МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Бурда, Г. П. Бурда

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Краткий курс лекций

Краснодар
КубГАУ
2015

УДК 330.46:005.12
ББК 65.050.9(2)
Б91

Рецензент:

М. В. Зелинская – доктор экономических наук, профессор кафедры менеджмента ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный аграрный университет»

Бурда А. Г.

Б91 Математические основы управления в социально-экономических системах : краткий курс лекций / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда; Кубан. гос. аграр. ун-т. – Краснодар, 2015. – 39 с. [электронный ресурс].

Краткий курс лекций отвечает требованиям современных федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования для уровня подготовки кадров высшей квалификации.

На основе кибернетического подхода к моделированию и управлению сложными динамическими системами и математической теории оптимального управления рассмотрены основы моделирования управленческих решений, моделирование макро- и микро- экономических процессов и систем, сравнительный анализ непрерывных и дискретных процессов и математических моделей управления ими, математическое моделирование назначений в управлении, теория хаоса и модели хаотической динамики.

Предназначен для обучающихся по направлению подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (уровень подготовки кадров высшей квалификации).

УДК 330.46:005.12
ББК 65.050.9(2)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Краткий курс лекций предназначен обучающимся по направлению подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (уровень подготовки кадров высшей квалификации).

Издание ориентировано на достижение цели дисциплины – изучение математических моделей оптимального управления для непрерывных и дискретных процессов, практических примеров применения на макро- и микроуровне и принятия управленческих решений, динамических оптимизационных моделей.

Для успешного освоения дисциплины необходимы знания по следующим дисциплинам:

Основы научно-исследовательской деятельности;

Современные информационно-коммуникационные технологии в научно-исследовательской деятельности и образовании.

Знания, умения и приобретенные компетенции будут использованы при изучении следующих дисциплин: Теория управления социально-экономическими системами, Информационные и автоматизированные системы управления.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

а) универсальные (УК):

– способностью к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1);

способностью проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);

готовностью участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);

способностью следовать этическим нормам в профессиональной деятельности (УК-5);

способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития (УК-6).

б) общепрофессиональные (ОПК):

- владением методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности (ОПК-1);

в) профессиональные (ПК):

- способность к исследованию и разработке новых математических методов и моделей для управления социально-экономическими процессами и системами (ПК-2).

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ. КИБЕРНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ И УПРАВЛЕНИЮ СЛОЖНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.

1.1 Управление как функция сложной системы

Основные отличительные признаки сложных систем (по Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М. Наука, 1978г., с.25):

Наличие большого количества взаимно связанных и взаимодействующих между собой элементов.

Сложность функции, выполняемой системой и направленной на достижение заданной цели функционирования.

Возможность разбиения системы на подсистемы, цели, функционирования которых подчинены общей цели функционирования всей системы.

Наличие взаимодействия с внешней средой и функционирование в условиях воздействия случайных факторов.

Наличие управления (часто имеющего иерархическую структуру), разветвленной информационной сети и интенсивных потоков информации.

Управление – в широком смысле функция *системы*, ориентированная либо на сохранение основного качества, т.е. совокупности свойств, утрата которых ведет к разрушению системы в условиях изменения *среды*, либо на выполнение некоторой программы, обеспечивающей *устойчивость* функционирования, *гомеостаз*, достижение определенной *цели*.

Понятие *управление* не формализовано настолько, чтобы можно было дать его точное и при этом достаточно полное формальное описание.

Систему, в которой реализуется функция управления, называется *системой управления* и выделяют в ней две подсистемы: *управляющую* (осуществляющую функцию управления) и *управляемую* (объект управления).

Однако разделение системы на управляющую и управляемую не всегда можно осуществить однозначно. В сложных развивающихся системах эти блоки могут быть совмещены. Такой режим называют *саморегулированием.*

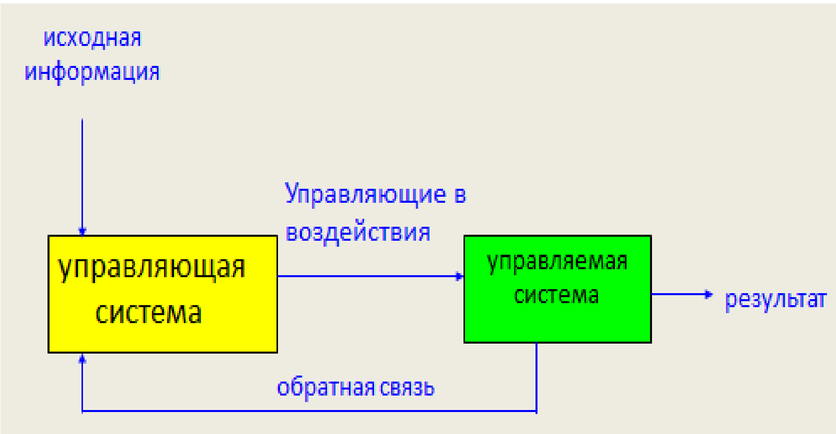

Рисунок 1 – Кибернетическая система

Управление представляет собой процесс сбора, передачи и переработки информации, осуществляемый специальными средствами. От элементов системы к управляющим устройствам поступает осведомительная информация, характеризующая состояние элементов системы. В сложных системах обычно выделяются специфические контуры управления, вдоль которых циркулируют *потоки информации* (осведомительной – от элементов системы к управляющим устройствам, и управляющей – от управляющих устройств к элементам системы). Часто контуры управления являются замкнутыми и носят характер *обратной связи:* фактическое значение регулируемого параметра сравнивается со значением этого параметра, требуемым программой управления; наличие уклонение от программы служит основанием для выработки корректирующих сигналов – управляющей информации. Применение принципа обратной связи позволяет избежать грубых ошибок, если только средства управления работают исправно.

В связи с развитием электроники и вычислительной техники, в качестве средств управления часто используются цифровые вычислительные машины, выполняющие функции обработки информации, планирования и оперативного управления процессами в сложных системах. Выполняя последовательность арифметических и логических операций в соответствии с заданной программой, ЭВМ обеспечивает реализацию специального *алгоритма* переработки информации, который называется *управляющим алгоритмом.*

Если управление сложной системой сосредоточено в едином центре, оно называется *централизованным.* На практике встречаются различные степени *децентрализации* управления, когда функция управления распределена между главным и периферийными центрами управления, а также свойственна в определенной мере и элементам системы.

Многим сложным системам свойственны в той или другой степени черты *самоорганизации.* Система называется самоорганизующейся, если она способна на основании оценки воздействий внешней среды, путем последовательного изменения своих свойств прийти к некоторому устойчивому состоянию, когда воздействия внешней среды окажутся в допустимых пределах.

1.2 Теория автоматического управления, фундаментальные принципы управления

Для исследования процессов управления в технических системах разработана теория автоматического управления. В этой теории термин управления используется в более узком смысле – как краткое название целенаправленного управляющего воздействия.

Большим движением теории автоматического управления являются общие принципы управления, разработанные в этой теории, которые названы фундаментальными и являются достаточно общими. Их пытаются применить и для управления в социально-экономических системах.

Основные фундаментальные принципы управления:

1. Принцип разомкнутого или программного управления.

2. Принцип компенсации или управления по возмущениям (или принцип управления с упреждением).

3. Принцип обратной связи или управление по отклонению.

Обратная связь может быть:

Отрицательной – противодействующей тенденциям изменения выходного параметра, т.е. направленной на сохранение, стабилизацию требуемого значения параметра (например, стабилизацию выходного напряжения, или в системах организационного управления – количества выпускаемой продукции и т.п.);

Положительной, сохраняющей тенденции происходящих в системе изменений того или иного выходного параметра (что используется при разработке генераторов разного рода, при моделировании развивающихся систем).

1.3 Процессы управления в социально-экономических и технических системах

Рассмотренные фундаментальные принципы управления в той или иной форме используются в различных областях управления – от регулирования в технических системах (в английском языке используются термины control, pilot и т.п.) до управления коллективами людей (здесь обобщающий широкий термин управление даже в нашей стране стал заменяться термином менеджмент от английского manage).

В технических системах управляющую подсистему часто называют системой регулирования. Применительно к социально-экономическим системам используют термины система организационного управления и система, реализующая основную деятельность.

Если управление осуществляется сознательно, то управляющая система создается субъектом управления (используется также термин наблюдатель), который формирует цель (цели) управления. Иногда субъект управления отождествляется с управляющей системой, а в качестве цели принимается выполнение программы управления.

Это особенно характерно для социально-экономических систем. Но возможно и в технических (например, в системах телеуправления размещение на объекте управления устройства приема и передачи информации можно относить как к объекту, так и к управляющей системе).

Способы реализации этих принципов наиболее исследованы для управления в технических системах, не включающих социальные или экономические аспекты. А для социально-экономических систем эти принципы в большей мере используются как объяснительные, поскольку практически невозможно в управлении государством исследовать и учесть все многообразные механизмы регулирования – экономические, финансовые, социальные и т.д.

Поэтому в науках об управлении социальными коллективами и сообществами выделяют сферы управления (государством, предприятием, научным или учебным коллективом и т.п.) и для этих сфер разрабатывают более конкретные принципы управления, формы и методы их реализации.

В то же время есть в управлении сложными открытыми системами с активными элементами, и в частности, социально-экономическими системами, некоторые общие принципы и способы управления, которые имеет смысл кратко рассмотреть.

Термин «управление» в социально-экономических системах трактуется как – планирование, организация, регулирование и т.д. Для реализации этих функций разрабатывают специальные методы и модели. Для обеспечения управления такими системами полезно учитывать «закон необходимого разнообразия» У.Р. Эшби и другие закономерности систем.

Закон «необходимого разнообразия» У.Р. Эшби.

Когда исследователь (лицо, принимающее решение, наблюдатель) N сталкивается с проблемой D, решение которой для него неочевидно, то имеет место некоторое разнообразие возможных решений V_D. Этому разнообразию противостоит разнообразие мыслей исследователя (наблюдателя) V_N. Задача исследователя заключается в том, чтобы свести разнообразие V_D - V_N к минимуму, в идеале

$$(V_D - V_N) \to 0.$$

Эшби доказал теорему, на основе которой формулируется следующий вывод: «*Если V_D дано постоянное значение, то* V_D - V_N *может быть уменьшено лишь за счет соответствующего роста V_N... Говоря более образно, только разнообразие в N может уменьшить разнообразие, создаваемое в D; только разнообразие может уничтожить разнообразие»*.

В каждой конкретной ситуации нужно выбирать разумное сочетание этих принципов с учетом необходимости и возможности их реализации.

1.4 Модель и моделирование в управлении

Модель (в науке) — это объект-заместитель объекта-оригинала, инструмент для познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает некоторые свойства оригинала.

Соответствие свойств модели исходному объекту характеризуется адекватностью.

Процесс построения и исследования модели называется **моделированием.**

Виды моделей

- Статические - модели, описывающие состояние системы в определенный момент времени (единовременный срез информации по данному объекту). Примеры моделей: классификация животных, строение молекул, список посаженных деревьев, отчет об обследовании состояния зубов в школе и т.д.
- Динамические - модели, описывающие процессы изменения и развития системы (изменения объекта во времени). Примеры: описание движения тел, развития организмов, процесс химических реакций.
- Функциональные
- Концептуальные
- Топологические отражают взаимные связи между объектами, не зависящие от геометрических свойств объектов.

– Логико-лингвистические
– Семантические
– Теоретико-множественные
– Физические
– Экономические

Структура модели зависит от того, каковы особенности объекта изучения и цели субъекта исследования. Модель всегда балансирует на грани между точностью (приближенностью к реальности) и сложностью построения: Простота-Модель-Реальность.

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют реальный объект его математической моделью и затем изучают последнюю.

Никакое определение не может в полном объёме охватить реально существующую деятельность по математическому моделированию.

Определение модели по:

А.А.Ляпунову (см. Новик И. Б., О философских вопросах кибернетического моделирования. М., Знание, 1964.);

Советову и Яковлеву (Моделирование систем: Учеб. для вузов — 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 2001.— 343 с.);

Самарскому и Михайлову (Самарский А.А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр.. — М.: Физматлит, 2001, с.7-8);

Севостьянову (Моделирование технологических процессов: учебник / А.Г. Севостьянов, П.А. Севостьянов. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. — 344 с.).

Формальная классификация моделей

строится в форме дихотомий, дихотомического или двоичного поиска:

– Линейные или нелинейные модели;
– Сосредоточенные или распределённые системы;
– Детерминированные или стохастические;
– Статические или динамические;
– Дискретные или непрерывные.

Классификация *по способу представления объекта*

Наряду с формальной классификацией, модели различаются по способу представления объекта:

– Структурные модели представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования.

– Функциональные модели не используют таких представлений и отражают только внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта. В их предельном выражении они называются также моделями «черного ящика». Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика».

ТЕМА 2. МОДЕЛИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1 Элементы и условия процесса управления

Управление является одной из важнейших проблем жизни и развития человеческого общества. При этом следует прямо сказать, что это одна из трудоёмких и сложных областей человеческой деятельности. Не совершенствовать управление человечество не может, ибо, как показывают расчеты академика В.М. Глушкова, это приведёт к тому, что просто не хватит людей для решения задач управления. За последние 100 лет производительность труда в промышленности возросла в 15 раз, а в сфере управления только в 2 раза. Если не механизировать обработку информации, то на этих работах придется занять всё взрослое население страны.

Анализируя этот процесс управления, выделим основные следующие элементы:

– Во-первых, получение информации о направлении, в котором должна идти машина, т.е. о задаче управления.

– Во-вторых, получение информации о результатах управления. Водителю не достаточно видеть перед собой дорогу, он должен видеть, куда идёт машина. Эту информацию он получит с помощью зрения.

– В-третьих, анализ полученной информации и принятие на основе этого анализа решения о необходимых управляющих действиях.

– В-четвёртых, исполнение этого решения.

Эти четыре элемента составляют основу всякого управления. Если исключить хотя бы одну из них, то управление станет невозможным.

Элементы процесса управления:

– получение информации о задачах управления;

– получение информации о результатах управления (о поведении объекта управления);

– анализ полученной информации и выработка решения;

– исполнение решения (осуществление управляющих воздействий).

В соответствии с этими четырьмя элементами для организации процесса управления необходимо иметь:

– источники информации о задачах управления;

– источники информации о результатах управления;

– устройство для анализа получаемой информации и выработки решений;

– исполнительное устройство осуществляющее управление объектом.

Условия управления

– наличие причинно-следственных связей между элементами системы;

– динамичность системы - управляемый объект должен переходить из одного состояния в другое. Там где нет выбора, нет, и не может быть управления.

– наличие параметра, при воздействии на который, изменяется ход преобразований управляемого объекта (нельзя было бы управлять производством молока, если бы затраты кормов, труда и т.д. не изменяли продуктивности коровы).

– отзывчивость на сигналы управления – способность управляемого объекта претерпевать значительные энергетические или пространственно-временные изменения под воздействием малых управляющих воздействий. Объект должен быть способен отзываться на сигнал, иначе управление невозможно.

Совокупность объекта управления и управляющего устройства образует собой систему управления.

Совокупность элементов системы, вырабатывающая сигналы управления называется управляющим устройством.

Совокупность правил, по которым информация, поступающая в управляющее устройство, перерабатывается в сигналы управления, называется *алгоритмом управления.*

2.2 Основные типы задач управления

В системах управления решаются четыре основных типа задач управления:

1. Задачи стабилизации системы.
2. Задачи выполнения программы.
3. Задачи слежения.
4. Задачи оптимизации.

Основные типы задач управления

Задачи стабилизации системы; Задачи выполнения программы; Задачи слежения; Задачи оптимизации.

2.3 Математическая теория оптимальных процессов, оптимальное управление

Математическая теория оптимальных процессов возникла на базе научных разработок коллектива ученых, возглавляемого академиком Л.С. Понтрягиным, выполненных в период 1956-1961 гг.

Основным понятием математической теории оптимальных процессов является оптимальное управление. Сама теория стимулировалась необходимостью решения задач, возникших в автоматическом регулировании.

Первоначально задачи оптимального управления ставились, решались для систем управления движущимися объектами. Рассмотрим, например, задачу управления самолетом. Предположим, ставится задача за минимально возможное время попасть из одного города в другой самолетом. Положение самолета в каждый момент времени определяется координатами трехмерного фазового пространства: долготой – x_1, широтой – x_2, высотой - x_3. Управление самолетом, пусть, определяется параметрами: скорость - u_1, угол рулей высоты – u_2, положение рулей поворота – u_3. Это управляющие параметры.

Множество значений, которые могут принимать управляющие параметры, называется областью управления U.

Если известны значения параметров в течение времени $t_0 \leq t \leq t_1$, то можно считать заданными функции времени $U_1(t)$, $U_2(t)$,…,$U_r(t)$.

Векторная функция $U(t)\{U_1(t),\ U_2(t)\ U_3(t)\}$ называется управлением. Зная законы движения самолета, управление U(t) в заданном интервале времени и начальное положение самолета x_0 можно рассчитать фазовую траекторию, характеризующую перемещение самолета в пространстве $x(t)=\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$. Задавая различные управления U(t), будем получать различные траектории x(t), исходящие из точки X_0. За критерий оптимальности в нашем примере принято минимальное время полета из начального пункта в конечный. Оптимальным управлением будет такое значение U(t) при котором величина t_1-t_0 будет минимальной.

Оптимальным управлением называют выбор таких управляющих параметров, которые обеспечивают наилучшее с точки зрения заданного критерия протекания процесса (другими словами – наилучшее поведение системы).

Для управления самолетом у пилота имеются технические средства - рули, кнопки, позволяющие ему, изменяя силу тяги двигателя увеличивать или уменьшать скорость самолета, а положением рулей высоты и поворота изменять положение самолета в пространстве. При решении задач управления экономическими системами роль рычагов выполняют управляющие параметры, выражающие материальное снабжение, финансирование, информационные потоки, цели, процентные ставки.

2.4 Принцип максимума Л. С. Понтрягина

Доказано, что оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория в каждый момент времени должны обеспечивать максимум некоторой функции нескольких переменных. Таким образом, поиск оптимального управления сводится к задаче нахождения максимума функции нескольких переменных. Этот критерий оптимальности получил название принципа максимума.

Принцип максимума, точнее, его главный результат можно сформулировать так: для многих управляемых систем может быть построен такой процесс регулирования, при котором само состояние системы в каждый данный момент показывает наилучший, с точки зрения всего процесса, способ действия.

Основная ценность принципа максимума Понтрягина состоит в определении математических условий, необходимых для оптимального управления, причем без предварительного определения оптимальной траектории, а путем последовательного регулирования данного процесса.

Предпринимаются попытки применения принципа максимума для решения экономических задач. Задачи экономики намного сложнее технических задач, так как экономические процессы характеризуются огромным числом фазовых координат, многими управляющими параметрами и т.д.

2.5 Техническая реализация оптимального управления

Используя математическую теорию оптимальных процессов, удалось создать ряд устройств для автоматизации управления техническими объектами на оптимальном уровне, что значительно улучшило их технические и экономические показатели.

Различные системы оптимального управления применяются в промышленности, на транспорте, в энергетике, в военной технике.

При управлении производственными процессами широко используется экстремальное регулирование. Это один из видов автоматического оптимального управления. Суть его состоит в установлении такого режима объекта, при котором контролируемый параметр имеет максимальное или минимальное значение.

В экономико-математической модели иногда выделяют управляющие переменные и управляющие параметры.

Под управляющими параметрами понимают те экономические параметры, с помощью сознательного изменения которых удается менять ход и направление экономических процессов. Управляющие параметры в экономике называют параметрами экономического воздействия или ключевыми стратегическими параметрами, иногда – инструментальными переменными, контролирующими операторами. Обычно управляющие параметры делят на три группы: стабилизаторы, стимуляторы, регуляторы. В литературе термины «параметр модели» и «переменная модели» часто не различают и употребляют под названием «управляющий параметр».

С помощью стабилизаторов в модели ограничивают конъюнктурные колебания, чтобы избежать кризисов.

Стимуляторы используют для поддержания темпов развития экономики на заданном уровне или же для повышения темпов экономического роста.

Регуляторы обеспечивают сбалансированность экономики, поддерживают необходимые пропорции.

В отдельных случаях под флагом экономико-математических исследований выполняются схоластические работы математического жанра, абстрагированные от реальной практики, не имеющие приложений, представляющие, по сути, бесплодную игру в математические символы. Вычурные и впечатляющие по форме, они лишены реального содержания. По поводу таких исследований много лет тому назад высказал свое суждение академик Л.С.Понтрягин, написавший в одной из своих статей: *«Я имею в виду математическую мистификацию практических задач, от которой не бывает пользы ни уму, ни сердцу. В последнее время можно встретить, например, так называемые экономико-математические работы, насыщенные сложной математической символикой, но не содержащие ни одного конкретного численного примера, - непонятные, недоступные и фактически ненужные экономистам, а с точки зрения математиков - представляющие ничтожную ценность, либо вообще не обладающие ею».*

ТЕМА 3. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

3.1 Особенности моделирования процессов управления

Математическое моделирование и оптимизация процессов управления - область научно-практической деятельности, получившая мощный стимул к развитию вовремя и сразу после второй мировой войны. Эта тематика развивалась в рамках интеллектуального движения, связанного с терминами «кибернетика», «исследование операций», а позже – «системный анализ», «информатика».

Имелась и вполне практическая задача - контроль качества боеприпасов, вышедшая на первый план именно в годы второй мировой войны. Методы статистического контроля качества приносят наибольший экономический эффект среди всех экономико-математических методов управления. Только дополнительный доход от их применения в промышленности США оценивается как 0,8 % валового национального продукта США, т.е. 24 миллиардов долларов (в ценах 2003 г.)

Математические методы управления можно разделить на несколько групп:

- методы оптимизации;
- методы, учитывающие неопределенность, прежде всего вероятностно-статистические;
- методы построения и анализа имитационных моделей;
- методы анализа конфликтных ситуаций (теории игр).

Математические методы управления

- методы оптимизации
- методы, учитывающие неопределенность (вероятностно-статистические)
- методы построения и анализа имитационных моделей
- методы анализа конфликтных ситуаций
- (теории игр)

Во всех этих группах можно выделить статическую и динамическую постановки. При наличии фактора времени используют дифференциальные уравнения и разностные методы.

Моделирование процессов управления предполагает последовательное осуществление трех этапов исследования. Первый - от исходной практической проблемы до теоретической чисто математической задачи. Второй – внутриматематическое изучение и решение этой задачи. Третий – переход от математических выводов обратно к практической проблеме.

В области моделирования процессов управления, целесообразно выделять четверки составляющих:

ЗАДАЧА – МОДЕЛЬ - МЕТОД - УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ.

Задача, как правило, порождена потребностями той или иной прикладной области. Вполне понятно, что при этом происходит одна из возможных математических формализаций реальной ситуации. Например, при изучении предпочтений потребителей у экономистов - маркетологов возникает вопрос: различаются ли мнения двух групп потребителей. При математической формализации мнения потребителей в каждой группе обычно моделируются как независимые случайные выборки, т.е. как совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин, а вопрос маркетологов переформулируется в рамках этой модели как вопрос о проверке той или иной статистической гипотезы однородности. Речь может идти об однородности характеристик, например, о проверке равенства математических ожиданий, или о полной (абсолютной однородности), т.е. о совпадении функций распределения, соответствующих двух совокупностям (Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. - М., 2002. – С.132.)

3.2 Основы теории принятия решений и типичные классы задач исследования операций

Элементы процесса принятия решений:

- Цель;
- ЛПР – лицо, принимающее решение;
- Альтернативные решения;
- Измеряемые исходы решений;
- Правила выбора решений.

Решением называют выбор возможных управляемых действий. В редких случаях может быть выбрано одно наилучшее решение, которое называют оптимальным. Обычно же речь идет о выделении области разумных, хороших, правильных, добротных решений, из которых делается окончательный выбор наилучшего решения. Бывают случаи, когда оптимальное решение найти не удается или оно невозможно. Решения состоят из элементов, часть из которых численно фиксированы и изменению не подлежат, другими мы можем распоряжаться по своей воле в каких-то пределах. Решения можно сравнивать по их полезности, эффективности.

Теория принятия решений использует различные процедуры для формализации предпочтения, то есть выражение их в единой количественной мере. Основой таких процедур является теория полезности, разработанная Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном. Ее математическая основа – система аксиом, в которых утверждается, что существует мера ценностей, позволяющая упорядочить результаты решений.

Задачи принятия решений

В зависимости от условий внешней среды и системы информированности лица существует следующая классификация задач принятия решений:

- в условиях определенности,
- в условиях риска,

– в условиях неопределенности,

– в условиях конфликтных ситуаций или противодействия (активного противника).

Существует несколько критериев выбора оптимальной стратегии:

– Критерий Вальда; Критерий Гурвица; Критерий Лапласса; Критерий Сэвиджа; Критерий Вальда

Выбор критерия принятия решений пока формализовать не удается, и принимать решение может только человек. Это относится и к окончательному принятию решения даже в автоматизированных системах. Теория принятия решения является фундаментом науки исследования операций.

Исследование операций – это комплекс научных методов для решения задач управления организационными системами.

Особенности исследования операций

Характерной особенностью методов исследования операций является системный подход к анализу решаемой проблемы. Любая задача, какой частной она бы не казалась на первый взгляд, рассматривается с точки зрения ее влияния на критерий функционирования всей системы.

Исследование операций часто состоит в расчленении проблемы на цепочку взаимосвязанных задач, решаемых одна за другой.

Одна из существенных особенностей исследовании операций состоит в стремлении найти оптимальное решение. Однако часто оно оказывается неразрешимым из-за широкого спектра противоречивых ограничений. Особенность исследования операций состоит и в том, что они проводятся комплексно, по многим направлениям. Для этой работы создается операционная группа из специалистов разных областей знаний: обычно это экономисты, математики, инженеры, социологи, психологи, юристы, кибернетики – системщики.

Задачи исследования операций

- распределения ресурсов;
- управления запасами;
- ремонта и замены оборудования;
- массового обслуживания;
- календарного планирования;
- сетевого планирования и управления;
- выбора маршрута;
- задачи поиска;
- конкурентные;
- комбинированные.

3.3 Роль моделирования в процессе подготовки и принятия управленческих решений

Процесс подготовки и принятия решений включает три главные стадии: концепции, проектирования, выбора.

Завершает процесс выполнение решения.

Обобщенная схема процесса принятия решений состоит из непрерывного потока действий от концептуальной стадии до проектирования и выбора, но возможны возвраты на предыдущую стадию (обратная связь).

Моделирование является основной частью этого процесса.

3.4 Математико-компьютерная поддержка и современные методы принятия решения

В настоящее время менеджер может использовать при принятии решения различные **компьютерные и математические средства**. В памяти компьютеров держат массу информации, организованную с помощью баз данных и других программных продуктов, позволяющих оперативно ею пользоваться. Экономико-математические и эконометрические модели позволяют просчитывать последствия тех или иных решений, прогнозировать развитие событий. Методы экспертных оценок также весьма математизированы и используют компьютеры. Наиболее часто используются оптимизационные модели принятия решений.

Теория принятия решений – быстро развивающаяся наука.

Современные методы принятия решений.

Кроме упомянутых или кратко рассмотренных выше методов, прежде всего экспертных, при принятии решений применяют весь арсенал методов современной прикладной математики. Они используются для оценки ситуации и прогнозирования при выборе целей, для генерирования множества возможных вариантов решений и выбора из них наилучшего.

Прежде всего, надо назвать всевозможные методы оптимизации (математического программирования). Для борьбы с многокритериальностью используют различные методы свертки критериев, а также интерактивные компьютерные системы, позволяющие вырабатывать решение в процессе диалога человека и ЭВМ. Применяют имитационное моделирование, базирующееся на компьютерных системах, отвечающих на вопрос: “Что будет, если...?", метод статистических испытаний (Монте-Карло), модели надежности и массового обслуживания. Часто необходимы статистические (эконометрические) методы, в частности, методы выборочных обследований. При принятии решений применяют как вероятностно-статистические модели, так и методы анализа данных.

Особого внимания заслуживают проблемы неопределенности и риска, связанных как с природой, так и с поведением людей. Разработаны различные способы описания неопределенностей: вероятностные модели, теория нечеткости, интервальная математика. Для описания конфликтов (конкуренции) полезна теория игр. Для структуризации рисков используют деревья причин и последствий (диаграммы типа "рыбий скелет"). Менеджеру важно учитывать постоянные и аварийные экологические риски. Плата за риск и различные формы страхования также постоянно должны быть в его поле зрения.

ТЕМА 4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ИМИ

4.1 Дискретность и непрерывность в теории и практике применения математических моделей

Изменение моделируемых величин может рассматриваться с позиций непрерывности и дискретности.

Дискретность буквально означает прерывность. Противоположное слово смыслу – **непрерывность.** Например, число студентов в аудитории и во время перерыва, и во время чтения лекции всегда дискретно, хотя во время перерыва одни студенты выходят из аудитории, другие заходят в нее. Здесь изменение численности происходит скачками. А вот температура воздуха в этой же аудитории изменяется плавно и непрерывно. В зависимости от точности прибора температуру можно измерять в любое время и с любой точностью.

Дискретная система – это кибернетическая система, все элементы которой, а также связи между ними, т.е. обращающаяся в системе информация, имеют дискретный характер. Деление систем на непрерывные и дискретные зависит от цели и глубины исследований. При моделировании непрерывных систем их иногда приводят к дискретным.

Дискретные процессы в математических моделях описываются разностными уравнениями, непрерывные — дифференциальными уравнениями.

Дифференциальные уравнения [differential equations] — уравнения, связывающие искомую функцию, ее производные (или дифференциалы), и независимые переменные. Они предназначены для выражения соотношений не только между отдельно взятыми величинами, но и между их изменениями. Это уравнения, в той или иной форме связывающие независимые переменные, искомые функции и их производные.

Уместно вспомнить, что ***производной функции*** *$y=f(x)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y = y_1 - y_0$ к приращению аргумента $\Delta x = x_1 - x_0$ при приращении аргумента, стремящемся к нулю $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует).*

Производная обозначается $f'(x)$ или y'; таким образом $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Дифференциалом функции *$y=f(x)$ называется выражение $dy=y'dx$, где $dx=\Delta x$ – приращение аргумента. Очевидно, что $y'=\frac{dy}{dx}$, поэтому данное отношение часто употребляют как знак производной. Вычисление производных и дифференциалов называют* ***дифференцированием****. Если производная имеет, в свою очередь, производную, то ее называют второй производной.*

Решением или интегралом дифференциального уравнения называется функция, при подстановке которой в дифференциальное уравнение последнее обращается в тождество. Процесс решения дифференциального уравнения называют его **интегрированием**. Интегрирование (нахождение интеграла) – действие обратное дифференцированию: по данной непрерывной функции ищется первообразная функция, для которой f(x) является производной.

Разностные уравнения [difference equations] — уравнения, содержащие конечные разности искомой функции. Другие названия разностных уравнений – алгебраические уравнения, уравнения в конечных разностях, возвратные последовательности.

Конечная разность определяется как соотношение, связывающее дискретный набор значений функции $y = f(x)$, соответствующих дискретной последовательности аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$.

В экономических исследованиях значения величин часто берутся в определенные дискретные моменты времени. Например, о выполнении плана судят по показателям на конец планируемого периода. Поэтому вместо скорости изменения какой-либо величины df/dt приходится брать среднюю скорость за определенный конечный интервал времени $\Delta f/\Delta t$. Если выбрать масштаб времени так, что длина рассматриваемого периода равна 1, то скорость изменения величины можно представить как разность

$$y = y(t+1) – y(t),$$

которую часто называют **первой разностью.**

При этом различают правую и левую разности, в частности

$y = y(t) – y(t–1)$ — левая, а приведенная выше — правая.

Можно определить **вторую разность**:

$\Delta(\Delta y) = \Delta y(t + 1) – \Delta y(t) = y(t + 2) – 2y(t + 1) + y(t)$ и **разности высших порядков Δ^n**.

Теперь можно определить разностное уравнение как уравнение, связывающее между собой конечные разности в выбранной точке:

$$f\,[y(t), \Delta y(t), ..., \Delta^n y(t)] = 0.$$

Разностные уравнения всегда можно рассматривать как соотношение, связывающее значения функции в ряде соседних точек

$$y(t), y(t+1), ..., y(t+n).$$

При этом разность между последним и первым моментами времени называется **порядком уравнения**.

Отличие разностных уравнений от дифференциальных состоит в том, что дифференциальные уравнения связывают значение функции и производных от нее в один и тот же момент времени, а разностные уравнения - значения функции в различные моменты времени.

Принято выделять **непрерывные и дискретные математические модели**. Такую классификацию строят по виду исходной информации и характеру возможных изменений переменных величин модели.

Если информация и параметры являются непрерывными, а математические связи устойчивы, то модель - **непрерывная**. И наоборот, если информация и параметры - дискретны, а связи неустойчивы, то и **математическая**

модель - дискретная. Дискретная математическая модель – это модель, все переменные и параметры которой являются дискретными величинами.В непрерывных моделях величины представляют собой непрерывные функции времени, а в дискретных моделях любые изменения происходят мгновенно, скачкообразно, и между моментами изменений состояний элементов остаются постоянными.

Реальные системы не бывают **непрерывными** или **дискретными**. Просто для одних систем удобнее применять **непрерывные** модели, для других – **дискретные**. Представления о дискретности и непрерывности выработаны в рамках математики. Значит, когда мы говорим, что некоторая модель является **дискретной**, то тем самым уже имеем в виду не реальную систему, существующую в физическом мире, а некую математическую модель. Но в то же время любой физический объект или процесс мы можем описывать и моделировать как непрерывный или как дискретный. И какой вариант мы бы ни избрали, мы можем достичь любой точности описания.

Для любой измеряемой величины, как физической, так и любой другой природы, представление ее в качестве непрерывной является, в силу тех или иных причин, **приближением**.

Сапицын В.В. делает следующие выводы:

1. Как непрерывное, так и дискретное представление реальных величин является **приближением**.
2. Непрерывные модели хороши, если получаемые из них **решения** являются **непрерывными функциями**.
3. Дискретные модели, если степень дискретизации достаточно велика и согласована с исходной экономической моделью, **адекватны непрерывным моделям и не хуже их**.
4. Если решения, получаемые из непрерывных моделей, не являются непрерывными или гладкими функциями, то необходима **осторожность в интепретации полученных результатов**. В этом случае требуется более тщательный анализ исходной модели, и может оказаться, что более адекватна решаемой задаче подходящая дискретизация исследуемых величин, а также учет реальной динамики системы.
5. Реальный интерес, проведенный выше анализ, может представлять только для **существенно нелинейных систем**, в динамике которых наблюдаются синергетические явления.

4.2 Дискретное программирование и символьная модель дискретной задачи

Дискретное программирование – это раздел оптимального программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие дискретности, а область допустимых решений конечна.

Собственно, в дискретном программировании используется модель общей задачи математического программирования с дополнительным ограничением: **переменные – дискретные величины**.

Огромное количество задач носит **дискретный характер**, например, в экономике. Изменение экономических показателей во времени всегда имеет прерывный характер, так как происходит скачками от одной даты к другой, скажем, от одного квартала к другому, или от одного года к другому. В экономике дискретность связана с **физической неделимостью многих факторов**: нельзя построить 2,8 завода, купить 0,5 трактора или 2,3 автомобиля. Дискретными являются широко известные задачи: о назначениях, о коммивояжере, теория расписаний, о структуре стада животных, о комплектовании технических средств предприятия и многие другие.

Иногда дискретное программирование называют целочисленным.

Для этого есть определенные основания, но необходимо четко представлять, что дискретное, это необязательно целочисленное, точнее считать целочисленное программирование частным случаем дискретного.

4.3 Методы решения задач непрерывного и дискретного моделирования

Из обширного множества обыкновенных дифференциальных уравнений лишь сравнительно узкий класс уравнений допускает решение в аналитическом виде (в квадратурах). К этому классу в основном относятся линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Для решения остальных используются различные численные методы.

При численном решении дифференциальных уравнений их часто заменяют разностными. Это возможно, если решение разностных уравнений стремится к решению соответствующего дифференциального уравнения, когда интервал Δt стремится к нулю.

Универсальным численным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является **метод конечных разностей.**

Разностная схема — это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и дополнительные условия (например, краевые условия и/или начальное распределение). Таким образом, разностные схемы применяются для сведения дифференциальной задачи, имеющей континуальный характер, к конечной системе уравнений, численное решение которых принципиально возможно на вычислительных машинах. Алгебраические уравнения, поставленные в соответствие дифференциальному уравнению, получаются применением разностного метода, что отличает теорию разностных схем от других численных методов решения дифференциальных задач (например, проекционных методов, таких как метод Галёркина).

Решение разностной схемы называется **приближенным решением дифференциальной задачи.**

Хотя формальное определение не накладывает существенных ограничений на вид алгебраических уравнений, но на практике имеет смысл рассматривать только те схемы, которые каким-либо образом отвечают дифференциальной задаче. Важными понятиями теории разностных схем являются понятия **сходимости**, **аппроксимации**, **устойчивости**, **консервативности**.

Наиболее часто встречающиеся методы решения: метод рядов Тейлора, Методы Эйлера (явный метод Эйлера и неявные методы Эйлера: чисто неявная схема Эйлера, модифицированная схема Эйлера с центральной точкой, симметричная схема Эйлера-Коши), схемы Рунге-Кутты).

ТЕМА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

5.1 Понятие, особенности, основные назначения и виды макроэкономических моделей

Макроэкономика изучает функционирование экономической системы как единого целого, с точки макроподхода.

При макроподходе объект (будь это такая сложная система как народное хозяйство, или его составные части: промышленность, сельское хозяйство, транспорт и т.д.) рассматриваются как единое целое и как бы снаружи, со стороны.

Макроэкономическая модель представляет собой математически формализованную концепцию функционирования народного хозяйства как единого целого. Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития национальной экономики, прогнозирования народнохозяйственных процессов.

Для этого используют производственные функции, модели оптимизации соотношения нормы накопления и нормы потребления, оптимизации национального дохода, валовых капиталовложений и др.

Основные назначения макромоделей:

- анализ структуры и динамики народного хозяйства;
- прогноз развития народного хозяйства;
- исследование экономических циклов;
- повышение эффективности государственного регулирования экономики;
- формирование основы для разработки оптимальных планов развития экономических систем.

Историческим предшественником современных макроэкономических моделей считают экономические таблицы французского экономиста – физиократа **Франсуа Кенэ (1694-1774**). Лейб-медик Людовика XV, он лишь в возрасте около 60 лет начал заниматься политической экономией и создал количественную модель национальной экономики, ввел понятие совокупного общественного продукта общества, движение которого рассматривал с макроэкономической точки зрения.

Как и все физиократы, Кенэ считал единственной производительной деятельностью сельское хозяйство. Он вводит понятие «экономического излишка», считая его даром природы, по таблицам его присваивали собственники земли, король и церковь, эта идея была развита К. Марксом в известные теории прибавочной стоимости. Кенэ впервые рассматривает жизнь стран как единый процесс производства и потребления продуктов обществом, подчиняющийся определенным количественным закономерностям. Таблицы Ф. Кенэ можно считать первым опытом научного макроэкономического анализа и моделирования.

В XX в., особенно в 50-60 годы в связи с двухсотлетием экономических таблиц Кенэ, был предпринят ряд попыток математической формализации современными научными методами, в частности: балансовая интерпретация акад. В.С. Немчинова по межотраслевой схеме, через системы линейных уравнений А. Филлипсом, графическая интерпретация Ж. Бенара, И. Хишияма, было показано, что в таблицах Кенэ содержатся зачатки будущих теорий – теории рынка, теории экономической динамики, модель мультипликатора. И. Хишияма ввел в экономические таблицы Кенэ элементы динамики.

В 1863 г. Карл Маркс создал первый вариант схемы простого воспроизводства и сформулировал три закона простого воспроизводства:

1. Закон простого воспроизводства общественного капитала (закон движения общественного капитала при простом воспроизводстве, первый закон воспроизводства и обращения общественного капитала: простое производство может осуществиться, если (v + m) I подразделения равняются с II подразделения)

$$\mathbf{I(v+m) = IIc}$$

2. Второй закон воспроизводства и обращения общественного капитала:

$$\mathbf{I(v+m)+II(v+m)=IIW}$$

3. Третий закон воспроизводства и обращения общественного капитала:

$$\mathbf{Ic+IIc=IW}$$

В схемах Маркса условие расширенного воспроизводства выражается формулой:

$$\mathbf{I(v+m)>IIc}$$

Эти схемы можно трактовать как **макромодели**.

Эти идеи и макромодели были использованы для разработки народнохозяйственного баланса СССР 1923-1924 гг.

Первая математически формализованная макроэкономическая модель централизовано – планируемой экономики была построена Г.А. Фельдманом и опубликована в 1928-1929годах.

В. С. Немчинов исследовал сбалансированность экономики, потенциал расширенного воспроизводства, принципы рационального ценообразования. Особый интерес представляют предложенные им продуктовые модели, которые содержат постановку задач моделирования разделения труда.

Комплекс включает **пять моделей**:

- опорная балансовая продуктово-трудовая модель
- модель общественно-необходимых затрат труда
- модель общего отраслевого и территориального разделения труда
- модель внутриотраслевой дифференциации продукции
- модель внутриотраслевого разделения труда между предприятиями

Комплекс охватывает макро и микроэкономические аспекты. Следует отметить, что отдельные детали моделей остались неоконченными – это была последняя работа ученого.

5.2 Модели экономического роста и расширяющейся экономики

Рассмотрим типичную «неоклассическую» модель экономического роста Солоу-Свэна. Модель представляет систему из четырех уравнений.

1. **Уравнение производственной функции** может быть представлено в общем виде:

$$L=e^{-pt}G(Y,F)$$

или в виде производственной функции Кобба-Дугласа:

$$L=\gamma e^{-pt}Y\frac{1}{\beta}F^{1-\frac{1}{\beta}}$$

где $\beta = \frac{\partial Y}{\partial L} \div \frac{Y}{L}$ - эластичность дохода по труду;

$\frac{1}{\beta}$ - обозначим через μ.

2. **Уравнение сбережений**

Простейшая функция сбережений определяет спрос на предметы потребления пропорционально располагаемому доходу. Склонность к сбережениям моделируется через постоянный параметр S, который означает норму производственного накопления в принятой у нас терминологии.

$$П=(1-S)Y \qquad (5)$$

$$Y=dF+П, \qquad (6)$$

где dF=K – прирост основных производственных фондов.

3. **Уравнения занятости населения**

Предполагается, что в модели естественный темп роста населения задан и пропорциональный темп роста трудовых ресурсов определяется:

$$\frac{dl}{dt}:L = C$$

4. Равенство темпов роста конечного выпуска и основного капитала.

Динамика основного капитала может быть получена из уравнения

$$\frac{dF}{dt} = SY \qquad (12)$$

При заданной норме сбережений прирост основного капитала прямо пропорционален объему конечного выпуска.

Частное решение системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \gamma Y^{\mu}F^{-\mu} = L_0 e^{(c+p)t} \\ \frac{dF}{dt} = SY \end{cases} \qquad (13)$$

может быть представлено в виде экспоненты:

$$Y = Ye^{qt}, \qquad F = Ee^{qt} \qquad (14)$$

Модель Солоу-Свэна неоднократно усложнялась.

Модель расширяющейся экономики

Исторически это одна из первых моделей экономической динамики. Модель построена и исследована выдающимся математиком Джоном фон Нейманом. Впервые модель была доложена в 1932 году на математическом семинаре в Принстоне (США), опубликована на немецком языке в 1937 году, английский перевод опубликован в 1945-1946 гг., а затем и в 1963 г. в фундаментальной работе "Модель общего экономического равновесия".

Данная модель является теоретической, но включает в себя многие прикладные модели, например, динамическую модель межотраслевого баланса. Модель содержит много основополагающих идей, которые находят продолжение в большом количестве работ и развиваются в разных направлениях.

5.3 Модель общего экономического равновесия

Понятие «равновесие» используется многими науками для обозначения такого состояния системы или ситуации, когда без внешних воздействий система и ситуация остаются в данном состоянии сколь угодно долго. Равновесие может поддерживаться разнонаправленными силами, взаимодействие которое взаимно погашается, нейтрализуются и не изменяет наблюдаемые свойства системы и ситуации.

Под экономическим равновесием обычно понимают равновесие экономической системы.

Можно выделить два момента в определениях понятие равновесия экономической системы – рассмотрение свойств системы и рассмотрение взаимодействующих на нее сил. Дадим определение равновесия систем с учетом этих двух моментов.

Под равновесием экономической системы понимают такое ее состояние, которое характеризуется равенством спроса и предложения всех ресурсов.

Здесь на первый план выдвигается сбалансированность экономической системы. Равновесие и сбалансированность можно рассматривать как синонимы. Это равновесие лежит в основе балансового метода, суть которого в использовании балансов для сопоставления наличия и потребности в материальных, трудовых, финансовых ресурсах.

Под экономическим равновесием можно понимать такое ее состояние системы, когда ни один из элементов – участников системы не заинтересован в изменении этого состояния с помощью доступных ему средств, так как он не может иметь выгоды от нарушения состояния равновесия, а потерять может.

Это определение перекликается по содержанию с известным **принципом оптимальности по Парето**. Суть принципа оптимальности В. Парето состоит в том, что его критерии допускают улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшались.

Примером равновесия можно рассматривать любую платежную матрицу экономической задачи с теории игр с седловой точкой, в которой как раз и достигается экономическое равновесие, устраивающее всех участников игры. Решение задачи указывает, возможно, ли найти компромиссное решение, если возможно, то при каких условиях.

В экономических системах равновесие устанавливается под действием определенного социально-экономического механизма. Равновесие зависит от совокупности цен, экономических нормативов, выступающих в роли управляющих параметров, от принципов распределения благ и доходов.

Экономическое равновесие бывает **статическое и динамическое**. Статическое равновесие связывают обычно с точкой равновесия. **Точка равновесия** это такая точка в пространстве координат системы, которая характеризует ее **состояние равновесия в данный момент**. Под точкой равновесия можно понимать одну из **стационарных точек функции,** описывающих поведение системы. Математически все производные функции в точке равновесия обращаются в нуль.

В теории экономического равновесия **точкой равновесия** экономической системы называют набор цен, которые обеспечивают равенство спроса и предложения ресурсов в системе.

Динамическое равновесие – это сбалансированный процесс развития, уравновешенный рост. Это уже понятие теории экономического роста.

Экономическое равновесие тесно связано с **устойчивостью системы**. Устойчивое состояние равновесия открытой системы в ее взаимодействии со средой в биологии называют **гомеостазом**.

В экономико-математическое исследование экономического равновесия большой вклад внесли представители математической школы политической экономии О.Курно, Л.Вальрас, В.Парето, А.Вальд, а затем и К.Эрроу, Ж.Дебре и Дж. фон Нейман, Д.Гейл. Отечественные ученые В.К. Дмитриев, Г.А. Фельдман, Н.К. Кондратьев, В.С. Немчинов, А.Н. Ефимов, Н.П. Федоренко и др. исследовали рыночную и централизованно – планируемую экономику, создали целостную методику межотраслевого баланса и теорию оптимального функционирования экономики, основанную не на рыночном механизме установления равновесных цен, а на планово – устанавливаемых ценах для основных видов продукции и регулировании общего и рыночного равновесия.

5.4 Моделирование межотраслевых связей на макроуровне. Динамическая модель межотраслевого баланса

Схема экономико-математической модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции

Межотраслевые связи на уровне народного хозяйства обычно исследуют балансовым методом. Межотраслевой баланс – это каркасная модель экономики в которой отражаются межотраслевые связи. Межотраслевые балансы бывают стоимостные и натуральные, статические и динамические.

Основы межотраслевого баланса были заложены в процессе разработки первого баланса межотраслевых связей народного хозяйства СССР за 1923-

1924 гг. Модель межотраслевого баланса постоянно совершенствуется и сейчас известно много межотраслевых моделей.

Известный во всем мире метод экономического анализа «затраты – выпуск» разработанный В.В. Леонтьевым в своей основе имеет балансовый метод.

Рассмотрим математическую модель межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве.

Таблица 1 - Математическая модель межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	$x_{.3n}$	y_3	X_3
-	-	-	**1**	.-.	-	**II**	-
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	y_n	X_n
Оплата труда Чистый доход	V_1 m_1	V_2 m_2	V_3 III m_3	... ...	V_n m_n	$V_{кон}$ **IV** $m_{кон}$	- -
Валовая продукция	X_1	X_2	X_3	...	X_n	-	X

Динамические межотраслевые модели характеризуют развитие народного хозяйства по годам. В отличие от статических моделей они отражают не состояние, а процесс развития экономики. Статические модели не отражают распределение и использование капитальных вложений, так как в них капиталовложения вынесены из сферы производства в сферу конечного использования вместе с предметами потребления и непроизводственными расходами. В динамических межотраслевых моделях капиталовложения выделены из состава конечной продукции и рассматриваются как межотраслевые производственные потоки, обеспечивающие прирост фондов.

Таблица - Схема динамической модели межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Межотраслевые потоки текущих затрат					Межотраслевые потоки капиталовложений (прирост фондов)					Конечный продукт	Вся продукция
	1	2	3	...	n	1	2	3	..	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_1n	$\Delta\phi_{11}$	$\Delta\phi_{12}$	$\Delta\phi_{13}$	...	$\Delta\phi_{1N}$	Z_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_2n	$\Delta\phi_{21}$	$\Delta\phi_{22}$	$\Delta\phi_{23}$	...	$\Delta\phi_{2n}$	Z_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_3n	$\Delta\phi_{31}$	$\Delta\phi_{32}$	$\Delta\phi_{33}$	...	$\Delta\phi_{3n}$	Z_3	X_3
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_nn	$\Delta\phi_{n1}$	$\Delta\phi_{n2}$	$\Delta\phi_{n3}$	...	$\Delta\phi_{nn}$	Z_n	X_n

5.5 Модели хаотической динамики

5.5.1 Основные понятия и история теории хаоса, признаки хаотической системы. «Эффект бабочки»

Теория хаоса — математический аппарат, описывающий поведение некоторых нелинейных динамических систем, подверженных при определённых условиях явлению, известному как **хаос**. Поведение такой системы кажется случайным, даже если модель, описывающая систему, является детерминированной.

Примерами подобных систем являются атмосфера, турбулентные потоки, биологические популяции, общество как система коммуникаций и его подсистемы: экономические, политические и другие социальные системы. Их изучение, наряду с аналитическим исследованием имеющихся рекуррентных соотношений, обычно сопровождается математическим моделированием.

Теория хаоса — область исследований, связывающая математику, физику и философию.

Пионерами теории хаоса считаются французский физик и философ Анри Пуанкаре (доказал теорему о возвращении), советские математики А.Н. Колмогоров В.И. Арнольд, Мозер, построившие теорию хаоса, называемую КАМ (теория Колмогорова-Арнольда-Мозера). Теория вводит понятие аттракторов (в том числе, странных аттракторов как притягивающих канторовых структур), устойчивых орбит системы (т. н. КАМ-торов).

Первым исследователем хаоса был **Жюль Анри Пуанкаре.**

Одним из первых пионеров в теории хаоса был Эдвард Лоренц, интерес которого к хаосу появился случайно, когда он работал над предсказанием погоды в 1961 году.

Годом ранее **Бенуа Мандельброт** нашел повторяющиеся образцы в каждой группе данных о ценах на хлопок. Он изучал теорию информации и заключил, что структура помех подобна набору Регента: в любом масштабе пропорция периодов с помехами к периодам без них была константа — значит ошибки неизбежны и должны быть запланированы.

Мандельброт описал два явления:

- "эффект Ноя", который возникает, когда происходят внезапные прерывистые изменения, например, изменение цен после плохих новостей;
- "эффект Иосифа" в котором значения постоянны некоторое время, но все же внезапно изменяются впоследствии.

В 1978г. **Митчелл Феидженбом** издал статью "Количественная универсальность для нелинейных преобразований", где описал логистические отображения, применил рекурсивную геометрию к изучению естественных форм, таких как береговые линии. Особенность его работы в том, что он установил универсальность в хаосе и применял теорию хаоса ко многим явлениям.

В 1987 г. Джеймс Глеик издал работу **«Хаос: создание новой науки»**, которая стала бестселлером и представила широкой публике общие принципы теории хаоса и ее хронологию.

Теория хаоса прогрессивно развивалась как межпредметная и университетская дисциплина, главным образом под названием анализ нелинейных систем. «Ученые-хаотики» - так сами назвали себя некоторые авторы. Доступность более дешевых, более мощных компьютеров расширяет возможности применения теории хаоса, в эту сферу вовлекаются многие дисциплин (математика, топология, физика, биология, метеорология, астрофизика, теория информации, и т.д.).

Теория хаоса гласит, что сложные системы чрезвычайно зависимы от первоначальных условий и небольшие изменения в окружающей среде ведут к непредсказуемым последствиям.

Математические системы с хаотическим поведением являются детерминированными, то есть подчиняются некоторому строгому закону и, в каком-то смысле, являются упорядоченными. Такое использование слова «хаос» отличается от его обычного значения.

Общепринятого универсального математического определения хаоса нет, но обычно говорят, что динамическая система, которая классифицируется как хаотическая, должна иметь следующие **свойства**:

- она должна быть чувствительна к начальным условиям,
- она должна иметь свойство топологического смешивания,
- ее периодические орбиты должны быть всюду плотными.

Теорема Пуанкаре–Бендиксона доказывает, что странный аттрактор может возникнуть в непрерывной динамической системе, только если она имеет три или больше измерений. Однако это ограничение не работает для дискретных динамических систем: дискретные двух- и даже одномерные системы могут иметь странные аттракторы. Движение трёх или большего количества тел, испытывающих гравитационное притяжение при некоторых начальных условиях может оказаться хаотическим движением.

Чувствительность к начальным условиям более известна как «**Эффект бабочки**». Термин возник в связи со статьёй Эдварда Лоренца в 1972 г. «Предсказание: Взмах крыльев бабочки в Бразилии вызовет торнадо в штате Техас». Взмах крыльев бабочки символизирует мелкие изменения в первоначальном состоянии системы, которые вызывают цепочку событий, ведущих к крупномасштабным изменениям. Если бы бабочка не хлопала крыльями, то траектория системы была бы совсем другой. Этот феномен («Эффект бабочки») для системы дифференциальных уравнений, известной как система Лоренца, иллюстрируется на следующем рисунке. На начальной стадии реализация выглядит как единственная. На самом деле их много, но они очень незначительно отличаются по начальным условиям. Хорошо видно, что по истечении некоторого времени эти отличия становятся существенными. В результате картина становится «смазанной», хаотической.

Различия между случайными и хаотическими данными

Только по исходным данным трудно сказать, каким является наблюдаемый процесс — случайным или хаотическим, потому что практически не существует явного чистого «сигнала» отличия.

Чтобы отличить детерминированный процесс от стохастического, нужно знать, что детерминированная система всегда развивается по одному и тому же пути от данной отправной точки.

Таким образом, чтобы проверить процесс на детерминизм необходимо:

- выбрать тестируемое состояние;

– найти несколько подобных или почти подобных состояний;
– сравнить их развитие во времени.

5.5.2 Простые и хаотические аттракторы динамических систем. Фрактал

Аттрактор (англ. attract — привлекать, притягивать) — множество состояний (точнее — точек фазового пространства) динамической системы, к которому она стремится с течением времени. Наиболее простыми вариантами аттрактора являются притягивающая неподвижная точка (к примеру, в задаче о маятнике с трением).

Аттрактор (от англ. to attract – притягивать) – геометрическая структура, характеризующая поведение в фазовом пространстве по прошествии длительного времени. Здесь возникает необходимость определить понятие фазового пространства. Итак, **фазовое пространство** – это абстрактное пространство, координатами которого являются степени свободы системы.

Аттрактор Лоренца рассчитан на основе всего трех степеней свободы - три обыкновенных дифференциальных уравнения, три константы и три начальных условия. Однако, несмотря на свою простоту, система Лоренца ведет себя псевдослучайным (хаотическим) образом. Смоделировав свою систему на компьютере, Лоренц выявил причину ее хаотического поведения – разницу в начальных условиях. Даже микроскопическое отклонение двух систем в самом начале в процессе эволюции приводило к экспоненциальному накоплению ошибок и соответственно их стохастическому расхождению. **Фрактал** – это геометрическая фигура, определенная часть которой повторяется снова и снова, отсюда проявляется одно из свойств фрактала – **самоподобие**. Другое свойство фрактала - **дробность**. Дробность фрактала является математическим отражением меры неправильности фрактала.

Термин фрактал введен Бенуа Мандельбротом в 1977 году в его фундаментальной работе "Фракталы, Форма, Хаос и Размерность". Согласно Мандельброту, слово фрактал происходит от латинских слов fractus - дробный и frangere - ломать, что отражает суть фрактала, как "изломанного", нерегулярного множества.

5.5.3 Переход от равновесия к хаосу: бифуркация и дерево Фейгенбаума

Простые хаотические системы

Хаотическими могут быть и простые системы без дифференциальных. Примером может быть **логистическое отображение,** которое описывает изменение количества населения с течением времени. К хаосу системы могут переходить разными путями. Среди последних выделяют бифуркации, которые изучает теория бифуркаций.

Бифуркация (от лат. bifurcus - раздвоенный) - процесс качественного перехода от состояния равновесия к хаосу через последовательное очень малое изменение (например, удвоение Фейгенбаума при бифуркации удвоения) периодических точек. Обязательно необходимо отметить, что происходит качественное изменение свойств системы, т.н. катастрофический скачок. Момент скачка (раздвоения при бифуркации удвоения) происходит в точке бифуркации. Хаос может возникнуть через бифуркацию, что показал Митчел Фейгенбаум .

Бифуркационная диаграмма логистического отображения

Бифуркации возникают при переходе системы от состояния видимой стабильности и равновесия к хаосу. Примерами таких переходов являются дым, вода и многие другие самые обычные природные явления. Так, поднимающийся вверх дым сначала выглядит как упорядоченный столб. Однако через некоторое время он начинает претерпевать изменения, которые сначала кажутся упорядоченными, однако затем становятся хаотически непредсказуемыми. Фактически первый переход от стабильности к некоторой форме видимой упорядоченности, но уже изменчивости, происходит в первой точке бифуркации. Далее количество бифуркаций увеличивается, достигая огромных величин. С каждой бифуркацией функция турбулентности дыма приближается к хаосу. С помощью теории бифуркаций можно предсказать характер движения, возникающего при переходе системы в качественно иное состояние, а также область существования системы и оценить ее устойчивость.

5.5.4 Использование моделей хаотической динамики в различных областях науки и практики

Теория хаоса применяется во многих научных дисциплинах: математика, биология, информатика, экономика, инженерия, финансы, философия, физика, политика, психология и робототехника. В лаборатории хаотическое поведение можно наблюдать в разных системах, например, электрические схемы, лазеры, химические реакции, динамика жидкостей и магнитно-механических устройств. В природе хаотическое поведение наблюдается в движении спутников солнечной системы, эволюции магнитного поля астрономических тел, приросте населения в экологии и др. Есть сомнения о существовании динамики хаоса в тектонике плит и в экономике.

- Модель Рикера

- Клеточный автомат

К сожалению, само существование теории хаоса трудно совместимо с классической наукой. Обычно научные идеи проверяются на основании предсказаний и их сверки с реальными результатами. Однако, как мы уже знаем, хаос непредсказуем, когда изучаешь хаотическую систему, то можно прогнозировать только модель ее поведения. Поэтому с помощью хаоса не только нельзя построить точный прогноз, но и, соответственно, проверить его. Однако это не должно говорить о неверности теории хаоса, подтвержденной как в математических расчетах, так и в жизни. Но сейчас еще не существует математически точного аппарата применения теории хаоса для исследования рыночных цен, поэтому спешить с применением знаний о хаосе нельзя. Вместе с тем, это действительно самое перспективное современное направление математики с точки зрения прикладных исследований финансовых рынков.

ТЕМА 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

6.1 Принципы рационального ведения хозяйства и расчета оптимальной площади

1. Основные условия и факторы производства — земля, материальные ресурсы, рабочая сила — должны находиться в определенных пропорциях и быть **сбалансированными**.

2. Производственное направление хозяйства, его специализация и структура должны обязательно устанавливаться **с учетом плодородия по**чв, степени окультуренности земель, возможности последующей трансформации и улучшения угодий.

3. Устойчивое развитие любого хозяйства возможно только на основе **расширенного воспроизводства** Необходимо также обеспечить постоянный кругооборот капитала и определенные накопления, обеспечивающие дальнейшее развитие хозяйства и рост фондов потребления.

4. Хозяйство по возможности должно располагаться **на одном земельном массиве, иметь правильную форму**, рациональную конфигурацию с экологически обоснованным размещением границ и расположением хозяйственного центра ближе к середине участка.

5. По размерам земельной площади и организационно-производственной структуре хозяйство должно быть **управляемым.**

6. Учет комплекса требований, предъявляемых к любому сельскохозяйственному производству (сезонность, технологическая зависимость отраслей растениеводства и животноводства, агрономические, зоотехнические, биологические, экологические, строительно-планировочные, санитарно-гигиенические условия и ограничения).

Под **производственным параметром**, по нашему мнению, можно понимать существенное качественное свойство или состояние производственной системы, которое отражает её основные пропорции, может быть выражено количественно и использовано для характеристики производственной системы или процесса. Производственный параметр – это количественная характеристика существенных, значимых свойств производственной системы. Каждый производственный параметр выделяет данное производство среди других, показывает, чем оно отличается качественно и по количеству.

Сущность производственных параметров состоит в единстве качественной и количественной характеристик производства. Параметр отражает не любое свойство, не каждое состояние, а именно существенное, значимое, одно из основных для данной производственной системы или процесса.

- размер предприятия
- уровень специализации
- уровень концентрации производства конкретных видов продукции
- уровень эффективности производства

– технологические параметры
– уровень интенсивности производства

Количественная оценка параметров предприятия осуществляется через **систему показателей**. Параметры функционирующего предприятия можно получить на основе учетных данных, а рациональные на перспективу необходимо рассчитать.

6.2. Структурная модель экономико-математической задачи оптимизации параметров аграрного предприятия

Требуется найти параметры, обеспечивающие получение максимума прибыли

$$C = \sum_{j \in J_7} x_j - \sum_{j \in J_{19}} x_j \to \max \qquad \textbf{(1)}$$

При условиях:

1. Ограничения по численности работников хозяйства и использованию трудовых ресурсов.

В модели численность работников задается:

$$\mathbf{x_j = B_i}, \text{ где } \mathbf{j \in J_1, i \in I_1} \qquad \textbf{(2)}$$

Ограничения по использованию трудовых ресурсов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \textbf{где } \mathbf{i \in I_1} \qquad \textbf{(3)}$$

2.Ограничения по поголовью животных.

2.1По покупке необходимого поголовья коров

$$\sum_{j \in J_2} x_j \ge 0 \qquad \textbf{(4)}$$

2.2 По минимально-допустимому уровню концентрации поголовья

$$\sum_{j \in J_2} x_j \ge b_i \quad \textbf{где } \mathbf{i \in I_2} \qquad \textbf{(5)}$$

2.3 По поголовью приплода

$$\sum_{j \in J_2} w'_{ij} x_j - \sum_{j \in J_2} w''_{ij} x_j = 0 \quad \textbf{где } \mathbf{i \in I_2} \qquad \textbf{(6)}$$

3.Условия по земельным ресурсам, посевным площадям и севооборотам, зеленому конвейеру, сохранению почвенного плодородия.

3.1 Ограничения по земельным ресурсам

$$\sum_{j \in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_1} dx_j - \sum_{j \in J_3} x_j \le 0 \quad \textbf{где } \mathbf{i \in I_3} \qquad \textbf{(7)}$$

3.2 Требования севооборотов

$$\sum_{j\in J_3} w'_{ij} x_j - \sum_{j\in J_3} w''_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} 0 \quad \text{где } i\in I_3 \qquad (8)$$

3.3 Ограничения по зеленому конвейеру

$$\sum_{j\in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J4} x_j = 0 \quad \text{где } i\in I_3 \qquad (9)$$

3.4 Ограничения по органическим удобрениям и сохранению почвенного плодородия

$$\sum_{j\in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_3} a_{ij} x_j \ge 0 \qquad (10)$$

4.Ограничения по кормам в натуре

$$\sum_{j\in J_3} v_{ij} x_j - \sum_{j\in J_4} x_j = 0 \quad \text{где } i\in I_4 \qquad (11)$$

5. Баланс питательных элементов и структура рационов

$$\sum_{j\in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_3} v_{ij} x_j \le 0 \quad \text{где } i\in I_5 \qquad (12)$$

6. Условия по определению производственного и коммерческого потенциала, объемов производства продукции в натуральном выражении

$$\sum_{j\in J_2} v_{ij} x_j - \sum_{j\in J_2, J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_6} x_j = 0 \quad \text{где } i\in I_6 \qquad (13)$$

7. Условия по расчету коммерческого потенциала, денежной выручки от реализации продукции

$$\sum_{j\in J_6} c_j x_j - \sum_{j\in J_7} x_j = 0 \qquad (14)$$

или

$$\sum_{j\in J_2, J_3} v_{ij} c_j x_j - \sum_{j\in J_7} x_j = 0 \quad \text{где } i\in I_7 \qquad (15)$$

8. Определение затрат на производство кормов

$$\sum_{j\in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_8} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_8 \qquad (16)$$

9. Расчет потребности в основных фондах

$$\sum_{j\in J_2} a_{ij} x_j + \sum_{j\in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_9} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_9 \qquad (17)$$

10. Затраты на зооветеринарное обслуживание

$$\sum_{j\in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_{10}} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_{10} \qquad (18)$$

11. Страховые платежи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_{11}} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_{11} \qquad (19)$$

12. Отчисления и платежи на социальное страхование, в пенсионный фонд, на медицинское страхование, местные налоги

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_{12}} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_{12} \qquad (20)$$

13.Определение затрат на горючее и смазочные материалы, энергию и водоснабжение

$$\sum_{j\in J_2} a_{ij} x_j + \sum_{j\in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_{13}} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_{13} \qquad (21)$$

14. Определение сумм амортизационных отчислений

$$\sum_{j\in J_9} a_{ij} x_j - \sum_{j\in J_{14}} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_{14} \qquad (22)$$

15. Определение сумм краткосрочного кредита

$$\sum_{j\in J_1} x_j + \sum_{j\in J_3} c_j x_j + \sum_{j\in J_8} x_j + \sum_{j\in J_{10}} x_j + \sum_{j\in J_{11}} x_j + \sum_{j\in J_{12}} x_j + \sum_{j\in 13} x_j - \sum_{j\in 15} x_j = 0 \qquad (23)$$

16.Определение сумм кредита на приобретение основных средств

$$\sum_{j\in J_2} c_j x_j + \sum_{j\in J_9} x_j - \sum_{j\in J_{16}} x_j = 0 \qquad (24)$$

Для этих условий в модели отводится $i\in I_{16}$ строк.

17. Годовой возврат ссуд и уплата процентов за пользование кредитом

$$\sum_{j\in J_{15}} (k_{ij}+1) x_j + \sum_{j\in J_{16}} (k_{ij}+k'_{ij}) x_j - \sum_{j\in J_{17}} x_j = 0 \qquad \text{где } i\in I_{17} \qquad (25)$$

18. Расходы на внутрихозяйственные перевозки

$$\sum_{j=1}^{n} s c_j x_j - \sum_{j\in J18} x_j = 0 \qquad (26)$$

$$s = \alpha \sqrt{x_j} \qquad \text{где} \quad j\in J_3 \qquad (27)$$

α - коэффициент, учитывающий конфигурацию участка и дорожной сети

19. Производственные затраты и ежегодные платежи хозяйства

$$\sum_{j\in J_1} c_j x_j + \sum_{j\in J_3} c_j x_j + \sum_{j\in J_8} x_j + \sum_{j\in J_{10}} x_j + \sum_{j\in J_{11}} x_j + \sum_{j\in J_{12}} x_j + \sum_{j\in J_{13}} x_j + \sum_{j\in J_{14}} x_j + \sum_{j\in J_{15}} k_{ij} x_j + \sum_{j\in J_{18}} x_j - \sum_{j\in J_{19}} x_j = 0 \qquad (28)$$

Для этих условий в модели отводится $i\in I_{19}$ строк.

20. Определение стартовой суммы капитала

$$\sum_{j\in J_9} x_j + \sum_{j\in J_{19}} x_j - \sum_{j\in J_{14}} x_j - \sum_{j\in J_1} (q+1)x_j - \sum_{j\in J_{20}} x_j = 0 \qquad (29)$$

Для этих условий в модели отводится $i\in I_{20}$ строк.

21. Условия не отрицательности переменных

$$x_j \geq 0 \qquad (30)$$

6.3 Математическое моделирование управления системами массового обслуживания

6.3.1 Марковские процессы

Теория массового обслуживания изучает случайные процессы. **Случайный процесс** – это такой процесс, течение которого может быть различным в зависимости от случая, причем вероятность того или иного течения определена. Случайные процессы можно рассматривать как множество реализаций случайной функции, либо как последовательность случайных величин, заданных в различные моменты времени.

Из случайных процессов в теоретическом и прикладном плане лучше других исследованы марковские процессы.

Марковские процессы – это специальный вид случайных процессов, суть которых предполагает, что при известном настоящем будущее не зависит от прошлого. Например, распад радиоактивного вещества: вероятность распада данного атома за малый промежуток времени не зависит от значения процесса в предшествующий период. Теория марковских процессов возникла на основе исследований А. А. Маркова (старшего).

Классы марковских процессов:

- Марковские процессы, дискретные в пространстве и во времени
- Марковские процессы, дискретные в пространстве и непрерывные во времени
- Марковские процессы, непрерывные как в пространстве состояний, так и во времени

6.3.2 Основные элементы и понятия теории массового обслуживания

Системы обслуживания существуют реально в производстве, быту, медицине, военном деле, науке, повседневной жизни и т.п.

Теория массового обслуживания - это раздел исследования операций, прикладная область случайных процессов, рассматривающая разнообразные явления как процессы обслуживания.

Предметом исследования теории массового обслуживания являются вероятностные модели реальных систем обслуживания, в которых в определенные моменты времени (случайные или неслучайные) возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок.

Задачи массового обслуживания возникают тогда, когда объекты, требующие обслуживания или самообслуживающее оборудование могут оказаться бездействующими. Собственно, ситуация в том, что желающих обслужиться слишком много, и очередь для обслуживания длинна, а время ожидания слишком велико.

Большой вклад в развитие теории массового обслуживания внесли также советские ученые Б.В. Гнеденко, Н.П. Бусленко, И.Н.Коваленко. Активно эти проблемы изучаются и за рубежом, в науку внесены существенные результаты многими зарубежными авторами.

Примерами массового обслуживания можно рассматривать: обслуживание кораблей в порту, их разгрузка, погрузка, обслуживание клиентов в прачечной, прием больных у врача, обслуживание станков бригадой ремонтников, очереди в магазинах, билетных кассах, скопление – самолетов на посадку над аэродромами, система противовоздушной обороны и т. п.

Во всех приведенных примерах речь идет об очередности обслуживания. Ряд авторов употребляют понятие теория массового обслуживания, другие авторы – **теория очередей**, причем, некоторые трактуют эти понятия как равнозначные. В большинстве работ теория очередей все же рассматривается как часть теории массового обслуживания, как ее самостоятельный раздел.

В теории массового обслуживания изучаются системы не только с очередями, а и **системы с отказами**, когда очередь не образуется, то есть теория очередей уже теории массового обслуживания. С таким утверждением трудно не согласиться.

Основные понятия теории массового обслуживания

- Входящий поток
- Организация очереди
- Структура обслуживающей системы
- Выходящий поток

6.3.3 Замкнутые и разомкнутые системы обслуживания

Системы с ожиданием подразделяют **на замкнутые и разомкнутые**.

Замкнутой система называется тогда, когда входящий поток требований у нее ограничен.

Задача об обслуживании станков.

В цехе имеется n станков и бригада из m человек, обслуживающая эти станки. Станок, работающий в момент времени t, отказывает к моменту t+x с вероятностью $F(x)=1-e^{1x}$, l>0. Время обслуживания станка – случайная величина η с функцией распределения F(x). Для такой системы можно вычислить распределение и среднее число простаивающих рабочих. Эти характеристики можно использовать для оптимизации состояния между n и m. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальную нагрузку на одного наладчика.

Литература

1. Бурда А. Г. Математическое моделирование в управлении плодоводческими предприятиями / А. Г. Бурда, С. Н. Косников. Учеб.-метод. пособие. – Краснодар, 2012. – 101 с.
2. Бурда А.Г., Бурда Г.П., Гусельникова А.А. Математическая экономика. Учебное пособие для вузов. Краснодар, КГАУ, 2009 г., 2010 г.
3. Бурда Г.П., Бурда Ал.Г., Бурда Ан.Г. Моделирование экономики. Учебное пособие для вузов. В 2 частях. Часть I. Основы моделирования и оптимизации экономики. Часть II. Методы моделирования производства и рынка - Краснодар: КГАУ, 2005.
4. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под ред. П. В. Трусова. - М.: Логос, 2005. - 440 с.
5. Власов, М.П. Моделирование экономических процессов: учеб. пособие / М.П. Власов, П.Д. Шимко – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 410 с.
6. Журнал «Математическое моделирование» (основан в 1989 г.).
7. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие. – М.: Издательство Дело АНХ, 2008
8. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. - 496 с. 2-е изд. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI).
9. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Питер, 2010 – 496 с.
10. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики М. Физматлит. 2004. - 320 с.
11. Математические методы и модели исследования операций / под ред. Колемаева. - Изд-тво: Юнити-Дана, 2007 г. 592 с.
12. Математические модели природы и общества. Монография. Калиткин Н.Н. и др.М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 360 с.
13. Параметризация, моделирование и оптимизация конкурентоспособного АПК: монография /А. И. Трубилин, А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, И. М. Благивский, С. Н. Косников, В. В. Кочетов, Е. А. Метельская, С. И. Турлий, О. Ю. Франциско // под руководством и редакцией академика РАСХН, доктора экономических наук, профессора И. Т. Трубилина. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – 630 с.
14. Плохотников К.Э. Метод и искусство математического моделирования: курс лекций. – М.: Флинта. – 2012. - 519 с.
15. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике Университет, Высшая школа, 2002 – 288с.
16. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005 г.
17. Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник: Учеб. Пособие для вузов / Под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Высш. Шк., 2004 – 616 с.
18. Советов Б. Я., Яковлев С. А., Моделирование систем: Учеб. для вузов — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 2001.
19. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. —912 с.
20. Чураков, Е.П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике: учеб. пособие / Е.П. Чураков –М. Финансы и статистика, 2004. 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БУРДА Алексей Григорьевич
БУРДА Григорий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Краткий курс лекций

Электронный ресурс

В авторской редакции

Формат $60 \times 84\ ^1/_8$.
Усл. печ. л. – 4,53. Уч.-изд. л. – 2,66.