора.

При проведении выборочного наблюдения возникают *ошибки регистрации* и *ошибки репрезентативности* (представительности). Ошибки репрезентативности – это расхождения между обобщающими характеристиками выборочной и генеральной совокупности, возникающие вследствие не сплошного характера наблюдения. Желательно, чтобы величина ошибок была небольшая. Так как численное значение ошибки не известно, то ее возможная оценка дается с помощью расчета средней и предельной ошибок выборки. Обычно величина ошибок определяется для средней арифметической и для доли единиц, обладающих определенным признаком.

*Предельная ошибка* выборки находится как предел отклонения выборочной характеристики от генеральной, гарантируемой с заданной, обычно близкой к единице, вероятностью, называемой доверительной вероятностью.

Для средней арифметической предел отклонения имеет вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{x} - \tilde{x}| \leq \Delta) = \gamma, \quad (3.1)$$

где  $\bar{x}$  – генеральная средняя;

$\tilde{x}$  – выборочная средняя;

$\Delta$  – предельная ошибка выборки,

$\gamma$  – уровень доверительной вероятности.

Предельная и средняя ошибки выборки связаны соотношением:

$$\Delta = t \cdot \mu, \quad (3.2)$$



где  $\mu$  – средняя ошибка выборки;

$t$  – коэффициент, зависящий от уровня доверительной вероятности.

Обычно уровень доверительной вероятности равен 0,90; 0,95 или 0,99. При большом объеме выборочной совокупности для этих уровней доверительной вероятности  $t$  равно 1,65; 1,96 или 2,58 соответственно.

Средняя ошибка выборки находится в зависимости от вида и способа отбора. Различают следующие способы отбора: *собственно–случайный*; *механический*; *типический (районированный)*; *серийный (гнездовой)*; *комбинированный*; *многоступенчатый*; *многофазный*; *взаимопроникающий* и другие.

При простой случайной выборке отбор единиц производится из генеральной совокупности путем жеребьевки или с помощью таблицы случайных чисел. При этом способе единица наблюдения совпадает с единицей отбора.

Средняя ошибка выборки ( $\mu_{\bar{x}}$ ) находится по формуле:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (3.3)$$

если отбор случайный повторный;

$$\mu_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \quad (3.4)$$

если отбор случайный бесповторный,

где  $n$  – объем выборочной совокупности;

$N$  – объем генеральной совокупности;

$\sigma^2$  – дисперсия генеральной совокупности. Так как ее значение обычно неизвестно, то в формулах берется значение выборочной дисперсии ( $\sigma_e^2$ ).

В больших выборках ( $n > 30$ ) выборочная дисперсия определяется по формуле:

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum (x_i - \tilde{x})^2 n_i}{n}, \quad (3.5)$$

где  $\tilde{x}$  – выборочная средняя.

В малых выборках ( $n \leq 30$ ):

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum (x_i - \tilde{x})^2 n_i}{n-1}. \quad (3.6)$$

Выборочная дисперсия в малых выборках обычно обозначается  $s^2$ .

Значения коэффициента  $t$  для больших выборок находится по таблице интеграла вероятностей в соответствии с выбранным уровнем доверительной вероятности. Для малых выборок  $t$  находят по таблице критических значений  $t$  – Стьюдента в соответствии с уровнем доверительной вероятности и числом степеней свободы  $k = n - 1$ . Доверительный интервал, который покрывает неизвестное значение генеральной средней с заданной доверительной вероятностью, определяется неравенством:

$$\tilde{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq \tilde{x} + \Delta_{\bar{x}}, \quad (3.7)$$

где  $\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \mu_{\bar{x}}$ .

При случайном отборе средняя ошибки выборки для доли ( $P$ ) находится по формуле:

$$\mu_p = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad (3.8)$$

если отбор повторный;

$$\mu_p = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \quad (3.9)$$

если отбор бесповторный.

В формулах  $w$ –выборочная доля единиц, обладающих данным признаком.

Доверительный интервал для генеральной доли определяется следующим неравенством:

$$W - \Delta_p \leq P \leq W + \Delta_p, \quad (3.10)$$

где  $\Delta_p = t \cdot \mu_p$ .

При проведении выборочного наблюдения важным является обеспечение достаточно большого объема выборки, чтобы достигалась необходимая точность результатов и были приемлемы затраты средств и труда на проведение исследования.

Необходимый объем выборки выводится из формул предельной ошибки выборки.

При собственно–случайном повторном отборе:

$$n = \frac{t^2 \sigma_g^2}{\Delta^2}. \quad (3.11)$$

При собственно–случайном бесповторном отборе:

$$n = \frac{t^2 \sigma_g^2 N}{N\Delta^2 + t^2 \sigma_g^2}. \quad (3.12)$$

**Пример 3.1.** Считая полученные числовые характеристики  $(\bar{x}; \sigma^2)$  интервального ряда распределения в примере 2.2, результатом случайной бесповторной 10% выборки определить с доверительной вероятностью 0,95:

а) доверительный интервал средней урожайности кукуруза на зерно для всей совокупности хозяйств;

б) необходимый объем выборки, если предельная ошибка будет уменьшена в 2 раза.

**Решение.** Средняя урожайность по выборке  $n = 46$  хозяйств составила  $\bar{x} = 42,7$  ц/га, при дисперсии  $\sigma^2 = 99,47$

Предельная ошибка выборки:  $\Delta_{\bar{x}} = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$ .

Объем генеральной совокупности:  $N = \frac{n}{0,1} = \frac{46}{0,1} = 460$ .

При доверительной вероятности 0,95, значение  $t = 1,96$ .

$$\Delta_{\bar{x}} = 1,96 \sqrt{\frac{99,47}{46} \left(1 - \frac{46}{460}\right)} = 2,734$$

**Вывод.** Средняя урожайность кукурузы на зерно на одно хозяйство во всей генеральной совокупности при доверительной вероятности 0,95 определяется промежутком  $42,7 \pm 2,7$  ц/га, т.е. покрывается интервалом от 40,0 до 45,4 ц/га.

Необходимый объем выборки при предельной ошибке, уменьшенной в два раза, будет равен:

$$n = \frac{t^2 \sigma_g^2 N}{N\Delta^2 + t^2 \sigma_g^2} = \frac{1,96^2 \cdot 99,47 \cdot 460}{1,368^2 \cdot 460 + 1,96 \cdot 99,47} = \frac{175777,018}{1242,344} = 141,5 \approx 142$$

**Вывод.** Необходимый объем выборки  $n = 142$ , т.е. при уменьшении предельной ошибки в 2 раза, объем выборки увеличивается в 3 раза.

**Задача 3.** Считая числовые характеристики интервального ряда распределения в соответствие со своим вариантом результатами случайной бесповторной 20 % выборки, с доверительной вероятностью 0,95 определить:

- а) доверительный интервал для генеральной средней;
- б) необходимый объем выборки, если предельная ошибка выборки будет уменьшена в 2 раза.

## 4 ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

*Статистической гипотезой* называется всякое предположение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке. Статистические гипотезы делятся на:

- а) параметрические – гипотезы, сформулированные относительно параметров (среднего значения, дисперсии и т.д.) распределения известного вида;
- б) непараметрические – гипотезы, сформулированные относительно вида распределения (например, определение по выборке нормальности генеральной совокупности).

Процесс использования выборки для проверки гипотезы называется статистическим доказательством. Основной или нулевой называют выдвинутую гипотезу, называется нулевой  $H_0$ . Гипотеза, противоположная нулевой, называется конкурирующей или альтернативной  $H_1$ . Например, выдвигается гипотеза, что средняя урожайность культуры в данных условиях составляет 50 ц/га, тогда  $H_0: \bar{x} = 50$ . Альтернативная гипотеза может иметь вид:  $H_1: \bar{x} \neq 50$  (средняя урожайность не равна или больше или меньше 50 ц/га).

Так как проверка статистических гипотез обычно осуществляется по выборочным данным, то возникает возможность принятия ошибочных ре-

шений. Выбор между нулевой и конкурирующей гипотезой может сопровождаться ошибками двух родов.

Ошибка первого рода заключается в том, что будет отвергнута правильная гипотеза, т.е. когда в действительности верна  $H_0$  гипотеза, а в результате проверки она была отвергнута и принята гипотеза  $H_1$ . Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости и обозначается  $\alpha$ .

$$\alpha = P(H_1 / H_0). \quad (4.1)$$

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, т.е. если в действительности верна некоторая альтернативная гипотеза, а по выборочным данным была принята неверная гипотеза  $H_0$ . Вероятность ошибки второго рода обозначается  $\beta$ .

$$\beta = P(H_0 / H_1). \quad (4.2)$$

Существует правильное решение двух видов:  
 $p(H_0 / H_0) = 1 - \alpha$  и  $p(H_1 / H_1) = 1 - \beta$  (таблица 4.1).

**Таблица 4.1** – Ошибки первого и второго рода

Принятая гипотеза	$H_0$	$H_1$
$H_0$ – верная	$P(H_0 / H_0) = 1 - \alpha$	$P(H_1 / H_0) = \alpha$
$H_0$ – неверная	$P(H_0 / H_1) = \beta$	$P(H_1 / H_1) = 1 - \beta$

Правило, по которому принимается решение о том, что верна или неверна гипотеза  $H_0$ , называется критерием, где:

$\alpha = P(H_1 / H_0)$  – уровень значимости критерия;

$M = 1 - \beta = P(H_1 / H_1)$  – мощность критерия.

Статистическим критерием  $K$  называют случайную величину, с помощью которой принимают решение о принятии или отклонении  $H_0$ .

Для проверки параметрических гипотез используют критерии значимости, основанные на распределениях:  $u, \chi^2, t, F$ . Непараметрические гипотезы проверяют с помощью критериев согласия, использующих распределения:  $\chi^2$ , Колмогорова, Смирнова.

Проверка статистических гипотез обычно осуществляется в следующей последовательности.

1) располагая выборочными данными, взятыми из генеральной совокупности, формулируют нулевую и конкурирующую гипотезы;

2) задают уровень значимости  $\alpha$  (обычно принимают  $\alpha = 0,1; 0,01; 0,05; 0,001$ );

3) выбирают критерий  $K$ , по которому будет проверяться выдвинутая гипотеза. Наиболее часто используют следующие распределения критериев:

$u$  – нормальное распределение;

$\chi^2$  – распределение Пирсона ( $\chi^2$  – квадрат);

$t$  – распределение Стьюдента;

$F$  – распределение Фишера – Снедекора;

4) на основании выборочных данных определяют фактически наблюдаемое значение критерия  $K_n$ ;

5) В зависимости от вида альтернативной гипотезы находят, по соответствующей таблице, критические значения критерия для двусторонней ( $K_{1-\frac{\alpha}{2}}$  и  $K_{\frac{\alpha}{2}}$ ) или односторонней критической области ( $K_{1-\alpha}$  или  $K_{\alpha}$ ). Если фактически наблюдаемые значения критерия попадают в критическую область, то  $H_0$  отвергается. В противном случае принимается гипотеза  $H_0$  и считается, что она не противоречит выборочным данным (при этом существует возможность ошибки с вероятностью равной  $\alpha$ ).

**Пример 4.1.** Два сорта озимой пшеницы испытывались на одинаковом числе участков на протяжении семи лет (таблица 4.1). При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить нулевую гипотезу о равенстве урожайностей двух сортов озимой пшеницы.

**Решение.** Так как имеются две зависимые выборки, т.е. существует определенная корреляция между урожайностью сортов по годам, то необходимо оценить значимость не разности двух выборочных средних, а средней разности.

Выдвигаем нулевую гипотезу: средняя величина различий в урожайности пшеницы равна нулю,  $H_0: x-y=0$  при  $H_1: x-y \neq 0$ . Проверку гипотезы  $H_0$  осуществляют с помощью критерия  $t$ -Стьюдента. Для определения наблюдаемого значения  $t_{набл.}$  используют таблицу 4.1.

**Таблица 4.1** – Вспомогательная таблица для расчета ошибки средней разности

Годы	Урожайность, ц/га		Разность $d_i = x_i - y_i$	$(d_i - \bar{d})$	$(d_i - \bar{d})^2$
	$y_i$	$x_i$			
2010	46	52	6	1	1
2011	48	53	5	0	0
2012	46	45	-1	-6	36
2013	51	56	5	0	0
2014	52	58	6	1	1
2015	48	55	7	2	4
2016	52	59	7	2	4
Сумма	–	–	35	0	46

По данным таблицы 4.1 найдем среднюю разность  $\bar{d}$  и ошибку средней разности  $S_{\bar{d}}$ :

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{35}{7} = 5; \quad S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{46}{7(7-1)}} = 1,05$$

$$t_n = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}} = \frac{5}{1,05} = 4,76$$

где  $d_i = x_i - y_i$ ,  $n$  – число пар наблюдений.

При  $\alpha = 0,05$ ;  $\kappa = n - 1 = 7 - 1 = 6$ ,  $t_{0,05;6} = 2,45$ .

Тка как  $t_n > t_{кр}$ , то нулевая гипотеза отвергается и можно сделать вывод, что два сорта озимой пшеницы статистически существенно различаются по уровню урожайности.

**Пример 4.2.** Испытывались два сорта озимой пшеницы в одинаковых условиях. Получены следующие данные об урожайности сортов озимой пшеницы.

**Таблица 4.2** – Урожайность озимой пшеницы, ц/га

Сорт	Повторения							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A(X)	41	44	46	43	45	48	42	41
B(Y)	52	51	49	54	52	55	–	–

Будем считать, что обе выборки взяты из независимых нормально распределенных генеральных совокупностей. При уровне значимости  $\alpha=0,05$  проверим нулевую гипотезу о равенстве средних урожайностей двух сортов озимой пшеницы:  $H_0 : \bar{x} = \bar{y}$  при  $H_1 : \bar{x} \neq \bar{y}$ . Найдем выборочные средние и исправленные дисперсии по каждому сорту.

**Таблица 4.3** – Вспомогательная таблица по сорту А

№	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	41	-2,75	7,5625
2	44	0,25	0,0625
3	46	2,25	5,0625
4	43	-0,75	0,5625
5	45	1,25	1,5625
6	48	4,25	18,0625
7	42	-1,75	3,0625
8	41	-2,75	7,5625
Сумма	350	0,00	43,5000

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{\sum n_i} = \frac{350}{8} = 43,75;$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_i - 1} = \frac{43,5}{8 - 1} = 6,214$$

$$s_x = 2,49$$

**Таблица 4.4** – Вспомогательная таблица по сорту В

№	$y_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	52	0	0
2	51	-1	1
3	49	-3	9
4	54	2	4
5	52	0	0
6	54	2	2
Сумма	312	0	16

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{\sum n_i} = \frac{312}{6} = 52,00; \quad s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2 - 1} = \frac{16}{6 - 1} = 3,2$$

$$s_y = 1,79$$

Так как исправленные выборочные дисперсии оказались неравные, то предварительно проверим нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, используя критерий Фишера–Снедекора. Найдем отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F_n = \frac{s_6^2}{s_M^2} = \frac{6,214}{3,2} = 1,94$$

По таблице при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы:

$$k_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7, \quad k_2 = n_2 - 1 = 6 - 1 = 5, \quad \text{находим } F_{кр} = 4,88.$$

Так как  $F_n < F_{кр}$ , то нулевая гипотеза о равенстве генеральных дисперсий принимается.

Для проверки нулевой гипотезы о равенстве двух средних независимых нормально–распределенных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями найдем наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{\frac{s_x^2(n_1 - 1) + s_y^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}} = \frac{52,0 - 43,75}{\sqrt{\frac{6,214 \cdot 7 + 3,2 \cdot 5}{8 + 6 - 2} \cdot \frac{8 + 6}{8 \cdot 6}}} = 6,88.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид  $H_1 : \bar{x} \neq \bar{y}$ , поэтому критическая область является двухсторонней. При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы  $k = n_1 + n_2 - 2 = 12$  по таблице Стьюдента  $t_{кр} = 2,20$ . Так как  $t_n > t_{кр}$ , то нулевая гипотеза отвергается, средние урожайности двух сортов озимой пшеницы различаются значимо.

**Задача 4.** Определённые сорта озимой пшеницы (приложение В) испытывались на одинаковом числе участков, на протяжении семи лет. При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить нулевую гипотезу о существенности различий в урожайности двух сортов озимой пшеницы по индивидуальным вариантам.

#### Варианты задач по теме

Вариант	Номера сортов	Вариант	Номера сортов
1	$x_1$ и $x_2$	14	$x_3$ и $x_4$
2	$x_1$ и $x_3$	15	$x_3$ и $x_5$
3	$x_1$ и $x_4$	16	$x_3$ и $x_6$
4	$x_1$ и $x_5$	17	$x_3$ и $x_7$
5	$x_1$ и $x_6$	18	$x_6$ и $x_7$
6	$x_1$ и $x_7$	19	$x_6$ и $x_8$
7	$x_1$ и $x_8$	20	$x_7$ и $x_8$
8	$x_2$ и $x_3$	21	$x_4$ и $x_6$
9	$x_2$ и $x_4$	22	$x_4$ и $x_7$
10	$x_2$ и $x_5$	23	$x_5$ и $x_7$
11	$x_2$ и $x_5$	24	$x_5$ и $x_8$
12	$x_2$ и $x_7$	25	$x_4$ и $x_8$
13	$x_2$ и $x_8$	–	–

## 5 ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

В практике обработки результатов наблюдений часто возникает вопрос насколько существенное влияние оказывает изменение одного или нескольких факторов на изменение результативного признака. Сущность дисперсионного анализа заключается в том, что дисперсия изучаемого признака разлагается на сумму составляющих её дисперсий, каждое слагаемое которой соответствует действию определенного источника изменчивости.

В однофакторном анализе получим разложение вида:

$$\sigma_0^2 = \sigma_v^2 + \sigma_z^2$$

где  $\sigma_0^2$  – общая дисперсия изучаемого признака;

$\sigma_v^2$  – дисперсия, вызванная влиянием фактора;

$\sigma_z^2$  – дисперсия, вызванная неучтёнными случайными причинами (остаточная дисперсия). В дисперсионном анализе рассматривается гипотеза  $H_0$ , когда ни один из рассматриваемых факторов не оказывает влияния на изменчивость признака. Расчеты проводят в следующей последовательности:



- а) определяются необходимые суммы квадратов отклонений результативного признака, в соответствии с моделью дисперсионного анализа;
- б) находится число степеней свободы по каждому источнику вариации;
- в) рассчитываются средние квадраты отклонений;
- г) определяются наблюдаемые и критические значения критерия  $F$  – Фишера–Снедекора, формулируются выводы относительно гипотезы  $H_0$ .
- д) оценивают значимость различий групповых средних по вариантам опыта.

Если  $F_n > F_{кр}$ , то делается вывод о существенности различий результативного признака, обусловленных влиянием признака – фактора, т.е. действие фактора на результативный признак признается статистически достоверным.

**Пример 5.1.** Оценить существенность различий в урожайности озимой пшеницы в зависимости от доз применяемых удобрений.

**Таблица 5.1** – Урожайность озимой пшеницы, ц/га

Доза удобрений	Повторности				Сумма $\sum x_i$	Средняя урожайность $\sum \bar{x}_i$
	1	2	3	4		
Без удобрений	41	38	36	43	158	39,5
$N_0P_{90}K_{60}$	57	52	51	63	223	55,75
$N_{90}P_{90}K_{60}$	55	50	47	61	213	53,25
Сумма $\sum \bar{x}_j$	153	140	134	167	594	–
Средняя урожайность $\bar{x}_j$	51,0	46,67	44,67	55,67	–	49,5

**Решение.** Рассчитаем суммы квадратов отклонений.

**Таблица 5.2** – Квадраты отклонений урожайности

Дозы удобрений	$(x_{ij} - \bar{x})^2$				Сумма
	1	2	3	4	
Без удобрений	72,25	132,25	182,25	42,25	429
$N_0P_{90}K_{60}$	56,25	6,25	2,25	182,25	247
$N_{90}P_{90}K_{60}$	30,25	0,25	6,25	132,25	169
Сумма	158,75	138,75	190,75	356,75	845

Общая сумма квадратов отклонений  $SS_0 = 845$  с числом степеней свободы  $k_0 = N - 1 = l \cdot n - 1$ ;

где  $l$  – число уровней фактора ( $l=3$ );

$n$  – число повторности ( $n=4$ );

Тогда  $k_0 = N - 1 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$ .

Факторная сумма квадратов отклонений:

$$SS_v = n \sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 4((39,5 - 49,5)^2 + (55,75 - 49,5)^2 + (53,25 - 49,5)^2) =$$

$$=4(100+39,0625+14,0625) = 612,5$$

Число степеней свободы факторное:  $k_v = p - 1 = 3 - 1 = 2$ .

Остаточная сумма квадратов отклонений:

$$SS_z = SS_0 - SS_v = 845 - 612,5 = 232,5,$$

число степеней свободы  $k_z = l \cdot (n - 1) = 3 \cdot (4 - 1) = 9$ .

Рассчитываются средние квадраты отклонений, т.е. дисперсии:

$$s_v^2 = \frac{SS_v}{k_v} = \frac{612,5}{2} = 306,25;$$

$$s_z^2 = \frac{SS_z}{k_z} = \frac{232,5}{9} = 25,83.$$

Определим наблюдаемое и критическое значение критерия  $F$ -Фишера–Снедекора при уровне значимости  $\alpha=0,05$  и числе степеней свободы  $k_v = 2$  и  $k_z = 9$ ,  $F_{кр}=4,26$ .

Наблюдаемое значение критерия  $F$ :

$$F_{набл.} = \frac{s_v^2}{s_z^2} = \frac{306,25}{25,83} = 11,86.$$

**Вывод.** Так как  $F_{набл.} > F_{кр}$ , то нулевая гипотеза о равенстве средних урожайностей по вариантам опыта (дозам удобрений) отвергается, т.е. влияние доз удобрений на урожайность озимой пшеницы является значимым.

Для оценки существенности частных различий в средней урожайности вычисляют:

а) среднюю ошибку средней арифметической (среднюю ошибку опыта):

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{n}} = \sqrt{\frac{25,83}{4}} = 2,541;$$

б) ошибку разности средних:

$$s_d = s_{\bar{x}} \cdot \sqrt{2} = 2,541 \cdot \sqrt{2} = 3,593;$$

в) наименьшую существенную разность  $HCP_{\alpha, k_z} = t_{\alpha, k_z} \cdot s_d$

Значение  $t_{\alpha, k_z}$  определяется по таблице при  $\alpha = 0,05$ ;  $k = 9$ ;

$$t_{0,5,9} = 2,26;$$

$$HCP_{0,5} = 2,26 \cdot 3,593 = 8,121$$

Рассчитаем разность в средней урожайности по дозам удобрений, взяв за стандарт урожайность озимой пшеницы без применения удобрений.

**Таблица 5.3** – Средняя урожайность по разным дозам удобрений, ц/га

Дозы удобрений	Средняя урожайность, ц/га	Разность со стандартом, ц/га
Без удобрений	39,50	–
$N_0P_{90}K_{60}$	55,75	16,25
$N_{90}P_{90}K_{60}$	53,25	13,75

**Вывод.** Сравнивая полученные разности с *НСР*, видно, что они превосходят *НСР*. Значит, исследуемые дозы удобрений дают значимую прибавку в средней урожайности озимой пшеницы по сравнению с первым вариантом.

**Задача 5.** Провести дисперсионный анализ полевого опыта (приложение Г). Оценить существенность различий в урожайности риса по различным дозам удобрений в соответствии с одним вариантом.

#### Варианты задач по теме

Вариант	Номер удобрений	Повторность	Вариант	Номер удобрений	Повторность
<b>1</b>	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	<b>14</b>	4, 6, 7	4, 6, 7, 8
<b>2</b>	1, 2, 3	1, 3, 4, 5	<b>15</b>	5, 6, 7	2, 3, 4, 5
<b>3</b>	1, 2, 3	1, 3, 5, 6	<b>16</b>	5, 6, 7	3, 4, 5, 6
<b>4</b>	2, 3, 4	4, 5, 6, 7	<b>17</b>	1, 4, 5	2, 6, 7, 8
<b>5</b>	2, 3, 4	4, 6, 7, 8	<b>18</b>	2, 4, 6	3, 5, 7, 8
<b>6</b>	2, 3, 4	5, 6, 7, 8	<b>19</b>	3, 4, 6	4, 5, 6, 7
<b>7</b>	2, 3, 4	3, 6, 7, 8	<b>20</b>	4, 5, 7	5, 6, 7, 8
Вариант	Номер удобрений	Повторность	Вариант	Номер удобрений	Повторность
<b>8</b>	4, 5, 6	2, 3, 4, 5	<b>21</b>	5, 6, 7	1, 3, 6, 8
<b>9</b>	4, 5, 6	2, 4, 5, 6	<b>22</b>	4, 5, 6	3, 4, 6, 8
<b>10</b>	4, 5, 6	2, 4, 6, 7	<b>23</b>	2, 4, 7	4, 5, 7, 8
<b>11</b>	4, 5, 7	2, 6, 7, 8	<b>24</b>	3, 4, 7	2, 4, 6, 8
<b>12</b>	4, 6, 7	2, 4, 6, 7	<b>25</b>	1, 3, 7	2, 5, 7, 8
<b>13</b>	4, 5, 7	2, 5, 6, 7	–	–	–

## 6 РЯДЫ ДИНАМИКИ

Рядом динамики называется последовательный ряд чисел, характеризующий изменение уровней явления или процесса во времени. Он состоит из двух частей: уровней ряда ( $y$ ); периодов или моментов времени ( $t$ ). При построении ряда динамики необходимо обеспечить сопоставимость уровней за весь изучаемый период времени.

Различают моментные и интервальные ряды динамики. В моментном ряду уровни выражают размер явления на момент времени, а в интервальном за определенный период времени. Примером моментного ряда служит динамика площадей сельскохозяйственных угодий на 1 января каждого года, остатки удобрений на складе на начало месяца, а интервального – динамика валовых сборов сельскохозяйственных культур и их урожайности, количества внесенных удобрений, высеянных семян и т.п.

Графически ряды динамики изображаются линейными, либо столбиковыми диаграммами. По оси абсцисс откладываются показатели времени, а по оси ординат – уровни ряда (либо базисные темпы роста).

Для характеристики развития явления во времени определяют показатели: абсолютный прирост, темп роста, темп прироста базисным и цепным способом, значения одного процента прироста.

Условные обозначения:

$y_i$  – текущий (сравниваемый) уровень,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$y_1$  – уровень, принятый за постоянную базу сравнения (обычно начальный);

$y_n$  – конечный уровень.

**Таблица 6.1**– Расчет показателей ряда динамики

Показатель	Метод расчета	
	базисный (с постоянной базой)	цепной (с переменной базой)
Абсолютный прирост (А)	$A_{б_i} = y_i - y_1$ (6.1)	$A_{ц_i} = y_i - y_{i-1}$ (6.2)
Коэффициент роста ( $K_p$ )	$K_{pб_i} = \frac{y_i}{y_1}$ (6.3)	$K_{pц_i} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$ (6.4)
Темп роста ( $T_p$ )	$T_{pб_i} = K_{pб_i} \cdot 100\%$ (6.5)	$T_{pц_i} = K_{pц_i} \cdot 100\%$ (6.6)
Темп прироста ( $T_{пр}$ )	$T_{прб_i} = T_{pб_i} - 100\%$ (6.7)	$T_{прц_i} = T_{pц_i} - 100\%$ (6.8)
Абсолютное значение 1 % прироста (Зн.1%)	$Зн.1\% = 0,01 y_{i-1}$ или $Зн.1\% = \frac{A_{ц_i}}{T_{пр.ц_i}}$ (6.9)	

Для характеристики интенсивности развития явления за длительный период времени рассчитываются средние показатели динамики (таблица 6.2).

Средние показатели динамики исчисляются одинаково для интервальных и моментных рядов, исключение составляет лишь расчет среднего уровня ряда.

Для выявления тенденции развития в рядах динамики применяют различные методы: укрупнения временных интервалов (периодов); скользящих средних; аналитического выравнивания.

Основным условием построения и анализа ряда динамики является сопоставимость уровней во времени.

**Таблица 6.2** – Расчет средних показателей ряда динамики

Показатель	Метод расчета
Средний уровень ( $\bar{y}$ ) а) интервального ряда	$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} \quad (6.10)$
б) моментного ряда с равными интервалами	$\bar{y} = \frac{1}{2} y_1 + y_2 + y_3 \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \quad (6.11)$
в) моментного ряда с неравными интервалами	$\bar{y} = \frac{\sum yt}{\sum t} \quad (6.12)$
Средний абсолютный прирост ( $\bar{A}$ )	$\bar{A} = \frac{y_n - y_1}{n-1} \quad \text{или} \quad \bar{A} = \frac{\sum A_{ij}}{n-1} \quad (6.13)$
Средний коэффициент роста ( $\bar{K}_p$ )	$\bar{K}_p = \sqrt[n-1]{\text{ПК}_{\text{ц}}} \quad \text{или} \quad \bar{K}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \quad (6.14)$
Средний темп роста ( $\bar{T}_p$ ), %	$\bar{T}_p = \bar{K}_p \cdot 100 \% \quad (6.15)$
Средний темп прироста ( $\bar{T}_{np}$ ), %	$\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 100 \% \quad \text{или} \quad \bar{T}_{np} = (\bar{K}_p - 1) \cdot 100 \% \quad (6.16)$
Среднее значение 1% прироста, $\overline{Зн.1\%}$	$\overline{Зн.1\%} = \frac{\bar{A}}{\bar{T}_{np}} \quad (6.17)$

К несопоставимости приводит изменение состава или территориальных границ изучаемой совокупности, переход к другим единицам измерения, инфляционные процессы. Несопоставимыми ряды динамики являются и в том случае, если они составлены из неодинаковых по продолжительности времени периодов.

При обнаружении несопоставимости уровней ряда должна применяться процедура смыкания, если невозможен их прямой пересчет.

Смыкание может быть произведено двумя способами.

1 способ. Данные за предшествующие периоды умножаются на коэффициент перехода, который определяется как отношение показателей на тот момент времени, когда произошло изменение условий формирования уровней ряда.

2 способ. Уровень переходного периода принимается для второй части ряда за 100% и от этого уровня определяются соответствующие показатели. При этом получается сопоставимый ряд относительных величин.

Иногда в динамических рядах отсутствуют промежуточные или последующие уровни. Их можно исчислить с помощью методов интерполяции (нахождение промежуточного неизвестного уровня, при наличии известных соседних уровней) и экстраполяции (нахождение уровней за пределами изучаемого ряда, т.е. продление в будущее тенденции, наблюдавшейся в прошлом, или в прошлое на основании текущих уровней).

**Пример 6.1.** По данным о производстве крупы в Краснодарском крае определить базисные, цепные и средние показатели ряда динамики. Расчеты оформить в таблице. Сделать вывод.

**Решение.** Расчет показателей ряда динамики базисным и цепным способами проведем в таблице 6.3.

**Таблица 6.3** – Расчет показателей ряда динамики объемов производства крупы, тыс. т.

Год	Объем производства крупы, тыс. т.	Абсолютный прирост, тыс. т.		Коэффициент роста		Темп роста, %		Темп прироста, %		Значение 1% прироста, тыс.т.
		базисный	цепной	базисный	цепной	базисный	цепной	базисный	цепной	
		$A_b$	$A_c$	$K_{pb}$	$K_{pc}$	$T_{pb}$	$T_{py}$	$T_{прб}$	$T_{прц}$	
2011	191	–	–	1,000	1,000	100,0	100,0	–	–	–
2012	203	12	12	1,063	1,063	106,3	106,3	6,3	6,3	1,91
2013	269	78	66	1,408	1,325	140,8	132,5	40,8	32,5	2,03
2014	269	78	0	1,408	1,000	140,8	100,0	40,8	0,0	2,69
2015	289	98	20	1,513	1,074	151,3	107,4	51,3	7,4	2,69

Определим средние показатели ряда динамики:

$$\bar{y} = \frac{1221}{5} = 244,2; \quad \bar{A} = \frac{289 - 191}{5 - 1} = 24,5;$$

$$\bar{K}_p = \sqrt[4]{\frac{289}{191}} = 1,109;$$

$$\bar{T}_p = 1,109 \cdot 100 = 110,9\%;$$

$$\bar{T}_{пр} = 110,9 - 100 = 10,9\%; \quad \text{Зн. 1\%} = \frac{24,5}{10,9} = 2,25$$

**Вывод.** Расчеты показали, что среднее производство крупы за пять лет составило 244,2 тыс. т. При этом ежегодно производство увеличивалось в

среднем на 24,5 тыс. т., что составляет 10,9%. Один процент прироста соответствовал 2,25 тыс. т.

**Пример 6.2.** Определить общую тенденцию изменения объемов производства крупы за 2009–2015 гг. методом аналитического выравнивания. Расчеты оформить в таблице. Построить график. Сделать вывод.

**Решение.** Для определения тенденции изменения объемов производства крупы за 2009–2015 гг. способом аналитического выравнивания необходимо расчеты оформить в таблице.

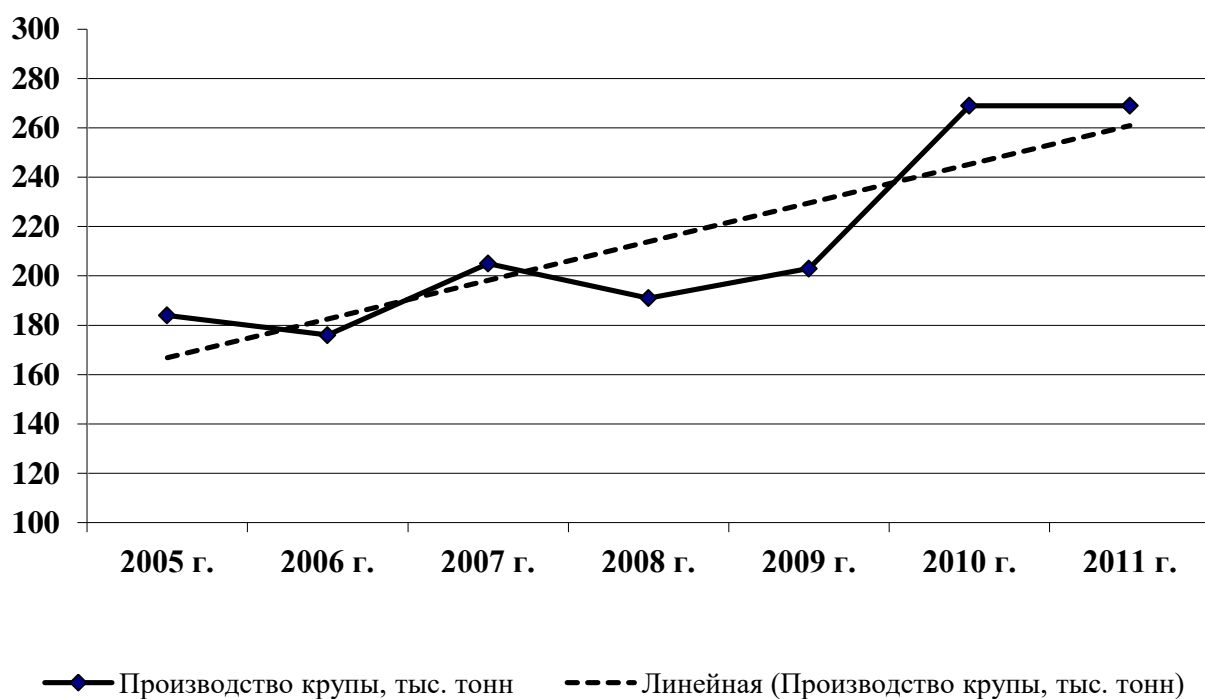
**Таблица 6.4** – Вспомогательная таблица для аналитического выравнивания

Год	Объем производства крупы, тыс. т.	Номер года	Расчетные величины		Выровненные значения
			$t^2$	$yt$	
	$y$	$t$	$t^2$	$yt$	$y_t = a + bt$
2009	184	-3	9	-552	166,82
2010	176	-2	4	-352	182,50
2011	205	-1	1	-205	198,18
2012	191	0	0	0	213,86
2013	203	1	1	203	229,54
2014	269	2	4	538	245,22
2015	269	3	9	807	260,90
Итого	1497	0	28	439	1497,00

Для получения теоретических значений необходимо рассчитать параметры уравнения  $y_t = a + bt$ ,

$$\text{Если } \sum t = 0, \text{ то } a = \frac{1497}{7} = 213,86, \quad b = \frac{439}{28} = 15,68.$$

Линейное уравнение имеет вид:  $y_t = 213,86 + 15,68 \cdot t$ . Подставим значения  $t$  в уравнение и найдем теоретические (выровненные) уровни объемов производства крупы за исследуемые годы.



**Рисунок 6.1** – Динамика объема производства крупы за 2009–2015 гг.

**Вывод:** результаты проведенных расчетов показали, что средний объем производства крупы за 2009–2015 гг. составил 213,86 тыс. т. при ежегодном повышении в среднем на 15,68 тыс. т. На графике наглядно видна четко выраженная тенденция роста изучаемого показателя.

**Задача 6.** По данным приложения Д по своему варианту за 5 лет определить базисным и цепным способом абсолютные приросты, коэффициенты и темпы роста, темпы прироста объемов производства соответствующего пищевого продукта. Найти значение 1% прироста. Рассчитать среднее значение объема производства и показатели ряда динамики. Расчеты оформить в таблице. Сделать вывод.

Определить общую тенденцию изменения производства отдельных видов пищевых продуктов в Краснодарском крае (тыс. т.) методом аналитического выравнивания. Расчеты оформить в таблице. Построить график. Сделать вывод.



## 7 КОРРЕЛЯЦИОННО–РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Корреляционно–регрессионный анализ – это совокупность статистических и математических методов, используемых для количественного анализа связей между различными явлениями и процессами. При корреляционной связи изменение результативного признака ( $y$ ) обусловлено влиянием факторных признаков. В зависимости от числа признаков, между которыми изучается связь, различают парную и множественную связь. Если изучается связь между результативным признаком, двумя и более факторными признаками, то она называется множественной.

При изучении связей между признаками устанавливают ее аналитическое выражение в виде линейного и нелинейного уравнения связи. Линейная связь выражается уравнением  $y = a + bx$ , которое на графике имеет вид прямой линии. При нелинейной зависимости используется функции: параболическая, степенная, показательная и другие.

Применение корреляционно–регрессионного анализа предполагает проведение исследований в несколько этапов.

Первый этап: подбор факторных и результативных признаков, между которыми изучается причинно–следственная связь.

Второй этап: определение формы связи и подбор математического уравнения, которое наиболее полно отражает характер взаимосвязи между признаками. Для этого используют графический метод. В прямоугольной системе координат на оси абсцисс откладывают значения факторного признака ( $x$ ), на оси ординат – результативного ( $y$ ). На поле графика отмечают точки, соответствующие индивидуальным значениям признаков и по характеру их расположения судят о форме и направлении связи.

Третий этап: рассчитываются параметры уравнения связи с целью установления количественного влияния факторных признаков на результат. При парной линейной связи уравнение  $y = a + vx$ , где  $a$  – свободный член уравнения,  $v$  – коэффициент регрессии, который показывает на сколько единиц в натуральном выражении изменится результативный признак при изменении факторного на единицу.

Параметры линейного уравнения определяют методом наименьших квадратов, путем составления и решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \Sigma y = an + b\Sigma x, \\ \Sigma yx = a\Sigma x + b\Sigma x^2. \end{cases} \quad (7.1)$$

Четвертый этап: оценка и анализ полученных результатов при помощи коэффициентов корреляции, детерминации, эластичности и других.

Коэффициент корреляции ( $r$ ) характеризует направление и тесноту связи, он изменяется от  $-1$  до  $1$ . Если имеет место прямая связь, то  $0 \leq r \leq 1$ ,

если обратная, то  $-1 \leq r \leq 0$ . Коэффициент корреляции рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (7.2)$$

При возведении коэффициента корреляции в квадрат и выражении этого результата в процентах получают коэффициент детерминации:

$$D = r^2 \cdot 100\%. \quad (7.3)$$

Он показывает, какая часть колеблемости результативного признака объясняется вариацией факторного признака.

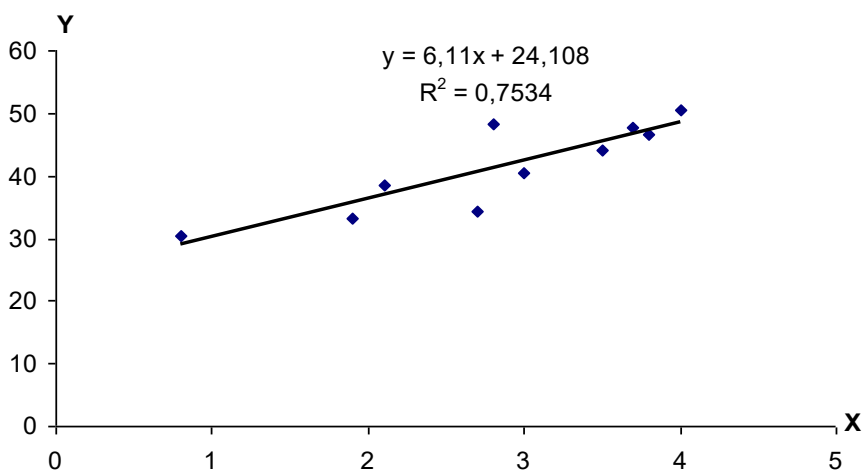
Коэффициент эластичности определяется по формуле:

$$\mathcal{E} = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}. \quad (7.4)$$

Он показывает, на сколько процентов в среднем изменится результативный признак с изменением факторного на 1 %.

**Пример 7.1.** По данным об урожайности озимой пшеницы и количестве внесенных минеральных удобрений на один гектар посева определить: форму связи между признаками, параметры уравнения регрессии, тесноту связи между признаками. Исчислить коэффициенты корреляции, детерминации и эластичности. Сделать выводы.

**Решение.** Урожайность озимой пшеницы зависит от количества внесенных удобрений, поэтому факторным признаком является количество внесенных удобрений на 1 га посева, а результативным – урожайность (рисунок 7.1). Нанесем на график пары значений  $x$  и  $y$ , предоставленных в таблице 7.1.



**Рисунок 7.1** – Зависимость между урожайностью озимой пшеницы и количеством внесенных удобрений

Рассчитаем вспомогательную таблицу 7.1.

**Таблица 7.1** – Урожайность озимой пшеницы и количество внесенных минеральных удобрений на 1 га посева

№ предприятия	Урожайность озимой пшеницы, ц/га (y)	Внесено удобрений на 1 га, ц д. в. (x)	$y^2$	$x^2$	xy	Теоретическое значение $\hat{y} = a + bx$
1	44,2	3,5	1953,64	12,25	154,70	45,49
2	40,4	3,0	1632,16	9,00	121,20	42,44
3	48,3	2,8	2332,89	7,84	135,24	41,22
4	33,1	1,9	1095,61	3,61	62,89	35,72
5	46,5	3,8	2162,25	14,44	176,70	47,33
6	50,5	4,0	2550,25	16,00	202,00	48,55
7	30,4	0,8	924,16	0,64	24,32	29,00
8	47,6	3,7	2265,76	13,69	176,12	46,71
9	38,6	2,1	1489,96	4,41	81,06	36,94
10	34,4	2,7	1183,36	7,29	92,88	40,60
Итого	414,0	28,3	17590,04	89,17	1227,11	414,00

По характеру изменения точек на графике видно, что зависимость можно выразить уравнением  $y = a + bx$ .

Найдем параметры уравнения, составив систему уравнений, используя данные таблицы 7.1.

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 414,0 = 10a + 28,3b, \\ 1227,11 = 28,3a + 89,17b. \end{cases}$$

Решив систему, получим:  $a = 24,1$ ;

$$b = 6,11.$$

Тогда уравнение связи между урожайностью и количеством внесенных удобрений примет вид:  $y = 24,1 + 6,11x$ .

Значит, при увеличении количества вносимых минеральных удобрений на 1 га посева на 1 ц д. в., урожайность озимой пшеницы в среднем увеличивается на 6,11 ц/га.

Рассчитаем коэффициент корреляции.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{28,3}{10} = 2,83; \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{414}{10} = 41,4;$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{1227,11}{10} = 122,711;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{89,17}{10} - 2,83^2} = 0,953;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{17590,04}{10} - 41,4^2} = 6,711.$$

$$r = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{122,711 - 2,83 \cdot 41,4}{0,953 \cdot 6,711} = 0,868.$$

Следовательно, между изучаемыми признаками существует прямая очень тесная связь.

Коэффициент детерминации составляет:

$$D = r^2 \cdot 100 = 0,868^2 \cdot 100 = 75,34\% .$$

Таким образом, вариация урожайности озимой пшеницы на 75,34 % обусловлена вариацией количества внесенных на 1 га минеральных удобрений.

Коэффициент эластичности равен:

$$\varepsilon = b \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 6,11 \frac{2,83}{41,4} = 0,418.$$

Изменение количества вносимых минеральных удобрений на 1 га на 1 % приводит к изменению урожайности на 0,42 %.

Так как зависимость между урожайностью и количеством минеральных удобрений изучалась по выборочным данным, то необходимо оценить значимость коэффициента корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу – величина коэффициента корреляции в генеральной совокупности равна нулю  $H_0: Z_r = 0$ , при альтернативной  $H_1: Z_r \neq 0$ . Проверку нулевой гипотезы проведем с помощью критерия  $t$ –Стьюдента.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$t_n = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,868 \cdot \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,7534}} = 4,94.$$

Так как  $t_n > t_{0,05;8}$ , то нулевая гипотеза отвергается, коэффициент корреляции существенно отличен от нуля, значит, применение минеральных удобрений оказывает статистически существенное влияние на урожайность озимой пшеницы.

**Задача 7.** Используя данные приложения Б по одному варианту определить форму связи между признаками  $y$  и  $x$ ; параметры уравнения регрессии; коэффициенты корреляции, детерминации и эластичности. Сделать выводы.

### Варианты задач по теме

Вариант	Предприятия	Признаки	
		у	х
1	1 – 15	Урожайность озимой пшеницы	Качество почв
2	2 – 16		
3	3 – 17		
4	4 – 18		
5	5 – 19		
6	6 – 20		
7	7 – 21		
8	8 – 22		
9	9 – 23		
10	10 – 24		
11	2 – 16	Урожайность озимой пшеницы	Продолжительность уборки
12	3 – 17		
13	4 – 18		
14	5 – 19		
15	6 – 20		
16	7 – 21		
17	8 – 22		
18	9 – 23		
19	10 – 24		
20	3 – 17	Урожайность озимой пшеницы	Доза внесения минеральных удобрений на 1 га
21	4 – 18		
22	5 – 19		
23	6 – 20		
24	7 – 21		
25	8 – 22		

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Размер посевной площади различных культур  
в сельскохозяйственных организациях, га

№ варианта	2015 г.			2016 г.			План на 2016 г.		
	зерновые	технические	кормовые	зерновые	технические	кормовые	зерновые	технические	кормовые
1	4500	2600	2900	4800	2200	2800	4600	2400	2900
2	3400	1300	2600	3500	1800	2000	3600	1500	2100
3	3200	900	1500	3300	1000	1400	3200	1100	1300
4	4300	2200	2700	4500	2000	2600	4600	2000	2500
5	2800	900	1600	3000	900	1500	2900	1000	1400
6	3400	1300	2000	3200	1500	2100	3300	1400	2000
7	3600	1700	2200	3600	1900	2100	3700	1800	2300
8	5000	2000	3000	5100	2000	2800	5000	2200	3100
9	4800	1500	2700	4700	1600	2800	4800	1700	2600
10	3000	1100	1900	3200	1000	1900	3300	1100	1800
11	4600	1400	2700	4800	1500	2500	4700	1600	2500
12	3400	1300	2900	3500	1500	2800	3400	1500	2800
13	5400	2200	2900	5300	2300	3000	5400	2500	2800
14	2500	800	1400	2400	1000	1500	2500	900	1500
15	3100	1600	1900	3300	1500	2000	3200	1600	1800
16	4900	2000	3300	5000	2100	3200	5100	2100	3100
17	4100	6100	2700	4200	1600	2800	4100	1800	2600
18	5200	2200	2900	5000	2300	2800	5100	2300	2700
19	2400	1100	1700	2600	1200	1600	2500	1300	1700
20	3100	1200	1700	3000	1500	1600	3000	1400	1700
21	4900	1900	2900	5000	1800	3200	5100	1900	3000
22	4700	2000	3000	4600	2100	3100	4600	2200	3200
23	3500	1400	2300	3600	1500	2200	3600	1400	1600
24	5100	2400	3200	5000	2500	3300	5100	2500	3400
25	4600	2100	2900	4700	2200	3000	4600	2000	3000

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Показатели производства озимой пшеницы

№ предприятия	Качество почв, балл.	Продолжительность уборки, дней	Внесено минеральных удобрений на 1 га, кг д. в.	Посевная площадь, га	Урожайность с 1 га, ц
1	68	15	156	3115	42,0
2	80	9	156	4010	53,0
3	55	14	158	2500	40,0
4	45	13	84	4800	31,0
5	87	11	149	4085	60,1
6	88	13	145	3510	61,2
7	90	9	280	4570	62,0
8	78	13	134	3715	46,1
9	65	15	163	2935	42,0
10	70	14	115	3025	45,3
11	64	17	97	4015	28,4
12	61	15	157	5014	45,5
13	51	18	81	2601	34,0
14	63	16	103	3021	38,0
15	66	13	115	3075	40,5
16	88	11	300	3105	68,0
17	48	9	164	3401	48,1
18	80	11	280	4010	66,0
19	94	10	320	3412	69,5
20	76	12	250	4210	64,0
21	53	17	97	1650	36,5
22	64	7	97	3850	38,9
23	80	10	140	3005	56,0
24	86	12	260	3170	61,0
25	70	15	115	2075	44,0
26	77	13	130	3510	52,5
27	81	9	290	3110	62,4
28	92	10	280	3940	66,0
29	75	13	255	2201	66,4
30	58	14	75	1217	33,5
31	66	15	160	2515	45,0
32	55	16	102	1941	32,6
33	58	16	108	3805	39,5
34	75	11	146	3640	56,5
35	60	10	188	3200	42,0
36	45	13	105	3810	32,0
37	80	12	260	4015	57,1

№ пред-прия-тия	Качество почв, балл.	Продолжи-тельность уборки, дней	Внесено минеральных удобрений на 1 га, кг д. в.	Посевная площадь, га	Урожай-ность с 1 га, ц
38	89	13	230	3104	55,0
39	90	9	275	4575	63,0
40	78	14	134	3620	52,0
41	65	9	172	2940	43,4
42	68	14	165	3101	45,2
43	67	7	101	4010	29,9
44	61	12	157	5010	35,8
45	52	16	101	2540	30,0
46	63	15	102	3100	39,0
47	65	8	115	2957	40,5
48	86	10	300	3210	66,5
49	48	14	156	3201	46,5
50	80	9	275	3975	62,7
51	94	8	320	3415	68,5
52	75	10	245	3450	62,1
53	50	17	159	1680	35,2
54	64	19	98	3420	38,0
55	80	11	145	2975	57,4
56	85	13	260	3150	60,1
57	69	15	110	2089	45,0
58	75	15	130	3640	50,5
59	79	8	290	3140	63,0
60	92	10	285	3450	68,0
61	74	9	245	2117	60,7
62	65	15	160	2417	56,4
63	52	17	122	2515	44,1
64	68	15	156	3115	42,0
65	80	9	156	4010	53,0
66	55	14	158	2500	40,0
67	45	13	84	4800	31,0
68	87	11	149	4085	60,1
69	88	13	145	3510	61,2
70	90	9	280	4570	62,0



## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Различие в урожайности сортов озимой пшеницы, ц/га

Год	$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	$x_{4i}$	$x_{5i}$	$x_{6i}$	$x_{7i}$	$x_{8i}$
2010	53	46	50	44	55	39	58	49
2011	43	48	41	46	49	40	50	44
2012	45	46	43	43	48	42	49	43
2013	56	51	52	50	59	46	53	52
2014	58	52	56	51	61	44	55	55
2015	55	48	43	47	60	38	51	54
2016	59	52	61	49	64	41	56	59

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Урожайность риса при разных дозах удобрений, ц/га

Номер дозы удобрений	Доза удобрений	Повторения							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	Без удобрений	41,8	43,1	42,7	41,6	38,7	40,5	42,3	45,3
2	$N_0 P_{90} K_{60}$	43,3	45,2	44,7	44,8	42,4	41,6	46,4	44,8
3	$N_{60} P_{90} K_{60}$	45,3	47,5	46,8	46,0	46,2	44,3	45,8	47,3
4	$N_{90} P_{90} K_{60}$	47,3	49,8	48,8	48,5	49,3	47,9	48,6	49,4
5	$N_{120} P_{90} K_{60}$	51,5	53,5	52,7	51,7	51,6	51,0	49,8	50,0
6	$N_{150} P_{90} K_{60}$	49,3	51,3	50,5	49,3	42,1	48,7	50,8	51,4
7	$N_{180} P_{90} K_{60}$	48,6	49,8	50,1	48,3	47,4	50,2	49,8	49,0

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Урожайность сельскохозяйственных культур в хозяйствах  
Краснодарского края (ц/га)

Вариант	Культура	Год								
		2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
1	Пшеница озимая	44,2	48,2	42,7	45,1	55,3	45,7	49,7	55,1	39,8
2	Пшеница яровая	22,5	27,5	23,8	22,5	34,2	26,8	30,2	31,9	26,3
3	Ячмень озимый	46,5	42,0	43,5	47,5	51,4	46,9	49,2	53,8	37,1
4	Ячмень яровой	23,4	24,2	25,8	18,7	36,9	27,0	25,0	33,8	27,4
5	Рожь озимая	23,3	29,5	22,2	26,4	44,7	32,1	38,5	44,7	31,2
6	Кукуруза	48,1	44,1	40,2	21,8	49,5	33,8	33,8	47,7	41,9
7	Овес	26,3	26,6	25,2	21,0	33,7	23,3	24,7	30,5	25,2
8	Просо	9,9	13,4	14,4	12,5	21,2	6,4	16,6	24,0	16,8
9	Гречиха	4,3	6,4	6,6	4,5	10,2	4,9	9,8	7,1	7,0
10	Рис	39,7	44,4	47,1	48,3	50,7	60,3	62,1	61,0	64,3
11	Зернобобовые	23,3	19,7	22,9	14,4	32,9	23,1	23,7	27,9	41,1
12	Горох	23,6	19,8	23,3	14,6	33,9	23,6	24,0	28,1	21,9
13	Сахарная свекла	396	328	359,6	262,4	438,6	381,1	361,2	438,1	423,0
14	Масличные культуры – всего	18,0	19,3	18,7	16,4	22,1	20,2	19,4	21,9	21,4
15	Подсолнечник	18,2	20,9	20,7	18,9	23,3	20,9	20,8	23,3	23,2
16	Соя	18,0	12,6	12,8	9,1	15,8	18,0	15,1	18,5	18,0
17	Рапс озимый	16,6	14,7	16,9	16,2	19,1	17,8	19,5	20,1	16,1
18	Картофель	92,8	88,4	89,6	78,9	96,8	93,9	89,0	96,4	98,6
19	Овощи	74,3	85,4	93,4	79,7	102,8	106,3	98,8	111,7	106,2
20	Бахчи продовольственные	43,2	63,2	66,2	49,9	68,7	86,5	66,6	63,7	84,8
21	Кормовые корнеплоды	325	260,1	247,5	196,8	251,7	256,6	284,5	239,1	227,1
22	Бахчи кормовые	125,7	126,2	141,2	122,3	153,8	138,7	136,8	141,4	123,9
23	Силосные культуры (без кукурузы)	73,2	64,0	80,9	65,5	96,6	91,6	78,5	66,9	81,5
24	Кукуруза на силос и зеленый корм	193,4	155,5	171,3	126,3	189,3	166,1	140,2	193,3	155,3
25	Однолетние травы на сено	19,2	27,6	34,9	21,9	30,6	25,0	23,8	30,4	25,9
26	Однолетние травы на зеленый	95,5	86,1	101,1	79,9	113,2	87,3	93,1	91,1	69,4

Вариант	Культура	Год								
		2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
	корм									
<b>27</b>	Многолетние травы на сено	26,4	23,6	26,9	16,5	30,7	32,6	46,2	43,7	36,4
<b>28</b>	Многолетние травы на зеленый корм	115,4	93,1	121,1	63,3	133,9	85,5	95,0	97,5	104,3
<b>29</b>	Плоды и ягоды	45,7	57,8	49,1	55,5	70,4	69,9	60,5	74,4	87,3
<b>30</b>	Виноград	56,1	68,6	48,6	80,7	74,0	84,5	79,5	113,4	75,6
<b>31</b>	Чайный лист	8,7	8,9	8,1	4,5	5,7	4,7	2,7	2,2	1,0

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А.Ф. Статистика: Учебн. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2015. – 240 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебн. пособие. Изд. 6–е, стер. –М.: Высш. шк., 2015. – 479 с.: ил.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебн. пособие для студентов вузов / Изд. 8–е, стер. –М.: Высш. шк., 2015. – 405 с.: ил.
4. Практикум по общей теории статистики: учеб. пособие./ М.Р. Ефимова, О.И. Ганченко, Е.В. Петрова. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2014. – 368 с.: ил.
5. Рафикова Н.Т. Основы статистики: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2015. – 352с.: ил.
6. Горелова Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением *Excel*: Учебное пособие для вузов. – 3–е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2015. – 480 с., ил.

*Составители:*

**Кацко** Игорь Александрович,  
**Ворокова** Нодира Хасановна,  
**Жминько** Альбина Евгеньевна  
**Сенникова** Алина Евгеньевна

# **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

*Методические указания*

В авторской редакции

---

—  
Подписано в печать 16.11.2017 Формат бумаги 60×84 <sup>1/16</sup>

Усл. печ. л. – 2,6. Уч.-изд. л. – 1,5

Тираж 100 экз. Заказ №34

Издательство:

Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России  
350058, г. Краснодар, ул. Старокубанская, 116-а