

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. С. Белюченко, А. В. Смагин,
Л. Б. Попок, Л. Е. Попок

АНАЛИЗ ДАННЫХ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЭКОЛОГИИ
И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИИ

Учебное пособие

Краснодар
КубГАУ
2015

УДК 504.75:004.9(075.8)

ББК 28.081

А64

Р е ц е н з е н т ы :

Д. С. Дзыбов – доктор биологических наук, профессор
(Ставропольский НИИСХ ФАНО России);

А. Х. Шеуджен – доктор биологических наук, академик
(Кубанский государственный аграрный университет)

**А64 Анализ данных и математическое моделирование в
экологии и природопользовании: учеб. пособие /**

И. С. Белюченко, А. В. Смагин, Л. Б. Попок, Л. Е. Попок.
– Краснодар: КубГАУ, 2015. – 313 с.

ISBN 978-5-94672-935-2

Цель учебного пособия – ознакомить студентов с основными принципами обработки экологических данных и типами математических моделей, применяемых при анализе экологических систем и решении задач природопользования.

В учебном пособии описаны основные принципы систематизации и статистической обработки экологических данных, а также построения математических моделей в различных отраслях экологии.

Издание предназначено для преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов, обучающихся по экологическим дисциплинам.

УДК 504.75:004.9(075.8)

ББК 28.081

ISBN 978-5-94672-935-2

© ФГБОУ ВПО «Кубанский
государственный аграрный
университет», 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным методом исследования в экологии является системный анализ, при котором используется математический аппарат теории исследования операций, методы многомерной статистики и компьютерное моделирование.

Разработка методов системного анализа как научной дисциплины ведется по нескольким направлениям. Важнейшим из них является создание принципов построения и использования моделей, имитирующих протекание реальных процессов, способов их объединения в системы и такого представления в ЭВМ, которое обеспечивало бы простоту их использования без потери адекватности.

Трудности практического применения моделирования в экологии связаны с наполнением содержания моделей конкретной и качественной информацией. С одной стороны, точность и полнота первичной информации, реальные возможности ее сбора и обработки во многом определяют выбор типов прикладных экологических моделей, с другой – исследования по моделированию экологических объектов выдвигают новые требования к системе информации. Такая информация должна обладать определенной точностью, что связано с проблемой выбора экологических показателей, которые можно было бы использовать в моделировании и получать результаты, пригодные для оценки объектов, выбранных для исследования.

В предлагаемом пособии сделана попытка обобщить накопленный опыт изучения и применения количественных методов анализа экологических данных, а также приводятся базовые модели, и дается их анализ для исследования экологических систем.

Рекомендовано Учебно-методическим советом по почвоведению при УМО МГУ по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов ВУЗов, обучающихся по направлениям «Экология и природопользование», «Почвоведение»

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ, ИХ СУЩНОСТЬ И ПРИНЦИПЫ

1.1 Основные аспекты системных исследований

Реальность, окружающая человека огромна. Исследовать ее в целом и теоретически, и практически невозможно. Поэтому в каждом случае из окружающей человека реальности выделяется некоторая ее часть, которая получила название «система». Полное и правильное представление о системе можно получить, лишь осуществив ее *исследование в трех аспектах: предметном, функциональном и историческом* (рисунок 1.1).

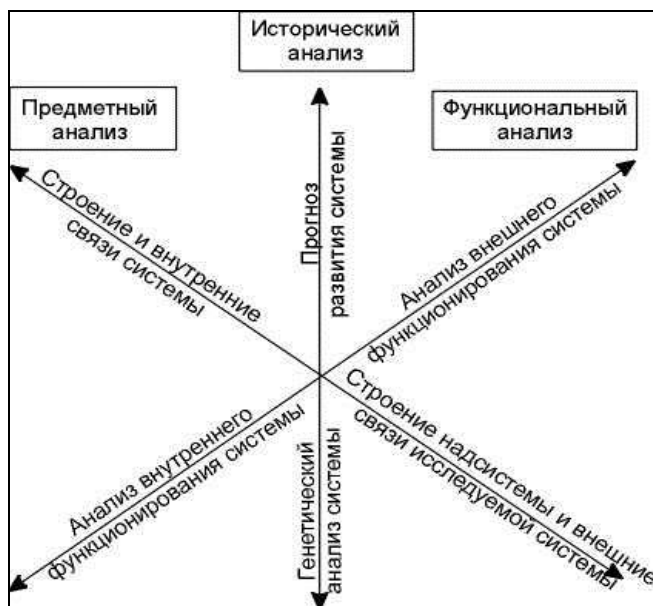


Рисунок 1.1 – Аспекты системных исследований

Целью *предметного анализа* является ответ на два вопроса:

Из чего состоит наша система? (Элементный анализ).

Как связаны между собой компоненты системы? (Структурный анализ).

Такое описание системы называется *морфологическим*.

Морфологическое описание системы – описание строения или структуры системы: описание совокупности A элементов этой системы и необходимого для достижения цели набора отношений R между ними.

Морфологическое описание задается кортежем:

$$S = \langle A, B, R, V, Q \rangle,$$

где A – множество элементов и их свойств;

B – множество отношений с окружающей средой;

R – множество связей в A ;

V – структура системы, тип этой структуры;

Q – описание, представление системы на каком-либо языке.

Очевидно, строгое разделение (и тем более противопоставление) компонентного и структурного анализа невозможно ввиду их диалектического единства, поэтому на оси предметного анализа эти виды исследований проводятся параллельно.

Пример. Морфологическое описание экосистемы может включать, в частности, структуру обитающих в ней хищников и жертв (система типа «хищники – жертвы»), их трофическую структуру (структуру типа «кто кого поедает?»), их свойства, связи и отношения. Трофическая структура рассматриваемой ниже экосистемы – одноуровневая, то есть хищники и жертвы образуют две непересекающиеся совокупности X и Y со свойствами $S(X)$ и $S(Y)$. Возьмем в качестве языка Q морфологического описания русский язык с элементами алгебры. Тогда можно предложить следующее

упрощенное модельное морфологическое описание этой экосистемы:

$$S = \langle A, B, R, V, Q \rangle,$$

$A = \{\text{человек, тигр, коршун, щука, баран, газель, пшеница, кабан, клевер, полевая мышь (полевка), змея, желудь, карась}\};$

$X = \{\text{человек, тигр, коршун, щука, кабан, змея, баран}\};$

$Y = \{\text{газель, пшеница, клевер, полевка, желудь, карась}\};$

$S(X) = \{\text{пресмыкающееся, двуногое, четырехногое, плавающее, летающее}\};$

$S(Y) = \{\text{живое существо, зерно, трава, орех}\};$

$B = \{\text{обитатель суши, обитатель воды, растительность}\};$

$R = \{\text{хищник, жертва}\}.$

Этим, однако, предметный анализ не исчерпывается. Необходимо еще установить место рассматриваемой системы в надсистеме и выявить все ее связи с другими элементами этой надсистемы. На этой стадии предметного анализа ищут ответы на другую пару вопросов:

Из чего состоит надсистема, в которую входит, наша система?

Как в надсистеме наша система связана с другими?

Рассмотрим второй аспект системного исследования – *функциональный*. Фактически это анализ динамики тех связей, которые были выявлены и идентифицированы на этапе предметного анализа. Функциональное исследование отвечает на вопросы:

Какую функцию выполняет данный компонент системы? (Для внутреннего функционирования).

Какую функцию выполняет наша система в данной надсистеме? (Для внешнего функционирования).

Пример. Если использовать результаты популяционной динамики (раздела математики, изучающей динамику, эволюцию популяций), то можно, используя приведенное морфологическое описание системы, записать адекватное функциональное описание системы. В частности, динамику

взаимоотношений в этой системе можно записать в виде уравнений Лотки – Вольтерра:

$$x'_i(t) = x_i(t)(a_i - \sum_{j=1}^7 b_{ij}x_j(t)), \quad x'_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (1.1)$$

где $x_i(t)$ – численность (плотность) i -й популяции в момент времени t ;
 $x'_i(t)$ – численность (плотность) i -й популяции в момент времени $t+1$ (при непрерывном рассмотрении – первая производная $x_i(t)$);
 b_{ij} – коэффициент поедания i -го вида жертв j -м видом хищников (коэффициент прожорливости);
 a_i – коэффициент рождаемости i -го вида.

Из функционального описания системы получают *информационное описание системы* – описание информационных связей как системы с окружающей средой (внешнее описание), так и подсистем системы (внутреннее описание). Внутреннее описание дает информацию о поведении системы, о соответствии (несоответствии) внутренней структуры системы целям, подсистемам (элементам) и ресурсам в системе, внешнее описание – о взаимоотношениях с другими системами, с целями и ресурсами других систем.

Пример. Рассмотрим систему «Река» (без притоков). Представим ее в виде пронумерованных участков реки (камер, подсистем) так, как это изображено на рисунке 1.2.

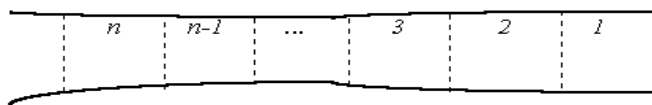


Рисунок 1.2 – Модель реки (течение реки – от 1 до n)

Внутреннее описание системы (каждой подсистемы) может иметь вид:

$$x(t + 1, i) = x_i(t, i) - a(t, i)x(t, i) + b(t, i) - c(t, i)x(t, i), \quad (1.2)$$

где $x(t, i)$ – объем воды в i -й камере в момент времени t ;
 $a(t, i)$ – коэффициент грунтового просачивания воды;
 $b(t, i)$ – осадки;
 $c(t, i)$ – испарение с поверхности камеры;
 a, b, c – входные параметры.

Внешнее описание системы может иметь вид:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n (k(x, t, i)a(t, i) + l(x, t, i)b(t, i)), \quad x(0) = s, \quad (1.3)$$

где $k(x, t, i)$ – коэффициент, учитывающий влияние грунтового просачивания (структуру дна, берега реки);
 $l(x, t, i)$ – коэффициент, учитывающий влияние осадков (интенсивность осадков);
 $X(t)$ – объем воды в реке (у стока, у края последней камеры номер n).

Историческое исследование тоже относится к динамике, но уже к другой – к динамике развития системы. Жизненный цикл любой системы разделяют на несколько этапов: возникновение, становление, эволюция, разрушение или преобразование. Историческое исследование предполагает проведение генетического анализа, при котором прослеживается история развития системы и определяется текущая стадия ее жизненного цикла, и прогностического анализа, намечающего пути ее дальнейшего развития.

1.2 Сущность системного подхода

Системный подход – это совокупность методологических принципов, выработанных на основе обобщения опыта работы со сложными системами. Используя этот термин, подчеркивают необходимость исследования объекта с разных сторон, комплексно, в отличие от разделения исследований, например, на физические, химические, биологические, географические.

Очень важно понять преимущество взгляда на этот мир с позиций системного подхода: возможность ставить и решать, по крайней мере, две задачи:

1. Расширить и углубить собственные представления о «механизме» взаимодействий объектов в системе; изучить и, возможно, открыть новые ее свойства.

2. Повысить эффективность системы в том плане ее функционирования, который интересует нас больше всего.

Для экологов наибольший интерес представляют, естественно, экологические системы. *А глобальная задача системного подхода заключается в совершенствовании процесса управления экологическими системами.* Экологуспециалисту в своей профессиональной деятельности приходится учитывать множество факторов при анализе экологических явлений и тем более, при планировании любых вмешательств в экосистемы. Поэтому необходимо не только располагать сведениями из других наук, но и уметь грамотно их использовать. Важно также уметь пользоваться необходимой информацией из различных отраслей хозяйства и свойственных им технологических процессов. Ведь кроме знаний по специальности, для анализа систем нужно владеть методологией системного подхода. При решении реальной проблемы наиболее эффективна работа тандема: методолога-системщика и традиционного специалиста-предметника. Не сразу этот тандем становится работоспособным. Если же пробелы в специальных знаниях по исследуемому явлению будут восполняться помощью предметника (в крайнем случае, справочником или учебником по нужному предмету), то результат обязательно будет получен.

Предположим, что по отношению к некоторой системе все формальные вопросы описания уже благополучно решены. Что же дальше?

А дальше надо системой управлять – точнее решать вопрос об алгоритме или тактике управления для достижения

наибольшей эффективности. Скорее всего, именно в этой области и должно быть сосредоточено поле профессиональной деятельности специалиста-эколога, связанное с решением обострившихся в наше время экологических проблем.

Управление представляет собой такую организацию какого-либо процесса, которая обеспечивает достижение определенных целей.

1.3 Математизация экологии

В настоящее время большинством исследователей экология рассматривается как междисциплинарная область знаний обо всех аспектах взаимодействия природы, общества и человека. Венцом отраслевых экологий является *математическая экология*, которая старается формализовать изучение состояний, процессов и связей в биосфере, создать математические модели минувших, сегодняшних и будущих экосистем. Многообразие представлений об элементах экологии и возможных взаимозависимостях позволяет эффективно применять современные методы системного анализа, комплексного компьютерного моделирования, компьютерной постановки, решения и интерпретации результатов соответствующих задач.

Развитие любой науки начинается с целенаправленного накопления фактов, сбора информации. Поскольку задача науки состоит в объяснении законов природы, одновременно с накоплением фактов происходит их классификация, систематизация, попытка установления взаимосвязей между объектами и явлениями. На каждом из первых трех этапов, которые вместе могут быть охарактеризованы как описательные, есть место для математики. И не просто место, а важная роль!

Накопление фактов можно существенно рационализировать, используя развитый в математике *метод планирования эксперимента*. Объективная классификация немислима без

современного *кластерного анализа, теории распознавания образов*. При поиске взаимосвязей между изучаемыми объектами или явлениями не обойтись без *корреляционного анализа* и других *методов статистики*.

Регулярно в процессе развития науки возникают ситуации, когда знания, накопленные на описательных этапах развития, позволяют выделять некие главные или определяющие величины. Успешный выбор этих величин чрезвычайно важен для перехода от описательного знания к точному, для создания возможности построения математических моделей различных процессов, явлений.

Этап математического моделирования, венчающий переход науки в разряд точных, базируется на «двух китах» – знании определяющих величин и фактов конкретной науки и знании языка и методов математики, позволяющем строить модели.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ НАУКАХ

2.1 Проблематика экологических исследований

Как указывает профессор СПбГУ А. К. Бротский, борьба с различными формами загрязнения биосферы – проблема, лишь условно относимая к экологическим.

Собственно экологическими являются следующие важные проблемы, на изучение которых должны быть направлены усилия экологов в первую очередь.

1. Проблема нормирования допустимого уровня антропогенной нагрузки на конкретные экосистемы. Сущность экологического нормирования заключается в разработке критериев, оценивающих степень влияния антропогенных факторов на устойчивость и биоразнообразие экосистем. Решение этой задачи лежит в изучении адаптации конкретных видов к различным воздействиям на уровне организмов, популяций и целых сообществ.

2. Экологические механизмы адаптации к среде. Особое значение приобретают вопросы, связанные со способами приспособления популяций к крайним условиям, например, к холоду, сухости, высоким температурам. Результаты таких исследований направлены на освоение человеком экстремальных ландшафтов – арктических, пустынных, высокогорных.

3. Регуляция численности популяций. Эта проблема лежит в основе разработки комплекса мероприятий, направленных на управление динамикой численности вредителей сельского и лесного хозяйства, переносчиков болезней человека и сельскохозяйственных животных, а также численности промысловых и разводимых видов. На основе этих исследований базируется планирование масштабов промысла, прогнозирование результатов изъятия особей из популя-

ций в разных условиях. Эти вопросы имеют первостепенное значение для рыбного хозяйства и сельскохозяйственного производства.

4. *Управление производственными процессами.* Решение этой проблемы лежит в основе мероприятий, направленных на рационализацию использования биологических ресурсов. Эта проблема включает следующие моменты: количественная характеристика энергетического потока на разных трофических уровнях; продукционная эффективность различных звеньев пищевых цепей; факторы, влияющие на направление производственного процесса; роль структуры сообществ в производственно-энергетических отношениях.

5. *Устойчивость природных и антропогенных ценозов.* Эта проблема связана с теорией сукцессий, с вопросами видового разнообразия и специфики ценологических отношений. В перспективе – оптимальное сочетание устойчивых и неустойчивых экосистем, использование регуляторных механизмов в агроценозах. Такие исследования позволят в будущем создавать принципиально новые структурные единицы – природно-хозяйственные комплексы с чертами устойчивости, стабильности, максимальной эффективности производственного процесса.

2.2 Основные направления экологических исследований

В современной экологии для анализа экосистем и решения экологических проблем используют четыре группы методов исследований – полевые наблюдения; эксперименты в поле и лаборатории; моделирование и прогноз (рисунок 2.1).

Полевые наблюдения – метод непосредственного изучения экосистемы или ее определенных компонентов в естественных условиях без вмешательства экспериментатора в ее состав и функционирование, даже если в исследованиях

применяют какую-либо аппаратуру. То есть изучение популяций видов, их сообществ и экотопа в естественной обстановке, непосредственно в природе.

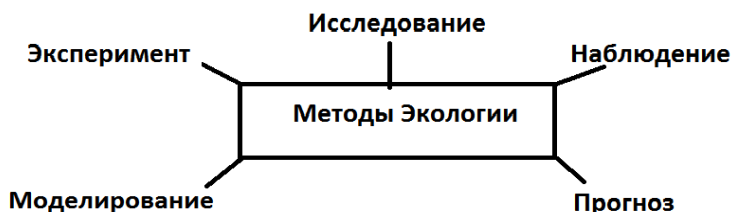


Рисунок 2.1 – Методы экологии

2.3 Полевые наблюдения

Полевые исследования для эколога имеют первостепенное значение. При этом обычно используются методы физиологии, биохимии, анатомии, систематики и других биологических наук. Наиболее тесно экологические исследования связаны с физиологическими. Однако между ними имеется принципиальная разница. Физиология изучает функции организма и процессы, протекающие в нем, а также влияние на эти процессы различных факторов. Экология же, используя физиологические методы, рассматривает реакции организма как единого целого на совместное воздействие этих факторов. При этом строго учитывается сезонная цикличность жизнедеятельности организма и внутривидовая разнородность.

Среди полевых наблюдений так же распространен эколого-географический метод, который предполагает применение ландшафтных исследований. При проведении таких исследований решаются следующие задачи:

– выделение основных типов экосистем и их взаимосвязей в изучаемом ландшафте;

– определение видового состава организмов, населяющих экосистему, установление соответствующего ей микроклимата, типа почвы, почвообразующих пород, характера гидрологического режима;

– установление связей организмов с почвой, приземным слоем воздуха и другими неживыми компонентами экосистемы, а также их взаимодействия между собой;

– получение качественных показателей состава экосистемы, например, определение содержания в почве биогенных элементов, воды, ее температуры и т. д.;

– количественное описание функциональных связей между компонентами экосистемы и внешних воздействий на нее. В качестве примера можно привести установление следующих зависимостей: интенсивности фотосинтеза от температуры, влажности, обеспеченности биогенными элементами; выяснение зависимости скорости выедания растений растительноядными животными от количества и качества фитомассы, от плотности и состояния самой популяции, от метеорологических условий;

– комплексное описание сопряженной динамики всех компонентов системы в сезонном, годовом и многолетнем масштабе, которое могло бы служить основой для анализа закономерностей функционирования данной экосистемы в сравнении с другими экосистемами.

Непрерывные наблюдения в течение достаточно длительных интервалов времени принято называть *мониторингом*. Современный мониторинг экосистем и их отдельных компонентов часто проводится в автоматическом режиме и составляет основу моделей динамики природных объектов и прогноза их изменений под действием тех или иных факторов. Однако понятие мониторинга шире, чем полевые наблюдения; он может использоваться и в экспериментальных исследованиях.

2.4 Экспериментальные методы

Исследования, связанные с вмешательством в состав или структуру экосистемы (введение дополнительных факторов – внесение удобрений, химических средств борьбы с вредными видами, орошение, осушение, отстрел животных и др.), называются *экспериментами*.

Задачей эксперимента является выяснение причин наблюдаемых в природе отношений. Экспериментальные методы позволяют проанализировать влияние на развитие организма отдельных факторов в искусственно созданных условиях и таким образом изучить все разнообразие экологических механизмов, обуславливающих его нормальную жизнедеятельность.

Эксперимент в природе отличается от наблюдения тем, что организмы искусственно ставятся в условия, при которых можно строго дозировать тот или иной фактор и точнее, чем при наблюдении, оценить его влияние.

Эксперимент может носить и самостоятельный характер. Например, результаты изучения экологических связей насекомых дают возможность установить факторы, влияющие на скорость развития, плодовитость, выживаемость ряда вредителей (температура, влажность, пища).

В экологическом эксперименте трудно воспроизвести весь комплекс природных условий, но изучить влияние отдельных факторов на вид, популяцию или сообщество вполне возможно.

Примером экологических экспериментов широких масштабов могут служить исследования, проводимые при создании лесозащитных полос, при мелиоративных и различных сельскохозяйственных работах. Знание при этом конкретных экологических особенностей многих растений, животных и микроорганизмов позволяет управлять деятельностью тех или иных вредных или полезных организмов.

Различают *пассивные* и *активные* эксперименты.

Пассивные эксперименты (анализ изменений экосистем в уже существующем градиенте нагрузки, например, регистрация параметров биоты на разном расстоянии от точечного источника эмиссии поллютантов) характеризуются отсутствием влияния исследователя на изменение уровней факторов. К такого рода задачам относятся задачи экологического мониторинга загрязнения окружающей среды.

В этом случае исследователь выступает как бы в роли наблюдателя, не вмешиваясь в ход эксперимента. Эти эксперименты могут проводиться при однократном возмущении экосистемы, и тогда экспериментатор наблюдает только за динамикой ее поведения, которая может проявляться на фоне всевозможных, часто нежелательных с его точки зрения, воздействий. При пассивном эксперименте можно получить данные, позволяющие:

- высказать мнение о предполагаемой форме связи по статистическим данным в результате наблюдений;
- выделить основные факторы, оказывающие влияние на изменчивость изучаемой функции отклика.

Активные эксперименты предполагают влияние исследователя на изменение факторов, то есть исследователь может контролировать все параметры на протяжении всего опыта (например, внесение в природную среду определенных количеств поллютантов, моделирование рекреационной нагрузки). Они характеризуются одновременным варьированием всех факторов, действующих на целевую функцию.

В зависимости от места проведения опыты подразделяют на *полевые* и *лабораторные*. Полевые опыты практически неконтролируемы, так как действие экспериментатора на многие факторы ограничено. В лабораторных опытах можно обеспечить контроль большего числа факторов (например, определение минимально действующих доз поллютантов для одного или нескольких видов и перенесение

найденных величин на уровень всей экосистемы). Тем не менее, многие из них следует отнести к частично контролируемым. Наиболее полный контроль изучаемых факторов достигается в сложных лабораторных экспериментах.

Различают *однофакторные* или *многофакторные* эксперименты. Классической и наиболее распространенной схемой проведения естественнонаучного эксперимента считается однофакторный опыт, сущность которого состоит в определении влияния изучаемого фактора на фоне фиксированных остальных факторов, то есть используется так называемый принцип «единственного различия».

Однако в естественных условиях однофакторный экологический опыт провести практически невозможно. Для этой цели больше подходят многофакторные эксперименты. Сущность их заключается в том, что исследователь изменяет не один, а сразу несколько факторов. Это позволяет при последующей математической обработке получить многофакторное описание изучаемого процесса.

Кроме специально спланированных опытов, большой вклад в развитие экологической теории внесло обобщение результатов непреднамеренных «экспериментов» с экосистемами, которые были следствием естественных природных процессов или деятельности человека. В настоящее время считается, что изучение сложных систем, к которым относится и экосистема, наиболее эффективно при сочетании экспериментального метода и моделирования. Моделирование тесно связано с таким научным подходом как прогнозирование.

2.5 Прогнозирование

Одна из задач системной экологии – предсказать или прогнозировать. Это значит, что необходимо ответить на вопрос, что произойдет при определенных обстоятельствах

с теми или иными организмами, популяциями и сообществами, их экотопом. На основе таких предсказаний мы пытаемся управлять экологической ситуацией и извлекать из них пользу. Так, например, предсказав сроки будущего нашествия саранчи, мы можем принять соответствующие меры и тем самым уменьшить ожидаемый ущерб. Предвидя наступление условий, благоприятных для посевов и неблагоприятных для вредителей, мы стремимся сберечь урожай. Намечая подходящий природоохранный режим, мы можем не допустить исчезновения редких видов.

В какой-то мере предсказание и управление возможны и без объяснения или понимания, но достоверные и точные предсказания и, особенно, в необычных обстоятельствах, возможны только тогда, когда мы в состоянии еще и объяснить происходящее.

Важно уяснить, что в биологии вообще и в экологии в частности сосуществуют два различных класса объяснений – непосредственные (выяснение механизмов) и конечные (поиск причин возникновения таких механизмов). Например, наблюдаемое распространение и численность птиц какого-либо вида можно объяснить на основе данных о физических условиях, которые могут переносить эти птицы, спектр потребляемых кормов, воздействие паразитов и хищников. Это непосредственное объяснение. Правомерен, впрочем, и следующий вопрос: как птицы этого вида приобрели те самые черты, которые сейчас навязывают им определенный образ жизни. На него придется отвечать объяснением, привлекающим эволюционные понятия.

Все методы прогнозирования можно объединить в две группы: логические и формализованные (рисунок 2.2).

В связи с тем, что в экологии, и в частности в природопользовании, приходится большей частью иметь дело со сложными зависимостями природного и социально-экономического характера, то в первую очередь используют

логические методы, которые устанавливают связи между объектами. К логическим относят методы индукции, дедукции, экспертных оценок, аналогии.

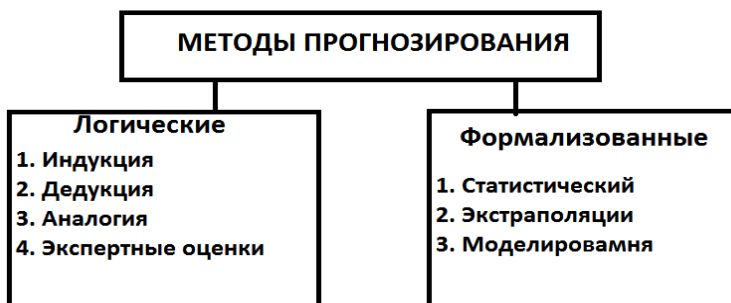


Рисунок 2.2 – Методы прогнозирования

Методом индукции устанавливают причинные связи предметов и явлений. Индуктивным методом исследование обычно начинают со сбора фактических данных, выявляются черты сходства и различия между объектами и делаются первые попытки обобщения. Так, для составления прогноза погоды необходимо провести соответствующие наблюдения и измерения, после чего можно сделать вывод в целом о погоде на сутки.

При дедуктивном методе идут наоборот, от общего к частному, т. е., зная общие положения и опираясь на них, приходят к умозаключению. Этот метод помогает определить стратегию прогнозных исследований. Индуктивный и дедуктивный методы тесно связаны между собой.

При отсутствии об объекте прогноза достоверных сведений и если объект не поддается математическому анализу, то в этом случае используют *метод экспертных оценок*, суть которого состоит в определении будущего на основании мнения квалифицированных специалистов-экспертов, привлекаемых для вынесения оценки по проблеме. Существуют индивидуальная и коллективная экспертизы. Для

прогнозирования методом экспертных оценок специалисты используют статистические, картографические и другие материалы.

Метод аналогий исходит из того, что закономерности развития одного процесса с определенными поправками можно перенести на другой процесс, для которого необходимо составить прогноз. Метод аналогий чаще всего применяют при разработке локальных прогнозов. Так, при прогнозировании влияния будущего водохранилища на окружающую среду можно использовать данные по уже имеющемуся водохранилищу, которое находится в сходных условиях.

Формализованные методы подразделяют на статистический, экстраполяции, моделирования и др.

Статистический метод опирается на количественные показатели, которые позволяют сделать вывод о темпах развития процесса в будущем. Статистическую модель получают или в виде аналитически выраженной тенденции развития, или же в виде уравнения зависимости от одного или нескольких факторов-аргументов. В ряде случаев – при изучении сложных комплексов экологических показателей – прибегают к разработке так называемых взаимозависимых систем уравнений, состоящих в основном опять-таки из уравнений, характеризующих статистические зависимости.

Процесс построения и применения статистической модели для прогнозирования, какой бы вид последняя не имела, обязательно включает выбор формы уравнения, описывающего динамику или взаимосвязь явлений, и оценивание его параметров с помощью того или иного метода. Второй этап, собственно прогноз, является дедуктивным. На этом этапе на основе найденных статистических закономерностей определяют ожидаемое значение прогнозируемого признака.

Далеко не всегда статистические методы прогнозирования применяются самостоятельно, так сказать, в чистом ви-

де. Часто их включают в виде важных элементов в комплексные методики, предусматривающие сочетание статистических методов с другими методами прогнозирования, например с экспертными оценками, различного рода математическими моделями и т. д. Такой комплексный подход к прогнозированию представляется наиболее плодотворным. Из сказанного выше вытекает, что статистические методы занимают важное место в системе методов прогнозирования, однако они ни в коей мере не должны рассматриваться как некий универсальный метод, как «золотой ключик», открывающий любую дверь. В ряде случаев собственно статистическая обработка экологической информации непосредственно не приводит к получению прогноза, однако является важным звеном в общей системе разработки прогнозных моделей. Такая обработка данных наблюдения, нацеленная на вскрытие различного рода конкретных статистических закономерностей, представляет собой, по сути дела, первый шаг на пути осмысливания информации и построения более сложных моделей, отображающих взаимодействие множества факторов. В связи с этим необходимо подчеркнуть важную роль статистической методологии в рамках построения имитационных моделей, которые все больше привлекают внимание экологов. Потенциальные возможности имитационных моделей в отношении прогнозирования поведения изучаемых (моделируемых) систем еще далеки до полного раскрытия. Но уже сейчас очевидно, что успешность прогнозов, получаемых на основе имитационных моделей, существенно будет зависеть от качества статистического анализа эмпирического материала, от того, насколько такой анализ сможет выявить и обобщить закономерности развития изучаемых объектов во времени.

Метод экстраполяции представляет собой перенесение установленного характера развития определенной территории или процесса на будущее время. Так, если известно, что

при создании водохранилища при неглубоком расположении грунтовых вод на участке началось подтопление и заболачивание, то можно предположить, что в дальнейшем здесь будут продолжаться эти процессы и приведут в конечном итоге к образованию болота.

Различают формальную и прогнозную *экстраполяцию*. Формальная экстраполяция базируется на предположении о сохранении в будущем прошлых и настоящих тенденций развития объекта прогноза; при прогнозной экстраполяции фактическое развитие увязывается с гипотезами о динамике исследуемого процесса с учетом изменений влияния различных факторов в перспективе.

Методы экстраполяции являются наиболее распространенными и проработанными. Основу экстраполяционных методов прогнозирования составляет изучение эмпирических рядов. *Эмпирический ряд* – это множество наблюдений, полученных последовательно во времени. В экологическом прогнозировании широко применяется метод математической экстраполяции, в математическом смысле означающий распространение закона изменения функции из области ее наблюдения на область, лежащую вне отрезка наблюдения. Функция представляет собой простейшую математико-статистическую модель, отражающую зависимость объекта прогнозирования (экологического показателя) от влияющих на него факторов.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

3.1 Проблема эксперимента при исследовании систем

Одной из проблем при проведении системного анализа является *проблема эксперимента* в системе или над системой. Проведение широкомасштабных натуральных исследований и экспериментов, связанных с исследованиями геоэкологических систем различного уровня очень редко разрешено моральными законами или законами безопасности и зачастую связано с материальными затратами и (или) значительными потерями информации.

Опыт всей человеческой деятельности учит – в таких ситуациях надо экспериментировать не над объектом, интересующим нас предметом или системой, а над их *моделями*.

В процессе жизнедеятельности человека вырабатываются представления о тех или иных свойствах реальных объектов и их взаимодействиях. Эти представления формируются человеком в виде описаний объектов. Это может быть словесное описание, рисунок, чертеж, график, макет. Все перечисленное обобщается одним понятием модель, а процесс построения моделей – моделированием.

Моделирование – это универсальный способ изучения процессов и явлений реального мира.

Особое значение моделирование приобретает при изучении объектов, недоступных прямому наблюдению и исследованию.

3.2 Основные понятия моделирования

Модель – объект или описание объекта (системы) для замещения (при определенных условиях предложениях, гипотезах) одной системы (т. е. оригинала) другой системой

для изучения оригинала или воспроизведения его каких-либо свойств.

Модель – результат отображения одной структуры на другую.

Проблема моделирования состоит из трех задач:

– построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);

– исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);

– использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

Основные требования к модели:

– наглядность построения;

– доступность ее для исследования или воспроизведения;

– простота исследования и воспроизведения;

– сохранение информации, содержащиеся в оригинале (с точностью рассматриваемых при построении модели гипотез);

– получение новой информации.

3.3 Виды моделирования

Различают: вербальное, геометрическое (предметное); физическое и информационное моделирование.

Вербальное моделирование – моделирование на основе использования разговорного языка.

Геометрическое моделирование осуществляется на макетах или объектных моделях. Эти модели передают пространственные формы объекта, пропорции и т. п.

Физическое моделирование применяется для изучения физико-химических, технологических, биологических, ген-

ных процессов, происходящих в оригинале. Такое моделирование еще называется аналоговым.

Компьютерное моделирование содержат «знания» об объекте в виде математических формул, таблиц, графиков, баз данных. Они позволяют изучать поведение системы при изменении внутренних характеристик и внешних условий, проигрывать сценарии, решать задачу оптимизации. Однако каждая компьютерная реализация соответствует конкретным, заданным параметрам системы. Наиболее общими и абстрактными являются математические модели.

Математические модели описывают целый класс процессов или явлений, которые обладают сходными свойствами, или являются изоморфными.

Изоморфизм – это взаимно однозначное отображение соответствия между оригиналом и моделью в области изучаемых свойств.

Гомоморфизм – отображение части свойств оригинала на модель. Наука конца 20 века – *синергетика*, показала, что сходными уравнениями описываются процессы самоорганизации самой разной природы: от образования скоплений галактик до образования пятен планктона в океане.

Если удастся сформулировать «хорошую» математическую модель, для ее исследования можно применить весь арсенал науки, накопленный предшествующими поколениями. Недаром многие классики высказывали одну и ту же мудрую мысль: «Область знания становится наукой, когда она выражает свои законы в виде математических соотношений».

Не всегда в задачах системного анализа все можно вычислить по готовым формулам. Так что же? Если нет математических моделей – не выдумывать же их самому? Ответ на этот вопрос самый простой: всем это уметь и делать – не обязательно, а вот тому, кто взялся решать задачи системного анализа – приходится и очень часто. Иногда здесь воз-

можно подсказка природы, знание технологии системы; в ряде случаев может выручить эксперимент над реальной системой или ее элементами (т. н. методы планирования экспериментов) и, наконец, иногда приходится прибегать к методу «черного ящика», предполагая некоторую статистическую связь между его входом и выходом.

Конечно, возможны ситуации, когда все процессы в большой системе описываются известными законами природы и когда можно надеяться, что запись уравнений этих законов даст нам математическую модель хотя бы отдельных элементов или подсистем. Но и в этих, редких, случаях возникают проблемы не только в плане сложности уравнений, невозможности их аналитического решения (расчета по формулам). Дело в том, что в природе трудно обнаружить примеры «чистого» проявления ее отдельных законов – чаще всего сопутствующие явление факторы «смазывают» теоретическую картину.

Еще одно важное обстоятельство приходится учитывать при математическом моделировании. Стремление к простым, элементарным моделям и вызванное этим игнорирование ряда факторов может сделать модель неадекватной реальному объекту, грубо говоря – сделать ее неправдивой. Опять-таки, без активного взаимодействия с технологами, специалистами в области законов функционирования систем данного типа, при системном анализе не обойтись.

В системах экологических, представляющих для нас основной интерес, приходится прибегать большей частью к математическому моделированию, правда в специфическом виде – с использованием не только количественных, но и качественных, а также логических показателей. Потребность в методах математического моделирования для целей управления и прогнозирования в области экологии очень велика.

3.4 Адекватность модели

В любой модели мы можем учесть только часть информации об объекте, процессе или явлении. На наш взгляд, самую существенную, но не всю.

Это соответствие модели реальности или *адекватность* могут быть очевидными или даже экспериментально проверенными для отдельных элементов системы. Но для подсистем, а тем более системы в целом существует возможность серьезной методической ошибки, связанная с объективной невозможностью оценить адекватность модели большой системы на логическом уровне.

Пример. Если лимитирующее действие факторов сказывается лишь на скорости прироста, то живые организмы размножаются по экспоненте, т. е. закон роста можно выразить уравнением $y = b \cdot \exp(at)$, где t – время, a , b , – эмпирические параметры (постоянные).

Первым эту модель рассмотрел Т. Мальтус (1798 г.). Опираясь на нее, он пытался обосновать неизбежность войн и других кризисных явлений социально-политической жизни человеческого общества. Он ввел понятие демографического давления как показателя превышения численности населения, проживающего на данной территории над возможностью данной территории обеспечить это население продовольствием. Из его рассуждений делался вывод о необходимости постоянного расширения жизненного пространства, и этот вывод использовался для построения и оправдания расовых теорий, националистических теорий борьбы за жизненное пространство и т. п.

Проанализируем эту ситуацию с позиций модельного подхода. В модели неограниченного роста в качестве существенных принимались только биологические факторы. Но если живые организмы образуют сообщества, то вступают в силу иные факторы, характерные для данного сообщества,

их можно было бы назвать социальными, хотя термин «социальные» обычно применяется к сообществам людей. Что касается человека, то для него одним из важнейших социальных факторов является развитие науки и производства.

Скажем, благодаря применению удобрения, с одного и того же сельскохозяйственного участка можно получить в несколько раз больший урожай, а значит, прокормить большее количество населения. Поэтому с точки зрения информатики несостоятельность применения модели неограниченного роста к человеческому обществу состоит уже в том, что учтены не все существенные факторы, а сама модель применяется не в той области, где она является адекватной (биологической), а в области социально-политической.

Отсюда следует вывод – без учета внешней среды выводы о поведении системы, полученные на основе моделирования, могут быть вполне обоснованными при взгляде изнутри системы. Но не исключена ситуация, когда эти выводы не имеют никакого отношения к системе – при взгляде на нее со стороны внешнего мира.

Но существующие современные методы математической статистики позволяют ответить на вопрос – а можно ли и, с каким доверием, использовать данные моделирования. Если эти показатели доверия для нас достаточны, мы можем использовать модель для ответа на поставленные вопросы.

Глава 4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1 Основные типы информации и источники ее получения

Моделирование явно или неявно основывается на информации, которая может быть получена с использованием первичных и вторичных данных, или первичной и вторичной информации.

Первичные данные получают в результате исследований, специально проведенных для решения конкретной проблемы. Их сбор осуществляется путем наблюдений, измерений, опросов, экспериментальных исследований. Такие исследования обычно выполняют только для части генеральной, то есть общей совокупности исследуемых объектов. Эта часть называется *выборкой*.

Вторичные данные, применяемые при проведении так называемых кабинетных исследований – это данные, собранные ранее из внутренних и внешних источников для целей, отличных от целей данного исследования.

Методы сбора первичных данных можно классифицировать как количественные и качественные.

Количественные исследования обычно отождествляют с проведением измерений. Характерными особенностями таких исследований являются четко определенные формы данных и источники их получения, обработка собранных данных с помощью упорядоченных количественных процедур.

Качественные исследования включают сбор, анализ и интерпретацию данных путем словесных описаний, а в социальной сфере – наблюдений за тем, что люди делают и

говорят. Качественные данные с помощью специальных процедур часто могут быть переведены в количественную форму.

Документирование и представление первичных данных. Данные, независимо от их объема, должны быть тщательно документированы. Это облегчает преемственность работы с ними разных специалистов, позволяет возвращаться к анализу этих данных в связи с появлением новых гипотез. Такое документирование обязательно должно включать в себя имя исследователя, имена собранных массивов данных и способов анализа.

Все это достигается при современном уровне математического обеспечения ЭВМ довольно простыми средствами, но позволяет при этом решать очень важные задачи, связанные с контролем переменных при проведении дальнейшего статистического анализа, обнаружения неточностей и ошибок. Если экспериментальных данных достаточно много, то возникает проблема их группировки, т. е. представления в более компактной и наглядной форме. При этом надо различать вопросы, связанные с представлением динамических рядов, и группировкой тех данных, для которых пространственные и временные факторы не играют существенной роли.

4.2 Компьютерная система функционального анализа данных

Построение любой модели экосистемы начинается, как правило, с организации оперативного и непротиворечивого доступа к массивам первичных данных экспедиционных исследований.

Полная компьютерная система, предназначенная для поддержки аналитической деятельности конкретного экологического проекта может быть представлена следующей

иерархией из семи ступенями функционального анализа данных:

– *первичная группировка* или *склеивание* данных в «кучи» (heaping) с использованием средств, которые обеспечивают хранение разнородной информации, ведение идентификационных справочников и сортировку сведений на три кучи: «ценную» (valuable hill), «рабочую» (work hill) и «отбросы, в которых может быть найдена жемчужина» (dung hill);

– *складирование* данных (data warehousing, DWH) и их маркирование, удобное для описания и извлечения различных семантических группировок; результат DWH представляется в виде многомерного куба, каждая точка внутри которого соответствует набору семантически однородных элементарных объектов;

– *совмещение*, комбинирование данных (combining) – создание многомерного пространства, где каждая координата соответствует элементу набора или точке куба DWH, отображенной на линейно–упорядоченные градуированные оси (только в этом пространстве могут быть установлены отношения взаимосвязи и проведен анализ на основе метрической близости);

– *компьютерная томография* или визуальный многомерный анализ (visual multidimensional analysis) – позволяет конструировать двух- и трехмерные визуальные образы (паттерны) сложных взаимосвязей между рядами данных, наблюдать динамику образования и развитие аномалий;

– *разведывательный анализ* данных (data mining) – «просеивание» информации с целью нахождения в ней особенностей и аномалий, заданных описанием шаблонов или пороговых значений;

– *восстановление зависимостей* (forecasting) по эмпирическим выборкам – математическая обработка многомер-

ных наблюдений (статистический и прецедентный анализ, оценка тренда временных рядов и проч.);

– *принятие решений*, планирование и управление (deciding – computer aided engineering) – отображается специальной сетью «ресурсы – потоки – события».

4.3 Правила составления сводных таблиц

При решении различных вопросов экологического исследования необходимо знать правила планирования исследования, сбора и статистической обработки описательного материала.

Результатом полевого этапа экологического исследования и этапа камеральной обработки является, например данные по химическому или физическому анализу проб почвы, воды, воздуха.

В большинстве случаев обработку целесообразно начать с составления таблиц (сводных таблиц) полученных данных.

Пример такой таблицы представлен на рисунке 4.1.

По строкам занесены значения показателей в определенной точке отбора проб. По столбцам расположены значения каждого заносимого в таблицу признака (измеренного параметра) – в одном столбце находятся значения одного признака по всем точкам отбора проб. Все строки и все столбцы должны быть пронумерованы. Последовательность признаков может быть упорядочена по разным основаниям (например, по времени).

На рисунке 4.1 представлены данные по содержанию тяжелых металлов в почвах на территории определенного хозяйства. По строкам расположены точки отбора проб, а по столбцам содержание подвижной формы меди в различные времена года.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ID	Лето 2001	Осень 2001	Среднее	Весна 2002	Лето 2002	Осень 2002	Среднее
2	1.1	3,67	4,24	3,95	5,73	4,44	5,64	5,27
3	1.1.6	4,56	4,12	4,34	5,06	4,88	5,06	5,00
4	1.1.д	3,36	6,46	4,91	5,70	4,65	6,28	5,54
5	1.11	5,33	4,37	4,85	4,27	4,35	5,23	4,62
6	1.11.6	4,12	4,25	4,18	4,26	3,82	6,14	4,74
7	1.11.д	3,42	3,52	3,47	5,57	5,17	3,28	4,67
8	1.13	3,57	4,72	4,14	4,75	4,06	5,34	4,72
9	1.15	5,82	4,26	5,04	5,74	5,17	4,65	5,19
10	1.16.6	3,75	3,63	3,69	4,65	5,54	4,27	4,82
11	1.16.д	3,62	4,70	4,16	4,58	4,36	5,14	4,69
12	1.17	5,22	4,73	4,97		4,92	5,53	5,23
13	1.19	4,15	4,85	4,50	5,32	4,80	5,27	5,13
14	1.21	4,85	3,93	4,39	5,04	4,35	5,38	4,92
15	1.21.6	4,25	4,87	4,56	4,17	3,15	5,63	4,32
16	1.21.д	3,86	5,95	4,90	4,86	4,52	5,17	4,85
17	1.23	3,74	3,85	3,79	5,23	3,27	4,87	4,46
18	1.25	6,47	3,82	5,14	5,25	5,62	5,36	5,41
19	1.3	1,82	4,82	3,32	4,62	5,52	5,47	5,20
20	1.5	5,36	5,23	5,30	5,33	3,27	5,67	4,76
21	1.6.6	5,52	4,03	4,78	4,63	4,57	4,65	4,62
22	1.6.д		4,92	4,92	4,72	5,78	5,42	5,31
23	1.7	3,82	4,12	3,97	6,25	4,46	5,84	5,52
24	1.9	5,64	4,64	5,14	5,07	4,73	4,72	4,84
25	2.1		4,54	4,54	5,08	6,12	7,82	6,34
26	2.1.6	4,16	4,27	4,21	6,12	3,66	5,14	4,97
27	2.1.г	4,37	3,85	4,11	5,04	5,22	5,36	5,21
28	2.11	5,32	4,84	5,08	4,84	6,24	4,92	5,33
29	2.11.6	4,08	6,12	5,10	4,85	3,80	5,72	4,79
30	2.11.г	3,07	4,87	3,97	6,14	4,45	5,46	5,35
31	2.13	2,65	5,86	4,26	4,57	4,65	6,63	5,28
32	2.15	6,24	3,62	4,93	5,77	5,20	5,76	5,58
33	2.15.6	3,88	3,88	3,57	5,88	3,85	4,75	4,65

Рисунок 4.1 – Пример таблицы сводных данных

4.4 Проверка данных

После создания таблицы на бумаге или электронной таблицы на компьютере необходимо проверить качество полученных данных. Для этого часто достаточно внимательно осмотреть массив данных. Начать проверку следует с выявления ошибок (описок), которые заключаются в том, что неправильно написан порядок числа. Например, 100 написано вместо 10; 9,4 вместо 94 и т.п. При внимательном просмотре по столбцам это легко обнаружить, поскольку сравнительно редко встречаются параметры, которые сильно варьируют. Чаще всего значения одного параметра имеют один порядок

или ближайшие порядки. При наборе данных на компьютере важно соблюдать требования к формату данных в используемой статистической программе. Прежде всего, это относится к знаку, который должен отделять в десятичном числе целую часть от дробной (точка или запятая).

Затем массив данных надо проверить на наличие «выскакивающих» или *выделяющихся* значений, которые могли быть получены в результате неточных измерений, ошибок в записях, отвлечения внимания и т. д. Если обнаружены «подозрительные» значения, то нужно принять обоснованное решение об их выбраковке. Его можно принять, используя достаточно мощный параметрический критерий t (*критерий выпада*). Он рассчитывается по следующей формуле:

$$t = \frac{V - M}{S} \geq t_{кр}, \quad (4.1)$$

где t – критерий выпада;

V – выпадающее значение признака;

M – средняя величина признака для всей группы;

S – стандартное отклонение;

$t_{кр}$ – стандартные значения критерия выпадов.

Заметим, что последний показатель определяется для трех уровней доверительной вероятности по таблице «Значения критерия t для обработки выпадающих вариантов при разных уровнях значимости (α)». Смысл критерия в том, чтобы определить, находится ли данное значение в интервале, характерном для большинства членов выборки, или же вне его.

Допустим, нами принят уровень значимости $\alpha = 0,05$ (доверительная вероятность 0,95), а значение критерия t составило 1,5. Поскольку при 95 % вероятности выборка имеет пределы $M \pm 1,96 \sigma$ (1,5 меньше 1,96), следовательно, данное значение лежит в указанном интервале. Если же значение критерия больше, чем 2,4 (например), то это означает,

что данное значение с 95 % вероятностью не относится к анализируемой совокупности (выборке), а есть проявление иных закономерностей, ошибок и прочее и, должно быть, поэтому исключено из рассмотрения.

После исключения выпадающих значений первичные статистические параметры вычисляются заново.

4.5 Планирование выборочных исследований

Общее понятие о выборочном методе. Множество всех единиц совокупности, обладающих определенным признаком и подлежащих изучению, носит в статистике название *генеральной совокупности*.

На практике не всегда возможно или же нецелесообразно рассматривать всю генеральную совокупность. Тогда ограничиваются изучением лишь некоторой ее части. Затем полученные результаты распространяют на всю генеральную совокупность, т. е. применяют выборочный метод. Для этого из генеральной совокупности особым образом отбирается часть элементов, так называемая *выборка*, и результаты обработки выборочных данных (например, средние арифметические значения) обобщаются на всю совокупность.

Теоретической основой выборочного метода является закон больших чисел. В силу этого закона при ограниченном рассеивании признака в генеральной совокупности и достаточно большой выборке с вероятностью, близкой к полной достоверности, выборочная средняя может быть сколь угодно близка к генеральной средней. Закон этот, включающий в себя группу теорем, доказан строго математически. Таким образом, средняя арифметическая, рассчитанная по выборке, может с достаточным основанием рассматриваться как показатель, характеризующий генеральную совокупность в целом.

В целях выполнения правила репрезентативности (представительности) проводимого исследования тщательно подбирается метод отбора элементов выборки из генеральной совокупности. Как доказано в ряде теорем математической статистики, таким способом при условии достаточно большой выборки является метод случайного отбора элементов генеральной совокупности. При таком отборе каждый элемент генеральной совокупности имеет равный с другими элементами шанс попасть в выборку. Выборки, полученные таким способом, называются *случайными (рандомизированными) выборками*. Случайность выборки является, таким образом, существенным условием применения выборочного метода.

Кроме того, необходимо определить объем выборки, то есть число изучаемых единиц. Обоснованный объем выборки не зависит от размера генеральной совокупности. Например, для отдельной площадки он может быть не больше, чем для ареала в целом.

4.6 Доверительный интервал. Определение объема выборки

С помощью методов математической статистики может быть определен вероятностно обоснованный объем выборки, позволяющий получить данные с определенной точностью и достоверностью.

Определим некоторые понятия математической статистики, необходимые для ее расчета.

В статистике изменчивость признака характеризуется его вариацией. Например, количество определенного вида бактерий в пробах почв на различных участках будет различным, т. е. варьирует.

Вариация – это степень несхожести измерения признака.

В качестве меры вариации обычно принимается среднеквадратическое отклонение (стандартная ошибка, стандартное отклонение), которое характеризует отличие отдельных величин признака от средней величины.

Доверительный интервал – это диапазон величин признака, куда попадает определенный процент измерений. Доверительный интервал прямо пропорционален стандартному отклонению и тем шире, чем выше доверительная вероятность, к которой по мере роста объема выборки приближается доля попавших в интервал величин измерений. (Уровень доверительной вероятности определяется степенью важности (ответственности) выводов или степенью точности проводимых исследований). Для биологических и экологических исследований обычно принимается 95 %-й уровень доверительной вероятности.

Пусть, к примеру, мы каким-то образом установили математическое ожидание концентрации примесей в атмосферном воздухе. Но этого недостаточно – необходимо хотя бы оценить степень колебания этой концентрации, ответить на вопрос – а какова вероятность того, что она будет лежать в таких-то пределах?

Такие задачи решаются безо всяких проблем, если установить факт принадлежности данной случайной величины к такому классическому распределению как *нормальное*. Так как для «теоретических» законов, каким является нормальный закон распределения, разработаны методы расчета всех показателей распределения, зафиксированы связи между ними, построены алгоритмы расчета.

Обратим внимание на еще одно важное обстоятельство: даже если нам достаточно одного единственного показателя – среднее значение данной случайной величины – то и в этом случае возникает вопрос о надежности данных об этом показателе.

Пример. Дано выборочное распределение случайной величины X (например, количественное содержание мезофауны в пробах почвы в виде 100 наблюдений над этой величиной). Необходимо оценить интервал, куда с доверительной вероятностью 95 % попадет среднее значение этого показателя в генеральной совокупности.

Решение. Если, например, уже доказана (точнее – принята) гипотеза о *нормальном* распределении, то интервал для генеральной средней можно выразить так:

$$(\bar{x} - tS_x / \sqrt{n}; \bar{x} + tS_x / \sqrt{n}), \quad (4.2)$$

где \bar{x} – среднее значение случайной величины;

S_x – стандартное отклонение;

n – объем выборки;

t – нормированное отклонение, которое выбирается в зависимости от уровня доверительной вероятности (таблица 4.1.).

Таблица 4.1 – Значение отклонения доверительного интервала $\pm t$ от среднего значения в зависимости от доверительной вероятности (P) результатов

P, %	60	70	80	90	95	97	99	99,73
t	0,84	1,03	1,29	1,65	1,96	2,18	2,58	3,0

Пусть мы рассчитали среднее M_x и оно составило 125 экз./м² при колебаниях от 50 до 200 экз./м² и выборке 100 наблюдений. Рассчитаем $S_x = 5$ экз./м². По специальной таблице находим нормированное отклонение (для доверительной вероятности 95 % оно равно 1,96). Тогда доверительный интервал окажется следующим: (125–1,96·5/10; 125+1,96·5/10) или (124; 126) экз./м². Это означает, что с доверительной вероятностью 95 % можно утверждать, что генеральная средняя находится между 124 и 126 экз./м².

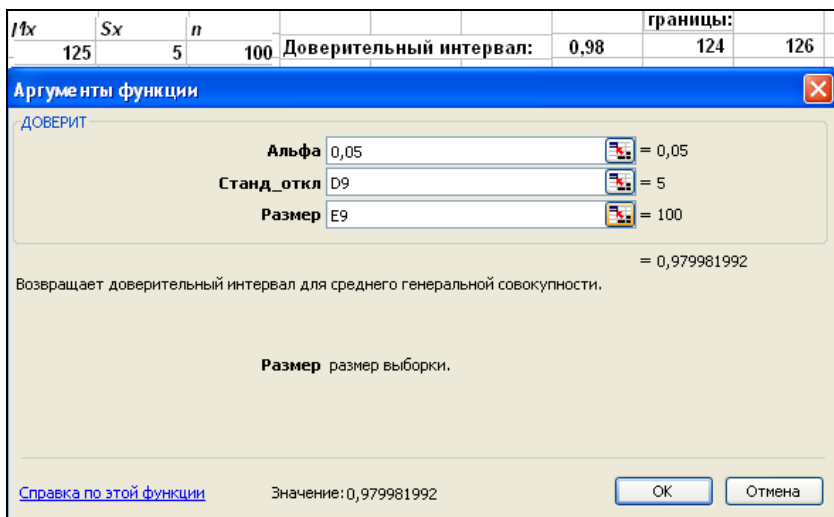


Рисунок 4.2 – Расчет доверительного интервала в EXCEL

Этот же результат получаем в электронной таблице EXCEL, используя встроенную функцию «доверительный интервал» $fx = \text{DOVERIT}(0,05;5;100)$ (Рисунок 4.2). Для этого надо записать в ячейки значения среднего, стандартного отклонения и размера выборки, нажать на fx , выбрать из списка «статистические» функцию DOVERIT и заполнить три ее аргумента – уровень значимости (Альфа), стандартное отклонение (Станд_откл) и размер выборки (Размер) либо непосредственно числами, либо ссылками на ячейки, где эти значения записаны. Так на рисунке 4.2. это ссылки на ячейки D9 и E9. Уровень значимости (α), напомним это «1–вероятность», если вероятность выражена в долях или «(100–вероятность)/100», если вероятность – в процентах. Так для принятой 95 % вероятности $\alpha = 0,05$. Программа рассчитывает доверительный интервал (в нашем примере 0,98 с точностью до второго знака), а отнимая его от среднего значения и прибавляя к нему, получаем границы генеральной средней (124 и 126 экз./м²). Заметим, что расчеты среднего значения и стандартного отклонения по исходной

выборке, если считать ее нормально распределенной, также не составляют особого труда в таблицах EXCEL, поскольку для этого можно использовать встроенные функции $f_x = \text{СРЗНАЧ}(\text{С9}:\text{С108})$ и $f_x = \text{СТАНДОТКЛОН}(\text{С9}:\text{С108})$ соответствующих расчетов. В аргументах прописывается диапазон ячеек, содержащих значения выборки (в нашем примере из 100 измерений это столбец С от 9 до 108 ячейки по вертикали таблицы).

Если у нас нет теоретических оснований принять какое-либо классическое распределение в качестве подходящего для нашей случайной величины, то существуют методы математической статистики, которые позволяют проверить гипотезу о таком распределении на основании имеющихся у нас данных. Правда, исчерпывающего ответа «Да» или «Нет» ждать нечего. Можно лишь получить вероятность ошибки, отбросив верную гипотезу (ошибка первого рода), или вероятность ошибки, приняв ложную (ошибка второго рода). Для проверки распределения случайных величин на нормальность удобно использовать компьютерную программу «Statistica», где предложен ряд критериев алгоритмов решения этой задачи. Некоторые способы экспертной оценки будут рассмотрены в следующей главе.

При планировании исследований *минимально допустимый размер* рандомизированной выборки можно оценить по формуле:

$$n = t^2 \cdot (s^2 / \Delta^2), \quad (4.3)$$

где n – объем выборки, необходимый и достаточный для оценки среднего значения признака;

t – нормированное отклонение;

s – стандартное отклонение признака;

Δ – задаваемая требованиями исследования абсолютная ошибка определения признака.

Пример. Лаборатория проводит анализ продуктов питания с целью определения в них наличия вредных веществ.

Известно, что среднее содержание токсического вещества в 1 кг составляет 12 мг, а стандартное отклонение 1,2 мг. Определить число замеров, которое необходимо произвести для оценки среднего содержания токсического вещества с точностью до 3 %.

Решение. Допустимая абсолютная ошибка

$$\Delta = 12 \cdot 0,03 = 0,36 \text{ мг.}$$

В таблице 1 находим значение t , соответствующее доверительному интервалу 97 %, т. е. ошибке в 3 % (оно равно 2,18).

По формуле посчитаем объем выборки:

$$n = 2,18^2 \cdot (1,2^2 / 0,36^2) \approx 53.$$

Ответ: 53 замера.

Таким образом, необходимо осуществить 53 замера, чтобы среднее содержание токсического вещества можно было с погрешностью 3 % считать равным средней величине в этих 53 замерах.

ГЛАВА 5. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ

5.1 Анализ первичных статистик

Для определения способов математико-статистической обработки, прежде всего, необходимо оценить характер распределения по всем используемым параметрам. Для параметров, имеющих нормальное распределение или близкое к нормальному, можно использовать методы параметрической статистики, которые во многих случаях являются более мощными, чем методы непараметрической статистики. Достоинством последних является то, что они позволяют проверить статистические гипотезы независимо от формы распределения.

Одним из важнейших в математической статистике является понятие нормального распределения. *Нормальное распределение* – модель варьирования некоторой случайной величины, значения которой определяются множеством одновременно действующих независимых факторов. Число таких факторов велико, а эффект влияния каждого из них в отдельности очень мал. Такой характер взаимовлияния весьма характерен для природных явлений. Однако так бывает не всегда, поэтому в каждом случае форма распределения должна быть проверена.

Важнейшими первичными статистиками являются:

а) *среднее арифметическое* – величина, сумма отрицательных и положительных отклонений от которой равна нулю. В статистике ее обозначают буквой M или x ;

б) *среднее квадратичное отклонение* (обозначенное греческой буквой σ (сигма) и называемое также основным, или *стандартным*, отклонением) – мера разнообразия входящих в группу объектов, она показывает, на сколько в среднем отклоняется конкретное значение оцениваемого параметра от среднего арифметического. Чем сильнее разбросаны значения относительно среднего, тем большим оказы-

вается и среднее квадратичное отклонение; показатель σ^2 носит название *дисперсии* случайной величины и также часто используется в качестве меры разброса данной случайной величины.

в) *коэффициент вариации* – частное от деления сигмы на среднее арифметическое, умноженное на 100 %. Обозначается *CV*:

$$CV = \frac{\sigma}{M} 100 \% \quad (5.1)$$

Стандартное отклонение (сигма) – величина именованная и зависит не только от степени варьирования, но и от единиц измерения. Поэтому по сигме можно сравнивать изменчивость лишь одних и тех же показателей, а сопоставлять сигмы разных признаков по абсолютной величине нельзя. Для того чтобы сравнить по уровню изменчивости признаки любой размерности (выраженные в различных единицах измерения) и избежать влияния масштаба измерений среднего арифметического на величину сигмы и применяют коэффициент вариации, который представляет собой по существу приведение к одинаковому масштабу оцениваемой величины (безразмерный показатель).

Для нормального распределения известны точные количественные зависимости частот и значений, позволяющие прогнозировать появление новых вариантов:

1) слева и справа от среднего арифметического лежит по 50 % значений выборки;

2) в интервале от $M - \sigma$ до $M + \sigma$ лежат 68,7 % всех значений;

3) в интервале от $M - 1,96 \sigma$ до $M + 1,96 \sigma$ лежат 95 % значений.

Таким образом, ориентируясь на эти характеристики нормального распределения, можно оценить степень близости к нему рассматриваемого распределения.

Следующими по важности являются такие первичные статистики, как коэффициент асимметрии и эксцесс. *Коэффициент асимметрии* – показатель смещения распределения в левую или правую сторону по оси абсцисс. Если правая ветвь кривой длиннее левой – говорят о положительной симметрии, в противоположном случае – об отрицательной. *Эксцесс* – показатель островершинности. Кривые, более высокие в своей средней части, островершинные, называются *эксцессивными*, у них большая величина эксцесса. При уменьшении величины эксцесса кривая становится все более плоской, приобретая вид плато, а затем и седловины – с прогибом в средней части.

Эти параметры позволяют составить первое приближенное представление о характере распределения:

1) у нормального распределения редко можно обнаружить коэффициент асимметрии близкий к единице и более единицы (и -1 , и $+1$);

2) эксцесс у признаков с нормальным распределением обычно имеет величину в диапазоне 2 – 4.

Необходимо отметить, что это только приблизительная оценка. Точную и строгую оценку нормальности распределения можно получить, используя один из существующих методов проверки.

Начинать с анализа первичных статистик надо еще по той причине, что они весьма чувствительны к наличию выпадающих значений. На практике же очень большие эксцесс и асимметрия часто являются индикатором ошибок при подсчетах вручную или ошибок при введении данных через клавиатуру при компьютерной обработке. Существует правило, согласно которому все расчеты вручную должны выполняться дважды (особенно ответственные – трижды), причем желательно разными способами, с вариацией последовательности обращения к числовому массиву.

По части никогда не удастся полностью охарактеризовать целое, всегда остается вероятность того, что оценка генеральной совокупности на основе выборочных данных недостаточно точна, имеет некоторую большую или меньшую ошибку. Такие ошибки, представляющие собой ошибки обобщения, экстраполяции, связанные с перенесением результатов, полученных при изучении выборки, на всю генеральную совокупность, называются *ошибками репрезентативности*.

Репрезентативность – степень соответствия выборочных показателей генеральным параметрам. В экологических исследованиях чаще всего достаточным уровнем достоверности является $p < 0,05$. Это говорит о том, что полученные результаты достоверны на 95 % и более.

Ошибку репрезентативности также можно вычислить, если воспользоваться такой характеристикой, как статистическая ошибка репрезентативности. Она показывает, в каких пределах могут отклоняться от параметров генеральной совокупности (от математического ожидания или истинных значений) наши частные определения, полученные на основании конкретных выборок. Очевидно, что чем больше величина статистической ошибки, тем больше ошибка репрезентативности. А, в свою очередь, величина этой статистической ошибки становится больше, если налицо большое варьирование признака и маленькая выборка. Это и отражено в формуле для вычисления статистических ошибок, характеризующих варьирование выборочных показателей вокруг их генеральных параметров. Так, статистическая ошибка среднего арифметического вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{x}} = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 100 \%, \quad (5.2)$$

где: σ – ошибка средней, S – стандартное отклонение, n – число значений признака.

5.2 Параметрические критерии сравнения выборок

Одной из наиболее часто встречающихся задач при обработке данных является оценка достоверности отличий между двумя и более рядами значений. В математической статистике существует ряд способов для этого.

Параметрический критерий – это метод статистического вывода, который применяется в отношении параметров генеральной совокупности. Самым главным условием для параметрических методов является нормальность распределения переменных и, как следствие, правомерность применения таких статистик, как среднее значение и стандартное отклонение.

Во многих прикладных статистических программах есть процедуры оценки различий между параметрами одной выборки и разных выборок. Но обычно ЭВМ выдает исследователю результаты, содержащие подсчитанные первичные статистики. Тогда требуется их самостоятельный анализ с использованием критериев сравнения выборок. Впрочем, многие современные компьютерные программы («Statistica», «S-Plot») содержат встроенные алгоритмы такого сравнительного анализа. Перед экологом часто встает задача оценки достоверности различий, используя ранее вычисленные статистики. При сравнении средних значений признака говорят о достоверности (недостоверности) отличий средних арифметических, а при сравнении изменчивости показателей – о достоверности (недостоверности) отклонений сигм (дисперсий) и коэффициентов вариации.

Достоверность различий средних арифметических можно оценить по достаточно эффективному параметрическому критерию Стьюдента.

Метод Стьюдента различен для независимых и зависимых выборок. *Независимые выборки* получают при исследовании двух различных групп (например, данные с кон-

трольного и фонового участка). С помощью критерия Стьюдента для независимых выборок можно было бы, например, проверить, существует ли достоверная разница между фоновыми уровнями содержания определенного вещества в почве и уровнями его содержания на экспериментальном участке.

5.2.1 Критерий Стьюдента для сравнения независимых выборок

В случае независимых выборок для выявления различий средних величин в больших выборках ($n > 30$) применяют формулу:

$$t_{\text{набл}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{S_{\bar{x}_1}^2 + S_{\bar{x}_2}^2}}. \quad (5.3)$$

При сравнении двух групп с малыми выборками ($n < 30$) величину критерия Стьюдента находят по формуле:

$$t_{\text{набл}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_{x_1}^2 + (n_2 - 1)S_{x_2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \quad (5.4)$$

Здесь \bar{x}_1 и \bar{x}_2 – средние величины выборок; n_1 и n_2 – их объемы; $S_{x_1}^2$ и $S_{x_2}^2$ – дисперсии; $S_{\bar{x}_1}$, $S_{\bar{x}_2}$ – ошибки средних величин соответствующих выборок.

По специальной таблице (см. Г.Ф. Лакин «Биометрия», Приложение, таблица V, стр. 270) или с помощью функции СТЬЮДРАСПРОБР мастера функций MS EXCEL из категории «Статистические» по принятому уровню значимости и числу степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$ находят t критическое и сравнивают эту величину с результатом расчета по формуле.

Если наш результат больше, чем значение для уровня достоверности 0,05 (вероятность 5 %), найденное в таблице,

то можно отбросить нулевую гипотезу (H_0) и принять альтернативную гипотезу (H_1), т. е. считать разницу средних достоверной.

Если же, напротив, полученный при вычислении результат меньше, чем табличный, то нулевую гипотезу нельзя отбросить и, следовательно, разница средних считается недостоверной.

Наиболее полезным t -тест оказывается при проверке гипотезы о достоверности разницы средней между результатами опытной и контрольной групп после воздействия, т. е. для зависимых выборок. Например, требуется узнать, изменяется ли содержание P_2O_5 в почве на опытных площадках спустя полгода после внесения фосфогипса

К *зависимым выборкам* относятся, например, результаты одной и той же группы испытуемых до и после воздействия независимой переменной. В нашем случае с помощью статистических методов для зависимых выборок можно проверить гипотезу о достоверности разницы между фоновым уровнем и уровнем после воздействия отдельно для опытной и для контрольной группы.

5.2.2 Критерий Стьюдента для сравнения зависимых выборок

Для определения достоверности разницы средних в случае зависимых выборок (следовательно, равных по объему) применяется следующая формула:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n - 1)}}, \quad (5.5)$$

где d_i – разность между результатами в каждой паре;

$\sum d_i$ – сумма этих частных разностей;

$\sum d_i^2$ – сумма квадратов частных разностей.

Полученные результаты сверяют с таблицей распределения Стьюдента, отыскивая в ней значения, соответствующие $n-1$ степени свободы; n – это в данном случае число пар данных.

Степень выявленного различия желательно оценивать, опираясь на содержательные критерии. Вместе с тем, для экологического исследования весьма характерно наличие множества показателей, которые, по существу, являются условными баллами, и обоснованность (валидность) оценивания с помощью них еще предстоит доказать. Чтобы избежать большей произвольности, в таких случаях также приходится опираться на статистические параметры. Пожалуй, наиболее распространено для этого использование сигмы. Разницу между двумя значениями в одну сигму и более можно считать достаточно выраженной. Если сигма подсчитана для ряда значений более 35, то достаточно выраженной можно рассматривать разницу в 0,5 сигмы. Однако для ответственных выводов о том, насколько велика разница между значениями, лучше использовать строгие критерии.

5.3 Непараметрические критерии сравнения выборок

Непараметрические методы считаются гораздо более функциональными, чем параметрические, т.к. вообще не связывают анализ с каким-либо законом распределения, в том числе используются при нарушении требования нормальности распределения. Непараметрические методы не основываются на оценке параметров (таких как среднее или стандартное отклонение) при описании выборочного распределения интересующей величины.

Если непараметрические тесты применяются в случае *нормального распределения* значений, они имеют лишь

95 %-ю эффективность по сравнению с *параметрическими тестами*.

Так как непараметрические методы предназначены для номинативных и ранговых переменных, в отношении которых недопустимо применение арифметических операций, они основываются на различных дополнительных вычислениях, среди которых можно отметить:

- ранжирование переменных с присвоением им ранга – порядкового номера, который соответствует месту, занимаемому переменной во всей совокупности;

- подсчет числа значений одного распределения, которые превышают значения другого распределения;

- применение весовых сравнений;

- определение степени отклонения распределения от случайного или биномиального распределения;

- проверка нормальности выборочного распределения;

- сравнение частот (вероятностей попадания в ранговый диапазон);

- сравнение групп путем вычисления частот значений, лежащих выше или ниже главной медианы.

Для анализа и сравнения выборок часто применяются следующие непараметрические критерии:

- Критерий знаков;

- Критерий Уилкоксона;

- Критерий серий;

- Биномиальный критерий;

- Критерий Колмогорова-Смирнова для одной выборки;

- Критерий χ^2 для одной выборки;

- Сравнение K-независимых выборок (критерий Краскала-Уоллеса):

- Сравнение K-зависимых выборок (критерий Фридмана).

5.3.1 Сравнение двух независимых выборок непараметрическими методами

Допустим, требуется выяснить, различаются ли средние некоторой переменной, вычисленные в разных подгруппах наблюдений. Самым распространенным тестом непараметрического сравнения двух таких выборок является *критерий Манна – Уитни (Mann – Whitney) или U-критерий*. Это аналог *t*-критерия, он позволяет установить различия между двумя независимыми выборками по уровню выраженности порядковой переменной.

Данный критерий – один из самых популярных тестов среди исследователей-биологов и медиков и, исторически, один из первых критериев, основанных на рангах.

U (Mann Whitney *U*) – статистика критерия, которая показывает, сколько раз *Y* предшествует *X* в объединенной ранжированной выборке.

Алгоритм применения этого критерия сводится к следующему: все члены сравниваемых выборок располагаются в возрастающем порядке в один ранжируемый ряд. Затем каждому значению присваивается ранг. Если сравниваемые выборки не отличаются друг от друга, то и суммы их рангов должны быть равны. Чем значительнее расхождения между выборками, тем больше будет разница между суммами их рангов. Случайная разница оценивается с помощью *U*-критерия Уайта, критическое значение которого (U_{st}) для 5 % и 1 %-го уровней значимости с учетом n_1 и n_2 сравниваемых выборок приводятся в специальной таблице (см. таблица XI, Г. Ф. Лакин, стр. 282). Если фактически найденное значение *U*-критерия окажется меньше табличного для n_1 и n_2 и принятого уровня значимости, то нулевая гипотеза отвергается, и расхождения считаются случайными.

При реализации метода Манна-Уитни компьютерная программа делает следующие операции:

1) сначала ранжирует всю совокупность значений общей переменной без учета принадлежности к сравниваемым группам (выборкам);

2) для каждой из двух групп (выборок) вычисляет средние ранги. Чем выше ранг, тем выше выраженность переменной;

3) определяется α -уровень (вероятность ошибки, значимость).

При уровне значимости $\alpha < 0,05$ принимается конкурирующая гипотеза о различии выборок.

Критерий рекомендуется для выборок умеренной численности (численность каждой выборки от 12 до 40).

Все последующие методы, которые мы постараемся рассмотреть в рамках знакомства с непараметрическими тестами, имеют с ним *общую логику*.

Условием применения теста *Колмогорова – Смирнова* такие же, как и при использовании *U-теста по методу Манна и Уитни*. Тест Колмогорова – Смирнова является предпочтительным тогда, когда количество категорий для тестируемых переменных ограничено (т. е. очень узкая шкала, мало вариантов ответа). Если для такого случая применять *U-тест Манна и Уитни*, то появляется большое количество ранговых мест, к которым относится сразу несколько переменных, то есть возникают неоднозначные ранговые последовательности.

Основой теста является расчет максимальной разности между кумулятивными частотами обеих выборок. Эта разность обозначается величиной z , на основании которой, выводится вероятность ошибки p .

5.3.2 Сравнение двух зависимых выборок непараметрическими методами

Чаще всего зависимые выборки – это измерения одной и той же группы объектов в разные моменты времени (например, до и после воздействия какого-либо фактора).

Критерий Уилкоксона (Wilcoxon) является традиционным непараметрическим тестом для сравнения двух зависимых выборок. Он основан на подсчете абсолютных разностей между парами значений и ранжировании (построении ранговой последовательности) полученных разностей (без учета знака). А затем вычисляются средние ранги для положительных и отрицательных разностей (т. е. изменений).

Алгоритм применения этого критерия сводится к следующему:

1) Ранжирование. Положительные и отрицательные значения разностей ставят (кроме нулевых) в один ряд так, чтобы наименьшая абсолютная величина (без учета знака) получила первый ранг, одинаковым величинам присваивают один ранг.

2) Отдельно вычисляют сумму рангов положительных и отрицательных разностей, меньшую из двух сумм без учета знака считают тестовой статистикой данного критерия. Нулевую гипотезу принимают при данном уровне значимости, если вычисленное значение превзойдет критической значение, рассчитанное по таблице.

Условия применения теста «Критерий знаков» такой же, что и для теста Уилкоксона. В ходе этого теста также подсчитываются положительные и отрицательные разности, однако полученные разности не ранжируются в целом для всей переменной, а значит и не вычисляются средние ранги отдельно для положительных и отрицательных разностей (т. е. изменений).

Сравнивая выборки с попарно связанными значениями, наблюдаемые между ними различия обозначают знаками

плюс (положительный эффект) и минус (отрицательный эффект воздействующего на признак фактора). Считается, что если попарно сравниваемые выборки не различаются, то число плюсовых и минусовых разностей окажется одинаковым. Если налицо заметное преобладание плюсов или минусов, то это может быть следствием воздействия на признак учитываемого фактора. Нулевая гипотеза проверяется с помощью критерия знаков (z). Величина критерия определяется большим числом однозначных разностей. При этом нулевые разности в расчет не принимаются. Значимость проверяется с помощью специальной таблицы (см., например, [Лакин, 90]), в которой содержатся критические точки критерия (z_{st}) для уровня значимости $\alpha = 0,05$ или $0,01$ и числа парных наблюдений n (без нулевых разностей). Нулевая гипотеза опровергается, если $z_{\phi} \geq z_{st}$.

ГЛАВА 6. ОЦЕНКА ВЗАИМОСВЯЗЕЙ В СИСТЕМЕ

6.1. Постановка задачи о статистической зависимости

Конечная цель всякого исследования или научного анализа состоит в нахождении связей (зависимостей) между переменными. Философия науки учит, что не существует иного способа представления знания, кроме как в терминах зависимостей между количественными или качественными переменными. При решении исследовательских задач часто приходится наблюдать над целым рядом признаков (факторов), чтобы по полученным данным изучить взаимоотношения между этими величинами. Например, при решении задач классификации растений или ископаемых моллюсков оцениваются взаимосвязи между десятками количественно и качественно измеряемых показателей. Но независимо от числа исследуемых признаков цель остается одной и той же: получение объективных сведений о характере взаимосвязей между изучаемыми показателями.

В силу присущей всем естественным объектам изменчивости, измеряемые в экспериментах признаки, являются случайными величинами. Поэтому изучение их совместного варьирования представляет собой задачу об определении статистической зависимости.

Возможны две постановки этой задачи. Нас может интересовать либо взаимозависимость между измеряемыми величинами, либо зависимость одной или нескольких величин от остальных.

Например, можно рассмотреть вопрос, существует ли связь между среднегодовой температурой и географической широтой городов. При такой постановке – это задача о взаимозависимости, но если мы хотим, используя данные о географической широте, получить информацию о среднего-

довой температуре, то приходим к задаче о зависимости. Отличие возникает за счет того, что в первом случае обе используемые величины – случайные, а во втором – случайными являются только значения среднегодовой температуры, а значения географических широт фиксированы, например, с шагом 5° .

Исследование взаимозависимости приводит к теории корреляции. Исследование зависимости – к теории регрессии.

Объекты экологических исследований всегда в той или иной степени неоднородны, имеют некоторые индивидуальные особенности. Кроме того, объекты даже тщательно поставленного эксперимента испытывают не учитываемые воздействия многих факторов внешней среды. Поэтому между признаками объектов экологических исследований бывают исключительно корреляционные связи.

Задача корреляционного анализа состоит в том, чтобы определить характер связи между сопряженными признаками, убедиться в статистической достоверности найденного количественного значения связи, выяснить корреляционное отношение между признаками с тем, чтобы в дальнейшем подвергать эти данные регрессионному анализу.

6.2. Зависимые и независимые переменные

В исследовании корреляций (зависимостей, связей...) вы не влияете (или, по крайней мере, пытаетесь не влиять) на переменные, а только измеряете их и хотите найти зависимости (корреляции) между некоторыми измеренными переменными, например, между массой животного и площадью его обитания. В экспериментальных исследованиях, напротив, вы варьируете некоторые переменные и измеряете воздействия этих изменений на другие переменные.

Например, исследователь может искусственно увеличивать содержание удобрения в почве, а затем на определенных уровнях удобрения измерить урожайность. Анализ данных в экспериментальном исследовании также приводит к вычислению «корреляций» (зависимостей) между переменными, а именно, между переменными, на которые воздействуют, и переменными, на которые влияет это воздействие. Тем не менее, экспериментальные данные потенциально снабжают нас более качественной информацией. Только экспериментально можно убедительно доказать причинную связь между переменными. Например, если обнаружено, что всякий раз, когда изменяется переменная А, изменяется и переменная В, то можно сделать вывод – «переменная А оказывает влияние на переменную В», т. е. между переменными А и В имеется причинная зависимость.

Независимыми переменными называются переменные, которые варьируются исследователем. Тогда как *зависимые переменные* – это переменные, которые измеряются или регистрируются. Может показаться, что проведение этого различия создает путаницу в терминологии, поскольку, как говорят некоторые студенты, «все переменные зависят от чего-нибудь». Тем не менее, однажды отчетливо проведя это различие, вы поймете его необходимость. Термины зависимая и независимая переменная применяются в основном в экспериментальном исследовании, где экспериментатор манипулирует некоторыми переменными, и в этом смысле они «независимы» от реакций, свойств, намерений присущих объектам исследования. Некоторые другие переменные, как предполагается, должны «зависеть» от действий экспериментатора или от экспериментальных условий. Иными словами, зависимость проявляется в ответной реакции исследуемого объекта на посланное на него воздействие.

6.3 Коэффициент корреляции

При проведении экспериментов или наблюдений очень часто измеряются две или более характеристики объекта исследования. При этом значительный интерес представляет изучение численной меры степени взаимосвязи между переменными, характеризующими экологические системы и их компоненты. Первый этап анализа – это проверка данных на соответствие закону нормального распределения. Если распределение данных в выборке близко к нормальному закону, то можно оценить наличие линейной связи между переменными с помощью индикатора связи – *коэффициента корреляции Пирсона*.

Коэффициент корреляции (r) – это показатель, оценивающий тесноту *линейной связи* (пропорциональности, выраженной уравнением прямой линии) между признаками. Интуитивно ясно, что о взаимозависимости между парой переменных можно говорить в тех случаях, когда уменьшению (увеличению) одной из них будет соответствовать уменьшение (увеличение) другой, либо когда уменьшению (увеличению) первой будет соответствовать увеличение (уменьшение) второй переменной. В первом случае будем говорить о положительной корреляции (прямая зависимость), во второй – об отрицательной (обратная зависимость). По принципу своего построения коэффициент корреляции предназначен для измерения только линейной статистической связи между переменными. В случае, когда между x и y существует линейная функциональная зависимость (строгая прямая или обратная) значения коэффициента корреляции равны соответственно ± 1 .

Качественная оценка коэффициента корреляции приводится в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Качественная оценка коэффициента корреляции

Коэффициент корреляции	Теснота связи
$\pm 0,91 - 1,00$	очень сильная
$\pm 0,81 - 0,90$	весьма сильная
$\pm 0,65 - 0,80$	сильная
$\pm 0,45 - 0,64$	умеренная
$\pm 0,25 - 0,44$	слабая
до $\pm 0,25$	очень слабая

Приведем формулу для расчета коэффициента корреляции между наборами переменных x и y , не вдаваясь в подробности ее вывода:

$$r_{xy} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (6.1)$$

где σ_x и σ_y – среднеквадратические отклонения соответственно по переменным x и y .

Пример. Пусть получены следующие данные по содержанию фосфора и азота в почве (таблица 6.2). Рассчитаем коэффициент корреляции между этими показателями.

Связь между общим количеством фосфора и общим количеством азота можно выразить графически в виде диаграммы рассеяния (рисунок 6.1). На ней каждая проба почвы характеризуется точкой, координаты которой x и y равны соответственно проценту сухого веса фосфора и азота. Графический анализ позволяет охарактеризовать изучаемую взаимосвязь как сильную, о чем свидетельствует и расчет коэффициента корреляции между общим количеством фосфора и азота для данных образцов почв с помощью процедуры «Корреляция» табличного процессора EXCEL. Значение коэффициента корреляции в данном случае равно 0,82575. Правда, спешить с такой оценкой не надо, и вывод о сильной связи мы поставим под сомнение.

Таблица 6.2 – Взаимосвязь между общим количеством фосфора и азота в почве

№ п/п	Общее количество, % сухого вещества		№ п/п	Общее количество, % сухого вещества	
	фосфора	азота		фосфора	азота
1	0,12	0,63	13	0,01	0,21
2	0,15	1,19	14	0,08	0,63
3	0,36	2,3	15	0,08	0,88
4	0,17	1,29	16	0,07	0,45
5	0,14	0,73	17	0,13	0,43
6	0,06	0,52	18	0,08	0,31
7	0,1	0,33	19	0,05	0,33
8	0,11	0,61	20	0,08	0,52
9	0,11	0,47	21	0,06	0,44
10	0,12	0,66	22	0,05	0,28
11	0,10	0,37	23	0,12	0,81
12	0,15	1,81	24	0,06	0,99

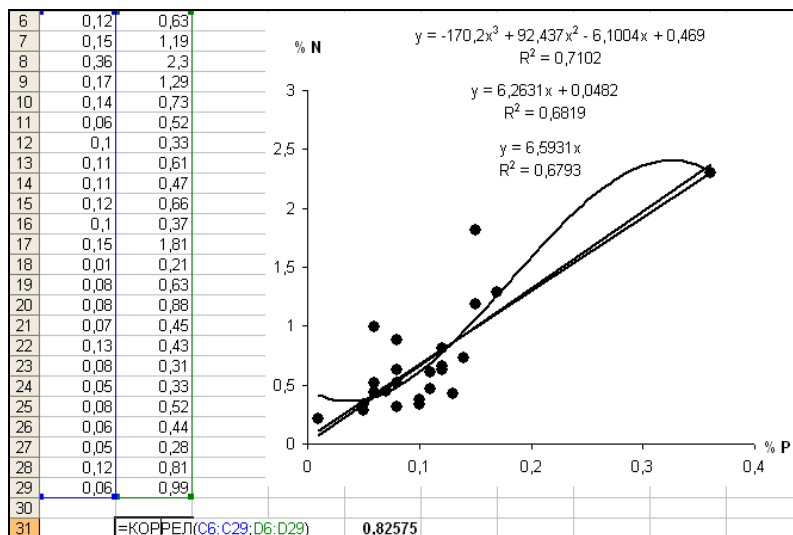


Рисунок 6.1 – Связь между общим количеством фосфора и азота в почве (фрагмент листа MS EXCEL).

6.4 Интерпретация коэффициента корреляции

Следует знать, что выводы о пределах изменения для r_{xy} справедливы только в определенной статистической модели. Для исключения возможных ошибок содержательной интерпретации коэффициента корреляции должен сопутствовать визуальный анализ диаграммы рассеяния (графиков). Ранее уже подчеркивалось, что r_{xy} измеряет тесноту только линейной связи между переменными x и y . Поэтому для диаграммы рассеяния на рисунке 6.2 $r_{xy} \approx 0$. Однако $r_{xy} \approx 0$ и для диаграммы рассеяния, приведенной на рисунке 6.3, несмотря на то, что в этом случае имеет место функциональная связь.

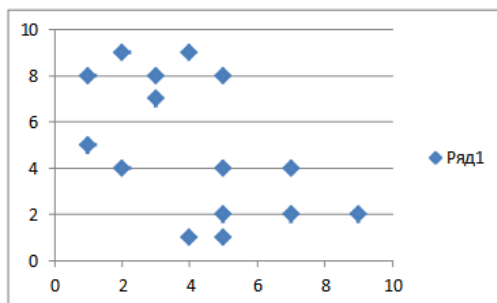


Рисунок 6.2 – Отсутствие линейной связи

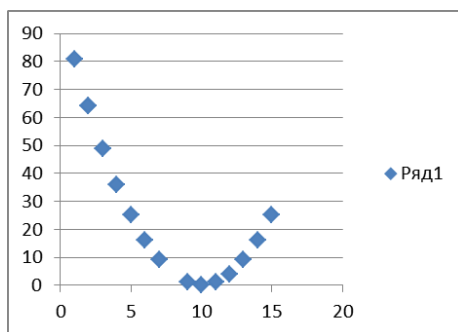


Рисунок 6.3 – Нелинейная функциональная зависимость

Происходит это из-за нелинейной связи между x и y . Этот пример должен служить предостережением против опрометчивого вывода о том, что равенство нулю коэффициента корреляции между переменными x и y всегда свидетельствуют об отсутствии статистической связи между ними.

С другой стороны возможен вариант возникновения ложной корреляции в связи с появлением в совокупности исходных данных аномальных значений. Это бывает по следующим причинам:

- неоднородность анализируемого материала;
- ошибки при регистрации данных;
- когда исследователь случайно выбирает из всего множества экспериментальных данных некоторый набор, в котором пары величин изменяются однонаправленно.

Значение коэффициента корреляции может быть высоким, но не достоверным, случайным. Чтобы проверить *статистическую значимость* коэффициента корреляции, необходимо рассчитать эмпирическое (наблюдаемое) значение t -критерия. Для малых выборок $n < 100$ оно рассчитывается по формуле:

$$t_{\text{набл}} = \frac{|r| \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (6.2)$$

При $n > 100$ формула для расчета t -наблюдаемого следующая:

$$t_{\text{набл}} = \frac{|r| \sqrt{n}}{1-r^2} \quad (6.3)$$

Критическое значение t -критерия Стьюдента рассчитывается по специальной таблице или в EXCEL с помощью встроеной функции СТЬЮДРАСПОБР в соответствии с

принятым уровнем значимости α и числом степеней свободы $f = n - 2$: $t_{\text{крит}}(\alpha, f = n - 2)$.

При $t_{\text{набл}} > t_{\text{крит}}$ нулевая гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции между изучаемыми признаками в генеральной совокупности отвергается, и r считается статистически значимым на принятом уровне значимости.

При большом числе наблюдений, когда коэффициенты корреляции необходимо последовательно вычислять для нескольких выборок, для удобства получаемые коэффициенты сводят в таблицы (*корреляционные матрицы*), в которых на пересечении соответствующих строки и столбца находится коэффициент корреляции между соответствующими параметрами.

6.5 Ранговый коэффициент корреляции Спирмена

Если какое-либо из условий по ограничению использования коэффициента корреляции Пирсона не выполняется (все переменные должны быть непрерывными, данные должны являться случайной выборкой из генеральной совокупности с нормальным распределением, зависимость близка к линейной), применяются так называемые непараметрические критерии и, в частности, коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Его значение также заключено между -1 и $+1$. Кроме того, этот коэффициент используется при оценке взаимосвязи между признаками, хотя бы один из которых оценивается качественно. Формула для его вычисления выглядит так:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n}, \quad (6.4)$$

где d_i – разность рангов по обоим признакам i -го объекта; n – число объектов.

Пример. Рассмотрим пример вычисления рангового коэффициента корреляции. Изучается взаимосвязь между уровнем урбанизации и степенью загрязнения окружающей среды. Для этого эксперт или группа экспертов оценивают совокупность городов с разной степенью урбанизации по уровню загрязненности окружающей среды и упорядочивают все города по обоим показателям. Процесс упорядочивания носит название ранжирования, т. е. приписывания каждому городу ранга – порядкового номера, который соответствует месту, занимаемому им во всей совокупности. Такое ранжирование проводится по обоим интересующим нас признакам.

Обозначим города буквами от *A* до *K* и выпишем для них следующие две последовательности рангов (таблица 6.3).

Таблица 6.3 – Ранжирование городов по степени урбанизации и степени загрязненности

Города	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>	<i>Е</i>	<i>Ж</i>	<i>З</i>	<i>И</i>	<i>К</i>
Степень урбанизации	3	7	5	9	1	8	6	10	4	2
Уровень загрязненности	2	4	3	5	1	9	8	10	7	6
Разности d_i	1	3	2	4	0	-1	-2	0	-3	-4
Разности d_i^2	1	9	4	10	0	1	4	0	9	16

Тогда

$$r_{sp} = \frac{1 + 9 + 4 + 16 + 0 + 1 + 4 + 0 + 9 + 16}{10^3 - 10} = 0,6 \cdot$$

Значение полученного коэффициента указывает на довольно высокую степень согласованности между степенью урбанизации и уровнем загрязненности среды в городах.

6.6 Коэффициент взаимной сопряженности

Кроме признаков, выраженных количественно или допускающих ранжирование, встречаются и такие, относительно которых можно утверждать только то, имеются ли они у данного объекта или отсутствуют. При этом наличие или отсутствие определенного признака обозначается нулем или единицей (битовые данные). Для данных, представленных в таком виде, также существует коэффициент, который позволяет оценивать корреляцию между ними:

$$\varphi = \frac{p_{xy} - p_x p_y}{\sqrt{p_x q_x p_y q_y}}, \quad (6.5)$$

где p_x и p_y – доля объектов, имеющих единицу по признакам x и y соответственно;

q_x и q_y – доля объектов, имеющих нуль по признакам x и y соответственно;

p_{xy} – доля объектов имеющих одновременно единицу и по x и по y .

Очевидно, что $p_x + p_y = q_x + q_y = 1$

Формула 6.5 вытекает из формулы для обычного коэффициента корреляции (6.1), если в последнюю вместо x и y подставить соответствующие значения, выраженные в долях.

Пример. Пусть имеются данные об условиях гнездования двух видов чаек: серебристых и сизых. Совершенно произвольно серебристых будем обозначать как 1, а сизых – как 0. Каждый из этих видов может гнездиться в камнях (1) и в других местах (0). Обследование дало следующие данные (таблица 6.3):

Таблица 6.3 – Условия гнездования двух видов чаек

Вид чайки	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
Место гнездования	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0

Имеем $p_x = 7/12$;

$p_y = 4/12$;

$q_x = 5/12$;

$q_y = 8/12$;

$p_{xy} = 3/12$.

По формуле (6.5) имеем:

$$\varphi = \frac{0,25 - 0,583 \cdot 0,33}{\sqrt{0,583 \cdot 0,417 \cdot 0,333 \cdot 0,667}} = \frac{0,056}{0,232} = 0,24 \cdot$$

6.7 Определение значимости показателей

Статистическая значимость результата анализа представляет собой оцененную меру уверенности в его «истинности» (в смысле «репрезентативности выборки»). Выражаясь технически, α -уровень (этот термин был впервые использован в работе Brownlee, 1960) – это показатель, находящийся в убывающей зависимости от надежности результата. Более высокий α -уровень соответствует более низкому уровню доверия к результатам анализа. Именно, α -уровень представляет собой вероятность ошибки, связанной с распространением наблюдаемого признака на всю популяцию.

Например, α -уровень, равный 0,05 (т. е. 1/20) показывает, что имеется 5 %-я вероятность, что найденная в выборке связь между переменными (если изучается взаимосвязь между переменными) является лишь случайной особенностью данной выборки.

Не существует никакого способа избежать произвола при принятии решения о том, какой уровень значимости следует действительно считать «значимым». Выбор определенного уровня значимости, выше которого результаты отвергаются как ложные, является произвольным.

На практике окончательное решение обычно зависит от того, был ли результат предсказан априори (т. е. до прове-

дения опыта) или обнаружен апостериорно в результате многих анализов и сравнений, выполненных с множеством данных, а также на традиции, имеющейся в данной области исследований.

Обычно во многих областях результат $\alpha = 0,05$ является приемлемой границей статистической значимости, однако следует помнить, что этот уровень все еще включает довольно большую вероятность ошибки (5 %). Результаты, значимые на уровне $\alpha = 0,01$ обычно рассматриваются как статистически значимые, а результаты с уровнем $\alpha = 0,005$ или $\alpha = 0,001$ как высоко значимые.

Глава 7. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ И АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ

7.1 Задачи регрессионного анализа

Довольно часто в практике исследовательской работы имеет место ситуация, когда важнейшие переменные, описывающие некоторый процесс, известны заранее, но модель процесса еще не известна. В этом случае возможны разные подходы. Одним из них является построение эмпирических моделей, которое осуществляется с помощью регрессионного анализа. Регрессионная модель в зависимости от входящих в нее факторов (x_j) может быть использована:

- для управления объектом;
- для прогнозирования его состояния;
- для объяснения физики явлений.

Регрессионный анализ позволяет:

- производить расчет регрессионных моделей путем определения значений параметров – постоянных коэффициентов при независимых переменных – регрессорах, которые часто называют факторами;
- проверять гипотезу об адекватности модели имеющимся наблюдениям;
- использовать модель для прогнозирования значений зависимой переменной при новых или ненаблюдаемых значениях независимых переменных.

Среди регрессионных моделей обычно выделяют однопараметрические модели и многопараметрические модели, а также модели, линейные относительно независимых переменных, нелинейные по переменным и нелинейные по параметрам.

7.2 Примеры регрессионных моделей в экологии

1. Скорость поглощения кислорода опадом листьев [Джефферс Дж., 1981]:

$$\lg(Y+1) = 0,561 - 8,701D \cdot 10^{-4} + 3,935D^2 \cdot 10^{-7} + 7187B \cdot 10^{-4} + 0,0398T,$$

где: Y – поглощение кислорода, измеренное в мкл $(0,25 \text{ г})^{-1} \text{ ч}^{-1}$;

D – число дней, в течение которых выдерживались образцы;

B – процентное содержание влаги в образцах;

T – температура, $^{\circ}\text{C}$.

Эта формула дает оценки для скорости поглощения кислорода во всем диапазоне дней, температур и влажностей, которые наблюдались в эксперименте, со средним квадратичным отклонением в поглощении кислорода, равном $S = 0,319 \pm 0,321$.

2. Зависимость средней концентрации SO_2 ($\text{мг} \cdot \text{м}^{-3}$) от освещенности на высоте 1,5 м (Q), средней высоты мха на стволе (h , мм), степени покрытия древесной растительности лишайником (p , %) [Андерсен Дж. М., 1985]:

$$\overline{SO_2} = 18,72 - 3,94Q - 0,15h - 2,38p.$$

Это уравнение регрессии описывает 72 % дисперсии ряда и таким образом, применяется для прогноза изменения концентрации SO_2 . (Коэффициенты рассчитаны для Великобритании. Для других районов константы следует рассчитывать эмпирическим путем).

7.3 Линейные регрессионные модели

Наиболее простые для построения и анализа линейные модели как однопараметрические, так и многопараметрические. Они содержат независимые переменные только в первой степени. Большая их часть основана на предположении о нормальном распределении данных или ошибок наблюдений, поэтому в каждом случае анализа необходима предварительная проверка соответствия данных нормальному распределению.

Модель простой *линейной регрессии* имеет вид:

$$f(x) = b_0 + b_1x + \varepsilon, \quad (7.1)$$

где: $f(x)$ – функция (отклик);
 x – независимая переменная – регрессор (фактор);
 b_0 и b – постоянные коэффициенты (параметры);
 ε – случайная ошибка (остаточный член).

Рассмотрим несколько примеров зависимостей, по которым можно построить линейные регрессионные модели (таблица 7.1, 7.2)

Таблица 7.1 – Число цветков при разном количестве брома в почве

Количество неорганического брома (мкг/см ³)	2	4	6	8	10	12	14
Среднее число цветков на одном растении гвоздики	3,6	2,9	3,2	1,8	2,3	1,7	0,8

Таблица 7.2 – Длина змей и средний видовой ареал

Длина, см	15	25	35	45	55	65	75	85	95	150
Ареал	19	20	21	22	22	22	22	22	22	238
	6	8	5	0	0	2	4	5	6	

7.4 Метод наименьших квадратов

Коэффициенты в регрессионных моделях обычно определяются с помощью процедур идентификации параметров моделей по экспериментальным данным. Для этого был разработан *метод наименьших квадратов*, в основе которого лежит критерий минимизации суммы квадратов ошибок (разности между эмпирическими значениями и теоретическими), т. е. требование, чтобы:

$$s = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \longrightarrow \min \quad (7.2)$$

была минимальной, где y_i – эмпирические значения зависимой переменной, а $f(x_i)$ – теоретические значения.

Покажем, как используется метод наименьших квадратов на примере оценки параметров уравнения $y = b_0 + b_1x$.

Исходя из требования (7.2) выводится система уравнений, из которой определяются коэффициенты b_0 и b_1 :

$$\begin{cases} \sum y = nb_0 + b_1 \sum x \\ \sum xy = b_0 \sum x + b_1 \sum x^2 \end{cases} \quad (7.3)$$

Проиллюстрируем нахождение этих коэффициентов на данных, приведенных в таблице 7.1. Для этого вычислим сначала промежуточные величины:

$$\sum y = 16,3;$$

$$\sum x = 56;$$

$$\sum x^2 = 560;$$

$$\sum xy = 107.$$

Подставляя их в систему 7.3, получаем:

$$\begin{cases} 16,3 = 7b_0 + 56b_1, \\ 107 = 56b_0 + 560b_1. \end{cases}$$

Откуда $b_0 = 4,0$; $b_1 = -0,209$ и модель, связывающая среднее число цветков на одно растение гвоздики с количеством неорганического брома в почве принимает вид:

$$y = 4,0 - 0,209x.$$

Можно воспользоваться и готовыми формулами, которые вытекают из этой системы:

$$b_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}; \quad (7.4)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x} \quad (7.5)$$

Последнее равенство означает, что средняя точка (\bar{x}, \bar{y}) совместного распределения величин X, Y всегда лежит на линии регрессии.

Поэтому при замене x на $(x - \bar{x})$ получим $b_0 = \bar{y}$, т. е. среднее \bar{y} заменяет b_0 . Отсюда следует, что для определения линии регрессии достаточно знать лишь ее коэффициент наклона b_1 . Равенство для b_1 можно упростить, если использовать найденное значение выборочного коэффициента корреляции r :

$$b_1 = r \frac{S_y}{S_x}, \quad (7.6)$$

где S_y и S_x – оценки стандартных отклонений наблюдений y_i и x_i вокруг своих средних \bar{y} и \bar{x} ; r – коэффициент корреляции.

Из последнего выражения для b_1 видна роль коэффициента корреляции: чем меньше r , тем ближе линия регрессии к горизонтальному положению, т. е. тем ближе к состоянию неизменности будут средние значения наблюдений отклика y_i .

Конечно, в настоящее время нет надобности проводить все эти трудоемкие вычисления, поскольку для определения параметров регрессионных моделей по экспериментальным данным существуют удобные компьютерные программы со встроенным алгоритмом метода наименьших квадратов. Примеры таких определений будут даны в конце главы в разделах «Аппроксимация данных».

7.5. Проверка адекватности модели

Оценка адекватности (значимости) уравнения регрессии позволяет установить, соответствует ли модельное уравнение регрессии экспериментальным данным, и в ряде случаев

– существенна ли ошибка от замены истинной регрессии приближенной. После того, как функция приближенной регрессии $f(x)$ найдена, адекватность регрессионной модели проверяется с помощью сравнения критерия, характеризующего разброс эмпирических точек относительно линии или поверхности регрессии, с некоторым пороговым значением.

Оценку качества построенной модели дают: значение F -статистики Фишера, дисперсионный анализ, коэффициент (индекс) детерминации, а так же средняя ошибка аппроксимации.

Точные методы оценки значимости регрессионной модели основаны на критерии Фишера. *Значение F -статистики Фишера* показывает, насколько установленная связь между факторами случайна. Оно определяет уровень надежности регрессионной модели. F -тест состоит в проверке гипотезы H_0 о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Для этого выполняется сравнение фактического F и критического (табличного) значения F_α -критерия Фишера. Чем больше наблюдаемая (расчетная) F -статистика превышает табличную, тем надежнее выбранная модель.

F определяется по формуле:

$$F = \frac{r_{xy}}{1 - r_{xy}} \cdot (n - 2), \quad (7.7)$$

где n – число единиц совокупности;

F_α – находится по специальной таблице.

Это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при уровне значимости α и данных степенях свободы ($f - 1, n - 1$), где f – число коэффициентов модели. Уровень значимости α – вероятность от-

вергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно α принимается равной 0,05 или 0,01.

Если $F_\alpha < F$, то H_0 – гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется, и признается их статистическая значимость и надежность. Если $F_\alpha > F$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается их статистическая незначимость, ненадежность уравнения регрессии (модели).

Дисперсионный анализ. Задача дисперсионного анализа заключается в анализе дисперсии зависимой переменной:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = Q_{mod} + Q_{ост}. \quad (7.8)$$

Общая сумма квадратов отклонений отклика $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ относительно его среднего значения \bar{y} разлагается на сумму Q_{mod} , характеризующую влияние фактора X , т. е. обусловленную регрессионной моделью $f(x)$, и остаточную сумму квадратов $Q_{ост}$, характеризующую влияние неучтенных факторов, т. е. обусловленную случайными ошибками относительно модели регрессии.

Очевидно, чем меньше влияние неучтенных факторов, тем лучше модель соответствует экспериментальным данным, т.к. вариация отклика Y в основном объясняется влиянием фактора X .

Для проверки гипотезы об адекватности предлагаемой модели можно использовать F -статистику Фишера, рассчитанную, исходя из дисперсионного анализа:

$$F = \frac{\frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2} = \frac{n-l}{l-1} \cdot \frac{Q_{mod}}{Q_{ост}} = \frac{S_{mod}^2}{S_{ост}^2}. \quad (7.9)$$

с числом степеней свободы $(f - 1, n - 1)$, где f – число коэффициентов модели (число связей). Здесь критерий Фишера вычисляется как частное от деления среднего квадрата, обусловленного моделью регрессии, на средний квадрат ошибки относительно модели.

Кроме того, для оценки качества модели в условиях заметного влияния факторов, необходимо помнить, что регрессионные остатки, которые не учитываются моделью, не должны зависеть от величины независимой переменной. Если они зависимы, то адекватность модели сомнительна. Для получения адекватной модели нужно преобразовать данные или использовать иные методы, а не метод наименьших квадратов.

Коэффициент детерминации (R^2) показывает, какая доля вариации результата объясняется вариацией фактора X и вычисляется по формуле:

$$R^2 = \frac{\sum (f(x) - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}. \quad (7.10)$$

Чем ближе R^2 к 100 %, тем лучше подобранная модель описывает зависимость отклика от фактора. Для простой линейной модели R^2 есть квадрат коэффициента корреляции Пирсона: $r = \sqrt{R^2}$.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений от фактических:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - f(x)}{y} \right| \cdot 100 \%. \quad (7.11)$$

Допустимый предел значений \bar{A} – не более 8–10 %.

7.6 Прогнозирование с помощью регрессионных моделей

Полученные методом наименьших квадратов уравнения могут быть использованы для предсказания отклика, т. е. значений зависимой переменной по значениям независимой переменной. Однако при прогнозе надо соблюдать осторожность, используя значения X , существенно отличающиеся от тех, которые применялись при определении коэффициентов эмпирической модели. Во избежание больших ошибок при прогнозе значений зависимой переменной можно использовать только те значения X , которые не превосходят размах изменений независимой переменной более чем на 10–15 %.

Прогнозное значение y_p определяется путем подстановки в уравнение регрессии $f(x) = b_0 + b_1x$ соответствующего (прогнозного) значения x_p . Вычисляется стандартная средняя ошибка прогноза $m_{f(x)_p}$:

$$m_{f(x)_p} = \sigma_{ост} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} \quad (7.12)$$

где $\sigma_{ост} = \sqrt{\frac{\sum (y - f(x))^2}{n - l - 1}}$.

Затем строится доверительный интервал прогноза:

$$\varphi_{f(x)_p} = f(x)_p \pm t_{набл} \cdot m_{f(x)_p} \quad (7.13)$$

Здесь $t_{набл}$ – критерий Стьюдента, который связан с F -статистикой Фишера равенством: $t^2 = \sqrt{F}$.

7.7 Выбор формы функциональной зависимости в уравнениях регрессии

Спектр используемых в экологии функций очень широк.

Определенную часть зависимостей можно выразить *линейным уравнением* ($y = b_0 + b_1x$). Например, зависимость суммарной биомассы (B) (кДж/м²) всех гидробионтов, включая водные растения, бактерии, зоопланктон, зообентос и рыб в экосистемах различных озер от первичной продукции (P) в них за год выражается уравнением $B = 0,126P$.

Показательная функция ($y = ab^x$) применяется для описания процессов роста с постоянной скоростью. Например, экспоненциальная функция, у которой временной параметр входит в показатель: $y = ae^{kt}$, описывает рост численности микроорганизмов.

Степенной функцией ($y = ax^b$) могут быть связаны, например, масса млекопитающего с длиной его туловища.

Логистическая модель ($y = \frac{K}{1 + be^{-rt}}$) – это закон роста, явления, присущего многим известным формам и уровням жизни. По логистическому закону происходит как увеличение особи и ее отдельных органов, так и численности отдельных популяций. Если известен вид функциональной зависимости, то нахождение коэффициентов регрессионного уравнения особого труда не представляет.

В частности, показательное и степенное уравнения легко привести к линейному виду, прологарифмировав их левые и правые части:

$$\begin{aligned}lgy &= lga + xlg b \text{ или } Y = A + Bx; \\lgy &= lga + blgx \text{ или } Y = A + bx,\end{aligned}$$

где $Y = lgy$; $A = lga$; $B = lgb$; $X = lgx$.

Логистическое уравнение приводится к линейному виду, если ввести новую переменную $Y = x/y$. $Y = a + bx$.

В современных компьютерных средствах математической обработки данных есть возможность прямой оценки параметров нелинейных регрессионных моделей, которая вкратце рассматривается в следующем разделе.

7.8 Аппроксимация данных с помощью стандартного набора функций электронных таблиц EXCEL

Аппроксимация (приближение) является одним из наиболее часто употребляемых способов математической обработки данных и в большинстве случаев предполагает формализацию с помощью той или иной модели (математической функции) имеющихся экспериментальных данных. Иногда эта функция уже известна исследователю, например из теоретических соображений; но чаще она подбирается опытным (эмпирическим) путем с использованием описанных выше алгоритмов проверки адекватности модели. В наиболее простых случаях с целью аппроксимации экспериментальных данных вполне достаточно использовать возможности стандартного набора функций электронных таблиц EXCEL. Рассмотрим их подробнее.

В MS EXCEL проведение аппроксимации данных осуществляется после построения диаграммы с помощью оператора «Добавить линию тренда» из меню «Диаграмма». Напомним, что предварительно для построения диаграммы необходимо выделить оба столбца данных, один из которых выбирается аргументом (x), а другой – будущей функцией (y), а потом, активировав иконку «Мастер диаграмм», выбрать из стандартного списка диаграмм вариант «Точечная». Так на рисунке 6.1 (глава 6 ОЦЕНКА ВЗАИМОСВЯЗЕЙ В СИСТЕМЕ) была рассмотрена связь между общим количеством фосфора (x) и общим количеством азота (y) в почве и построена соответствующая точечная диаграмма. Как мы помним, при этом выявлялась достаточно сильная корреляция данных с коэффициентом 0,83. Это обстоятельство позволяет испробовать линейную эмпирическую модель вида $y = ax$, где a – эмпирический коэффициент для аппроксима-

ции полученной зависимости. Для этого надо лишь активировать (правой кнопкой мыши) точки на диаграмме и выбрать опцию «Добавить линию тренда». Там содержатся 5 стандартных (встроенных) типов алгебраических функций – линейная ($y = ax + y_0$), степенная ($y = ax^b$), логарифмическая ($y = a \cdot \ln x + b$), экспоненциальная ($y = a \cdot \exp(bx)$) и полиномиальная (набор полиномов от 2 до 6 степени:

$$y = y_0 + ax + bx^2;$$

$$y = y_0 + ax + bx^2 + cx^3;$$

$$y = y_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4;$$

$$y = y_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5;$$

$$y = y_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5;$$

$$y = y_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5;$$

$$y = y_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$$

Здесь a, b, c, \dots, f – эмпирические коэффициенты (параметры) моделей, подбираемые методом наименьших квадратов.

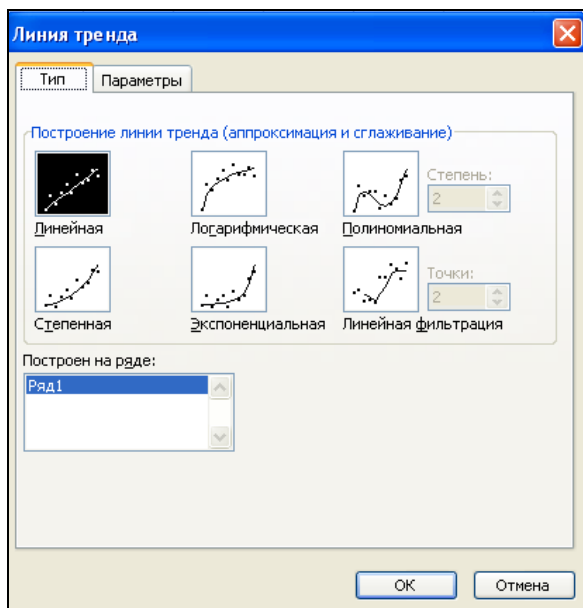


Рисунок 7.1 – Встроенные функции для аппроксимации данных в таблицах EXCEL (меню «Диаграмма», опция «Добавить линию тренда»)

Для рассматриваемого примера выберем линейную модель. Флажками в меню «Параметры» отметим: «пересечение кривой с осью y в точке 0»; «показывать уравнение на диаграмме»; «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации R^2 » (рисунок 6.1). В результате на диаграмме появится прямая аппроксимационная линия с началом в точке пересечения координат, ее уравнение $y = 6,5931x$ и значение величины достоверности аппроксимации (коэффициента детерминации) $R^2 = 0,6793$. Помним, что чем ближе R^2 к 1, тем в общем случае лучше аппроксимируемые данные удовлетворяют выбранной функциональной зависимости. В рассматриваемом случае нет оснований считать эту связь прямолинейной, а если исключить из выборки полярное значение P (%) = 0,36 и N (%) = 2,3, то гипотезу о линейности связи вообще следует отбросить, поскольку R^2 при этом понизится до 0,42. Кстати и коэффициент корреляции при этом упадет с 0,83 до 0,65, что косвенно указывает на недостаток данных для первоначального вывода о сильной (тесной) связи между общим содержанием фосфора и азота.

Возвращаясь к теме аппроксимации, посмотрим, не удастся ли улучшить описание, используя другие модели из встроеного списка. Например, добавление в линейную модель остаточного члена (y_0), для чего надо лишь снять флажок в опции «пересечение кривой с осью y в точке 0», позволяет немного увеличить достоверность аппроксимации R^2 с 0,6793 до 0,6819 (рисунок 6.1). Несколько лучшее описание дает кубический полином с уравнением: $y = -170,2x^3 + 92,437x^2 - 6,1004x + 0,469$. Для него $R^2 = 0,7102$. Но все равно рассматриваемый пример из-за большого разброса данных далек от того, чтобы его считать функциональной зависимостью и исследователю можно порекомендовать дополнить его новыми экспериментальными данными.

В целом же средства MS EXCEL для аппроксимации данных, как мы убедились, достаточно ограничены.

7.9 Аппроксимация данных в компьютерной среде S-Plot

Много большие возможности для аппроксимации данных предоставляет компьютерная среда S-Plot последних версий (S-Plot-9... S-Plot 11). По интерфейсу она очень похожа на электронные таблицы EXCEL и для работы в ней достаточно скопировать из EXCEL массив данных в виде двух столбцов x и y , а потом, используя встроенную опцию «Regression Wizard» (мастер регрессии) выбрать из большой библиотеки функций подходящую, или, если таковой не окажется, – написать самому ту формулу (модель), которую вы считаете, возможно, адекватной экспериментальным данным, например, исходя из теоретических соображений. Так, наблюдение за ростом водорослей позволили получить временной ряд – зависимость между показателем их численности (концентрации (N) в воде в кл/мл) и переменной времени (t). Экспериментальные данные представлены в таблице 1.

Таблица 7.1 – Динамика роста водной культуры водорослей

t , час	0	24	48	72	96	120
N , кл/мл	135	245	374	545	839	1544
t , час	144	168	192	216	240	264
N , кл/мл	2392	3433	6586	10129	12750	13830
t , час	288	312	336	360	384	408
N , кл/мл	14800	15510	15670	16170	16230	16500
t , час	432	456	480	504	528	
N , кл/мл	16560	16500	16800	16170	16560	

Из теоретических соображений наиболее адекватной моделью для их аппроксимации будет логистическое уравнение роста $y = \frac{K}{1 + be^{-rt}}$ (модель Ферхюльста – Перла), однако метод «ручной обработки» для линеаризации этого

уравнения, описанный в 7.7, несколько трудоемок и может давать определенную дополнительную погрешность при замене нелинейного уравнения на линейное в алгоритме наименьших квадратов. Для непосредственного нахождения параметров аппроксимации исходной нелинейной модели воспользуемся программой S-Plot-9. Расположим данные в виде двух столбцов на листе электронной таблицы S-Plot (рисунок 7.2).

	1	2	3-Parameters	4-Predicted	5-Resid
1	0,0000	135,0000			
2	24,0000	245,0000			
3	48,0000	374,0000			
4	72,0000	545,0000			
5	96,0000	839,0000			
6	120,0000	1544,0000			
7	144,0000	2392,0000			
8	168,0000	3433,0000			
9	192,0000	6586,0000			
10	216,0000	10129,0000			

Рисунок 7.2 – Фрагмент рабочего листа S-Plot с экспериментальными данными

Далее из меню «Statistics» курсором выберем опцию «Regression Wizard»; или можно просто нажать клавишу F5. Перед нами раскроется лист, содержащий значительно больший набор встроенных функций для аппроксимации данных, чем в MS EXCEL (рисунок 7.3). Это и полиномиальные (прямые и обратные) и степенные и гиперболические и экспоненциальные и логарифмические и периодиче-

ские (гармонические) элементарные функции, ряд специальных функций и т. д. Но искомого уравнения логистического роста в старых версиях программы мы не найдем. Вместо него выберем близкое трехпараметрическое уравнение экспоненциального разложения (рисунок 7.3).

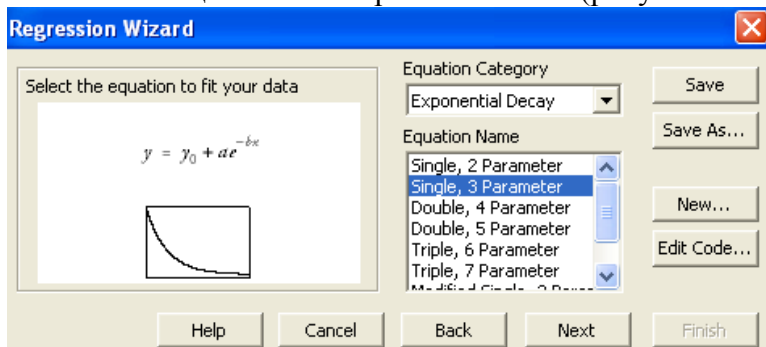


Рисунок 7.3 – Список функций в модуле «Regression Wizard»

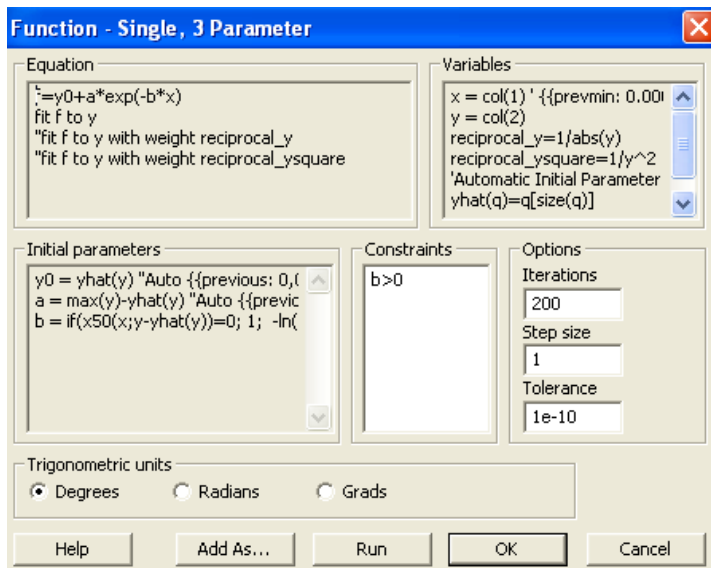


Рисунок 7.4 – Исходное (встроенное) трехпараметрическое уравнение с экспонентой

Нажмем «Edit Code» для того, чтобы его открыть. Появится следующее изображение (рисунок 7.4). Нажмем клавишу «Add As» (добавить как) для того, чтобы сохранить этот прообраз в пользовательском разделе библиотеки, то есть в разделе создаваемых самим пользователем новых регрессионных моделей (функций). При сохранении как то назовем эту модель, например, «ogist grow 2015». Теперь преобразуем исходное экспоненциальное уравнение в логистическую модель. Важно отметить, частую ошибку студентов – они начинают сразу, до сохранения прототипа в виде встроенного в S-Plot уравнения посредством опции «Add As» пытаться переделывать его под свою модель. Это недопустимо, так как в лучшем случае программа закроется, а в худшем – вы испортите встроенное уравнение и с ним уже нельзя будет работать. Итак, только сохранив прототип в пользовательской библиотеке и присвоив ему новое имя, мы можем менять уравнение под свою задачу (Рисунок 7.5)

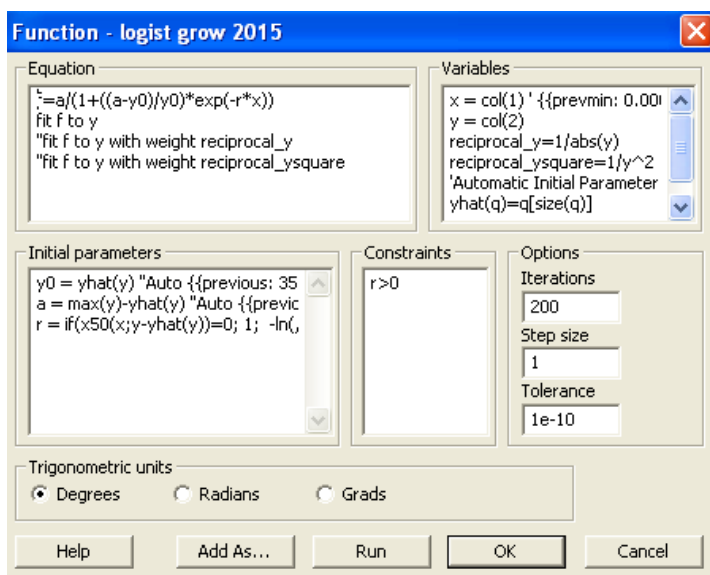


Рисунок 7.5 – Результат переделки модели под логистическую

С этой целью перепишем в левом верхнем углу исходное экспоненциальное уравнение $f = y_0 + a \cdot \exp(-b \cdot x)$ в логистическое: $f = a / (1 + (a - y_0) / y_0 \cdot \exp(-r \cdot x))$. Здесь искомые параметры это a – или так называемая «емкость среды» (часто в экологических работах обозначается K), r – «мальтузианский параметр роста» и y_0 – начальная концентрация водорослей. Очевидно, обозначая $a = K$, $(a - y_0) / y_0 = b$, мы получим логистический закон (модель) из 7.6. Параметры емкости среды (a) и начальной концентрации (y_0) в данном примере будут иметь размерность концентрации (кл/мл), а экспоненциальный показатель роста (r) – размерность обратного времени (час^{-1}).

В левом нижнем углу, сразу под графой с уравнением (Equation) находится окно с начальными параметрами (Initial parameters). Там можно оставить исходные установки для уравнения-прототипа, или, стерев их, записать числами возможные значения, исходя из формы графика экспериментальных данных. Скажем, для нашего примера, $y_0 = 135$ кл/г, $a = 16560$ кл/г, $r = 0,002$ час^{-1} , (1/500 часов эксперимента). Обратите внимание, что заменив обозначение параметра b в исходном уравнении-прототипе на r , мы также заменили его и в графе «Initial parameters».

Наконец, до запуска программы еще надо задать ограничения на параметры (окно «Constraints»). Эти ограничения диктуются самой задачей и физическим смыслом параметров. В частности, для нашей задачи, известно, что по физическому смыслу модели мальтузианский параметр роста r не может быть отрицательной величиной и принимать нулевое значение, откуда следует ограничение $r > 0$. Все остальные установки программы («Variables», «Options») без необходимости менять не надо.

Теперь остается, нажав на клавишу «Run», запустить программу. Ее результатом будет вывод на экран подобранных для исследуемого уравнения (модели) параметров с их статистиками – средним значением («Value»), стандартным отклонением («StdErr») и коэффициентом вариации («CV»).

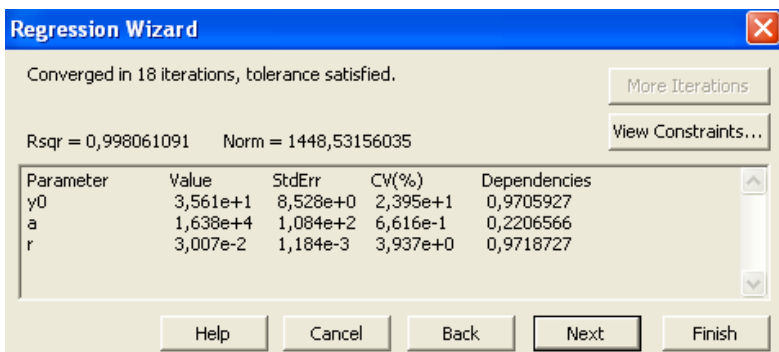


Рисунок 7.6 – Результат подбора коэффициентов логистической модели

Пример приведен на рисунке 7.6. Более подробную статистическую информацию можно получить, нажав клавишу «Finish». Перед вами откроется большой лист (полный статистический отчет), содержащий многообразные данные статистической обработки, из которых для неспециалистов-пользователей интерес представляет информация о коэффициенте детерминации (R^2 или Rsqr), стандартной ошибке аппроксимации, а также статистической значимости полученных параметров с оценкой их стандартного отклонения и t-критерия значимости (t) при вычисляемом программой уровне ($P = \alpha$), как показано на рисунке 7.7. Из рисунка видно, что в нашем случае получено весьма хорошее соответствие выбранной нелинейной регрессионной модели в виде логистического уравнения реальным экспериментальным данным кинетики роста водорослей в водной среде. Коэффициент детерминации составил 0,9994, то есть практически равнялся 1, что указывает на функциональную связь. Стандартные отклонения были значительно ниже средних значений параметров, при этом параметры оказались статистически значимыми (отличными от нуля) при уровнях значимости (0,0005 – 0,0001), на два порядка ниже обычных для экологии и биологии величин $\alpha = 0,05 - 0,01$.

Nonlinear Regression

Data Source: Data 1 in Notebook1

Equation: logist grow 2015

R	Rsqr	Adj Rsqr	Standard Error of Estimate	
0,9997	0,9994	0,9993	323,9015	
	Coefficient	Std. Error	t	P
y0	35,6097	8,5280	4,1756	0,0005
a	16376,9468	108,3314	151,1465	<0,0001
r	0,0301	0,0012	25,3995	<0,0001

Рисунок 7.7 – Фрагмент листа со статистической оценкой параметров аппроксимации данных

Используя полученные параметры аппроксимации легко построить в MS EXCEL по логистическому уравнению аппроксимационную кривую (рисунок 7.8).

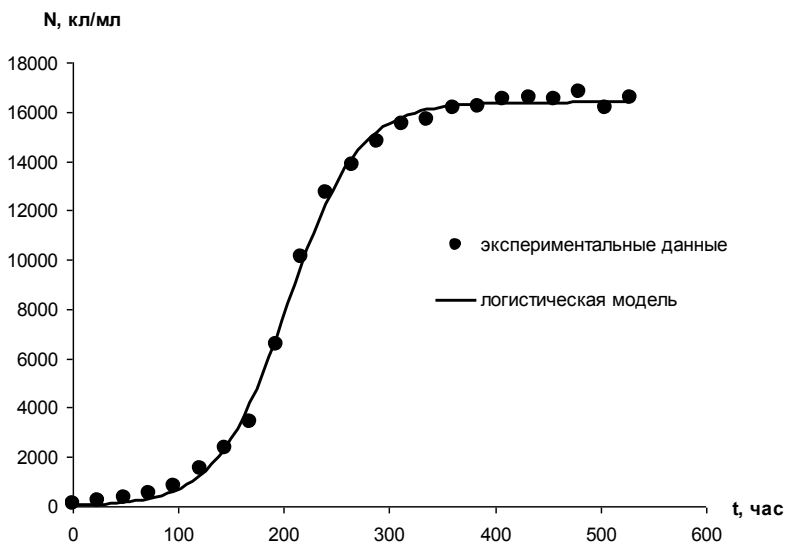


Рисунок 7.8 – Результат аппроксимации роста водорослей в водной среде логистической моделью

Глава 8. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

8.1 Схема дисперсионного анализа.

Однофакторный дисперсионный комплекс

Дисперсионный анализ – это анализ изменчивости признака под влиянием каких-либо контролируемых факторов. Этот метод применяют для установления роли отдельных факторов в изменчивости изучаемого признака. Поскольку в экологии изменчивость какого-либо признака зависит не только от исследуемых, но и от других, случайных факторов, то при дисперсионном анализе оценивают суммарное значение учитываемых факторов, затем вычисляют роль каждого из них.

По количеству выявляемых регулируемых факторов дисперсионный анализ может быть *однофакторным* (при этом изучается влияние одного фактора на результаты эксперимента), *двухфакторным* (при изучении влияния двух факторов) и *многофакторным* (позволяет оценить не только влияние каждого из факторов в отдельности, но и их взаимодействие).

Дисперсионный анализ относится к группе параметрических методов и поэтому его следует применять только тогда, когда доказано, что распределение является нормальным. Дисперсионный анализ используют, если зависимая переменная измеряется в шкале отношений, интервалов или порядка, а влияющие переменные имеют нечисловую природу (шкала наименований).

Значительный вклад в развитие дисперсионного анализа сделал Р. Фишер (1890–1962). Он разработал метод комплексной оценки действия факторов и их возможных комбинаций на результативный признак и доказал, что планирование исследований и обработка их результатов – две неразрывно связанные задачи статистического анализа. Все

эти методы нашли широкое применение в экологических исследованиях и сегодня широко используются.

Дисперсионный анализ позволяет дать ответ на следующие вопросы:

- относятся ли измерения, проведенные в разных условиях к одной генеральной совокупности, или эти группы измерений принципиально отличаются друг от друга;

- если различия между группами наблюдений существенны, имеется ли возможность агрегировать наблюдения некоторых групп;

- можно ли вычленить долю дисперсии, обусловленную влиянием фактора, на общем фоне случайных флуктуаций.

Мы рассмотрим простейший случай, когда проверяется действие только одного фактора, влияющего на результат эксперимента.

Пример. Пусть требуется проверить, насколько влияют и влияют ли вообще на содержание в почве определенного химического вещества источник загрязнения. Данные для проведения однофакторного дисперсионного анализа представляются следующей таблицей (таблица 8.1)

Таблица 8.1 – Входные данные при однофакторном дисперсионном анализе

Качество почвы	Номер эксперимента				
	1	2	3	4	5
T_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	...	X_{1n}
T_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	...	X_{2n}
T_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	...	X_{3n}
...
m	X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	...	X_{mn}

Строки таблицы соответствуют градациям фактора. В нашем случае – это качество почвы. Столбцы – экспериментам (повторность измерений). Причем, m – полное число градаций фактора, а n – число экспериментов.

Обозначим через \bar{x}_1 среднее арифметическое из содержания анализируемого вещества на почве первой категории, через \bar{x}_2 – среднее содержание на почве второй категории и т. д.

Общее среднее арифметическое всех nm измерений обозначим:

$$\bar{x} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_{ik} \quad (8.1)$$

Здесь суммирование по k при постоянном i дает сумму по всем наблюдениям i -ой серии (т. е. по почве i -й категории). Дальнейшее суммирование по i дает итог по всем категориям почвы.

Математически можно доказать следующее тождество:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x})^2 = n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)^2, \quad (8.2)$$

или в сокращенном виде:

$$\theta_{общ} = \theta_{межгрупп.} + \theta_{внутригрупп.} \quad (8.3)$$

Таким образом, общая сумма квадратов распадается на две составные части, первая из которых связана с оценкой дисперсии между категориями почвы, а вторая – с оценкой дисперсии внутри всех категорий почвы. Компактно процедуру однофакторного дисперсионного анализа можно записать в виде таблицы (таблица 8.2).

Сравнивая дисперсию содержания изучаемого вещества между категориями почвы с содержанием вещества «внутри» категорий почвы, по величине их отношения судят, насколько рельефно проявляется влияние такого фактора, как качество почвы (т. е. удаленность от источника загряз-

нения). В этом сравнении, как раз и заключается основная идея дисперсионного анализа.

Таблица 8.2 – Схема однофакторного дисперсионного анализа

Компонента дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Выборочная дисперсия
Между группами	$n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$m-1$	S_1^2
Внутри групп	$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)^2$	$mn-m$	S_2^2
Полная (общая)	$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x})^2$	$mn-1$	S^2

Проверку нулевой гипотезы о том, что нормальные распределения всех величин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ (урожайности) тождественны, т. е. все $m \times n$ наблюдений можно рассматривать как выборку из одной и той же нормальной совокупности, производят с помощью F – критерия. Для этого находят отношение

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_1^2 \text{ межгрупповая}}{S_2^2 \text{ внутригрупповая}}, \quad (8.4)$$

где S_1^2 – дисперсия между группами;

S_2^2 – дисперсия внутри групп.

F -критическое определяют по таблице распределения Фишера для принятого уровня значимости α и чисел степеней свободы k_1 (для большей дисперсии) и k_2 (для меньшей дисперсии):

$$F_{\text{крит}}(\alpha = 0,05; k_1 = m - 1; k_2 = mn - m) \quad (8.5)$$

Если $F_{\text{набл.}} > F_{\text{крит.}}$ нулевая гипотеза отклоняется, и следует считать, что среди средних значений имеются хотя бы два не равных друг другу.

8.2 Проведение дисперсионного анализа с помощью электронных таблиц EXCEL

В MS EXCEL для проведения однофакторного дисперсионного анализа используется процедура *Однофакторный дисперсионный анализ* (рисунок 8.1).

Для ее реализации необходимо:

1) ввести данные в таблицу, так чтобы в каждой строке (или столбце) оказались данные, соответствующие одному значению исследуемого фактора, а строки (столбцы) располагались в порядке возрастания (убывания) величины исследуемого фактора;

2) выполнить команду *Сервис > Анализ данных* (если пакет не установлен – установить из меню *Надстройки*;

3) в появившемся диалоговом окне Анализ данных в списке Инструменты анализа выбрать процедуру *Однофакторный дисперсионный анализ*, затем нажать кнопку ОК;

4) в появившемся диалоговом окне задать Входной интервал, то есть ввести ссылку на диапазон анализируемых данных, содержащий все столбцы данных.

5) в разделе Группировка переключатель установить в положение *по строкам (по столбцам)*;

6) указать выходной интервал, то есть ввести ссылку на ячейку, с которой будут показаны результаты анализа. Размер выходного диапазона будет определен автоматически, и на экран будет выведено сообщение в случае возможного наложения выходного диапазона на исходные данные. Нажать кнопку ОК.

Выходной диапазон будет включать в себя результаты дисперсионного анализа: средние, дисперсии, критерий Фишера и другие показатели. Влияние исследуемого фактора определяется по величине значимости критерия Фишера, которая находится в таблице Дисперсионный анализ на пересечении строки «Между группами» и столбца «*P*-значение». В случаях, когда *P*-значение <0,05, критерий

Фишера значим, и влияние исследуемого фактора можно считать доказанным.

Пример. Рассмотрим данные пятикратного ($n = 5$) измерения валового содержания свинца в почвах на трех ($m = 3$) участках, удаленных на разном расстоянии от источника загрязнения. Требуется проверить, влияет ли удаленность участка от источника загрязнения на содержание свинца в почве.

Таблица 8.3 – Результаты измерения валового содержания свинца в почвах

Номер варианта	Номер эксперимента					Выборочное среднее
	1	2	3	4	$n = 5$	
i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	x_{i5}	\bar{x}
1	12,5	15,4	17,2	13,1	16,9	
2	20,1	17,5	16,3	25,3	14,2	
3, $m = 3$	10,3	12,3	11,2	13,5	8,4	

Реализовав дисперсионный анализ на компьютере (Рисунок 8.1), используя группировку по строкам и задавая исходный 5 % уровень значимости ($\alpha = 0,05$) изложенную выше, получим выходную таблицу (таблица 8.4).

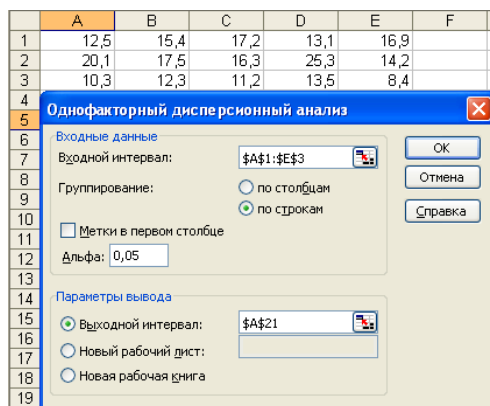


Рисунок 8.1 – Дисперсионный анализ примера в EXCEL

Таблица 8.4 – Выходные данные однофакторного дисперсионного анализа

Однофакторный дисперсионный анализ						
ИТОГИ						
Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия		
Строка 1	5,00	75,10	15,02	4,62		
Строка 2	5,00	93,40	18,68	18,24		
Строка 3	5,00	55,70	11,14	3,78		
Дисперсионный анализ						
Источник вариации	SS	df	MS	F	P-Значение	F критическое
Между группами	142,17	2,00	71,08	8,00	0,01	3,89
Внутри групп	106,57	12,00	8,88			
Итого	248,74	14,00				

Произведем проверку нулевой гипотезы с помощью F -критерия:

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{71,08}{8,88} = 8.$$

При двух степенях свободы большей дисперсии ($k_1 = 2$) и двенадцати степенях свободы меньшей дисперсии ($k_2 = 12$) по таблице критерия Фишера находим критические границы для F , равные при 5 % уровне значимости 3,89 и 1 % -м уровне – 6,93.

Полученное нами из наблюдений $F_{\text{набл}}$ превышает указанные границы, и поэтому нулевая гипотеза должна быть отвергнута, т. е. содержание валового свинца на рассматриваемых категориях почвы не одинаково, а это значит, удаленность от источника загрязнения влияет на его содержание.

Глава 9. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ

9.1 Примеры динамических рядов и их характерные особенности

В окружающей нас природе имеется огромное количество явлений и объектов, изменяющихся во времени и (или) в пространстве. Любой набор данных, состоящий из упорядоченных по этим координатам измерений, может рассматриваться как *динамический ряд*. Числовые данные, характеризующие процессы, находящиеся в постоянном изменении и движении, образуют ряды динамики. Чаще всего под динамическими рядами понимается хронологические (или временные) последовательности, хотя в принципе выражение «динамика» охватывает не только изменение во времени, но и любое другое изменение состояния под влиянием внешних условий (например, в пространстве).

В качестве примеров можно указать на ежечасные или ежесуточные изменения температуры окружающей среды, ежемесячное число рождений в колонии лабораторных животных, выход во времени продуктов некоторой химической реакции, изменения длины крыла у некоторых видов птиц для последовательных значений географической среды обитания. В каждом из этих случаев определяется последовательность чисел, связанная с временным или пространственным параметром. Приведенные примеры представляют собой образцы дискретных рядов, т. е. измерения при их формировании выполняются в определенные моменты времени или в фиксированных точках пространства. Существуют и непрерывные динамические ряды. Например, кривая, зарегистрированная при спектрофотометрировании снимка участка лесной растительности, полученного с по-

мощью аэрофотосъемки, или запись электрической активности мозга.

При анализе динамических рядов необходимо учитывать, что существенная информация заложена не только в численных значениях измеряемых признаков, но и в порядке их следования.

9.2 Сущность анализа динамических рядов

Большую роль при обработке динамических рядов играет *визуальный анализ*. Конечно, выводы, полученные при визуальном анализе, являются предварительными и не имеют количественного характера. Но они позволяют оценить в общих чертах характерные особенности изучаемого динамического ряда и выбрать наиболее подходящие методы строгого количественного анализа.

На рисунке 9.1 представлен график изменения длины крыла жаворонка по мере увеличения географической широты местообитания. Здесь видно, что существует определенная тенденция к увеличению длины крыла по мере продвижения к северным границам ареала. Однако эта направленность маскируется нерегулярными циклическими колебаниями.

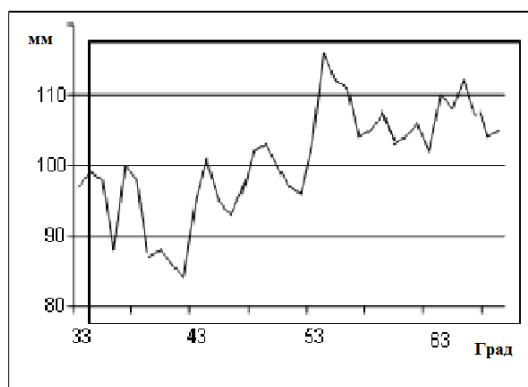


Рисунок 9.1 – Изменение длины крыла жаворонка

Систематическая составляющая и случайный шум. Как и большинство других видов анализа, анализ временных рядов предполагает, что данные содержат систематическую составляющую (обычно включающую несколько компонент) и случайный шум (ошибку), который затрудняет обнаружение регулярных компонент.

Большинство методов исследования временных рядов включает различные способы фильтрации шума, позволяющие увидеть регулярную составляющую более отчетливо.

Два общих типа компонент *временных* рядов. Большинство регулярных составляющих временных рядов принадлежит к двум классам: они являются либо трендом, либо сезонной составляющей. Тренд представляет собой общую систематическую линейную или нелинейную компоненту, которая может изменяться во времени. Сезонная составляющая – это периодически повторяющаяся компонента – колебательные изменения, связанные с воздействием на систему внешнего механизма, отражающего строго периодические процессы в природе, такие, например, как времена года, изменения температуры в течение дня и т. д.

Оба эти вида регулярных компонент часто присутствуют в ряде одновременно. Например, продуктивность экосистемы может возрастать из года в год, но она меняется в зависимости от времени года.

9.3 Анализ и прогнозирование тренда

Существуют две основные цели анализа временных рядов:

- 1) определение природы ряда;
- 2) прогнозирование (предсказание будущих значений временного ряда по настоящим и прошлым значениям).

Обе эти цели требуют, чтобы модель ряда была идентифицирована и, более или менее, формально описана. Как только модель определена, вы можете с ее помощью интер-

претировать рассматриваемые данные (например, использовать в вашей теории для понимания сезонного изменения численности популяции). Не обращая внимания на глубину понимания и справедливость теории, вы можете *экстраполировать* затем ряд на основе найденной модели, т. е. предсказать его будущие значения.

Прежде всего, следует отметить, что введенное понятие *тренда* (направленности) довольно относительно, так как то, что с одной точки зрения, т. е. в рамках одного масштаба, является длительным, с другой таковым не является. Например, если характер изменения биоэлектрической активности мозга животных или человека исследуется для интервалов времени, равных нескольким десяткам секунд, то медленные изменения, вызванные минутными ритмами, могут рассматриваться как тренд. Но если мы располагаем данными регистрации этой же активности в течение суток, то окажется, что то, что воспринималось как тренд, на самом деле оказывается лишь частью некоторого медленного колебательного процесса. Поэтому если интервал регистрации в несколько десятков секунд относился, например, к процессу решения какой-то задачи, делать вывод о том, что амплитуда электроэнцефалограммы нарастает или падает в зависимости от того, будет ли тренд иметь положительный или отрицательный наклон, неправомерно. Об этой относительности понятия тренда следует помнить всегда, когда дается содержательная интерпретация получаемым результатам. Существуют различные виды направленности, такие, например, как тренд среднего, тренд дисперсии и т. д. Мы будем рассматривать, как наиболее часто встречающийся, *тренд среднего*.

Как правило, имея графическое представление динамического ряда, визуально можно определить, имеет ли место тренд среднего. Однако в некоторых случаях сделать это, не имея соответствующих навыков, довольно сложно. С другой стороны, непрерывно увеличивается число исследований и

наблюдений, когда экспериментальные данные непосредственно вводятся в вычислительную машину, поэтому первым этапом анализа динамических рядов является проверка гипотезы о случайности получаемых значений. Покажем, как можно использовать для этой цели ранговый коэффициент корреляции Спирмена.

Данные таблицы 9.1 соответствуют рисунку 9.1. Ранги для широты (R_1) представляют собой натуральный ряд чисел, отражающий естественную последовательность пунктов наблюдения. Ранжирование данных о длине крыла (R_2) проведено по обычным правилам в порядке возрастания ранга (ранг 1 – самое длинное крыло (116 мм), ранг 37 – самое короткое (84 мм)).

Таблица 9.1 – Изменение длины крыла жаворонка в зависимости от географической широты его местообитания

Широта, t град	R_1	Длина крыла, мм	R_2	Широта, t град	R_1	Длина крыла, мм	R_2
33	1	97	26,5	52	20	96	28,5
34	2	99	23,0	53	21	103	16,0
35	3	98	24,5	54	22	116	1,0
36	4	88	33,5	55	23	112	2,0
37	5	100	21,5	56	24	111	4,0
38	6	98	24,5	57	25	104	13,0
39	7	87	35,0	58	26	105	10,5
40	8	88	33,5	59	27	107	7,5
41	9	86	36,0	60	28	103	16,0
42	10	84	37,0	61	29	104	13,0
43	11	95	30,5	62	30	106	9,0
44	12	100	20,0	63	31	102	18,5
45	13	95	30,5	64	32	110	5,0
46	14	93	32,0	65	33	108	6,0
47	15	96	28,5	66	34	112	3,0
48	16	102	18,5	67	35	107	7,5
49	17	103	16,0	68	36	104	13,0
50	18	100	21,5	69	37	105	10,5
51	19	97	26,5				

Используя формулу коэффициента корреляции Спирмена, имеем:

$$r_s = 1 - \sum_{i=1}^{37} \frac{d_i^2}{n^2 - n} = 1 - 1,83 = -0,83 .$$

Известно, что для $n > 10$ проверка нулевой гипотезы о коэффициенте ранговой корреляции Спирмена может быть осуществлена с помощью статистики:

$$t = \frac{r_s}{\sqrt{(1 - (r_s^2))/(n - 2)}} , \quad (9.1)$$

имеющей, при справедливости нулевой гипотезы, распределение Стьюдента с $(n - 2)$ степенями свободы.

В нашем случае

$$t = \frac{-0,83}{\sqrt{(1 - (-0,83)^2)/(37 - 2)}} = -8,8.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0,01$ и 35 степеней свободы табличное (теоретическое) значение равно 2,73, что по модулю меньше, чем полученное эмпирически (расчетное). Поэтому нулевая гипотеза отвергается, и мы должны сделать вывод о том, что приведенный ряд не представляет собой набор случайных значений и, вероятно, имеет тренд среднего.

Установив визуально, или с помощью расчетов, факт наличия тренда среднего, необходимо попытаться выделить его или исключить (элиминировать) шумовую компоненту. Для этого существуют различные методы, такие как подбор соответствующей функциональной зависимости, использование скользящих средних.

Наиболее эффективным методом описания тренда является подбор некоторого аналитического выражения, как

правило, полинома невысокой степени. Такой подбор осуществляется с использованием метода наименьших квадратов по правилам, описанным в одной из прошлых глав.

Для данных, представленных на рисунке 9.1 и в таблице 9.1, запишем уравнения тренда в виде:

$$y_1 = a_1 + b_1x \text{ и } y_2 = a_2 + b_2x + cx^2.$$

По методу наименьших квадратов имеем:

$$\begin{cases} 37 a_1 + 1887 b_1 = 3722 \\ 1887 a_1 + 100455 b_1 = 1919222 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 37a_2 + 1887 b_2 + 100455 c = 3722 \\ 887 a_2 + 100455 b_2 + 5553441 c = 191922 \\ 100455 a_2 + 5553441 b_2 + 317003190 c = 10319070 \end{cases}$$

Решив эти системы уравнений, получим $a_1 = 75,2$; $b_1 = 0,5$; $b_2 = -1,82$; $c = 0,022$.

Уравнения тренда примут вид:

$$y_1 = 75,2 + 0,5x \text{ и } y_2 = 132,3 - 1,82x + 0,022x^2.$$

9.4 Задача выбора наилучшего уравнения тренда

Коэффициент детерминации для модели y_1 равен 0,48, а для модели y_2 он равен 0,49, что говорит о том, что для описания тренда подходят оба уравнения. В этом можно убедиться, и если посчитать значения отклонений от опытных данных, вычисленных по этим уравнениям. Однако необходимо иметь точный количественный метод для строгой проверки того, какое из пары уравнений лучше подходит для описания тренда. Естественно, что лучшим является то уравнение, которое дает меньшую сумму квадратов отклонений от экспериментальных данных. Однако выбор в качестве уравнения тренда, например, полинома более высокого порядка будет оправдан только в том случае, если получаемое при его использовании уменьшение суммы квадратов

отклонений от опытных данных будет статистически значимо.

Иногда считают, что аналитическое описание тренда связано с некоторым «законом» развития изучаемого процесса в пространстве и во времени. Такой взгляд оправдан только в том случае, когда закон расценивается как не более чем проявление некоторой тенденции, а его аналитическое описание – просто как способ наглядного изображения изучаемого отрезка динамического ряда. Поэтому, как правило, представление о том, что уравнение тренда это нечто большее, чем просто описание эмпирических данных, не является очевидным.

Кроме того, следует иметь в виду, что для одного и того же динамического ряда, могут быть подобраны самые разные уравнения тренда, одинаково хорошо соответствующие имеющимся данным. Поэтому выбор подходящей кривой должен осуществляться с использованием нестатистической информации о сущности исследуемого ряда, которая в некоторых случаях позволяет выбрать из множества возможных кривых для описания тренда какую-то одну. В противном случае, когда эта информация отсутствует, подбор уравнения тренда осуществляется по тем же правилам, которые мы рассматривали ранее, обсуждая вопросы построения функциональных зависимостей.

Может оказаться, что, подбирая аналитическое выражение для описания тренда, мы сталкиваемся с ситуацией, когда для приемлемого согласия с эмпирическими данными придется остановиться на такой зависимости, которая имеет сложный вид, например, полином очень высокой степени. Как правило, такая ситуация свидетельствует о том, что весь наблюдаемый ряд состоит из нескольких частей. Поэтому, используя априорную информацию и проведя визуальный анализ, необходимо определить эти части и уравнения тренда находить для каждой из них. Описание тренда должно

быть по возможности простым, т. е. включать в себя минимальное число параметров. В частности, при использовании полинома оно не должно быть, как правило, выше второго порядка. В этом случае есть надежда дать содержательную трактовку получаемым уравнениям. Естественно, что простота описания не должна идти в ущерб статистически значимому соответствию эмпирическим данным.

9.5 Обнаружение колебательных составляющих динамического ряда

Обнаружение и выделение тренда является первым этапом при анализе динамических рядов. Описав его соответствующим регрессионным уравнением, находят величины y_i для каждого момента времени или пространственной координаты по этому уравнению и вычитают их из исходных данных. После элиминирования тренда необходимо провести анализ колебательной компоненты и в последнюю очередь – случайной. Здесь мы сталкиваемся с задачей обнаружения взаимозависимости между значениями анализируемого ряда. Кстати, такая же задача стоит и при построении уравнений регрессии, когда проверка коррелированности остатков является необходимой для проверки адекватности выбранного уравнения и обоснованности использования метода наименьших квадратов для оценки параметров.

Наиболее распространенным критерием для проверки коррелированности является *критерий Дарбина – Уотсона*. Статистика критерия очень проста:

$$D = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (9.2)$$

где e_i – остаток $y_i - \hat{y}_i$, $e_i - e_{i-1}$ – разность последовательных остатков.

После того, как убедятся в том, что вновь полученный ряд не является набором независимых случайных величин, определяют периоды колебаний, наиболее характерные для анализируемого ряда.

Существует очень большое число методов, с помощью которых решается задача выделения гармонических составляющих. Как правило, алгоритмы имеются в виде программ для вычислительных машин.

9.6 Расчет статистических характеристик динамических рядов

Характеристики динамических рядов – это показатели, которые характеризуют изменения явления во времени.

Определение статистических характеристик динамического ряда основано на абсолютном и относительном сравнении уровней ряда ($y_2 - y_1$) – абсолютное сравнение, y_2/y_1 – относительное сравнение).

При нахождении характеристик могут использоваться два способа:

– цепной способ, т. е. когда данный уровень сравнивается с предыдущим;

– базисный способ, т. е. когда каждый данный уровень сравнивается с одним и тем же начальным уровнем, принятым за базу сравнения.

К статистическим характеристикам динамического ряда относят: темп роста и прироста, абсолютный прирост, базисные и цепные, абсолютное содержание 1 % прироста, средний уровень ряда, средний абсолютный прирост, средний темп роста и прироста.

1) Абсолютный прирост (Δy) – это разность между последующим и предыдущим уровнями ряда (цепные) или начальным уровнем ряда (базисные). Цепной абсолютный прирост характеризует последовательное изменение уров-

ней ряда, а базисный абсолютный прирост – изменение нарастающим итогом. Абсолютный прирост показывает, на сколько абсолютных единиц изменился данный уровень по сравнению:

- а) с предыдущим уровнем при цепном способе;
- б) с начальным уровнем при базисном способе.

$$\Delta y_{i \text{ цепн}} = y_i - y_{i-1}, \quad (9.3)$$

где y_i это i -й уровень ряда,
 y_{i-1} это $i - 1$ -й уровень ряда.

$$\Delta y_{i \text{ баз}} = y_i - y_1, \quad (9.4)$$

где y_i это i -й уровень ряда,
 y_1 – начальный, базисный уровень ряда.

Между цепным и базисным абсолютным приростом существует взаимосвязь – сумма цепных дает соответствующий базисный абсолютный прирост.

За весь период, описываемый рядом, абсолютный прирост выразится как разность между последним и первым уровнем ряда:

$$y = y_n - y_0 = \sum_{n=1}^n y_i - y_{i-1}, \quad (9.5)$$

Абсолютный прирост может быть как положительным, так и отрицательным и обязательно имеет единицы измерения и размерность.

2) Темп роста (T_p) – это соотношение последующего уровня ряда к предыдущему (цепные темпы роста) или постоянному, принятому за базу сравнения (базисные темпы роста):

а) Цепные коэффициенты (темпы) роста рассчитываются по формуле:

$$T_{P_{цепн}} = \frac{y_i}{y_{i-1}}, \quad (9.6)$$

где y_i означает i -й уровень ряда,
 y_{i-1} это $i - 1$ -й уровень ряда.

б) базисные коэффициенты (темпы) роста рассчитываются по формуле:

$$T_{P_{баз}} = \frac{y_i}{y_1}, \quad (9.7)$$

где y_i – это i -й уровень ряда,
 y_1 – это начальный, базисный уровень ряда.

Цепной способ характеризует последовательное изменение, а базисный способ – изменение нарастающим итогом.

Между цепными и базисными темпами роста существует взаимосвязь – произведение цепных темпов роста дает соответствующий базисный темп роста.

Темп роста может выражаться в коэффициентах или в процентах.

3) Темп прироста показывает, на сколько процентов изменяется данный уровень по сравнению:

- а) с предыдущим уровнем ряда при цепном способе,
- б) с базисным, начальным уровнем ряда при базисном способе.

$$T_{np_{цепн}} = \frac{\Delta y_{i_{цепн}}}{y_{i-1}}, \quad (9.8)$$

где $\Delta y_{i_{цепн}}$ – цепной абсолютный прирост i -го уровня ряда,

y_{i-1} это $i - 1$ -й уровень ряда.

$$T_{np_{баз}} = \frac{\Delta y_{i_{баз}}}{y_1}, \quad (9.9)$$

где $\Delta y_{i \text{ баз}}$ – базисный абсолютный прирост i -го уровня ряда,
 y_1 – начальный, базисный уровень ряда.

Темп прироста обычно выражается в процентах и показывает, на сколько процентов увеличился (+) или уменьшился (–) текущий уровень по сравнению с предыдущим (базисным).

Темп прироста также можно определить исходя из темпа роста:

$$T_{\text{пр ценн}} = T_{\text{р ценн}} - 1, \quad (9.10)$$

$$T_{\text{пр ценн}} (\%) = T_{\text{р ценн}} (\%) - 100 \%, \quad (9.11)$$

где $T_{\text{р ценн}}$ – цепной темп роста (в коэффициентах или в процентах).

$$T_{\text{пр баз}} = T_{\text{р баз}} - 1, \quad (9.12)$$

$$T_{\text{пр баз}} (\%) = T_{\text{р баз}} (\%) - 100 \%, \quad (9.13)$$

где $T_{\text{р баз}}$ – базисный темп роста (в коэффициентах или в процентах).

4) Абсолютное содержание одного процента прироста показывает, какая абсолютная величина скрывается за относительным показателем (одним процентом прироста):

$$\alpha = \frac{\Delta y_{i \text{ цен}}}{T_{\text{пр цен}} \%} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \times 100 \%} = \frac{y_{i-1}}{100 \%}, \quad (9.14)$$

где $\Delta y_{i \text{ цен}}$ – цепной абсолютный прирост i -го уровня ряда,

$T_{\text{пр цен}} \%$ – цепной темп прироста в процентах,

y_i означает i -й уровень ряда,

y_{i-1} означает $i - 1$ -й уровень ряда.

Единицы измерения складываются из единиц измерения самого показателя и процента.

Так как показатели в течении рассматриваемого периода времени изменяются, изменяются и характеристики ряда. Поэтому, чтобы получить общее представление о изменении данных показателей следует найти обобщающие характеристики, т. е. средние величины.

5) Средний уровень ряда (\bar{y}) характеризует среднюю величину показателя за данный период. Средний уровень ряда рассчитывается как средняя величина из уровней ряда, причем по-разному для интервальных и моментных рядов.

В интервальных рядах по средней арифметической:

$$\bar{y}_{\text{ар}} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{\sum y_i}{n}. \quad (9.15)$$

В моментных рядах по средней хронологической:

$$\bar{y}_{\text{хр пр}} = \frac{y_0 / 2 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n / 2}{n - 1}, \quad (9.16)$$

где $n-1$ – количество изменений за данный период.

$$\bar{y}_{xp \text{ взвеш}} = \frac{(y_1 + y_2) \times t_1 + (y_2 + y_3) \times t_2 \dots + (y_{n-1} + y_n) \times t_{n-1}}{2(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1})} \quad (9.17)$$

где y_1, y_2, \dots, y_n – соответствующий уровень ряда,
 t_1, t_2, \dots, t_{n-1} – соответствующий период времени.

Средний уровень ряда – величина абсолютная, т. е. имеет определенные единицы измерения, определенную размерность.

б) Средний абсолютный прирост ($\overline{\Delta y}$) – это средняя из абсолютных приростов за равные промежутки времени:

$$\overline{\Delta y} = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i}{n-1} = \frac{y_n - y_0}{n} \quad (9.18)$$

где $\Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_n$ – соответствующий абсолютный прирост,
 $n - 1$ – количество изменений за данный период,

y_n – последний уровень ряда,

y_0 – начальный, базисный уровень ряда.

7) Средний темп роста (\overline{T}_p) – это средняя из темпов роста за данный период, которая показывает, во сколько раз в среднем (за год, месяц) изменяется явление.

Средний темп роста определяется всегда по средней геометрической.

Средний темп роста можно определить, исходя из цепных коэффициентов (темпов) роста:

$$\overline{T}_p = \sqrt[n-1]{T_{P_{цепн\ 1}} \times T_{P_{цепн\ 2}} \times \dots \times T_{P_{цепн\ n}}} \quad (9.19)$$

или абсолютных уровней ряда (базисного темпа роста):

$$\overline{T}_p = \sqrt[n-1]{T_{P_{баз}}}, \quad (9.20)$$

где $T_{P_{цепн\ 1}}, T_{P_{цепн\ 2}}, \dots, T_{P_{цепн\ n}}$ – соответствующие цепные темпы роста

(y_i / y_{i-1}) ,

$T_{P_{баз}}$ – базисный темп роста за весь период (y_n / y_0) ,

$n - 1$ – количество изменений за данный период.

Средний темп роста обычно выражается в коэффициентах, но может быть и в процентах.

8) Средний темп прироста (\bar{T}_{np}) – характеризует темп прироста в среднем за период и определяется на основе среднего темпа роста:

$$\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 1, \quad (9.21)$$

$$\bar{T}_{np} (\%) = \bar{T}_p (\%) - 100 \%, \quad (9.22)$$

где \bar{T}_p – средний темп роста (в коэффициентах или в процентах).

Средний темп прироста показывает, на сколько процентов изменился уровень ряда в среднем за данный период.

Средний темп прироста выражается в коэффициентах или в процентах.

Вычисление данных показателей является первым этапом анализа динамических рядов и позволяет выявить скорость и интенсивность развития явления, представленного данным рядом.

ГЛАВА 10. МЕТОДЫ АНАЛИЗА БОЛЬШИХ СИСТЕМ

10.1 Сущность многомерного статистического анализа и его применение в экологии

В экологии часто применяются функции, содержащие несколько переменных. В качестве примера можно привести так называемую *функцию отклика*. Она характеризует воздействия экологических факторов на показатели жизнедеятельности особей, таких как скорость роста, развития, плодовитость, продолжительность жизни, смертность, питание, метаболизм, двигательная активность. Или другой пример. Тип почвы (S) определяет ряд независимых параметров – климат (C), растительность (V), живые организмы (O), материнская порода (P), осадки (R) и время (T), то есть: $S = f(C, V, O, P, R, T)$.

Для построения таких математических функций на основе полевых наблюдений применяют многомерные статистические методы.

Наиболее интересным и полезным в плане понимания сущности многомерного анализа является пример использования наблюдений при эксперименте, который ведет природа, т. е. пассивном эксперименте. К задачам такого рода относятся задачи экологического мониторинга. При их решении нас интересуют не один, а несколько показателей процесса.

Кроме того, мы подозреваем наличие нескольких, влияющих на процесс, воздействий, которые являются скрытыми. Удивительно, но и в этих «тяжелых» условиях теория систем и системный анализ предлагает методы выявления таких факторов, отсеивания слабо проявляющих себя, оценки значимости полученных зависимостей.

До наступления эпохи компьютеризации вычислительные трудности препятствовали широкому внедрению мето-

дов многомерного статистического анализа в практику научных исследований и разработок. Однако использование ЭВМ само по себе не решает проблему, потому что трудности возникают в разумной интерпретации результатов.

Как поступать в таких случаях? Можно отсеять большинство признаков и перейти к одно- или двумерному анализу, используя весь арсенал методов, обсуждавшихся раньше.

Другой путь связан с объединением ряда признаков в один, искусственно построенный на их основе. Такой подход к изучению сложных систем как раз и называется многомерный анализ. Он включает в себя ряд взаимосвязанных разделов, таких как регрессионный, кластерный, дискриминантный, факторный и некоторые другие.

10.2 Многомерная регрессионная модель

Задачей множественного регрессионного анализа является построение такого уравнения в k -мерном пространстве, отклонения результатов наблюдений x_{ij} от которых были бы минимальными. Используя для этого метод наименьших квадратов, получаем систему уравнений в матричном виде:

$$(X^m X)B = X^m Y,$$

где B – вектор столбец коэффициентов уравнения регрессии;

X – матрица значений факторов;

Y – вектор столбец функций отклика;

X^m – транспонированная матрица X . Они соответственно равны:

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ x_{30} & x_{31} & \dots & x_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} .$$

Умножая правую и левую часть уравнения на обратную матрицу $(X^m X)^{-1}$, получим

$$B = (X^m X)^{-1} X^m Y.$$

Рассмотрим расчет коэффициентов уравнения регрессии на следующем примере.

В результате исследования влияния мощности гумусового слоя почвы (X_1) и количества внесенного сложного состава минерального удобрения (X_2) на урожайность зерновой культуры (Y) получены уравнения:

$$b_0 + 1,0b_1 + 0,2b_2 = 18,4;$$

$$b_0 + 2,0b_1 + 0,4b_2 = 22,8;$$

$$b_0 + 2,5b_1 + 0,2b_2 = 22,6;$$

Выведем линейное уравнение регрессии, отражающее взаимосвязь урожайности с факторами X_1 и X_2 .

Представим результаты опытов в виде матриц:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,2 \\ 1 & 2 & 0,4 \\ 1 & 2,5 & 0,3 \end{bmatrix}; \quad X^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 18,4 \\ 22,8 \\ 22,6 \end{bmatrix}.$$

$$X^m X = \begin{bmatrix} 3 & 5,5 & 0,9 \\ 5,5 & 11,25 & 1,75 \\ 0,9 & 1,75 & 0,29 \end{bmatrix}; \quad X^m Y = \begin{bmatrix} 63,8 \\ 120,5 \\ 19,58 \end{bmatrix};$$

$$(X^m X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -0,5 & -12,5 \\ -0,5 & 1,5 & -7,5 \\ -12,5 & -7,5 & 87,5 \end{bmatrix}.$$

Определяем коэффициенты уравнения регрессии

$$B = (X^m X)^{-1} X^m Y = \begin{bmatrix} 5 & -0,5 & -12,5 \\ -0,5 & 1,5 & -7,5 \\ 2,5 & -7,5 & 87,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 63,8 \\ 120,5 \\ 19,58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $b_0 = 14$; $b_1 = 2$; $b_2 = 12$.

Регрессионные модели не ограничиваются линейной формой. В процессе поиска можно перейти к более сложной модели – уравнению нелинейной регрессии.

Если окажется, что при переходе к нелинейной модели коэффициент корреляции увеличится, а дисперсия экспериментальных данных уменьшится, то это значит, что последняя модель более точна, чем линейная функция. Однако при последующем усложнении модели в виде полинома третьей степени может оказаться обратный эффект.

10.3 Интерпретация результатов многомерного регрессионного анализа

На рисунке 10.1 представлены результаты регрессионного анализа зависимости урожайности (Y , ц/га) от величины гумусового слоя (x_1 , м) и количества минеральных удобрений (x_2 , т/га), выполненного в пакете EXCEL.

Выполняя процедуру регрессионного анализа, как указано выше, получим ВЫВОД ИТОГОВ, который содержит три таблицы. Информация о вкладе каждой независимой переменной показана в нижней таблице, а информация о модели в целом показана над этой таблицей.

Вначале просмотрите информацию о модели в целом.

R – коэффициент множественной корреляции. Он характеризует тесноту линейной связи между зависимой и всеми независимыми переменными и может принимать значения от 0 до 1.

Задачей построения регрессионной зависимости является нахождение вектора коэффициентов модели, при котором коэффициент R принимает максимальное значение.

В рассмотренном примере оценка множественного коэффициента корреляции между случайной величиной Y и двумя остальными составила $R = 1$, что указывает на тесную зависимость урожайности (y) от величины гумусового слоя (x_1) и количества минеральных удобрений (x_2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	№ n/n	X1	X2	Y							
2	1	1	0,2	18,4							
3	2	1	0,2	18,4							
4	3	1	0,2	18,4							
5	4	2	0,4	22,8							
6	5	2	0,4	22,8							
7	6	2	0,4	22,8							
8	7	2,5	0,3	22,6							
9	8	2,5	0,3	22,6							
10	9	2,5	0,3	22,6							
11											
12		Вывод ИТОГОВ									
13		Регрессионная статистика									
14		Множественный	1								
15		R-квадрат	1								
16		Нормированный	1								
17		Стандартная ош	3,237E-16								
18		Наблюдения	9								
19		Дисперсионный анализ									
20			df	SS	MS	F	Значимость F				
21		Регрессия	2	37,04	18,52	1,77E+32	4,88831E-96				
22		Остаток	6	6,286E-31	1,04771E-31						
23		Итого	8	37,04							
24		Коэффициентная статистика									
25		Y-пересечение	14	4,179E-16	3,3503E+16	4,77E-98	14	14	14	14	
26		Переменная X 1	2	2,289E-16	8,73827E+15	1,52E-94	2	2	2	2	
27		Переменная X 2	12	1,748E-15	6,86465E+15	6,45E-94	12	12	12	12	
28											

Рисунок 10.1 – Результаты множественного регрессионного анализа

Коэффициент детерминации R^2 . Он численно выражает долю вариации зависимой переменной, объясняемую с помощью регрессионного уравнения. Чем больше R^2 , тем большую долю вариации объясняют переменные, включенные в модель. В рассматриваемом примере значение $R^2 = 1$) указывает на то, что около 100 % дисперсии функции отклика (урожайности) объясняется вариацией линейной комбинации факторов x_1 и x_2 .

Нормированный R – скорректированный коэффициент множественной корреляции. Этот коэффициент лишен недостатков коэффициента множественной корреляции. Включение новой переменной в регрессионное уравнение увеличивает его только в том случае, когда частный F-критерий при проверке гипотезы о значимости включаемой переменной больше или равен 1. В противном случае включение новой переменной уменьшает значение нормированного коэффициента.

Значимость F-критерия (вторая таблица) указывает на точность аппроксимации исследуемой зависимости линейной зависимостью. В рассматриваемом примере p значительно меньше 0,05, поэтому точность аппроксимации зависимости урожайности от содержания гумуса и количества внесенных удобрений линейной функцией является достоверной.

Информация о каждой независимой переменной содержится в третьей нижней таблице, заголовки строк в которой являются названиями независимых переменных и свободного члена.

Направление связи между переменными определяется на основании знаков (отрицательный или положительный) коэффициентов регрессии. Если знак при коэффициенте регрессии положительный, связь зависимой переменной с независимой будет положительной. Если знак при коэффициенте регрессии отрицательный, связь зависимой переменной с независимой является отрицательной (обратной).

b_0 – среднее значение Y , если каждая независимая переменная равна 0.

b_i – среднее изменение Y на единицу измерения X_i , когда воздействия остальных переменных постоянны.

В рассматриваемой задаче $b_1=2$; $b_2 =12$; $b_0 =14$.

Таким образом, получено следующее регрессионное уравнение: $y = 14 + 2b_1 + 12b_2$.

Оценка влияния каждой отдельной независимой переменной (НП) на колебания зависимой переменной (ЗП).

К сожалению, определение относительного влияния разных независимых переменных не тождественно простому сравнению их коэффициентов регрессии. В тех случаях, когда независимые переменные измеряются в разных единицах, коэффициенты регрессии не отражают относительного воздействия независимой переменной на зависимую. Одним из возможных путей обойти это – стандартизировать переменные так, чтобы они были измерены в одних и тех же

единицах, и снова произвести подсчеты коэффициента регрессии.

Когда числовые ряды заменены в уравнении регрессии на стандартизованные ряды, уравнение приходит к общей формуле:

$$Y^{cm} = \beta_1 X_1^* + \beta_2 X_2^* + \beta_3 X_3^* + \dots + \beta_n X_n^* + e, \quad (10.1)$$

где β представляет частный коэффициент стандартизованной регрессии и называется бета-вес, или бета-коэффициент. Он корректирует частный нестандартизованный коэффициент регрессии путем деления стандартного отклонения НП на стандартное отклонение ЗП. Знак * означает стандартизированные (нормированные) переменные.

Выводы о вкладе независимых переменных в дисперсию зависимой переменной можно делать по нормализованным (β) и ненормализованным (B) угловым коэффициентам и по уровню значимости вклада каждой независимой переменной (α или p -level). Чем более статистически значимой является независимая переменная, тем больший вклад она вносит в дисперсию зависимой переменной.

Дельта-коэффициент позволяет оценить долю вклада каждой независимой переменной X_i в суммарное влияние всех факторов.

Дельта-коэффициент имеет вид:

$$\Delta_i = r_i (\beta_i / R^2) \quad (10.2)$$

где β_i – бета-коэффициент i -го фактора X_i ;

r_i – коэффициент парной корреляции i -го фактора X_i и зависимой переменной Y ;

R^2 – коэффициент множественной детерминации.

10.4 Кластерный анализ

Мы будем обращать внимание на содержательную сторону обсуждаемых вопросов, имея в виду, что для конкрет-

ных вычислительных процедур существуют стандартные программы расчетов на ЭВМ (например, SPSS, SYSTAT, STATISTICA).

Кластерный анализ – один из методов многомерного анализа, предназначенный для группировки (кластеризации) совокупности элементов, которые характеризуются многими факторами, и получения однородных групп (кластеров). Разбиение на кластеры происходит с помощью некоторой метрики, например, евклидова расстояния. Задача кластерного анализа состоит в представлении исходной информации об элементах в сжатом виде без ее существенной потери.

Объектами могут быть разновидности растений из разных мест обитания. Переменными могут быть их характеристики, значимые для исследователя, например: длина чашелистика, ширина чашелистика, длина лепестка, ширина лепестка. В этом случае кластерный анализ позволяет объективно разделить их на группы.

Другим видом объектов могут быть регионы страны. Если в качестве переменных использовать уровень загрязненности и уровень урбанизации, то можно классифицировать регионы по уровню экологической опасности.

Исходные данные для кластерного анализа представляются в виде матрицы размером $m \times n$, содержащей информацию одного из следующих трех типов:

- измерения X_{ij} значений переменных m для n объектов;
- квадратная ($m = n$) матрица расстояний между парами объектов;
- квадратная ($m = n$) матрица близостей для всех пар n объектов.

В ряде статистических пакетов в матрице близостей или в матрице расстояний может быть заполнена лишь левая нижняя половина под диагональю, верхняя половина может быть заполнена нулями.

Технология метода кластерного анализа заключается в выборе стратегии объединения данных их n элементов по m и методе вычисления *расстояния* d_{sj} между объектами в многомерном пространстве – *метрики*.

Для объединения элементов в подмножества используются различные алгоритмы. Задача считается решенной, если удовлетворяется некоторый критерий оптимальности, называемый целевой функцией. Например, в качестве целевой функции используется сумма квадратов отклонений внутри подмножества.

А наиболее употребительным способом задания расстояния является евклидово расстояние:

$$d(x_i; x_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_{li} - x_{ki})^2}, \quad (10.3)$$

где x_{li} и x_{ki} i -е координаты векторов x_l и x_k соответственно,
 p – размерность пространства измерений.

Евклидово расстояние лучше использовать для количественных переменных, расстояние хи-квадрат — для исследования частотных таблиц, имеется множество мер для бинарных переменных.

Кластерный анализ является описательной процедурой, он не позволяет сделать никаких статистических выводов, но дает возможность провести своеобразную разведку – изучить "структуру совокупности".

При процедуре кластеризации принципиальным является выяснение необходимого количества кластеров. В некоторых случаях оно может быть выбрано априорно, но в общем случае оно должно определяться в процессе разбиения исходного множества объектов на кластеры. Наиболее успешно кластерный анализ можно применить в тех случаях, когда имеющаяся в наличии у экспериментатора предва-

рительная информация позволяет заранее определить число кластеров.

10.5 Пример процедуры кластеризации в пакете STATISTICA

В кластерном анализе разбиение на кластеры существенно зависит от абсолютных значений исходных данных. Эту проблему решают с помощью нормировки (стандартизации). Для этого из всех значений по каждому фактору вычитают выборочное среднее этого фактора и полученные разности делят на среднее квадратическое отклонение.

$$x^* = \frac{x - \bar{x}}{S}, \quad (10.4)$$

где x – исходное данное;

\bar{x} – выборочное среднее;

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \text{– среднее квадратическое отклонение.}$$

При этом стандартизованные значения будут иметь выборочные средние равные нулю, а выборочные дисперсии – равные единице. Другими словами, мы все факторы свели в одну весовую категорию. Для осуществления этой операции в пакете STATISTICA нужно вызвать модуль *Data Management* (Стандартизация).

Предполагается, что матрица исходных данных имеет вид $X[n, k]$, где n – количество, k – количество факторов. Поэтому при кластеризации элементов в пакете STATISTICA следует выбирать режим: *cases (rows)* – строки, а при кластеризации факторов: *variables (columns)* – столбцы.

Пример. В этом примере будут исследованы 20 стран с целью оценки их социально-экономического благополучия. В качестве переменных используются следующие характе-

ристики: число врачей на 10000 населения; смертность на 100000; ВВП по ППС, в % к США; Расходы на здравоохранение, в % к ВВП; Урожайность зерновых и зернобобовых, ц/га. Исходные данные представлены в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Исходные данные для классификации стран по соответствующим показателям (1994 г.)

Страны	Число врачей на 10 000 населения	Смертность на 100 000 населения	ВВП по ППС, в % к США	Расходы на здравоохранение, в % к ВВП	Урожайность зерновых и зернобобовых, ц / га
Россия	44,5	84,98	20,4	3,2	14,4
Австралия	32,5	30,58	71,4	8,5	11,6
Австрия	33,9	38,42	78,7	9,2	56,1
Азербайджан	38,8	60,34	12,1	3,3	16,4
Армения	34,4	60,22	10,9	3,2	13,5
Беларусь	43,6	60,79	20,4	5,4	22,4
Бельгия	41	29,82	79,7	8,3	65,5
Болгария	36,4	70,57	17,3	5,4	27,8
Великобритания	17,9	34,51	69,7	7,1	62,3
Венгрия	32,1	64,73	24,5	6	39,8
Германия	38,1	36,63	76,2	8,6	56,9
Греция	41,5	32,84	44,4	5,7	37,4
Грузия	55	62,64	11,3	3,5	18,6
Дания	36,7	34,07	79,2	6,7	54,4
Ирландия	15,8	39,27	57	6,7	64,2
Испания	40,9	28,46	54,8	7,3	22,6
Италия	49,4	30,27	72,1	8,5	46
Казахстан	38,1	69,04	13,4	3,3	7,9
Канада	27,6	25,42	79,9	10,2	25,4
Киргизия	33,2	53,13	11,2	3,4	17

Экспортируем исходные данные из электронных таблиц EXCEL в программу STATISTICA и стандартизируем их,

вызвав процедуру *Данные/Стандартизация*. Получим стандартизованные значения исходных данных (рисунок 10.2).

STATISTICA - пример для кластерного анализа

Файл Правка Вид Вставка Формат Статистика Графики Инструменты Данные Окно Пом...

Calibri 11 B I U

Data: пример для кластерного анализа.sta (5v by 20c)

	1 рачей на 10 000 нас	2 юсть на 100 000 нас	3 то ППС, в % к здрак	
Россия	0,861698827	2,1113557	-0,8582924	-0,3
Австралия	-0,442259045	-0,93984172	0,904611841	4
Австрия	-0,290130626	-0,500110327	1,15694911	-0,0
Азербайджан	0,242318838	0,729342751	-1,14519642	-0,3
Армения	-0,235799048	0,722612168	-1,18667652	-0,3
Беларусь	0,763901986	0,754582435	-0,8582924	-0,2
Бельгия	0,481377781	-0,982468743	1,19151586	-0,1
Болгария	-0,018472737	1,30312491	-0,96544932	-0,2
Великобритания	-2,02874112	-0,719415142	0,845848367	-0,1
Венгрия	-0,485724307	0,975569896	-0,71656872	-0,2
Германия	0,166254629	-0,600508183	1,07053224	-0,1
Греция	0,535709359	-0,813082415	-0,0286904	-0,2
Грузия	2,00266196	0,858345583	-1,17284982	-0,3
Дания	0,0141262103	-0,744093944	1,17423249	-0,1
Ирландия	-2,25693375	-0,452435367	0,406850645	-0,1
Испания	0,470511465	-1,05874868	0,330803795	-0,1
Италия	1,20414820	0,957220958	0,928098556	0,107742557

Данные

- Ввод крупноформ...
- Перемещение
- Слитие
- Сортировка...
- Поднаборное/Слу...
- Подтверждение да...
- Условия переменн...
- Все условия пере...
- Редактор текста я...
- Менеджер имен р...
- Переменные
- Регистры
- Ряд...
- Пересчет...
- Перекод...
- Замена отсутству...
- Сдвиг (Задержка)...
- Стандартизация...**
- Операции даты...
- Получение внешн...

Рисунок 10.2 – Стандартизация данных

Переключимся в модуль *Многомерные исследовательские методы* и выберем Анализ кластера, затем в выпавшем окне выберем команду *Analysis/Joining (tree clustering)*. Определим все переменные, метод и меру расстояния. Нажмем *OK*.

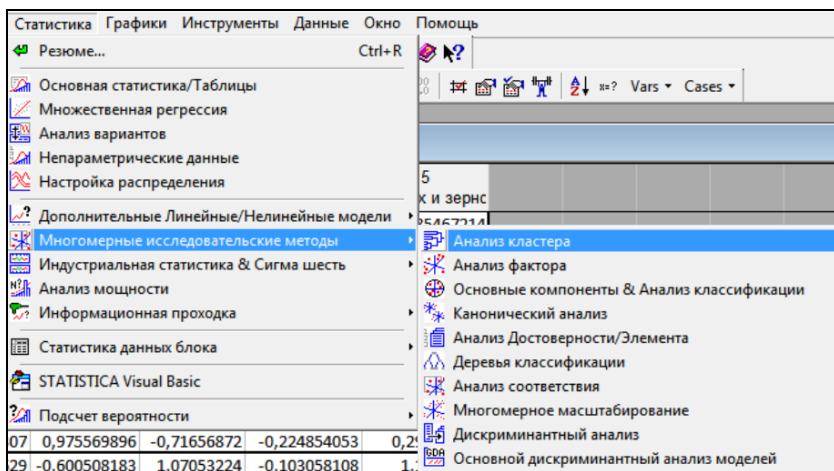


Рисунок 10.3 – Выбор модуля для расчета

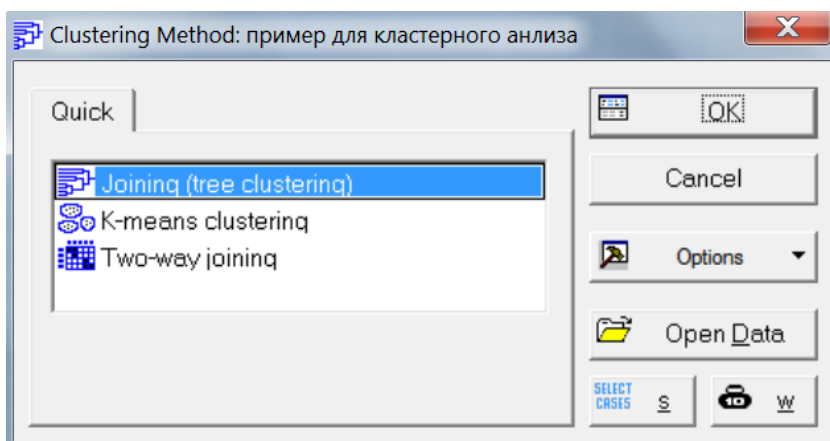


Рисунок 10.4 – Выбор кластерного метода

В поле Кластер задается направление классификации. При кластеризации самих переменных помечаются *Variables* (переменные – столбцы), в данной задаче *Cases* (наблюдения – строки).

В качестве меры сходства в окошке Amalgamation [linkage] rule устанавливаем *Single Linkage* (Метод одиночной связи «принцип ближайшего соседа»).

В окошке *Distance measure* (Мера расстояния d) выбираем *Euclidean distances* (Евклидово расстояние).

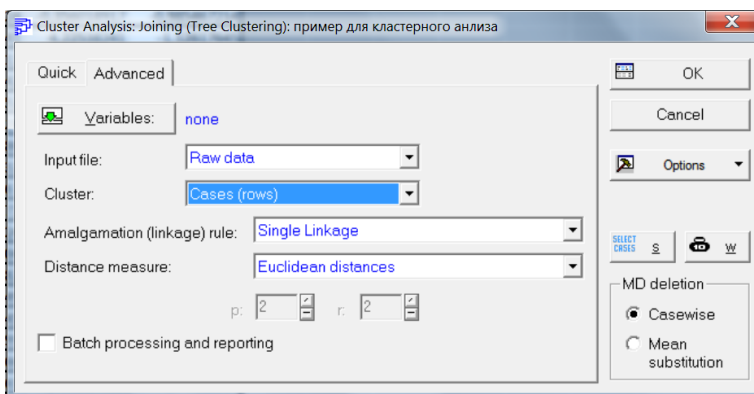


Рисунок 10.5 – Определение параметров кластеризации

Появляется соответствующее диалоговое окно, в котором необходимо определить расположение графика (вертикальное или горизонтальное). Нажмем *OK*.

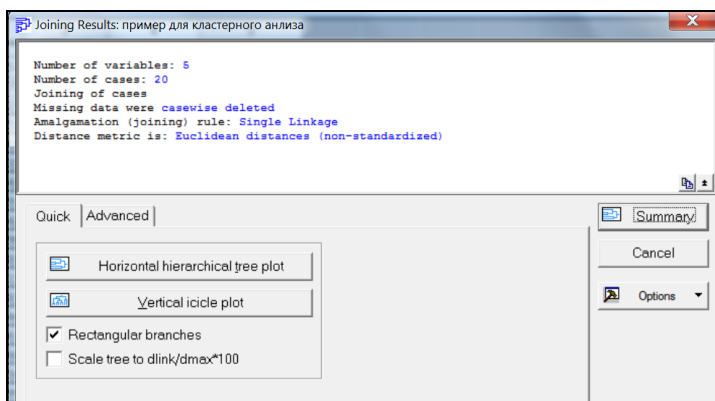


Рисунок 10.6 – Выбор вида диаграммы

Выбрав тип графика «вертикальный», получим следующую диаграмму.

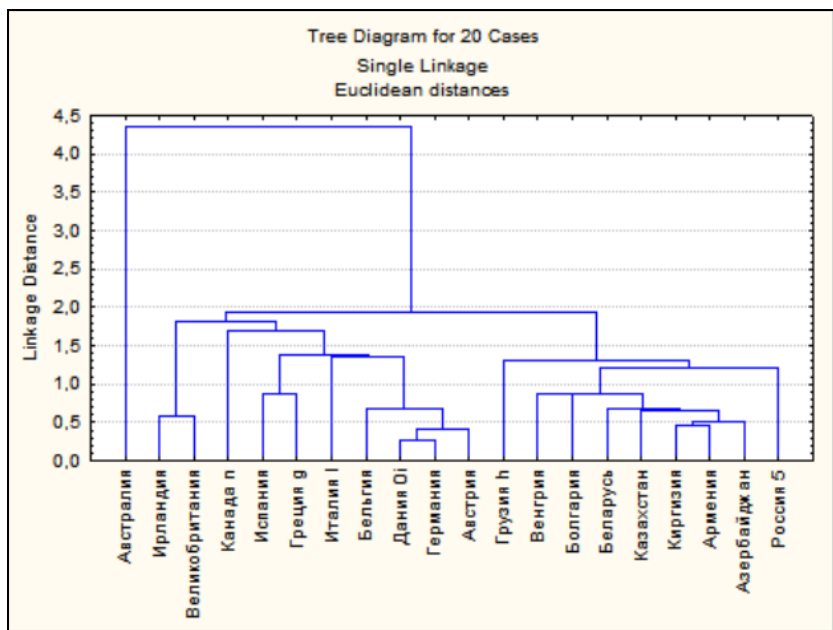


Рисунок 10.7 – Диаграмма кластеризации

На данной дендрограмме горизонтальная ось представляет наблюдения, вертикальная – расстояние объединения. Таким образом, на первом шаге были объединены Дания и Германия, как имеющие минимальное расстояние, а на последнем – все уже объединенные в какие-либо кластеры.

Щелкнув по кнопке *Amalgamation schedule* (Схема объединения), можно выбрать таблицу результатов со схемой объединения. Первый столбец таблицы содержит расстояния для соответствующих кластеров. Каждая строка показывает состав кластера на данном шаге классификации. Например, на первом шаге (1 строка) объединились Германия и Дания, на втором (2 строка) – Австрия, Германия и Дания, на третьем – Армения и Киргизия и т. д.

linkage distance	Obj. No. 1	Obj. No. 2	Obj. No. 3	Obj. No. 4	Obj. No. 5
.2796770	Германия	Дания			
.4164282	Австрия	Германия	Дания		
.4541719	Армения	Киргизия			
.5016205	Азербайджан	Армения	Киргизия		
.5705584	Великобритания	Ирландия			
.6545050	Азербайджан	Армения	Киргизия	Казахстан	
.6684378	Австрия	Германия	Дания	Бельгия	
.6749752	Азербайджан	Армения	Киргизия	Казахстан	Бе.
.8671820	Болгария	Венгрия			
.8675361	Греция	Испания			
.8760279	Азербайджан	Армения	Киргизия	Казахстан	Бе.
1.203424	Россия	Азербайджан	Армения	Киргизия	Каз
1.299472	Россия	Азербайджан	Армения	Киргизия	Каз
1.364980	Австрия	Германия	Дания	Бельгия	↓
1.370577	Австрия	Германия	Дания	Бельгия	↓
1.705509	Австрия	Германия	Дания	Бельгия	↓
1.809530	Австрия	Германия	Дания	Бельгия	↓
1.940695	Россия	Азербайджан	Армения	Киргизия	Каз

Рисунок 10.8 – Схема объединения данных в кластеры

В качестве основных методов анализа пакет STATISTI-SA предлагает *Joining (tree clustering)* – группу иерархических методов (7 видов), которые используются в том случае, если число кластеров заранее неизвестно, и *K-Means Clustering* (метод K-средних), в котором пользователь заранее определяет количество кластеров.

В группу иерархических методов входит *Ward's method* – метод Уорда, который хорошо работает с небольшим количеством элементов и нацелен на выбор кластеров с примерно одинаковым количеством членов.

Многообразие алгоритмов кластерного анализа часто дезориентирует пользователя. Поэтому он может прибегнуть к применению нескольких алгоритмов и отдать предпочтение какому-либо выводу на основании комплексной оценки совокупности результатов работы.

10.6 Сущность и вычислительный подход дискриминантного анализа

Дискриминантный анализ используется для принятия решения о том, какие переменные различают (дискриминируют) две или более совокупности (группы). Приведем примеры его использования.

Исследователь в области образования может захотеть установить, какие переменные относят выпускника университета к одной из трех категорий: (1) поступающий в аспирантуру, (2) работающий по специальности, или (3) не работающий по специальности. Для этой цели он должен собрать данные о различных переменных, связанных со студентами. После выпуска большинство студентов, естественно, попадут в одну из названных категорий. Дискриминантный анализ позволяет определить, какие переменные дают наилучшее предсказание выбора студентами дальнейшего пути.

Эколог может зарегистрировать характерные признаки проб почв из различных природно-климатических зон, например, такие, как общее количество фосфора и азота в процентах сухого вещества, рН почвы, наличие влаги и т. д., чтобы выяснить, какие характеристики определяют тип почвы, а затем относить каждую пробу к той или иной природно-климатической зоне.

На основании достаточно обширного экспериментального материала известны средние характеристики одного и того же вида животных или растений, занимающих разные экологические ниши. Экземпляры из разных мест обитания будут, как правило, отличаться по численным значениям некоторых характеристик. Если в распоряжении исследователя оказались одна или несколько особей, для которых известно, что они взяты из одного какого-то места обитания, но не известно из какого именно, то решить вопрос об их

принадлежности к той или иной экологической нише можно с помощью дискриминантного анализа.

С вычислительной точки зрения дискриминантный анализ похож на дисперсионный анализ. Основная его идея заключается в том, чтобы определить, отличаются ли совокупности по среднему какой-либо переменной (или линейной комбинации переменных), и затем использовать эту переменную, чтобы предсказать для новых членов их принадлежность к той или иной группе.

10.7 Метод главных компонент и факторный анализ

Главными целями факторного анализа являются:

- сокращение числа переменных (редукция данных);
- определение структуры взаимосвязей между переменными, т. е. классификация переменных.

Поэтому факторный анализ используется или как метод сокращения данных или как метод классификации.

Опишем принципы факторного анализа и способы его применения для достижения этих двух целей.

Факторный анализ как метод редукции данных. Предположим, вы хотите измерить удовлетворенность людей экологической обстановкой в городе, для чего составляете вопросник с различными пунктами; среди других вопросов задаете следующие: удовлетворены ли люди экологической обстановкой в городе (пункт 1) и как интенсивно они стараются ее улучшить (пункт 2).

Результаты преобразуются так, что средние ответы (например, для удовлетворенности) соответствуют значению 100, в то время как ниже и выше средних ответов расположены меньшие и большие значения, соответственно. Две переменные (ответы на два разных пункта) коррелированы между собой.

Из высокой коррелированности двух этих переменных можно сделать вывод об избыточности двух пунктов опросника.

Объединение двух переменных в один фактор. Зависимость между переменными можно обнаружить с помощью диаграммы рассеяния. Полученная путем подгонки линия регрессии, дает графическое представление зависимости.

Если определить новую переменную на основе линии регрессии, изображенной на диаграмме, то такая переменная будет включить в себя наиболее существенные черты обеих переменных. Итак, фактически, вы сократили число переменных и заменили две одной. Отметим, что новый фактор (переменная) в действительности является линейной комбинацией двух исходных переменных.

Анализ главных компонент. Пример, в котором две коррелированные переменные объединены в один фактор, показывает главную идею факторного анализа или, более точно, анализа главных компонент. Если пример с двумя переменными распространить на большее число переменных, то вычисления становятся сложнее, однако основной принцип представления двух или более зависимых переменных одним фактором остается в силе.

Выделение главных компонент. В основном процедура выделения главных компонент подобна вращению, максимизирующему дисперсию (варимакс) исходного пространства переменных.

Например, на диаграмме рассеяния вы можете рассматривать линию регрессии как ось X , повернув ее так, что она совпадает с прямой регрессии. Этот тип вращения называется вращением, максимизирующим дисперсию, так как критерий (цель) вращения заключается в максимизации дисперсии (изменчивости) «новой» переменной (фактора) и минимизации разброса вокруг нее.

Обобщение на случай многих переменных. В том случае, когда имеются более двух переменных, можно считать, что

они определяют трехмерное «пространство» точно так же, как две переменные определяют плоскость. Если вы имеете три переменные, то можете построить 3-мерную диаграмму рассеяния.

Для случая более трех переменных, становится невозможным представить точки на диаграмме рассеяния, однако логика вращения осей с целью максимизации дисперсии нового фактора остается прежней.

Несколько ортогональных факторов. После того, как вы нашли линию, для которой дисперсия максимальна, вокруг нее остается некоторый разброс данных. И процедуру естественно повторить. В анализе главных компонент именно так и делается: после того, как первый фактор выделен, то есть, после того, как первая линия проведена, определяется следующая линия, максимизирующая остаточную вариацию (разброс данных вокруг первой прямой), и т. д. Таким образом, факторы последовательно выделяются один за другим. Так как каждый последующий фактор определяется так, чтобы максимизировать изменчивость, оставшуюся от предыдущих, то факторы оказываются независимыми друг от друга. Другими словами, некоррелированными или ортогональными.

Напомним, что анализ главных компонент является методом сокращения или редукции данных, т. е. методом сокращения числа переменных. Возникает естественный вопрос: сколько факторов следует выделять? Отметим, что в процессе последовательного выделения факторов они включают в себя все меньше и меньше изменчивости. Решение о том, когда следует остановить процедуру выделения факторов, главным образом зависит от точки зрения на то, что считать малой «случайной» изменчивостью. Это решение произвольно, однако имеются некоторые рекомендации, позволяющие рационально выбрать число факторов.

Обзор результатов анализа главных компонент. Посмотрим теперь на некоторые стандартные результаты анализа главных компонент. При повторных итерациях вы выделяете факторы, имеющие все меньшую и меньшую дис-

персию. Для простоты изложения считаем, что обычно работа начинается с матрицы, в которой дисперсии всех переменных равны 1,0. Поэтому общая дисперсия равна числу переменных. Например, если вы имеете 10 переменных, каждая из которых имеет дисперсию 1, то наибольшая изменчивость, которая потенциально может быть выделена, равна 10 раз по 1. Предположим, что при изучении степени удовлетворенности экологической обстановкой у жителей города вы включили 10 пунктов для измерения различных аспектов этой удовлетворенности. Дисперсия, объясненная последовательными факторами, представлена в таблице 10.2.

Таблица 10.2 – Выделение главных компонент

Факторный анализ	Выделение: главные компоненты			
	общая дисперсия		кумулятивная дисперсия	
	собственные значения	%	собственные значения	%
1	6,118369	61,18369	6,11837	61,1837
2	1,800682	18,00682	7,91905	79,1905
3	0,472888	4,72888	8,39194	83,9194
4	0,407996	4,07996	8,79993	87,9993
5	0,317222	3,17222	9,11716	91,1716
6	0,293300	2,93300	9,41046	94,1046
7	0,195808	1,95808	9,60626	96,0626
8	0,170431	1,70431	9,77670	97,7670
9	0,137970	1,37970	9,91467	99,1467
10	0,085334	0,85334	10,00000	100,0000

Собственные значения. Во втором столбце таблицы результатов вы можете найти дисперсию нового, только что выделенного фактора. В третьем столбце для каждого фактора приводится процент от общей дисперсии (в данном примере она равна 10) для каждого фактора. Как можно видеть, первый фактор (значение 1) объясняет 61 % общей дисперсии, фактор 2 (значение 2) – 18 %, и т. д. Четвертый

столбец содержит накопленную или кумулятивную дисперсию.

Дисперсии, выделяемые факторами, названы собственными значениями. Это название происходит из использованного способа вычисления.

Собственные значения и задача о числе факторов. Как только получена информация о том, сколько дисперсии выделил каждый фактор, вы можете возвратиться к вопросу о том, сколько факторов следует оставить.

Как говорилось выше, по своей природе это решение произвольно. Однако имеются некоторые общепотребительные рекомендации и на практике, следование которым дает наилучшие результаты.

Критерий Кайзера. Сначала вы можете отобрать только факторы, с собственными значениями, большими 1. По существу, это означает, что если фактор не выделяет дисперсию, эквивалентную, по крайней мере, дисперсии одной переменной, то он опускается. Этот критерий предложен Кайзером (Kaiser, 1960), и является наиболее широко используемым. В приведенном выше примере на основе этого критерия вам следует сохранить только 2 фактора (две главные компоненты).

10.8 Особенности применения многомерного анализа при исследовании экологических систем

Благодаря тому, что для всех рассмотренных методов в настоящее время имеются пакеты прикладных вычислительных программ, эти методы стали доступны для широкого круга экологов. Но следует помнить, что применимость указанных методов к анализу данных экологических наблюдений (экологического мониторинга), относящихся к категории т.н. «пассивных экспериментов», представляется достаточно проблематичной.

Известно, в частности, что регрессионный и дисперсионный анализ базируются на ряде довольно жестких предпосылок, из которых назовем 3 наиболее важных:

1) результаты наблюдений должны быть независимыми случайными величинами, распределенными нормально;

2) выборочные оценки наблюдений должны быть однородны, т. е. не должны зависеть от величины результатов наблюдений;

3) ошибки в определении независимых переменных должны быть в идеальном случае равны нулю или, по крайней мере, пренебрежимо малы по сравнению с ошибкой в определении величины результатов наблюдений.

Затруднения, связанные с первыми двумя предпосылками, можно преодолеть путем «нормализующих» преобразований величины результатов наблюдений. Но выполнение 3-го требования практически неосуществимо, поскольку погрешности в определении таких переменных, как численности видов, концентрации биогенных элементов и т.п. связаны не столько с несовершенством методик, сколько с неоднородностью («пятнистостью») распределения этих показателей в пространстве реальных биотопов.

Необходимо также заметить, что сложность заключается и в том, что приходится совместно анализировать объекты разной природы и разных уровней описания, нелинейные и неквазилинейные взаимосвязи переменных, преобладающие в реальных экосистемах.

ГЛАВА 11. ОЦЕНКА ОСНОВНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОПУЛЯЦИЙ И ВИДОВОГО РАЗНООБРАЗИЯ

11.1 Оценка численности и абсолютной плотности популяции

Для характеристики природной ситуации очень важно знать, сколько каких видов и в каком количестве представлено в данной экосистеме, в каком состоянии находится видовое разнообразие. Наша дальнейшая работа будет направлена на то, чтобы изучить основные статические характеристики экосистем на уровне популяции и сообщества.

К категории статических характеристик популяции относятся *численность, плотность и биомасса*. Кроме того, к ним можно отнести такие специфические характеристики как соотношение полов, распределение особей по возрасту (возрастная структура), размерам (размерная структура) и особенности пространственного распределения (пространственная структура). Слово «статический» вовсе не означает постоянство этих характеристик во времени, а лишь отражает то обстоятельство, что их изменение дает нам сведения о состоянии популяции, подобные фотографическому снимку. Нами как бы фиксируется положение, к которому пришла популяция в момент измерения, как итог всей предшествующей истории этой популяции.

Определение численности объекта исследования является первой задачей любого демэкологического и синэкологического исследований, поскольку она (верней, характер ее флуктуаций) теснейшим образом связана с различными аспектами жизнедеятельности организма. Что бы экологи ни делали, какие бы задачи ни решали, в конечном счете, все сводится к определению численности популяции или к ее прогнозированию.

Численность популяции, по сути, является главной результирующей функцией, обусловленной размножением, смертностью, пространственным распределением, миграциями, социальными отношениями и т. д. организмов на фоне проявления различных экологических факторов.

Без данных о численности видов, которые входят в состав биоценоза, нельзя судить об их относительной роли в формировании стабильности данного сообщества, невозможно установить особенности развития биоценоза в пространстве и времени, выяснить характер динамики популяций отдельных видов.

Для решения перечисленных выше, а, кроме того, и многих других вопросов, нельзя ограничиваться только субъективной, например, глазомерной оценкой численности. *Основная задача количественного учета организмов при проведении экологических исследований состоит в получении объективных и сопоставимых с результатами других исследований данных об обилии организмов данного вида в пределах определенной территории.*

Прежде всего, следует различать численность и плотность популяций или населения (отнюдь не «плотность животных»).

Численность (количество особей) – это абсолютный показатель, полученный с определенной степенью точности. Учетной единицей могут служить и площадь поверхности, и объем воды, и одно типичное растение, и др. При этом предполагается, что особи в момент подсчета этого участка не покидают. Самый простой способ определения численности популяции подсчет всех имеющихся особей. Это возможно, если особи не передвигаются и их хорошо заметно. Такой метод требует больших затрат времени и труда.

Более распространенный метод подсчет особей в выборках. Эти выборки соответствуют одной или нескольким частям популяции и осуществляются случайным образом.

Плотность популяции или населения – это численность на единице площади. Ее обычно измеряют и выражают числом особей или биомассой популяции на единицу площади или объема, например 500 деревьев на 1 га, 5 млн диатомей на 1 м³ воды или 200 кг рыбы на 1 га поверхности водоема.

Однако площадь может характеризовать разные природные категории местообитаний – типологические, ландшафтные, зональные, ареал вида, а также хозяйственные и административные подразделения. Отсюда возникают затруднения при измерении и выражении плотности популяции. Потому различают *среднюю плотность* (параметр популяции на единицу всего пространства) и *экологическую плотность* – (численность особей на единицу фактически заселенной площади с благоприятными условиями в пределах общего ареала (экз./м², экз./м³).

Следует также знать, что обычно определяют не общую плотность (особей) популяции, а плотность особей определенной возрастной группы. Знание же количества репродуктивных и эмбриональных тел бывает необходимо для ближайших прогностических оценок динамики численности популяции.

Если известно общее количество всех типов биотопов и их площадь или объем, то отсюда можно определить и абсолютную плотность популяции. Алгоритм расчетов меняется при этом незначительно.

Абсолютная плотность (X) организмов на исследуемом однородном участке определяется как среднее арифметическое количества зарегистрированных в границах каждой пробной площадки (x_i) организмов (данного вида):

$$X = \sum \frac{x_i}{n} \quad (11.1)$$

где n — количество исследованных пробных площадок ($i \in [1, n]$).

Точность получаемых результатов характеризует *ошибка оценки плотности* (m_x), которая определяется через понятие ее *дисперсии* (S^2):

$$m_x = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \quad (11.2)$$

Достоверными считаются результаты, для которых выполняется неравенство: $\frac{X}{m_x} \geq 5$, то есть величина ошибки должна составлять не более 20 % величины самого показателя.

Чтобы полученные результаты были достоверными, необходимое (минимальное) количество пробных площадок (n_{\min}) определяется по формуле *Эллиота* (Elliot, 1971):

$$n_{\min} = \frac{25 S^2}{X^2} \quad (11.3)$$

При необходимости, для оценки уровня достоверности различий между двумя показателями плотности (X_1 и X_2), полученными с использованием данной методики, например для двух разных участков, можно использовать *u-критерий*:

$$u = \frac{|X_1 - X_2|}{\sqrt{\frac{X_1}{n_1} + \frac{X_2}{n_2}}}, \quad (11.4)$$

где n_1 и n_2 количество пробных площадок, которые были использованы при анализе плотности на двух территориях, между которыми производится сравнение.

Рассчитанное значение u сравнивается с критическим значением (при уровне значимости $\alpha = 0,05$), которое составляет $u_{кр} = 1,65$. Если $u > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвер-

гается, и наличие достоверных различий между двумя оценками считается доказанным.

11.2 Теоретические модели распределения особей в пространстве (распределение Пуассона)

Описать пространственные распределения живых организмов можно с помощью многих статистических распределений. Теоретические модели распределения позволяют предсказать число организмов, обитающих на какой-то определенной площади или на данном объекте, когда средняя плотность, вообще говоря, не известна.

Рассматриваемый нами подход в значительной мере облегчает оценку плотности (и численности) особей (или других объектов), поскольку базируется не на непосредственном подсчете числа объектов, а на подсчете числа пробных площадок, в пределах которых был встречен хотя бы один организм (если плотность низка), или, наоборот, в пределах которых не встретилось ни одного организма (если плотность высока).

Математически это выражается в том, что число пробных площадок с 0, 1, 2, 3, ..., i и т. д. объектами задается рядом Пуассона, общий член которого выражается формулой:

$$n_i = n \cdot \frac{X^i \cdot e^{-X}}{i!} \quad (11.5)$$

где n – общее количество исследованных пробных площадок; X – среднее количество объектов на единицу площади.

Характерной особенностью *распределения Пуассона* является то, что оно задается всего одним показателем. В нашем случае, это – оценка плотности популяции (или численности, которую легко пересчитать, зная плотность и чис-

ло исследованных пробных площадок: $N = X \cdot n$). Важно, что дисперсия распределения равна средней величине.

При случайном (пуассоновском) распределении объектов в границах исследованной территории, количество пробных площадок, в которых не будет найдено ни одного объекта, можно рассчитать по формуле:

$$n_0 = n \cdot \frac{X^0 \cdot e^{-X}}{0!} = ne^{-X} \quad (11.6)$$

найден один объект:

$$n_1 = n \cdot \frac{X^1 \cdot e^{-X}}{1!} = nXe^{-X} \quad (11.7)$$

найденно два объекта:

$$n_2 = n \cdot \frac{X^2 \cdot e^{-X}}{2!} = n \cdot \frac{X^2 \cdot e^{-X}}{2} \quad (11.8)$$

найденно три объекта:

$$n_3 = n \cdot \frac{X^3 \cdot e^{-X}}{3!} = n \frac{X^3 e^{-X}}{6} \quad (11.9)$$

и т. д.

Если большинство пробных площадок содержат 1, 2, 3 и т.п. объектов, то нет необходимости подсчитывать их количество, достаточно подсчитать количество пробных площадок, в которых не было зарегистрировано ни одного объекта. Тогда количество площадок, которые содержат *хотя бы один объект* можно рассчитать по формуле:

$$n^* = n - n_0 = n - ne^{-X} = n(1 - e^{-X}), \quad (11.10)$$

где n^* — число площадок, которые содержат хотя бы один объект.

Отсюда оценка плотности популяции может быть рассчитана, как:

$$X = -\ln \frac{n_0}{n}, \quad (11.11)$$

если подсчитывалось число пробных площадок, на которых не встречено ни одного объекта, или:

$$X = -\ln\left(1 - \frac{n^*}{n}\right), \quad (11.12)$$

если подсчитывалось число пробных площадок, на которых был встречен хотя бы один объект.

Точность данного метода, естественно, повышается с увеличением количества пробных площадок.

Поскольку для распределения Пуассона среднее арифметическое равно его дисперсии (то есть, $X = S^2$), то ошибку оценки средней плотности можно найти по формуле:

$$m_x = \sqrt{\frac{X}{n}}. \quad (11.13)$$

Если вместо большого числа небольших пробных площадок площадью R использовать одну ленточную трансекту площадью $R_l = n \cdot R$, то количество объектов, зарегистрированных в пределах трансекты (N), отнесенное к ее площади (R_l), даст оценку абсолютной плотности (X):

$$X = \frac{N}{R_l}. \quad (11.14)$$

На основании особенностей распределения Пуассона оценку ошибки показателя плотности популяции в данном случае можно получить следующим образом:

$$m_x = \frac{\sqrt{N}}{R_l}. \quad (11.15)$$

При большой численности объектов, зарегистрированных на территории одной трансекты (или на нескольких десятках пробных площадок), доверительные интервалы оценки плотности рассчитываются по формуле: $X \pm 1,96 \cdot m_x$

Но при небольших значениях плотности, когда распределение Пуассона становится резко асимметричным, доверительный интервал для общего числа объектов (особей, нор, гнезд и т.п.), зарегистрированных на исследуемой территории, рассчитывается по следующим формулам:

$$N_n = 0.5 \cdot \chi_1^2 (df_1 = 2 \cdot N; p = \alpha / 2), \quad (11.16)$$

$$N_g = 0.5 \cdot \chi_2^2 (df_2 = 2 \cdot N + 2; p = 1 - \alpha / 2), \quad (11.17)$$

где N – количество объектов, зарегистрированных в пределах трансекты;

N_n и N_g – нижняя и верхняя границы показателя;

χ^2 – табличное значение критерия Хи-квадрат Пирсона с заданным числом степеней свободы (df), и уровнем значимости α .

11.3 Оценка адекватности модели распределения организмов в пространстве

Согласованность эмпирического распределения с Пуассоновским проверяется с помощью критерия χ^2 .

χ^2 расчетное определяется как сумма частных от деления квадратов отклонений фактически полученных частот от ожидаемых на число ожидаемых.

$$\chi_p^2 = \sum \frac{(n_{факт} - n_m)^2}{n_m} \quad (11.18)$$

где $n_{факт}$ – фактически наблюдаемое, а n_m – теоретически ожидаемое число.

Если наблюдаемые и ожидаемые значения совпадают довольно хорошо ($\chi_p^2 < \chi_{st}^2$), то можно сделать вывод, что

распределение организмов по участку близко к случайному. В противном случае ($\chi_p^2 > \chi_{st}^2$), будет неслучайное или агрегированное распределение. В первом случае если, например, среднее число особей на квадрат равно трем, то квадратов с тремя особями будет слишком много по сравнению с ожидаемым числом. Квадратов же, в которых нет ни одной особи или, наоборот, много особей, будет слишком мало, так как они вынуждены разместиться более равномерно по участку.

Во втором случае будет слишком много как пустых квадратов, так и квадратов с большим количеством особей.

Чтобы пользоваться критерием χ^2 , необходимо соблюдать следующие условия:

- объем выборочной совокупности должен быть достаточно большой (например, общее число пересчитанных животных или растений $n > 50$);

- в каждой рассчитанной группе должно быть не менее пяти наблюдений (например, число квадратов с n животными должно быть не менее пяти);

- для вычисления χ^2 используют только численности, а не проценты или величины, полученные при взвешиваниях.

Пример. На исследуемом участке было расставлено 543 совершенно одинаковых ловушки для мелких млекопитающих. По прошествии некоторого времени в ловушках было обнаружено:

Число животных в ловушке	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Число ловушек	468	41	16	11	2	4	0	1	0

Спрашивается – согласуется ли распределение животных по исследуемой площади со случайным?

Схема решения.

Общее число животных:

$$n = 0 \cdot 468 + 1 \cdot 41 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 141;$$

$$n \cdot p = 141 \cdot 1/543 = 0,26.$$

Теперь, используя ряд Пуассона, можно определить ожидаемые доли ловушек с одним, двумя, тремя, и т. д. животными, в предположении, что все ловушки равно эффективны. После чего находим ожидаемое число ловушек с определенным количеством животных.

Поскольку число ловушек с четырьмя, пятью, шестью, семью и восьмью животными меньше пяти, то их можно объединить в один класс.

Ожидаемая доля ловушек, в которых нет ни одного животного, равна $e^{-m} = e^{-0,26} = 0,77$. Ожидаемое число ловушек, в которых нет ни одного животного $0,77 \cdot 543 \approx 418,1$.

Аналогично определяют ожидаемые доли и число ловушек с одним, двумя, тремя животными. Ожидаемую долю ловушек с числом *животных от 4 до 8 можно определить по формуле*: $1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) = 1 - 0,77 - 0,20 - 0,026 - 0,002 = 0,002$.

Тогда критерий χ^2_p будет следующей суммой:

$$\frac{(468 - 418,1)^2}{418,1} + \frac{(41 - 108,6)^2}{108,6} + \dots \approx 169,05.$$

Число степеней свободы $df = 5 - 2 = 3$.

Для $\alpha = 0,05$ $\chi^2_T = 7,81$.

$169,05 > 7,81$.

Следовательно, $\chi^2_p > \chi^2_T$. Отсюда будет неслучайное или агрегированное распределение животных по территории исследуемого участка.

11.4 Индекс Одума

Наиболее простым методом определения характера пространственного распределения объектов является использование *индекса Одума* (I_o) (Одум, 1986):

$$I_o = \frac{S^2}{X} \quad (11.19)$$

Напомним, что S^2 – дисперсия для переменной величины (численности) x рассчитывается при известном значении средней численности (X) и общем количестве исследованных пробных площадок n как:

$$S^2 = \frac{\sum (x - X)^2}{n} \quad (11.20)$$

Если статистически доказано, что $I_o < 1$, то особи распределены в популяции равномерно, если $I_o > 1$ – группами и, наконец, если $I_o = 1$, то особи распределены случайным образом.

Уровень значимости индекса Одума можно оценить, сравнивая рассчитанное значение I_o с табличным значением F -критерия Фишера – Снедекора с числом степеней свободы $df_1 = df_2 = n - 1$.

В тех случаях, если $X > S^2$, рассчитывается обратная величина — X / S^2 , которая затем сравнивается с табличным значением F -критерия Фишера – Снедекора с числом степеней свободы $df_1 = df_2 = n - 1$. Если рассчитанное значение I_o или его обратная величина превышает табличное значение F -критерия, то распределение статистически значимо отличается от случайного (когда отношение дисперсии

к средней величине равно 1). Тогда его считают равномерным, если $I_o < 1$ и групповым, если $I_o > 1$.

Анализ индекса Одума S^2/X показывает, что он, во-первых, имеет размерность (равную численности на единственный элемент пространства), а во-вторых – будет зависеть от численности, особенно при высоких величинах дисперсии, так как числитель (дисперсия) – квадратичная функция, а знаменатель – линейная. В теории пространственного распределения вводятся ограничения на минимальное число площадок учета, что наряду с естественным ограничением числа видов на единице площади в экосистемах планеты позволяет использовать индекс Одума, несмотря на проблемы, связанные с численностью. По-видимому, корректнее использовать безразмерный индекс S/X , то-есть *отношение не дисперсии, а стандартного отклонения к среднему*. Тогда будут соблюдаться и критерии Одума ($S/X \rightarrow 0$ – равномерное, $S/X \leq 1$ – случайное, $S/X > 1$ – контагиозное распределения) и не будет обозначенных выше проблем с численностью видов.

11.5 Модели распределения значимости видов

Значимость представляет собой группу оценок, с помощью которых виды в сообществе могут сравниваться друг с другом.

Значение отдельных видов должно определяться тем, какую роль играют они в функционировании экосистемы или в продукционном процессе.

Но при исследованиях сообществ установить истинную функциональную роль видов нелегко, если об их значении судить только по обилию, т. е. численности и биомассе. Наиболее пригодной оценкой является *продукция*. Она отражает меру использования ресурсов видов для роста попу-

ляции и позволяет сравнивать в одной шкале виды, значительно различающиеся по размерам и типам.

Чтобы узнать, как разграничивается пространство ресурсов сообщества и каким образом формируется количественные соотношения между продукцией видов (или другими оценками значимости), можно построить следующий график: по оси ординат откладывается относительная значимость в процентах, а по оси x – ранжированная последовательность видов от наиболее до наименее обильного.

Полученная в 1965 г. кривая названа Р. Уиттекером [1980] «*кривой доминирования – разнообразия*», а Э. Пианкой [1978] – «*кривой значимости видов*». Предложен ряд гипотез для толкования этих кривых, которые нашли выражение в моделях рангового распределения. Следует заметить, что эмпирические результаты не совпадают полностью ни с одной из трех выдвинутых гипотез.

Геометрический ряд. Графически модель имеет вид прямой линии (на рисунке 11.1, кривая I). Описывается ситуация, когда каждый последующий вид занимает ровно половину доступного пространства ниши, что соответствует гипотезе «перехвата» экологических ниш или геометрическому ряду И. Мотомуры. Пример такого ряда: наиболее обильный вид в два раза многочисленнее следующего за ним по обилию, а этот последний в свою очередь вдвое многочисленнее третьего и т. д. Можно предположить, что в этом случае доминирующий вид занимает половину доступного пространства ниш, второй – половину оставшегося пространства (1/4 исходного) и т. д. Таким образом, каждый вид занимает прежде всего свободную нишу, не перекрывающуюся с другими. Формализуется этот закон следующим уравнением:

$$n(k) = n_1 \cdot C_k^{(k-1)}, \quad (11.21)$$

где $n(k)$ – значимость вида k в ряду от $k = 1$ (наиболее значимый вид) до $k = M$ (наименее значимый вид);

$C_k^{(k-1)} = n(k) / n(k-1)$ – отношение значимости каждого вида к каждому предшествующему ему виду;

n_1 – значимость первого и наиболее значимого вида.

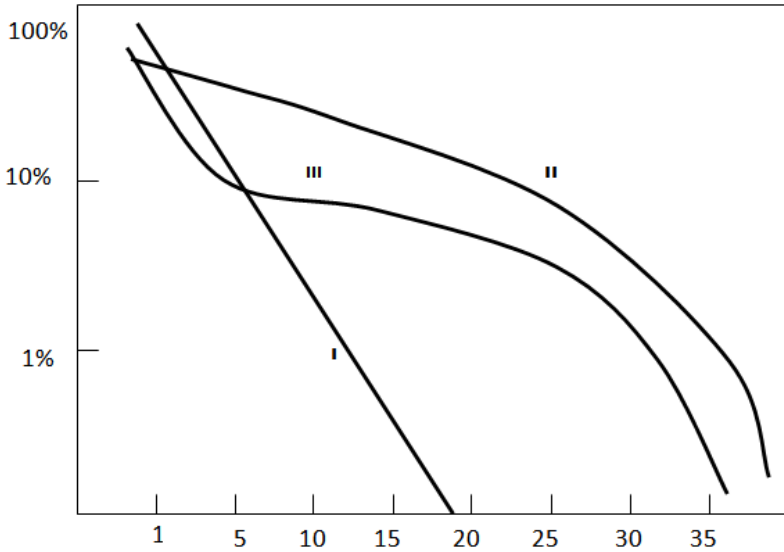


Рисунок 11.1 – Кривые значимости видов:

I – геометрический ряд; II – модель «разломанного стержня» Мак-Артура; III – логнормальное распределение (модель Престона)

Модель содержит два параметра: n_1 – обилие 1-го, наиболее обильного вида; и $C_k^{(k-1)}$ – доля обилия i -го вида от обилия предыдущего. Параметр $C_k^{(k-1)}$ модели отражает степень выравнивания видовой структуры и может служить индексом видового разнообразия.

При геометрическом распределении доминируют немногие виды при очень низкой численности большинства. Распределение обилий видов по типу геометрической модели обнаруживается преимущественно в бедных видами местообитаниях или в сообществах на очень ранних стадиях сукцессии. Такое распределение характерно для некоторых

растительных сообществ в суровых условиях окружающей среды (например, сообщество растений субальпийского пояса). В таких сообществах явление доминирования выражено очень сильно. Геометрическая последовательность может быть близка также к ряду значимости видов определенного яруса растительного сообщества, хотя этот ярус и не представляет собой всего сообщества. Геометрический ряд, помимо того может выражать исход конкуренции между ограниченным числом видов, зависящих от одних и тех же ресурсов среды.

Модель «разломанного стержня» Р. Мак-Артура. Модель разломанного стержня (кривая II) основывается на гипотезе случайных границ между экологическими нишами. Ниши видов в сообществе не перекрываются, но тесно прилегают друг к другу. При этом число особей каждого вида пропорционально размеру (ширине) ниши. Эта модель рассматривает только один ресурс. Она отражает более равномерное его разделение, чем геометрическая модель. Модель «разломанного стержня» характеризуется только одним параметром S (числом видов) и сильно зависит от объема выборки.

Значимость вида k в ряду от $i = 1$ (наименее значимый вид) до $i = M$ (наиболее значимый вид) определяется по формуле:

$$n(k) = \frac{N}{M} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{M - i + 1} \right), \quad (11.22)$$

где $N = \sum n(i)$ – сумма значимостей всех видов;
 M – число видов в сообществе.

В распределении, описываемом моделью «разломанного стержня», обилия видов распределены с максимально возможной в природе равномерностью. Такое распределение

характерно для сообществ с интенсивной межвидовой конкуренцией, территориальным поведением, например, для лесных птиц, характер распределения которых соответствует представлению о неперекрывающихся случайных нишах. Лучше всего использовать модель «разломанного стержня» для доказательства большей выравненности обилий видов в определенном сообществе.

Логнормальное распределение. Логнормальное распределение описывает ситуацию, когда ниши многомерны и перекрываются. На рисунке 11.1 логнормальное распределение представлено сигмоидальной кривой, занимающей промежуточное положение между моделью геометрического ряда и «разломанного стержня» и имеющей более крутое падение по сравнению с моделью «разломанного стержня».

Эта модель впервые была применена к распределению обилий видов Престоном. Престон нанес на ось обилия видов в логарифмическом масштабе и назвал получившиеся классы октавами. Их границам приданы удваивающиеся оценки значимости при переходе от одной октавы к следующей. На графике распределения частот видов по полученным таким способом классам численности соответствуют известной кривой нормального распределения, усеченной слева, в области частот редких видов.

Распределение обычно записывается в форме:

$$N_R = N_0 e^{-(aR)^2}, \quad (11.23)$$

где N_R – число видов в октаве, удаленной на R октав от модального интервала, содержащего N_0 видов;

$a \cong 0,2$ – постоянная, связанная со стандартным отклонением данного распределения.

Логнормальная кривая соответствует распределению значимости в многовидовых сообществах в гомогенных учетах и отображает наиболее широко распространенную в

природе ситуацию. Примеры: пустыня, лес в ущелье, тропические дождевые леса. Учеты, которые негомогенны и содержат виды разных вариантов среды и сообществ (например, коллекция насекомых, попавших в световую ловушку) также возможно описать через логнормальное распределение. Эта модель наиболее вероятна для ненарушенных сообществ.

11.6 Графический анализ распределения видов в сообществе

Выявить закономерности *распределения видов* в сообществе можно с помощью графического анализа. Рассмотрим некоторые типы графиков, применяемых в анализе биоразнообразия.

Ранговым распределением (РР) называется распределение видов (или других групп) по обилию, где виды ранжированы по мере убывания их обилия. Вид РР представляет собой эмпирический закон, отвечающий природе экологического объекта.

1. График ранг/обилие – один из способов представления данных по обилию видов. Ось абсцисс – ранг вида (порядковый номер ранжированного по обилию вида). Ось ординат – обилие вида (число особей). Этот график используют при анализе геометрических рядов. Линия, соединяющая точки называется кривой доминирования-разнообразия или кривой значимости видов.

Пример такого графика представлен на рисунке 11.2, на котором представлено разнообразие сообщества птиц зимой в рекреационных зонах г. Ростова-на-Дону. Из графика видно, что зимой сообщество птиц наименее разнообразно. Заметим, что в отличие от рисунка 11.1, здесь используется абсолютное обилие, а не доля вида в общей численности, поэтому по вертикальной оси величины больше 100.

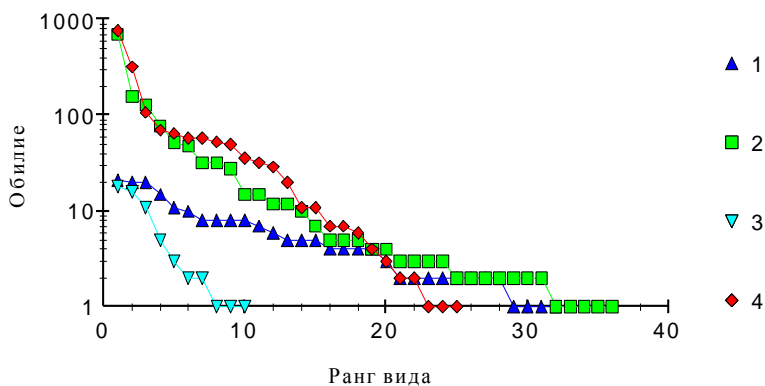


Рисунок 11.2 – Динамика разнообразия сообществ птиц в рекреационных зонах г. Ростова-на-Дону: на левом берегу Дона зимой (1) и весной (2), зимой в парках (3) и в Ботаническом саду (4) (по Криволуцкому).

2. Частотное распределение – устанавливает зависимость между числом особей каждого вида и числом видов. Ось абсцисс – число особей, ось ординат – число видов. Пример такого распределения представлен на рисунке 11.3.

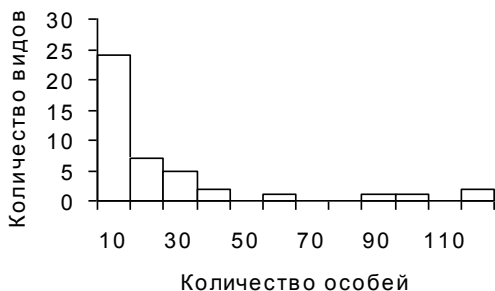


Рисунок 11.3 – Зависимость между количеством особей каждого вида и количеством видов

Его форма определяется соотношением частот редких видов и видов со средним обилием, тогда как массовые ви-

ды уходят в «хвосты» распределений. Поэтому эти распределения чаще применяются при анализе экологических выборок и представляют большой интерес при описании видовых структур фаунистических коллекций.

3. Типичный график, применяемый в случае модели «разломанного стержня», когда по оси абсцисс – порядок видов (ранг) в логарифмическом масштабе от наиболее к наименее обильному, а по оси ординат – относительное обилие в линейном масштабе. Можно использовать по оси ординат накопленное обилие, выраженное в %, в зависимости от логарифма порядкового номера вида (ранга вида).

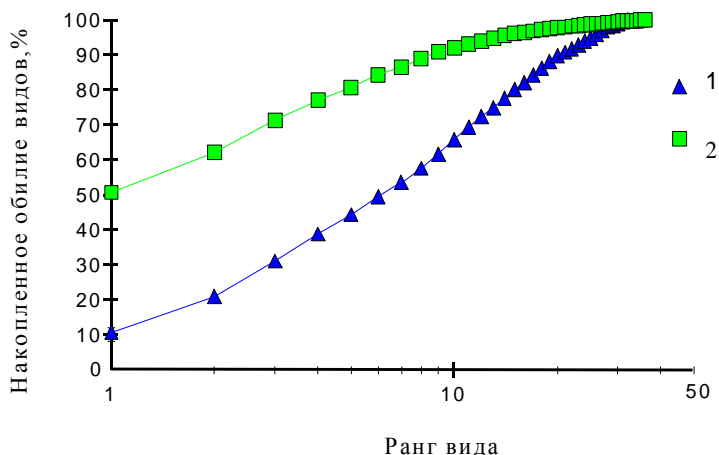


Рисунок 11.4 – Распределения накопленных обилий в зимних сообществах птиц в рекреационной зоне на левом берегу Дона (1) и в Ботаническом саду (2) г. Ростова-на-Дону [Савицкий и др., 1998]

В таблице 11.1 показаны типы графического представления данных по разнообразию для различных моделей распределения видовых обилий в сообществах.

Таблица 11.1 – Типы графиков в анализе видового разнообразия

Тип графика	Ось абсцисс	Ось ординат	Модель распределения
Ранг/обилие	Ранг вида	Обилие вида	Геометрический ряд
Ранг/обилие	Логарифм ранга вида	Относительное обилие, %	Модель «разломанного стержня»
Ранг/обилие	Логарифм ранга вида	Накопленное обилие, %	Логарифмическое распределение
Частотное распределение	Число особей	Количество видов	Модель «разломанного стержня»
Частотное распределение	Логарифм числа особей	Количество видов	Лог-нормальное распределение

Каждой теоретической модели соответствует определенная форма кривой на графике ранг/обилие и, соответственно, определенный тип видовой структуры. Разные совокупности видов порождают и разные кривые РР (ранговых распределений). Сравнивая эти кривые, можно зафиксировать изменения видовой структуры. Непосредственным объектом анализа может быть форма РР или при неизменной общей форме – количественные значения его параметров. Форма РР может характеризовать тип сообщества, сезонные изменения и стадию сукцессии, степень нарушенности среды обитания.

Заметим, что предметом исследования могут не сообщества (в том смысле, который вкладывал К. Мебиус в термин «биоценоз»), а группы видов, сходные либо по их образу жизни (например, фитопланктон, зоопланктон), либо по таксономической принадлежности («сообщество» птиц или жужелиц в какой-либо экосистеме), либо по принадлежности к одной и той же жизненной форме (деревья в конкретном лесу).

11.7 Количественные меры видового разнообразия

Видовое разнообразие (ВР) – одна из важнейших характеристик сообщества, отражающая сложность его видовой структуры. До недавнего времени считалось, что ВР как характеристика структурной сложности связано с устойчивостью биоценоза и может отражать степень его нарушенности, обеспеченность энергией, степень стабильности среды и др. [Пианка, 1981; Одум, 1986]. Однако, накопленный за последние 30 лет фактический материал свидетельствует о том, что прямой связи между сложностью (разнообразием) и устойчивостью сообществ может и не быть [Бигон и др., 1989]. Но все-таки, уменьшение ВР сообщества свидетельствует об упрощении его видовой структуры и о нарушении соотношений между видами по обилию.

При оценке альфа-разнообразия учитываются два фактора: видовое богатство и выравненность обилий видов.

Видовое богатство – число видов, для сравнения отнесенное к определенной площади.

Выровненность – равномерность распределения видов по их обилию в сообществе.

Видовая плотность (например, на 1 м^2) – наиболее распространенный показатель видового богатства, особенно среди ботаников и почвенных зоологов.

Нумерическое видовое богатство – это число видов на строго оговоренное число особей или на определенную биомассу. Оно применяется, если исследователь имеет дело с выборкой, не располагая полным списком видов сообщества. Более популярно его применение при исследовании водных объектов. Например, при исследовании экологических воздействий на сообщества рыб используется показатель числа видов на 1000 рыб.

Просты в применении индексы видового богатства *Менхиника* и *Маргалефа*. Достоинства этих индексов – легкость расчетов. Они рассчитываются по следующим формулам.

Индекса Менхиника:

$$D_{Mn} = \frac{N}{\sqrt{X}}, \quad (11.24)$$

индекс Маргалефа:

$$D_{Mg} = \frac{N - 1}{\ln X}, \quad (11.25)$$

где N – общее число видов, X – общее количество особей разных видов.

Например, если получена выборка, которая насчитывала 17 видов птиц, представленных 149 особями, разнообразие будет составлять: по индексу Маргалефа – $D_{Mg} = 3,2$, по индексу Менхиника – $D_{Mn} = 1,4$. Большая величина индекса соответствует большему разнообразию.

Особую группу составляют индексы, *основанные на относительном обилии видов*. Эту группу индексов называют индексами неоднородности, так как они учитывают одновременно и выравненность и неоднородность, и видовое богатство.

Выделяют две категории непараметрических индексов:

- 1) индексы, полученные на основе теории информации (информационно-статистические);
- 2) индексы доминирования.

К первой группе относится *индекс Шеннона*, ко второй – *индекс Симпсона*.

При расчете индекса разнообразия H по Шеннону считается, что каждая проба – случайная выборка из сообщества, а соотношение видов в пробе отражает их реальное соотношение в природе. Разнообразие по Шеннону рассчитывается по формуле:

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \ln(p_i) \quad (11.26)$$

где p_i либо удельная численность (частное от деления численности i -го вида на общую численность всех видов), либо удельная биомасса (частное от деления его биомассы на общую биомассу всех видов в пробе).

Причина ошибок в оценке разнообразия с использованием этого индекса заключается в том, что невозможно включить в выборку все виды реального сообщества.

Индекс Шеннона обычно варьирует в пределах от 1,5 до 3,5, редко превышая 4,5.

На основе индекса Шеннона можно вычислить показатель *выровненности* E (отношение наблюдаемого разнообразия к максимальному):

$$E = \frac{H}{\ln N}, \quad (11.27)$$

где N – количество видов.

$E \in [0,1]$, причем $E = 1$ при равном обилии видов.

Индекс Симпсона был рассмотрен нами при оценке доминирования. Отметим, что на практике удобнее пользоваться его перевернутой формулой:

$$D = \frac{1}{\sum_{i=1}^N p_i^2}. \quad (11.28)$$

Тогда чем больше D приближается к N , тем разнообразнее сообщество.

Индекс выровненности Симпсона рассчитывается по формуле:

$$E = \frac{D}{N}. \quad (11.29)$$

Чем больше этот индекс приближается к 1, тем равномернее представлены все виды в сообществе.

При сравнении различных биоценозов по разнообразию необходимо помнить, что размерность видового пространства сравниваемых структурных комплексов должна быть примерно одинаковой. Избежать этого можно, используя не все виды, найденные в пробе, а только некоторый «стандарт» из 10–15 преобладающих видов, составляющих приблизительно 90 % общей численности или биомассы, так как именно они в конечном итоге определяют структуру и продуктивность сообщества.

Коэффициент стенобионтности. Маргалефом (1992) было показано, что основной вариационный признак сукцессии – поиск кратчайшего пути к климаксу. Очевидно, конкуренция между видами, сменяющими друг друга или свои позиции в ходе сукцессии, приводит к закономерному замещению видов-эврибионтов стенобионтами. Принимая это свойство сукцессии за основу, С.И. Розанов (1999) предложил способ оценки экологического разнообразия экосистем как показателя их сукцессионного состояния через определение «коэффициента стенобионтности» биоценоза.

$$K_s = \frac{(\sum N_s)n_e}{(\sum N_e)n_s} \text{ или } K_s = \frac{(\sum B_s)n_e}{(\sum B_e)n_s} \quad (11.30)$$

где N_e и N_s – численности отдельных видов эври- и стенобионтов;

B_e и B_s – их биомассы, n_e и n_s – количество видов эври- и стенобионтов.

Преимущество этого метода состоит в том, что число видов из каждой взятой для анализа группы невелико. Главный недостаток – в неразработанности критериев выделения стено- и эврибиотных видов. При использовании этого метода наиболее подходящими группами организмов предложено рассматривать птиц, занимающих в трофических сетях экосистем верхние уровни, и чешуекрылых (например, расительнойядных бабочек).

11.8 Рекомендации для анализа данных по разнообразию видов

1. *Формирование выборок.* Анализируемые выборки должны быть представительны, достаточно велики, одинаковы по объему и сформированы по правилу случайного отбора.

2. *Графический анализ данных.* Для первого представления о модели распределения необходимо построение графиков рангового распределения обилий.

3. *Диагностика нарушений в структуре сообщества.*

Кривую доминирования – разнообразия можно использовать для оценки влияния нарушений на видовую структуру. Чем круче падает кривая, тем меньше общее разнообразие и сильнее доминирование одного или нескольких видов. В стрессовых ситуациях независимо от того, вызваны ли они естественными причинами, или антропогенным воздействием (загрязнения), кривая становится более крутой (рисунок 11.5), так как уменьшается число редких видов и увеличивается число обычных и доминирующих видов, устойчивых или хорошо адаптированных к стрессу, т. е. происходит концентрация доминирования.

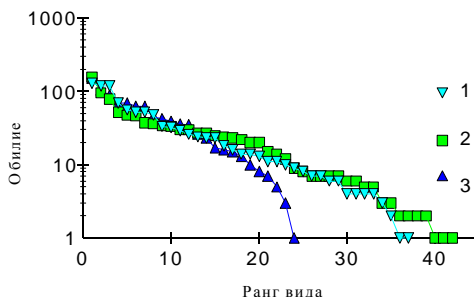


Рисунок 11.5 – Кривые доминирования – разнообразия сообществ птиц из окрестностей Среднеуральского медеплавильного завода в трех зонах: 1 – контрольной (20 км от завода); 2 – буферной (4 км); 3 – импактной (1,5 км) [по Воробейчику и др., 1994]

4. *Индикация нарушений в структуре сообщества с помощью ABC метода.* Этот метод основывается на сопоставлении численности и биомассы (Abundance – Biomass Comparison, ABC). В стабильных зрелых сообществах обычно преобладают сравнительно крупные виды животных с «медленной» динамикой (*K*-стратегии), а в нарушенных сообществах доминируют, как правило, более мелкие формы с высокой скоростью размножения, с высокой, но изменчивой численностью (*r*-стратегии). По оси *X* откладываются (в логарифмической шкале) ранги (номера) видов в порядке уменьшения численности (биомассы), а по оси *Y* – соответствующий накопленный процент численности (биомассы) сообщества. В стабильных ненарушенных сообществах кривая для численности лежит ниже кривой для биомассы, в сильно нарушенных сообществах – выше. Состояния неустойчивого равновесия или восстановления сообществ после стресса, дают приблизительно совпадающие или пересекающиеся кривые.

5. *Проверка эмпирических данных теоретической модели.* В тех исследованиях, где оценка разнообразия является основной задачей, часто бывает полезно формально оценить соответствие эмпирических распределений основным моделям видовой обилия, а результаты подтвердить с помощью критериев согласия, используя графики рангового распределения обилия и сравнивая их с ожидаемым распределением. Этот прием представляет наибольший интерес, когда исследуемые сообщества подвергаются действию среднего стресса.

6. *Расчет индексов разнообразия.* Видовое богатство и доминирование рассчитывается по индексам Маргалефа и Бергера – Паркера. Легкость вычисления и интерпретации – их большое преимущество. Для сравнения с результатами исследований других авторов бывает полезным определение индекса Шеннона.

7. *Проверка статистических гипотез.* Когда выборки представлены несколькими повторностями, для проверки значимости различий между сообществами необходимо использовать дисперсионный анализ. Если непосредственно сравниваются результаты двух исследований, важно использовать один и тот же индекс разнообразия. По этой причине более информативным может оказаться использование индекса Шеннона. Достоверность различия коэффициентов разнообразия определяется по t -критерию Стьюдента.

Соответствие каждой теоретической модели рангового распределения реальным данным оценивается по двум критериям, взаимно дополняющим друг друга.

1. *Коэффициент детерминации* (квадрат коэффициента линейной корреляции) между реальными и теоретическими значениями обилия (% общей дисперсии, объясненной моделью). Чем ближе его величина к 100 %, тем лучше соответствие модели.

2. *Сумма квадратов отклонений реальных значений от модельных.* Чем меньше эта величина, тем лучше соответствие модели. В случае, когда качество аппроксимации двумя (или более) моделями приблизительно одинаково по обоим указанным критериям, можно использовать любую из них.

Оценка параметров моделей и их ошибок с помощью компьютера. Модель «разломанного стержня» и логнормальное распределение являются беспараметрическими. Для оценки параметров модели геометрического распределения при расчетах без применения персонального компьютера используется процедура приведения их к линейному виду:

$$\lg\{n(k)\} = \lg(n_1) + (k-1) \cdot \lg(C_k), \quad (11.31)$$

где $n(k)$ – относительное обилие вида с рангом k ;
 n_1, C_k , – параметры.

После линеаризации оценка параметров и их стандартных ошибок проводится методом наименьших квадратов для линейной регрессии. Необходимо различать ошибки параметров данной линии регрессии и ошибки, связанные с выборочными флуктуациями (различия между разными пробами, ограниченный объем выборки, погрешности в определении численностей и пр.). Для учета таких ошибок рекомендуется обрабатывать данные в нескольких параллельных пробах. При этом погрешности в параметрах ранговых распределений обычно бывают меньше, чем погрешность иных характеристик сообщества (таких, например, как общая численность, биомасса или число видов).

Глава 12. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОПУЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

12.1 Количественная оценка рождаемости, смертности, скорости роста популяции

Описание изменения численности популяции во времени составляет предмет *популяционной динамики*. При изучении динамики численности особей в популяциях, а также процессов, определяющих ее изменение, можно установить следующее выражение:

$$N_t = N_0 + B - D + C - E, \quad (12.1)$$

где N_t – число особей в популяции в момент времени t ;

N_0 – число особей, находившихся на этой территории прежде;

B – число особей, родившихся за время t ;

D – число особей, погибших за то же время;

C и E – число эмигрантов и иммигрантов за то же время.

Эти процессы в существовании любых популяций определяют основную задачу биоэкологии: описать, истолковать и понять закономерности распространения и динамику численности живых существ.

Зная динамические показатели популяции, можно судить о многих ее особенностях, условиях развития и, косвенно, о состоянии экосистемы в целом. Основные из них: *рождаемость, смертность, скорость роста популяции*.

Скорость рождаемости, смертности, скорость роста популяции могут быть *средними и мгновенными*.

Рождаемость (скорость рождения) – число новых особей появившихся в популяции за единицу времени в результате размножения.

Различают *максимальную, фактическую, абсолютную и удельную рождаемость*.

Максимальная рождаемость – реализация возможности рождения при отсутствии лимитирующих факторов среды.

Фактическая рождаемость – реальная реализация возможности рождения.

Абсолютная рождаемость (скорость рождаемости), выражают отношением: dN_n/dt , где dN_n – число особей, родившихся за некоторый промежуток времени dt .

Удельная рождаемость (b) – отношение скорости рождаемости к исходной численности(N): $b = dN_n/(Ndt)$.

Смертность (скорость смертности) – число особей, погибших в популяции за единицу времени (от хищников, болезней, старости и других причин).

Различают *минимальную, фактическую, абсолютную и удельную смертность*.

Минимальная смертность – минимально возможная величина смертности.

Фактическая смертность – реальная величина смертности.

Абсолютная смертность (скорость смертности) выражают отношением: dN_m/dt , где dN_m – число особей, погибших за промежуток времени dt .

Удельная смертность – (d) – отношение скорости смертности к исходной численности(N): $d = dN_m/(Ndt)$.

Скорость роста популяции – изменение численности популяции в единицу времени. Она зависит от показателей рождаемости, смертности и миграции (вселения – иммиграции и выселения – эмиграции) и может быть положительной, отрицательной и нулевой. Общая скорость роста популяции в отсутствие лимитирующего влияния среды зависит от возрастного состава и вклада в репродукцию различных возрастных групп.

Различают *абсолютную и удельную скорости роста*.

Абсолютная (общая) скорость роста выражается отношением: dN/dt , где dN – изменение численности популяции за промежуток времени dt .

12.2 Биотический потенциал популяции

Показатель наследственно обусловленной способности популяции к росту и называется биотическим потенциалом (репродуктивным потенциалом) вида:

$$r = \frac{dN}{Ndt} = \frac{d \ln(N)}{dt} \text{ или } \frac{dN}{dt} = rN \quad (12.2)$$

Величина биотического потенциала различна у разных видов. Например, самка косули способна производить на свет 10 – 15 козлят, самка медоносной пчелы – 50 тыс. яиц, рыба-луна – до 3 млрд. икринок.

В природе в связи с действием лимитирующих факторов биотический потенциал популяции никогда не реализуется полностью. Его величина обычно складывается как разность между рождаемостью и смертностью в популяции:

$$r = b - d, \quad (12.3)$$

где b – число родившихся;

d – число погибших особей в популяции за один и тот же период времени.

Когда $b = d$, $r = 0$ и популяция находится в стационарном состоянии. Когда $b > d$, $r > 0$, численность популяции увеличивается. Когда $b < d$, $r < 0$, численность популяции сокращается. Формула $d = b - r$ позволяет определить смертность, которую трудно измерить непосредственно, а определить r достаточно просто непосредственными наблюдениями.

Пример. Популяция состоит из 800 особей. В среднем за год рождается 150 особей, а умирает 50. Определить скорость естественного увеличения популяции (r).

Решение: $r = 150/800 - 50/800 = 0,125$ /год.

12.3 Продолжительность жизни и выживаемость

Длительность существования особи называется продолжительностью жизни. Различают физиологическую, максимальную и среднюю продолжительность жизни.

Физиологическая продолжительность (ФПЖ) – это продолжительность жизни, без влияния на особей лимитирующих факторов. Она возможна только теоретически.

Максимальная продолжительность жизни (МПЖ) – это продолжительность жизни в реальных условиях среды. Она варьирует от нескольких минут у бактерий до нескольких тысячелетий у древесных растений (секвойя).

Средняя продолжительность жизни (СПЖ) – это среднее арифметическое продолжительности жизни всех особей.

Выживаемость – абсолютное число особей (или процент от исходного числа особей), сохранившихся в популяции за определенный промежуток времени:

$$Z = \frac{n}{N} 100 \quad \% , \quad (12.4)$$

где Z – выживаемость, %;

n – число выживших;

N – исходная численность популяции.

Выживаемость зависит от ряда причин: возрастного и полового состав популяции, действия тех или иных факторов среды и др.

12.4 Демографические таблицы популяций, кривые выживания

Один из методов статистического анализа популяций – построение демографических таблиц (таблиц выживания), в которых приводится возрастная структура по продолжительности жизни особей. Таблицы выживания бывают динамические и статические.

Динамические таблицы строятся по данным прямых наблюдений за жизнью когорты с помощью регистрации возраста наступления смерти всех членов данной когорты. Такие таблицы требуют длительного наблюдения, измеряемого месяцами или годами. Практически невозможно такую таблицу сделать для долго живущих животных или для человека – для этого понадобится более 100 лет.

Статические таблицы выживания составляются по данным наблюдений за относительно коротким промежутком времени за смертностью в отдельных возрастных группах. Зная численность этих групп можно рассчитать смертность, специфическую для каждого возраста.

На основании анализа демографических таблиц можно строить *кривые выживаемости* особей в популяции, которые устанавливают зависимость количества выживших особей от их возраста.



Рисунок 12.1 – Кривые выживаемости

Выделяют три типа кривых выживаемости (рисунок 12.1):

– *сильновыпуклые кривые* – соответствуют ситуации, когда смертность ничтожно мала в молодом и среднем возрасте, но быстро увеличивается в старом возрасте, и все особи погибают за короткий срок. Пирл назвал эту кривую «кривой дрозофилы». Такой тип кривых выживания характерен для многих видов крупных животных, в том числе и для человека;

– *кривые диагонального типа* – относятся к тем видам, у которых смертность во всех возрастных группах одинаковая. Такова динамика многих рыб, пресмыкающихся, птиц, многолетних травянистых растений.

– *сильновогнутые кривые* – характерны для видов, смертность которых чрезвычайно высока на ранних стадиях развития, а для выживших особей становится низкой. Эту кривую Пирл назвал «типом устрицы». Ей соответствует возрастная динамика большинства видов деревьев. Например, семена дуба при проращении погибают в больших количествах, а гибель укоренившихся растений остается чрезвычайно низкой.

12.5 Оценка скорости роста популяции

Чтобы рассчитать скорость роста популяции, необходимо знать величину так называемой *чистой скорости воспроизводства (R_0)* и *среднее время генерации*.

Чистая скорость воспроизводства показывает, во сколько раз увеличится численность популяции за одно поколение (или ожидаемое число потомков женского рода, которых родит данная новорожденная самка за всю свою жизнь). В таблице 12.1 *ожидаемое число потомков* рассчитывается как произведение выживаемости на плодовитость. Сумма ожидаемого числа потомков и есть чистая скорость

размножения R_0 . В рассматриваемом примере $R_0 = 3,1$. Это означает, что к моменту гибели самки в популяции произведут в среднем 3,1 потомка женского пола.

Таблица 12.1 – Расчет чистой скорости размножения и среднего времени генерации

Возраст, t	Выживаемость $P(t)$	Плодовитость $N(t)$	Ожидаемое число потомков $P(t) \cdot N(t)$	Произведение возраста на ожидаемое число потомков $t \cdot P(t) \cdot N(t)$
0	1,00	0,0	0,0	0,0
1	0,50	1,0	0,5	0,5
2	0,40	3,0	1,2	2,4
3	0,30	4,0	1,2	2,4
4	0,10	2,0	0,2	0,8
5	0,00	0,0	0,0	0,0
Чистая скорость размножения R_0			3,1	-
Общий взвешенный возраст			-	6,1

Среднее время генерации – время жизни популяции (или средний возраст, в котором самки производят потомство). Чем раньше появятся детеныши, тем раньше они, в свою очередь произведут потомство, тем выше будет идти рост популяции.

Среднее время генерации T вычисляют, находя средний возраст, в котором самка рождает детенышей. Для этого необходимо общий взвешенный возраст разделить на чистую скорость размножения. В рассматриваемом примере имеем:

$T = 6,1/3,1 = 1,93$. Следовательно, популяция будет увеличиваться в 3,1 раза каждый 1,93 года.

Скорость роста популяции оценивается по формуле:

$$r \approx \frac{\ln(R_0)}{T}. \quad (12.5)$$

В нашем примере: $r = \ln 3,1/1,93 = 0,5862$.

Размерность для r – «единица времени»⁻¹.

Легко найти r , зная время удвоения популяции. В этом случае: $r = \ln 2 / T$.

Полезно помнить формулы, связывающие T , R_0 и r :

$$R_0 = e^{rT}, \text{ отсюда } T = \frac{\ln(R_0)}{r}.$$

Для оценки r на практике очень часто приходится пользоваться формулой:

$$r = \frac{\ln N_{t_2} - \ln N_{t_1}}{t_2 - t_1}, \quad (12.6)$$

где N_{t_2} – численность популяции в момент t_2 ,

N_{t_1} – численность в момент t_1 .

Например, если за 2 часа численность популяции изменилась с $N_{t_1} = 10$ до $N_{t_2} = 100$, то

$$r = \frac{\ln 100 - \ln 10}{2} = \frac{4,6 - 2,3}{2} = 1,15 \text{ час}^{-1}.$$

12.6 Модель экспоненциального роста популяции Мальтуса

Принцип экспоненциального роста численности популяции (Свирижев, Логофет, 1978) – один из основных экологических принципов динамики популяций. Его используют в экологии, прежде всего, для того, чтобы количественно охарактеризовать потенциальные возможности популяции к росту и выявить факторы, ограничивающие рост изучаемой популяции.

Модель экспоненциального роста предложена Мальтусом в 1798 г. в его классическом труде «О законе роста народонаселения». Томас Роберт Мальтус (1766–1834) – из-

вестный английский демограф и экономист, обратил внимание на тот факт, что численность популяции растет по экспоненте (в геометрической прогрессии), в то время как производство питания растет со временем линейно (в арифметической прогрессии). Из этого он сделал справедливый вывод, что рано или поздно экспонента обязательно «обгонит» линейную функцию, и наступит голод.

Модель Мальтуса описывает ситуацию, когда среда не оказывает ограничивающего влияния на плотность, и специфическая скорость роста популяции (r) для данных микроклиматических условий постоянна и максимальна. Хотя в общем случае биотический потенциал зависит от времени t , численности или плотности популяции N .

Это одна из первых моделей, в которой динамика численности или плотности популяции $N(t)$ описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (12.7)$$

где r – биотический (репродуктивный) потенциал или так называемый мальтузианский параметр роста.

Решим дифференциальное уравнение (12.7), разделяя переменные:

$$\int_{N_0}^{N_t} \frac{dN}{N} = \int_{t_0}^t r dt; \quad \ln \frac{N_t}{N_0} = r(t - t_0); \quad \frac{N_t}{N_0} = e^{r(t-t_0)}; \quad N_t = N_0 \cdot e^{r(t-t_0)},$$

где N_0 – численность в нулевое время;
 N_t – численность в момент времени t ;
 e – основание натуральных логарифмов;
 r – репродуктивный потенциал популяции.

Графически модель представляет собой неограниченную кривую (Рисунок 12.2, а). Зависимость скорости роста популяции от ее численности представляет собой линейную функцию (Рисунок 12.2, б). Между величинами r (скорость роста популяции) и N очень часто наблюдается статистически достоверная обратная зависимость (интересно, что единственная популяция, у которой отмечена статистически достоверная положительная зависимость этих параметров – это популяция человека!).

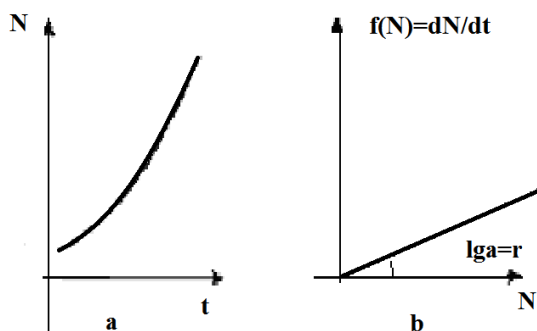


Рисунок 12.2 – Экспоненциальный рост. Зависимость численности от времени (а) и скорости роста от численности (б)

Модель Мальтуса послужила одним из отправных пунктов для Ч. Дарвина при создании теории эволюции видов. В фитоценологии эта модель используется, например, при описании скорости кругооборота числа видов в сообществе в ходе сукцессии, процесса накопления фитомассы древостоев (правда, в этом случае введена эмпирическая отрицательная зависимость r от t ; Лиена, 1970). Большое практическое применение эта модель имеет в биотехнологии (например, для установления оптимальных режимов выращивания различных микроорганизмов).

Примером экспоненциального роста может служить размножение видов, завезенных в места, где имеется много пищи и отсутствуют конкурирующие виды и хищники (кролики в Австралии).

12.7 Пример расчета мальтузианского параметра по экспериментальным данным

С целью изучения динамики эвтрификации водоемов, загрязненных минеральными удобрениями, в пяти прудах моделировали размножение сине-зеленых водорослей в нелимитированных условиях. Полученные данные об изменении численности популяции водорослей в каждом пруду представлены в таблице 12.2.

Таблица 12.2 – Изменение численности популяции водорослей в 5-ти прудах

Время, час t	Титр клеток водорослей, кл./мл				
	Пруд 1 x_1	Пруд 2 x_2	Пруд 3 x_3	Пруд 4х 4	Пруд 5 x_5
0	135	171	60	252	106
24	245	270	113	371	201
48	374	491	186	710	275
72	545	693	269	1088	451
96	839	1163	447	1772	689
120	1544	1788	796	2534	1304
144	2392	3460	1024	4842	2161
168	3433	4704	2131	6478	3386
192	6586	8526	3107	10429	5326
216	10129	13198	4351	19953	8928

На основе этих данных необходимо определить для популяции водорослей в каждом пруду значение мальтузианского параметра r (удельной скорости размножения) и период удвоения T . Найти также соответствующие медианы по полученным выборкам r и T .

Решение. Для обработки экспериментальных данных используем логарифмическую форму этого уравнения:

$$\ln \frac{x_t}{x_0} = rt .$$

Для этого каждый элемент столбцов с данными по численности сине-зеленых водорослей необходимо разделить на соответствующий начальный элемент и взять натуральный логарифм этого отношения (таблица 12.3).

Таблица 12.3 – Промежуточные расчеты для мальтузианского параметра

Время, час	$\ln (x_{1t}/x_{10})$	$\ln (x_{2t}/x_{20})$	$\ln (x_{3t}/x_{30})$	$\ln (x_{4t}/x_{40})$	$\ln (x_{5t}/x_{50})$
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24,00	0,60	0,46	0,63	0,39	0,64
48,00	1,02	1,06	1,13	1,04	0,95
72,00	1,40	1,40	1,50	1,46	1,45
96,00	1,83	1,92	2,01	1,95	1,87
120,00	2,44	2,35	2,59	2,31	2,51
144,00	2,87	3,01	2,84	2,96	3,01
168,00	3,24	3,31	3,57	3,25	3,46
192,00	3,89	3,91	3,95	3,72	3,92
216,00	4,32	4,35	4,28	4,37	4,43

Затем для каждого пруда на основе таблицы 12.3 следует построить график, где по оси x откладывается время, а по оси y – соответствующее значение $\ln(x_t/x_0)$, как это показано на рисунке 12.3. Экспериментальные данные должны сгруппироваться около прямой линии, тангенс угла которой и есть искомое значение мальтузианского параметра r .

Значение периода удвоения T находим по формуле:

$$T = \frac{\ln 2}{r} .$$

Результаты обработки данных в этой задаче представлены в таблице 12.4.

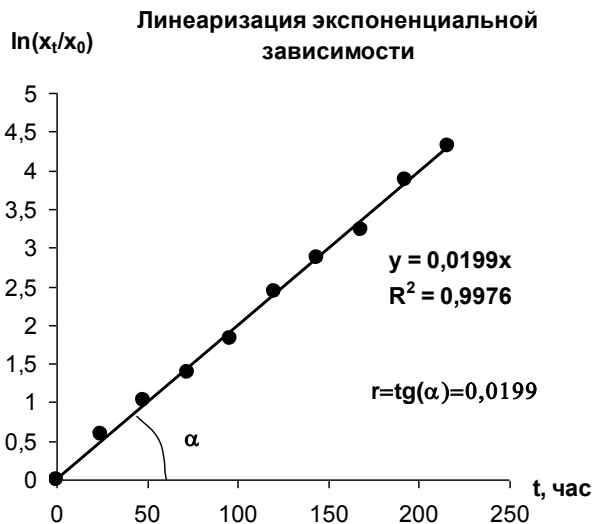


Рисунок 12.3 – Линеаризация экспоненциальной зависимости.

Таблица 12.4 – Результаты расчета мальтузианского параметра сине-зеленых водорослей

	Пруд 1	Пруд 2	Пруд 3	Пруд 4	Пруд 5
r , час ⁻¹	0,0197	0,0201	0,0198	0,0198	0,0204
T , час	35,19	34,48	35	35	33,98

Медиану определяем обычным способом как срединное значение в выборке: $Me(r) = 0,0198 \text{ час}^{-1}$, $Me(T) = 35 \text{ час}$.

Более простой способ непосредственной оценки r – аппроксимация экспериментальных данных экспоненциальной функцией из стандартного пакета MS EXCEL (см. главу 7)

12.8 Модель логистического роста

Модель логистического роста (Ферхюльста – Пирла) лежит в основе формализации закона ограниченного роста

Дарвина: окружающая среда действует как лимитирующий фактор на биоценотический потенциал популяции.

Воздействие экологических факторов на скорость роста популяции может довести численность популяции до стабильной ($r = 0$) либо ее уменьшить. Экспоненциальный рост замедляется или останавливается полностью, и J -образная кривая как бы превращается в S – образную (логистическую) кривую (Рисунок 12.4).

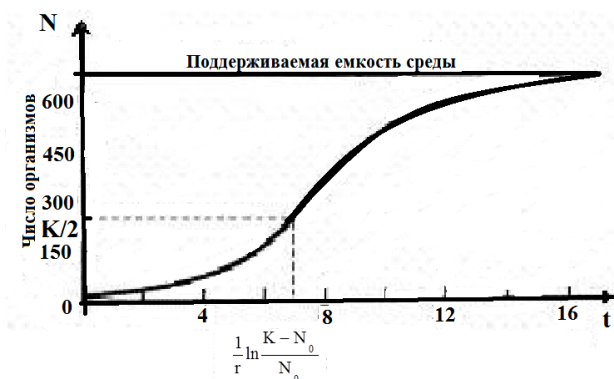


Рисунок 12.4 – Ограниченный рост популяции

При начальной численности N_0 , близкой к нулю, скорость роста имеет максимальное значение r_{\max} , а при предельной численности $r = 0$ (Рисунок 12.4). Внутривидовая конкуренция, влияя на рождаемость и плотность, регулирует популяцию, поддерживая ее плотность на стабильном уровне, при котором рождаемость уравновешена смертностью. Такую плотность называют «предельной нагрузкой на среду», или «емкостью среды» и обозначают K .

Емкость среды – это та плотность популяции, которая в данных условиях среды может поддерживаться на постоянном уровне. К факторам, ограничивающим рост популяции можно отнести внутривидовую конкуренцию за ре-

курс (пищу, свет) или же накопление отбросов жизнедеятельности.

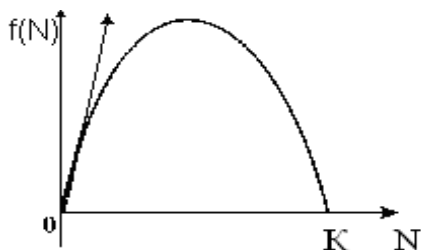


Рисунок 12.5 – Логистический рост. Зависимость скорости роста от численности

Кривая $N(t)$ имеет точку перегиба с координатами

$$\left(\frac{1}{r} \ln \left(\frac{K - N_0}{N_0} \right); \frac{K}{2} \right), \quad (12.8)$$

Ордината точки перегиба представляет собой половину максимальной численности, а абсцисса зависит как от емкости популяции K , так и от константы собственной скорости роста r : чем выше генетические возможности популяции, тем скорее наступает перегиб на кривой численности. Точка перегиба представляет собой координату, где наблюдается наибольшая скорость популяции (см. рисунок 12.5).

Логистическое уравнения можно записать несколькими способами. В классической форме оно выглядит следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2, \quad (12.9)$$

где ε – биотический потенциал популяции;
 γ – коэффициент внутривидовой конкуренции;
 x – численность или плотность популяции.

Удобно еще пользоваться такой формой записи:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{K - N}{K} \right) = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (12.9)$$

Модель (12.9) имеет простое аналитическое решение, и плотность популяции в зависимости от времени можно вычислять непосредственно по следующей формуле:

$$N_t = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0} \right) e^{-rt}}, \quad (12.10)$$

График функции N_t представляет собой S-образную кривую (Рисунок 12.4). Для практических целей полезно помнить формулы, связывающие коэффициенты модели:

$$K = \frac{r}{\gamma} \quad \text{или} \quad K = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad (12.11)$$

где K – емкость среды;

r (ε) – биотический потенциал;

γ – коэффициент внутривидовой конкуренции.

Несмотря на схематичность положенных в ее основу представлений, логистическая кривая оказалась очень хорошим приближением для описания кривых роста многих популяций. Например, в демографии для прогноза численности населения предпринимались попытки подобрать логистические кривые для данных о численности населения различных стран. Благодаря применению математики обсуждение этих проблем становится более конкретным, но к оценке результатов, получаемых с их помощью, необходимо подходить с большой осторожностью. Модель может быть приближенно справедливой для периода, по которому имеются данные, но это не гарантирует ее справедливости в бу-

дущем. Окружающая среда и социальные условия могут измениться, и, следовательно, изменятся скорости размножения и гибели и коэффициент замедления роста.

Оценка мальтузианского параметра роста в моделях 12.7 и 12.9 приводит к различным результатам, что надо помнить при количественном анализе закономерностей численности популяций. Так в главе 7 приводятся результаты оценки r для роста водорослей в водной среде (Рисунок 7.8) по логистической модели в помощью программы нелинейной регрессии в компьютерной среде S-Plot. Он, как помним, получился равным $0,03 \text{ час}^{-1}$. Тогда как для той же последовательности экспериментальных данных для начальной (экспоненциальной) фазы роста оценка по модели Мальтуса дала величину $0,02 \text{ час}^{-1}$, то есть в 1,5 раза меньшую (таблица 12.4). Поэтому при моделировании роста лучше непосредственно определять этот важный параметр с помощью аналитического решения уравнения Ферхюльста-Пирла (12.11), как это было показано в главе 7.

12.9 Дискретный аналог дифференциальных уравнений роста популяции

Один из вариантов моделирования динамики популяций основан на применении разностных уравнений, которые соответствуют способу получения исходных данных в дискретные интервалы времени. Разностные уравнения очень удобны для реализации моделей на компьютере. Выбор дифференциальных уравнений или разностных для моделирования динамики популяций зависит от того, что интересует в данной задаче: характер изменения некоторой величины, или скорость ее изменения. В последнем случае используют дифференциальные уравнения.

Рассмотрим простейшую из моделей для вида с дискретными периодами размножения, в которой численность

популяции в момент времени t равна N_t и изменяется во времени пропорционально величине основной чистой скорости воспроизводства R . Данная модель может быть выражена уравнением:

$$N_{t+1} = RN_t, \quad (12.12)$$

решение которого имеет вид:

$$N_t = N_0 R^t, \quad (12.13)$$

Коэффициент воспроизводства связан с биотическим потенциалом следующей формулой $R = e^r$. Поэтому можно формулу (12.12) записать так:

$$N_{t+1} = e^r N_t, \quad (12.12)$$

При росте численности популяции R должна быть больше 1, а r – больше 0.

Для уравнения логистического роста разностное уравнение имеет вид:

$$N_{t+1} = N_t \cdot e^{r(1 - N_t / K)}, \quad (12.13)$$

где r – константа собственной скорости роста,
 K – емкость экологической ниши популяции.

Поведение во времени переменной N_{t+1} в зависимости от величины параметра r может носить характер не только монотонного роста, как было для непрерывной модели, но также быть колебательным или квазистохастическим, как это изображено на рисунке 12.6.

Для небольших r численность популяции стремится к устойчивому равновесию. При величине параметра $r > 2,6$ начинается хаотизация решений через двухточечный предельный цикл. При достаточно больших r динамика численности демонстрирует хаотические всплески. Уравнения та-

кого типа описывают динамику численности сезонно размножающихся насекомых с неперекрывающимися поколениями.

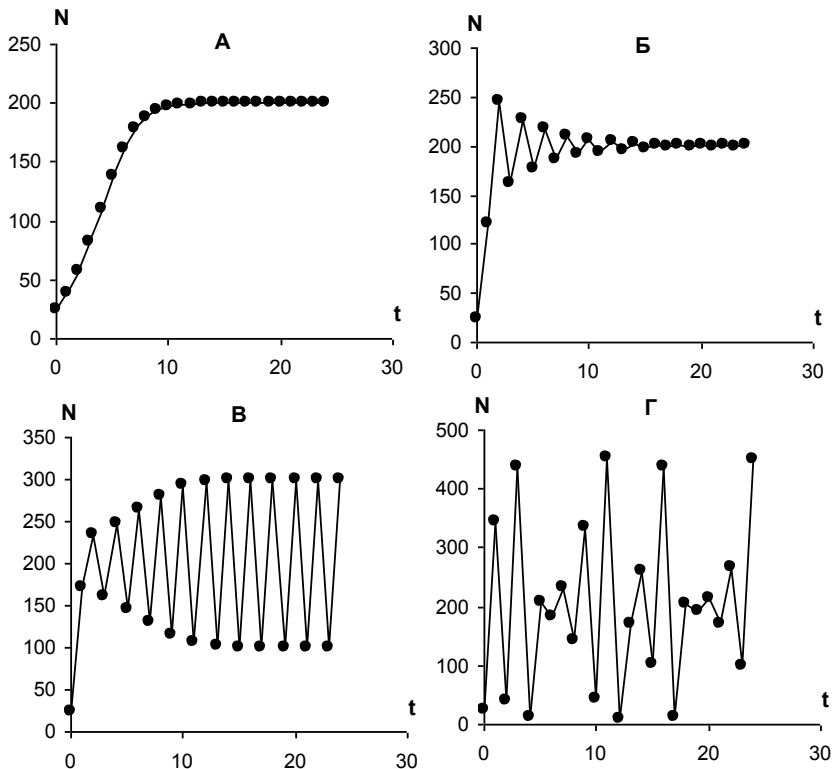


Рисунок 12.6 – Монотонное установление стационарной численности популяции при $r = 0,5$ (А); затухающие колебания при установлении стационарной численности популяции $r = 1,8$ (Б); автоколебания (устойчивый предельный цикл) численности популяции при $r = 2,2$ (В); хаотический режим (случайные изменения) численности популяции (Г) $r = 3$. Параметр емкости среды $K = 200$.

12.10 Модели взаимодействия в популяционной динамике

Явление экологического разобщения близкородственных видов получило название принципа конкурентного исключения Гаузе, в честь русского ученого. Этот принцип был сформулирован и экспериментально доказан на примере конкуренции двух видов инфузорий (*Paramecium aurelia* и *P. caudatum*) в 1934 г. Согласно этому принципу два вида не могут существовать в одной и той же экологической нише, если их экологические потребности совпадают.

Формализация этого закона может быть выражена в рамках модели А. Лотки и В. Вольтерра в общем виде следующим образом.

Например, при наличии конкуренции скорость роста каждой популяции равна нелIMITИРУЕМОЙ скорости за вычетом величины, характеризующей влияние собственного перенаселения, которое возрастает с увеличением численности популяции, и величины, характеризующей вредное влияние другого вида, которое с увеличением численности обоих видов N_1 и N_2 также возрастает:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 - a_{12} N_2 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 - a_{21} N_1 N_2, \end{cases} \quad (12.14)$$

Результат конкуренции определяется значениями коэффициента конкуренции, который выражает лимитирующее воздействие одного вида на рост другого, и предельных численностей популяций. Если величина a_{ij} для обоих видов незначительна, то подавляющее влияние со стороны другого вида будет иметь меньшее значение, чем внутривидовая конкуренция. Если значение a_{ij} велико, вид, оказывающий

наибольшее влияние, может уничтожить своего конкурента или вынудит его покинуть данную территорию.

Рассмотрим традиционные уравнения для описания взаимодействия хищника и жертвы.

Жертва увеличивает число своих особей в соответствии с внутренней скоростью роста (r), умноженной на плотность жертвы (N_1), и теряет число особей со скоростью, которая пропорциональна числу встреч особей хищника и жертвы, то есть, равна произведению плотности жертвы на плотность хищника (N_2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 - PN_1N_2 \quad \text{жертва} \\ \frac{dN_2}{dt} = aPN_1N_2 - dN_2 \quad \text{хищник} \end{array} \right. \quad (12.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 - PN_1N_2 \quad \text{жертва} \\ \frac{dN_2}{dt} = aPN_1N_2 - dN_2 \quad \text{хищник} \end{array} \right. \quad (12.16)$$

Хищник увеличивает число особей со скоростью, пропорциональной тому же произведению плотностей, и теряет особи соответственно смертности (d), умноженной на плотность хищника. Здесь P – коэффициент хищничества, характеризующий отношение числа встреч к фактическому числу убитых жертв (вероятность того, что при встрече с хищником жертва будет съедена), a – коэффициент, относящий число рождений хищников к числу съеденных ими жертв (некая величина, указывающая на «доход», полученный хищником при поедании жертвы).

В случае такого взаимодействия численности видов совершают колебания, причем колебания численности хищника в модели запаздывают по отношению к колебаниям жертвы (рисунок 12.7). Графики получены посредством численного решения модели (12.15–12.16) в среде Matlab 6 (см. главу 13).

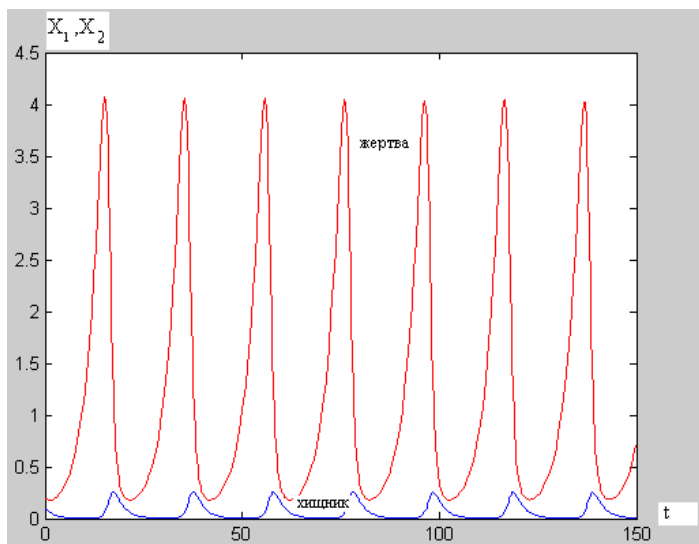


Рисунок 12.7 – Модель Лотки-Вольтерра "хищник-жертва".
Безразмерные параметры: $r = 0,3$, $P = 5$, $a = 0,08$, $d = 0,5$.

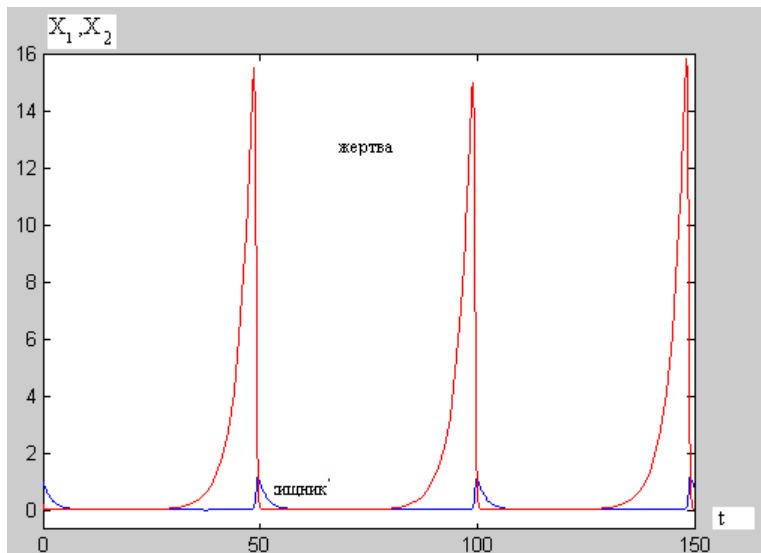


Рисунок 12.8 – Новый колебательный режим системы "хищник-жертва"
при изменении начальных условий (комментарии в тексте).

Несмотря на, казалось бы, хорошие имитационные качества, а именно, воспроизводство реально существующих в природе колебательных режимов с запаздыванием по фазе для системы «хищник-жертва» от подобных вариантов классической модели Лотки-Вольтерра (12.14–12.16) в математической экологии пришлось давно отказаться и теперь они представляют интерес лишь для учебных целей. Дело в том, что колебательное поведение здесь описывается при так называемом нейтральном состоянии равновесия (стационарное состояние типа «центр»), поэтому они очень чувствительны к изменениям начальных условий (исходной численности хищника и жертвы). Так в нашем примере (рисунок 12.7) исходные численности для хищника и жертвы составили 0,1 и 0,2 условных единиц. Давайте изменим начальную численность хищника с 0,1 до 1. При тех же основных параметрах модели ($r = 0,3$, $P = 5$, $a = 0,08$, $d = 0,5$) мы получим уже качественно новую картину – изменятся и абсолютные величины численности животных и период колебаний. Априори понятно, что в природе такого быть не может, то есть модель не адекватна. Для получения реальных автоколебательных режимов – самоорганизации системы за пределами равновесия (стационарного состояния) в виде так называемого режима «предельный цикл» требуется ввести как минимум еще один трофический уровень (добавить еще одну популяцию с численностью N_3 , вовлеченную во взаимодействия «хищник-жертва»), или серьезно усложнить трофическую функцию. Исходно у Вольтера она имеет вид произведения $N_1 N_2$. Пример автоколебательного режима двухуровневой системы «субстрат-потребитель» для описания потенциальных режимов динамики микробоценоза и органического вещества почвы мы рассмотрим в следующей главе.

12.11 Практическое применение моделей взаимодействия видов в экологии

Рассмотрим модель взаимодействия двух видов, предложенную А.Д. Базыкиным. Эта модель является теоретическим обоснованием биологического метода борьбы с нежелательным видом Кюрасао. Сущность этого метода заключается в том, что в популяцию, которую хотят подавить (например, в популяцию сельскохозяйственных вредителей), регулярно вводят стерильных транс-самцов. Не участвуя в процессе естественного воспроизводства, эти самцы, будучи вполне жизнеспособными, наряду с нормальными, участвуют во внутривидовой борьбе, в том числе за самок, снижая тем самым скорость естественного увеличения популяции.

Пусть $x(t)$ – плотность нормальных самцов на поле.

n – постоянная скорость, с которой стерильные самцы вводятся в популяцию (то есть число стерильных особей, вводимых в единицу времени на единицу площади поля);

$y(t)$ – плотность стерильных самцов.

Необходимо определить скорость n для постепенного снижения до нуля численности нормальных самцов, то есть достаточную, чтобы $x(t) \rightarrow 0$.

Можно составить уравнения изменения численности нормальных и стерильных самцов,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - \delta x^2 - \delta xy, \\ \frac{dy}{dt} = n - \delta y^2 - \delta xy \end{cases}, \quad (12.17)$$

где $r = b - d$ – это постоянная скорость естественного увеличения нормальных самцов;

δx^2 – снижение скорости роста численности из-за конкуренции между нормальными самцами;

δy^2 – снижение скорости роста численности из-за конкуренции между стерильными самцами;

δxy – снижение скорости роста численности из-за конкуренции между нормальными и стерильными самцами.

Решение этой системы уравнений показало, что $x(t) \rightarrow 0$, если $n \geq r^2/\delta$.

Задача. Сколько стерильных самцов необходимо ввести в популяцию нормальных насекомых за единицу времени на единицу площади, чтобы $x(t) \rightarrow 0$ если $r = 1 \text{ час}^{-1}$, а $\delta = 0,01 \text{ час}^{-1} \text{ особь}^{-1} \text{ площадь}$? Для решения достаточно подставить эти значения в предыдущую формулу. Получим: $11^2/0,01 = 12100$ особей/площадь.

Рассмотрим еще одну модель, связанную с экологическим нормированием и управлением для системы «хищник-жертва» с потреблением биоресурса человеком, предложенную А.В. Смагиным:

$$\begin{cases} \frac{db}{dt} = rb(1-b) - kb - nbx \\ \frac{dx}{dt} = nbx - \gamma x \end{cases}, \quad (12.18)$$

где b, x – нормированные емкостью среды безразмерные переменные биомассы жертвы (биоресурса) и хищника: $b = B/K, x = X/K$. Как видно биоресурс размножается согласно логистическому закону с мальтузианским параметром роста r , вылавливается человеком с квотой k , пропорционально биомассе (kb) и потребляется хищником с удельной скоростью n . Хищник в свою очередь прирастает за счет потребления биоресурса (nbx или в более реалистичных случаях $mbx, m < n$) и отмирает пропорционально своей биомассе с удельной скоростью γ . Задача нормирования сводится к определению квоты отлова (k), которая позволяет сохранить обе популяции и биоресурса и хищника.

Анализ модели указывает на возможность *триггерного режима* функционирования подобной нелинейной системы

(от слова «триггер» – переключатель) [Смагин, 99]. Так у системы имеются два стационарных состояния – с нулевыми ($b, \bar{x} = 0$) и ненулевыми биомассами:

$$\bar{b} = \frac{\gamma}{n}; \quad \bar{x} = \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) - \frac{k}{n}. \quad (12.19)$$

В зависимости от параметров системы, эти состояния могут быть устойчивыми или нет. Если устойчивы нулевые состояния – система гибнет из-за неумеренного отлова. Если не нулевые – остается функционировать. Также возможен промежуточный вариант – гибель (вырождение) популяции хищника, конкурирующего с человеком за биоресурс, при сохранении самого биоресурса (жертвы). Математическое условие гибели всей системы возникает при превышении квоты отлова величины мальтузианского параметра роста жертвы, что очевидно и с физической точки зрения – если скорость отлова превышает скорость воспроизводства популяции она обречена на вымирание:

$$k > r \quad (12.20)$$

Вместе с тем возможен еще один случай – вырождение популяции хищника на фоне положительной биомассы жертвы со стационарным состоянием $\bar{b} = 1 - k/\gamma$. Это произойдет при условии:

$$n \left(1 - \frac{k}{r}\right) < \gamma \quad (12.21)$$

Так, например, для рыбного ресурса при мальтузианском параметре роста $r = 1 \text{ год}^{-1}$, параметре поедания хищником $n = 1 \text{ год}^{-1}$, и смертности хищника $\gamma = 0,6 \text{ год}^{-1}$, отлов с квотой $k = 0,6 \text{ год}^{-1}$ приведет только к гибели хищника. Гибель обеих популяций возникнет лишь при $k > 1 \text{ год}^{-1}$. Со-

существование всех популяций (эконорма) возможно лишь при отлове с квотой k не более $0,4 \text{ год}^{-1}$. Численные эксперименты с моделью (12.18) в компьютерной среде Matlab 6 подтверждают эти выводы (рисунок 12.9).

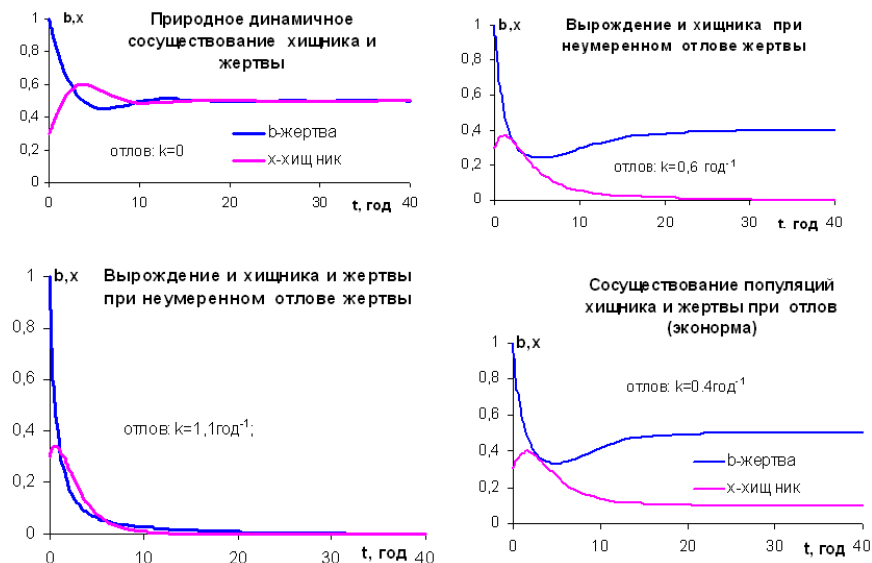


Рисунок 12.9 – Численное моделирование поведения системы "хищник-жертва" с антропогенным отловом биоресурса.

При моделировании использовались безразмерные величины b , x . Для нахождения точных значений биомасс их необходимо умножить на параметр емкости среды (K) для жертвы (популяции рыб). Например, пусть K для карпов в прудовом хозяйстве составляет 300 кг/га , тогда при ежегодном отлове 40 % ($k = 0,4 \text{ год}^{-1}$) популяция стабилизируется на уровне $b = 0,5$ или $B = 300 \cdot 0,5 = 150 \text{ кг/га}$, а популяция хищников (щуки) на уровне $x = 0,1$ или $X = 300 \cdot 0,1 = 30 \text{ кг/га}$.

Таким образом, довольно простые нелинейные модели типа (12.18) с триггерным режимом функционирования позволяют вполне адекватно воспроизводить реальные эколо-

гические ситуации вырождения экосистем (популяций) при тех или иных неблагоприятных факторах воздействия, включая антропогенные.

Большинство современных экологических задач динамического моделирования сводятся к дифференциальным уравнениям (обыкновенным или в частных производных для распределенных систем), которые не имеют аналитических решений. Поэтому в следующей главе мы познакомимся с возможностями среды компьютерного моделирования Matlab для численного решения подобных уравнений и их систем.

ГЛАВА 13. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СРЕДЕ MATLAB

13.1 Краткая вводная информация

Значительная часть задач системной (математической) экологии представлена моделями динамических систем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных. К этому классу задач относятся имитационные модели роста, продуктивности, устойчивости, сукцессионной динамики экосистем и их компонентов, модели транспорта влаги и растворенных веществ, газообмена, потоков тепла и множества других процессов структурно-функциональной организации динамических биокосных систем в потоках веществ и энергии [Смагин, 89, 99]. Большинство таких задач не имеет явных аналитических решений либо из-за нелинейности моделируемых систем, либо в силу их распределенности (неоднородности по пространству) и сложной пространственной организации, поэтому приходится прибегать к численным методам решения. И если еще 20–30 лет тому назад подобные методы были недоступны для большинства неспециалистов в области численного моделирования, то к настоящему времени с развитием компьютерной техники и соответствующих программных продуктов, они стали активно внедряться в научную деятельность и образовательный процесс в сфере экологии, геоэкологии, биологии, биофизики, биогеофизики, биогеохимии, почвоведения и множества иных фундаментальных дисциплин, изучающих биологические и биокосные системы. Одним из наиболее эффективных современных средств компьютерного моделирования сложных динамических систем является среда Matlab 6 и 7 версий, внедренная в образовательный процесс на факультете поч-

воведения МГУ им М.В. Ломоносова и ЮГУ М.В. Глаголевым и А.В. Смагиным [Глаголев, Смагин, 2005]. Рассмотрим ее возможности на конкретных экологических примерах.

13.2 Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений в компьютерной среде Matlab.

Любая система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) может быть представлена в явной форме Коши как:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (13.1)$$

где x – вектор переменных состояния;

t – независимая переменная (обычно в задачах математической экологии, биогеофизики, микробиологии, и других естественнонаучных дисциплин независимой переменной является время);

f – вектор-функция от переменных x, t .

В рассматриваемой среде Matlab для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (13.1) используются функции: `ode23` и `ode45`:

$$\begin{aligned} [t, X] &= \text{ode23}(\text{'<имя функции>'}, t_0, t_f, x_0) \\ [t, X] &= \text{ode45}(\text{'<имя функции>'}, t_0, t_f, x_0) \end{aligned} \quad (13.2)$$

Они предназначены для численного интегрирования систем ОДУ (13.1) методами Рунге-Кутты 2–3-го (`ode23`) и 4–5-го (`ode45`) порядков, соответственно.

Входными параметрами функций являются:

'<имя функции>' – задаваемое пользователем имя командного m-файла, в котором вычисляются правые части системы ОДУ

t_0 – начальное значение независимой переменной (времени);

t_f – финальное (конечное) значение независимой переменной (времени), до которого производятся расчеты;

x_0 – вектор начальных условий;

Выходные параметры:

t – текущее значение переменной времени,

x – двумерный массив, где каждый столбец соответствует одной переменной.

Пример. *Динамические режимы функционирования системы «биоценоз – почва».* В серии работ [Смагин, 99, Смагин и др., 2001] одного из авторов данной книги была предложена нелинейная кинетическая модель деструкции органического вещества (ОВ) почвы под действием микроорганизмов, способная описывать *колебательные (периодические) режимы* в динамических системах. В почвенной микробиологии хорошо известен феномен колебаний численности (биомассы) микроорганизмов во времени и пространстве, носящих достаточно регулярный характер и не зависящих напрямую от гидротермических условий роста. Попытки объяснить этот феномен периодичной динамикой внешних факторов, контролирующих рост микроорганизмов, не имели успеха, поскольку даже в неизменных условиях окружающей среды система «биоценоз – почва» оказалась способной давать колебания. С нашей точки зрения подобные режимы могут возникать в почвах, как динамических биокосных системах, при сложных нелинейных взаимодействиях организмов-деструкторов с ОВ, которое они разрушают. В частности, теоретический анализ показывает, что если трофическая функция, описывающая интенсивность потребления субстрата (органического вещества почвы) не монотонна и имеет экстремум (максимум), в системе «биоценоз – почва» могут возникать периодические режимы, включая автоколебания, как результат ее самоорганизации за пределами неустойчивого равновесия [Смагин, 99]. Соответствующая модель, включающая этот механизм, может быть представлена в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = L + mC - bCX \left(1 - \frac{CX}{K}\right) - kX \\ \frac{dC}{dt} = aC(X - z) \left(1 - \frac{CX}{K}\right) \end{array} \right. , \quad (13.3)$$

где X , C – запасы субстрата (ОВ) и биомассы его потребителя (деструктора) в почве; L – скорость поступления ОВ (субстрата). Используемая в модели логистическая трофическая функция $C(X-z)/(1-CX/K)$, описывает экстремальную зависимость удельной скорости роста от субстрата (ОВ) и массы организмов: нулевой рост при отсутствии источников $C = 0$, $X \leq z$ (z – минимальный запас субстрата при котором начинается рост), наличие оптимума роста и, в дальнейшем, его угнетение при больших концентрациях субстрата, а также микробной мортмассы ($CX \rightarrow K$, K – потенциальная «емкость среды»). Микробная масса включена в качестве источника ОВ (mC), поскольку отмершие клетки данной группы микроорганизмов наряду с почвенной органикой могут служить субстратом для роста других функциональных групп. Помимо прямого разложения субстрата растущими организмами, эффективность которого оценивается экономическим коэффициентом a/b , в модели допускается спонтанная деструкция ОВ ($-kX$), происходящая под действием экзоферментов, а также абиогенных факторов.

Анализ устойчивости системы (13.3) показывает, что в системе может возникать неустойчивость при:

$$(b\bar{C} - k) < a(\bar{X} - z), \quad (13.4)$$

а также колебательные режимы при:

$$(b\bar{C} - k + a(\bar{X} - z))^2 < 4(m + b\bar{X})a\bar{C}(\bar{X} - z)/\bar{X}, \quad (13.5)$$

где \bar{C} , \bar{X} – стационарные значения запасов субстрата и биомассы организмов.

Неустойчивости способствуют рост стационарных запасов микробной массы, доли инертного ОВ (z), снижение запасов ОВ и экономического коэффициента a/b (эффективности утилизации ОВ при микробном синтезе) (рисунок 13.1).

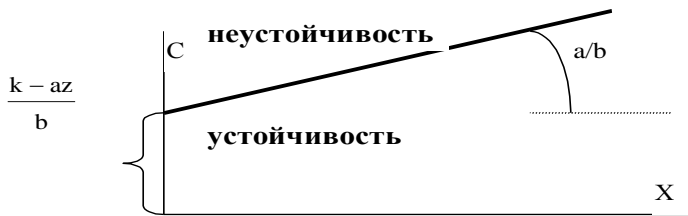


Рисунок 13.1 – Анализ устойчивости и динамических режимов модели (13.3)

Поэтому в реальных биокосных системах микробная масса не превышает нескольких процентов от запаса субстрата (ОВ) и вспышки роста популяций микроорганизмов при попадании свежего материала быстро гасятся. Однако даже при потере устойчивости в подобных биокосных системах не происходит необратимого разрушения, а возникает феномен самоорганизации за пределами стационарного состояния (равновесия). Критерий устойчивости указывает на наличие колебательных режимов в исследуемой системе в окрестности стационарного состояния «устойчивый фокус». Потеря этим состоянием устойчивости по сценарию развития динамической неустойчивости, согласно теореме Хопфа о бифуркации, может привести к появлению в нелинейной системе автоколебаний, как следствия ее самоорганизации за пределами равновесия. Автоколебательный режим подтверждается численными экспериментами с моделью в среде Matlab (рисунок 13.2).

Для составления вычислительной программы в Matlab был создан рабочий m-файл с названием «VibroFun1.m», в котором записана модель (13.3). При этом переменные субстрата (X) и биомассы организмов-деструкторов (C) были обозначены через $x1$ и $x2$, соответственно. Приведем описание файла VibroFun1.m с необходимыми комментариями (в качестве знака комментариев в Matlab используется разделитель (флажок) %,

после которого все записи воспринимаются как текст, не относящийся к программе вычислений):

```
function xdot = VibroFun1(t,x); %Рабочее название интегрируемых
функций.
% Численные значения констант модели (13.3):
L = 2; b = 2; a = 0.8; k = 1.3; K = 2; z = 0.2; m = 0.1;
% Уравнения модели (13.3):
y1 = x(2).*x(1); % Вспомогательная функция
y2 = y1.*(1-y1/K); % Вспомогательная функция
xdot(1) = L+m*x(2)-b*y2-k*x(1); % первое уравнение модели (12.3) ,
xdot – производная.
xdot(2) = a*x(2)*(x(1)-z)*(1-y1/K); ); % второе уравнение модели
(12.3).
xdot = xdot'; % эта строка необходима только в том случае, если
интегрирование осуществляется решателем ode45, в противном случае
она должна быть убрана или закоментарена.
```

Для вызова встроенных в Matlab программ численного интегрирования и записи соответствующих начальных условий удобно создать еще один файл (пусковой) с названием Vibro03.m (в последних версиях Matlab оба файла можно объединить в один):

```
tspan = [0 60]; x0 = [0.2 0.2]'; % интервал интегрирования ( $t_0 = 0$ ,  $t_f = 60$ сут) и % начальные значения переменных:
X1 = 0.2, X2 = 0.2; % единицы-г/м2.
[t,X] = ode23('VibroFun1',tspan,x0); % обращение к встроенной
функции численного интегрирования ode23.
%comet(X(:,1),X(:,2)); %оператор построения фазового портрета
системы (включается снятием флажка %, если нужен график фазового
портрета).
%[t,X] = ode45('VibroFun1',tspan,x0); % обращение к встроенной
функции численного интегрирования ode45 (включается снятием флаж-
ка %, если необходимо использовать ode45) вместо ode23.
plot(t,X(:,1),'b',t,X(:,2),'r'); %оператор цветного изображения ре-
зультатов % численного интегрирования в виде кривых динамики масс
во времени  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , где 'b','r' – голубой и красный цвета кривых.
```

Итак, убирая ненужный для программы текст с комментариями, получаем два лаконичных файла – пусковой (файл Vibro03.m) из четырех строк.

```
tspan = [0 60]; x0 = [0.2 0.2];  
X1 = 0.2, X2 = 0.2;  
[t,X] = ode23('VibroFun1',tspan,x0);  
plot(t,X(:,1),'b',t,X(:,2),'r');
```

и рабочий VibroFun1.m из шести-двенадцати (мы нарочито выделили для каждого значения параметра модели отдельную строку, хотя это можно и не делать):

```
function xdot = VibroFun1(t,x);  
L = 2;  
b = 2;  
a = 0.8;  
k = 1.3;  
K = 2;  
z = 0.2;  
m = 0.1;  
y1 = x(2).*x(1);  
y2 = y1.*(1-y1/K);  
xdot(1) = L+m*x(2)-b*y2-k*x(1);  
xdot(2) = a*x(2)*(x(1)-z)*(1-y1/K).
```

После составления файлов в редакторе-отладчике программ «Editor/Debugger» достаточно набрать в командной строке Matlab имя пускового файла Vibro03.m и моментально будет готов результат в виде графиков зависимости масс от времени (рисунок 13.2). Варьируя численные значения констант модели, записанные в файле VibroFun1.m, можно исследовать поведение системы «биоценоз-почва» во времени.

Например, выбирая в качестве бифуркационного параметр спонтанной биодеструкции (k), получаем при последовательном росте k смену всех возможных режимов поведе-

ния исследуемой биокосной системы – монотонный выход на равновесие (стационар «устойчивый узел»), затухающие колебания вблизи стационара «устойчивый фокус», расходящиеся колебания при потере устойчивости и их стабилизация за пределами равновесия в виде предельного цикла (рисунок 13.2). При малых значениях показателя спонтанной деструкции (k) в почве постепенно накапливается значительное количество ОВ, а микробная масса выходит на низкий стационарный уровень после первоначальной вспышки (рисунок 13.2). Такой режим, очевидно, типичен для почв. Однако, при невысоких запасах субстрата и интенсивной кинетике его трансформации возможны качественно новые – периодические режимы, включая эндогенные автоколебания.

Заметим, что инициация смен режимов может происходить за счет внешних воздействий, например, повышения температуры, и соответственно скоростей биологических процессов или изменения интенсивности потока субстрата (L). Этот механизм объясняет синхронность автоколебаний в разных точках пространства почвы, отмечаемую рядом авторов. В целом, модель (13.3) позволяет описывать весь спектр потенциальных режимов функционирования системы «биоценоз-почва» и вместе с тем достаточно хорошо соответствует конкретным экспериментальным данным по эндогенным колебаниям массы почвенных организмов-деструкторов (рисунок 13.2).

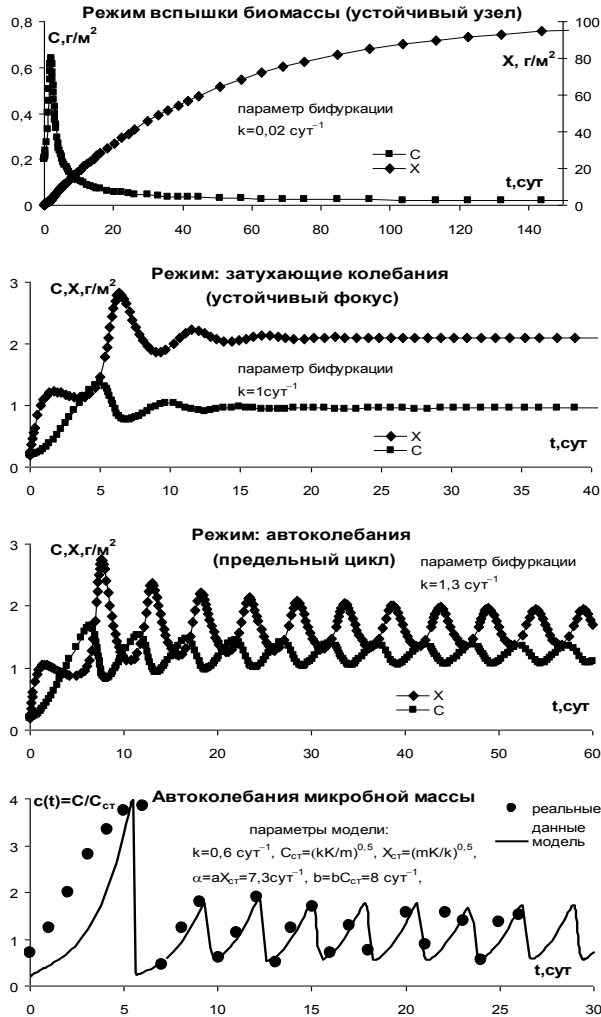


Рисунок 13.2 – Численное моделирование колебательных режимов системы «биоценоз-почва» (модель 13.3). Основные параметры: $L = 2 \text{ г/м}^2 \text{сут}^{-1}$, $a = 0,8$, $b = 2 \text{ м}^2/\text{гсут}^{-1}$, $K = 2 \text{ г}^2/\text{м}^4$, $m = 0,1 \text{ сут}^{-1}$, $z = 0,2 \text{ г/м}^2$

13.3 Интегрирование уравнений в частных производных в компьютерной среде Matlab

Поскольку потоки вещества и энергии – основа функционирования любой динамической биокосной системы, то для их формализованного описания очевидна ведущая роль уравнений переноса, изучаемых в математической физике [Глаголев, Смагин, 2005, Смагин 99, 2012]. Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. В Matlab 6 версии появилась команда `рdere` для решения системы уравнений в частных производных параболического типа с одной пространственной координатой. Общий вид решаемой системы выглядит следующим образом [Глаголев, Смагин, 2005]:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} (x^m f) + s, \quad (13.6)$$

где $u(x, t)$ – искомое решение в виде вектор-функции;

c – диагональная матрица (для одного интегрируемого уравнения в частных производных $c = 1$);

s – вектор-функция источников/стоков;

m – параметр, определяющий систему пространственных координат: 0 отвечает декартовым координатам, 1 – цилиндрическим, 2 – сферическим;

f – вектор-функция, определяющая потоки в исследуемой системе.

Начальные условия задаются в виде вектора

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad (13.7)$$

описывающего форму распределения исследуемой субстанции в нулевой момент времени. Краевые условия задаются в обобщенном виде на левой (верхней) и правой (нижней) границах пространственного отрезка (обозначааемых, соответственно латинскими буквами « l » и « r » следующим образом:

$$p(x,t,u) + q(x,t,u)f(x,t,u, \partial u/\partial x) = 0 \quad (13.8)$$

Для численного решения задается пространственно-временная сетка в виде соответствующих массивов с набором узлов по мере возрастания значений координат x и t .

Функция-оператор `pdepe` в среде Matlab для численного интегрирования уравнений в частных производных имеет следующий вид:

$$SOL = pdepe(m, @pde, @ic, @bc, xx, tt, opt, p1, p2, \dots) \quad (13.9)$$

Она решает (методом прямых) систему уравнений (13.6) с краевыми условиями вида (13.8) и начальными условиями (13.7), причем для интегрирования задачи по времени в функции `pdepe` используются решатели задачи Коши (`ode15s` и др., см 13.2). Входные параметры:

m определяет систему координат (при $m = 0$ решение строится в декартовой системе координат, при $m = 1$ – в полярной системе, при $m = 2$ – в сферической);

`@pde`, `@ic`, `@bc` – функции, задающие вид уравнений, начальные и краевые условия;

xx содержит узлы сетки (не менее трех) по координате x в порядке возрастания x ;

tt определяет набор временных слоев (не менее трех), в которых запоминаются решения.

Необязательные входные параметры:

opt – некоторые параметры решателя задачи Коши, существенные для эффективной работы `pdepe` (`RelTol`, `AbsTol`, `NormControl`, `InitialStep` и `MaxStep`); их можно изменить при помощи команды `odeset`. 3) Параметры решателя задачи Коши, заданные в Matlab по умолчанию, в большинстве случаев достаточны для успешного решения задач.

$p1$, $p2$, ... – произвольные параметры, передаваемые в подпрограммы функции `pdepe`.

Выходной параметр:

SOL – трехмерный массив в который выводится решение, причем первый индекс (i) отвечает временному слою t_i , второй индекс (j) определяет номер узла x_j , а третий индекс дает номер компоненты вектора решения, таким образом элемент $SOL(i,j,k)$ дает значение решения $u_k(x_j, t_i)$.

Для подготовки начально-краевой задачи (модели) к численному решению с помощью оператора SOL в Matlab необходимо записать в рабочем файле несколько функций. Рассмотрим их по отдельности.

Функция, в которой пользователь задает уравнения модели:

$$[c, f, s] = pde(x, t, u, DuDx, p1, p2, ...) \quad (13.10)$$

Входные параметры:

x, t – значения координат x, t ;

u – вектор значений $u(x, t)$ в точке с координатами (x, t) ;

$DuDx$ – вектор значений du/dx в точке с координатами x, t ;

$p1, p2, \dots$ – произвольные параметры, получаемые из pde .

Выходные параметры: диагональная матрица c , векторы f, s , из (13.6).

Функция вычисления начальных условий:

$$u0 = ic(x, p1, p2, ...) \quad (13.11)$$

Входные параметры:

x – значение координаты x ;

u – вектор значений u в точке с координатами (x, t_0) ;

$p1, p2, \dots$ – произвольные параметры, получаемые из pde .

Выходные параметры: вектор значений u на начальном временном слое $t = t_0$.

Функция обработки краевых условий

$$[pa, qa, pb, qb] = bc(a, ua, b, ub, t, p1, p2, \dots) \quad (13.12)$$

Входные параметры:

a, b – координаты концов интервала изменения x ;

ua, ub – векторы значений u на концах интервала $[a, b]$;

t – значение координаты t ;

$p1, p2, \dots$ – произвольные параметры, получаемые из рдере.

Выходные параметры:

pa, pb – значения вектора p из (13.8) на концах интервала $[a, b]$;

qa, qb – значения вектора q из (13.8) на концах интервала $[a, b]$.

Пример. Распределенная модель природной и антропогенной динамики черноземов. В работах [Смагин, 2009, 2012] предложена модель органопрофиля черноземов разных типов, позволяющая реконструировать динамику их формирования в природных степных условиях и агродеградации при вовлечении в сельскохозяйственное производство. Модель представлена дифференциальным уравнением в частных производных, сочетающим конвективно-дисперсионный транспорт органического вещества почвы (гумуса) с нелинейной функцией «источник/сток» в виде корневого опада и биодеструкции гумуса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - q \frac{\partial C}{\partial z} - kC + R \exp(-bz) \quad (13.13)$$

Здесь переменная C – объемная концентрация органического углерода в почве, которую легко рассчитать по дан-

ным о процентном содержании гумуса ($X\%$), плотности почвы (ρ_b) и коэффициенте перевода гумуса в углерод (1,73):

$$C[\text{кг/м}^3] = 10X\% \rho_b / 1,73.$$

Первый член в правой части уравнения описывает диффузию (дисперсию) органического вещества, второй – конвективный транспорт в составе водных растворов, третий – биодеструкцию, а четвертый – поступление из ризосферы. Величины эффективного коэффициента диффузии (дисперсии) D [$\text{м}^2/\text{год}$], интенсивности конвективного массопереноса q [$\text{м}/\text{год}$], константы разложения гумуса k [год^{-1}], крутизны распределения корней в профиле почвы b [м^{-1}] и максимальной интенсивности гумификации корневого опада R [$\text{кг/м}^3 \text{ год}^{-1}$] принимаются постоянными. Для их нахождения разработана оригинальная методика обратной задачи, использующая данные о стационарном профильном распределении органического углерода в черноземах и его общего поступления из поверхностного и корневого источника.

Модель снабжается граничными условиями в виде потока свежих гумусовых веществ на поверхности почвы (гумифицированный углерод опада) L [$\text{кг/м}^2/\text{год}$] и постоянной (C_0) (или нулевой ($C_0 = 0$)) концентрации органического углерода на значительном удалении от поверхности.

$$qC - D \frac{dC}{dz} \Big|_{z=0} = L; \quad C \Big|_{z \rightarrow \infty} = C_0 \quad (13.14)$$

Для реализации численных экспериментов с моделью (13.13) в компьютерной среде Matlab 7 был создан рабочий файл под названием `pde_demo1.m`. Ниже приводится его структура с комментариями, отделенными знаком `%`.

```

function pde_demo1 % рабочее название программы
m = 0; % выбраны декартовы координаты
x = linspace(0,2,81); % пространственная сетка с 81 узлом на отрезке 0–2 м
t = [0 5 10 50 100 200 500 1000 2000 3000]; % времена вывода информации по динамике органопрофиля в годах
sol = pdepe(m,@pdex1pde,@pdex1ic,@pdex1bc,x,t); % обращение к встроенному оператору «pdepe» для численного решения дифференциальных уравнений в среде Matlab
u = sol(:,:,1); % искомое решение в виде функции от x,t.
figure % графическое изображение решения
plot(x,u(1,:),x,u(2,:),x,u(3,:),x,u(4,:),x,u(5,:),x,u(6,:),x,u(7,:),x,u(8,:), x,u(9,:), x,u(10,:), x,u(end,:))
xlabel('x, м') % название оси абсцисс
ylabel('u, кг/м3') % название оси ординат
function [c,f,s] = pdex1pde(x,t,u,DuDx) % функция потоков
c = 1; % коэффициент для системы из одного уравнения
f = 0.000015*DuDx-0.0002*u; % задан поток со значением коэффициента диффузии 0.000015 [м2/год] и скорости конвективного транспорта 0.0002 [м/год]
s = 0.07*exp(-4.2*x)-0.0008*u; % функция источника/стока (поступления из корней и биодеструкции) [кг/м3 год-1]
function u0 = pdex1ic(x) % функция начальных условий
u0 = 0; % изначально гумуса в почве не было
function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t) % функция граничных условий
pl = 0.006; % поток гумифицированных веществ из опада в почву, [кг/м2 год-1]
ql = 1; % условие на верхней границе записывается в виде потока с постоянным значением pl+ql*f(x,t,u,DuDx) = 0
pr = ur; % концентрация на нижней границе = 1 [кг/м3]
qr = 0; % условие на нижней границе записывается в виде постоянства концентрации и отсутствия потоков
pr+qr*f(x,t,u,DuDx) = 0.

```

Для проведения вычислений достаточно скопировать этот текст в редактор программ Editor и сохранить с расширением m-файл. Обращение к нему из командного окна (Command Window) среды Matlab 7 посредством набора названия pde_demo1.m и запуска вычислений клавишей En-

тер позволяет по прошествии 1–2 секунд компьютерного счета воспроизвести динамику формирования органопрфи-лей чернозема в указанных временных отрезках от нуля-момента до 3000 лет (рисунок 13.3).

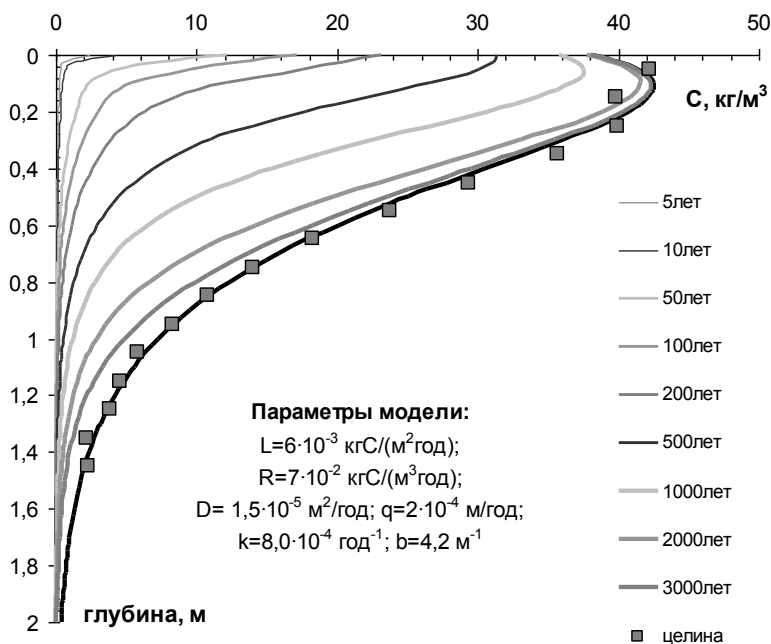


Рисунок 13.3 – Компьютерное моделирование формирования чернозема обыкновенного под степной растительностью

Как видно на формирование органопрфиля, свойственного целинным черноземам обыкновенным с проникнове-нием гумуса до глубины 1,5 и более метров, требуется не менее 2–3 тысяч лет! Лишь по прошествии этого срока гу-мусовый профиль выходит на равновесное (стационарное) состояние, присущее современным целинным черноземам, в котором процессы поступления, перераспределения и де-

структуры органических веществ характеризуются балансом интенсивностей.

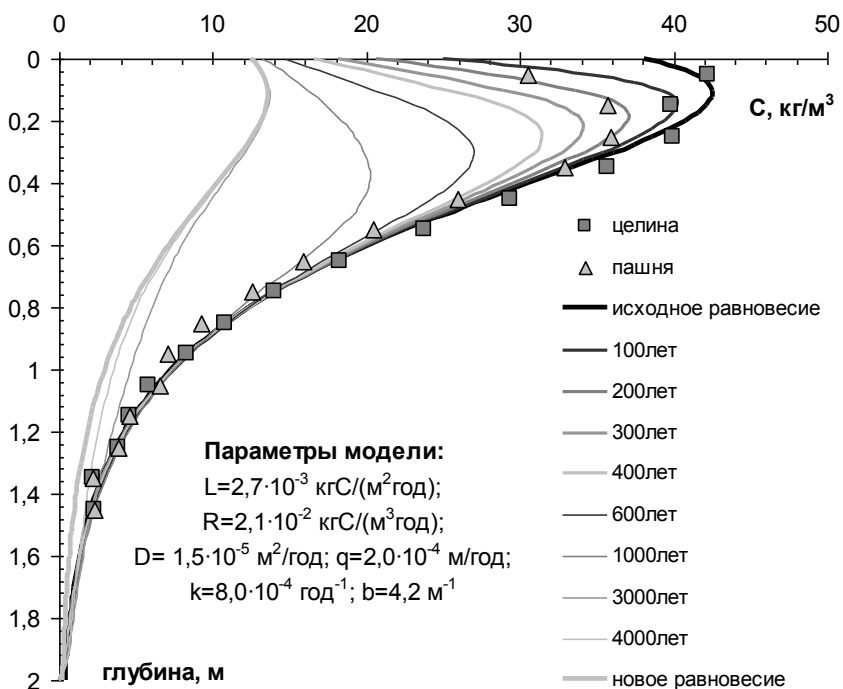


Рисунок 13.4 – Компьютерное моделирование антропогенной деградации чернозема обыкновенного

Распашка черноземов и вовлечение их в сельскохозяйственное производство сопровождается 3–4 кратным снижением поступления органического вещества из фитоценоза в почву по причине отчуждения человеком сельскохозяйственной продукции (урожая), пониженной продуктивности агроценозов по сравнению с целинной степной растительностью и ряда других причин. В результате чернозем начинает терять гумус – основной материальный носитель плодородия.

дия этой эталонной во всех отношениях исходно высокопродуктивной почвы.

Внеся соответствующие изменения в параметры модели (13.3) в виде уменьшения поступления органического вещества и задавая в качестве начального распределения углерода среднестатистический стационарный органофильный профиль, свойственный целинным черноземам обыкновенным, рассчитаем динамику этих почв при вовлечении в сельскохозяйственное производство (рисунок 13.4). Из рисунка видно, что на первых этапах агродеградация затрагивает верхние слои почвы и по прошествии 100–200 лет эксплуатации черноземы теряют в них до 30 % исходного количества гумуса и более. Результаты моделирования здесь хорошо соответствуют реальным данным в виде среднестатистического профильного распределения гумуса в пахотных черноземах обыкновенных (треугольные символы на рисунке 13.4). Однако наивно полагать, как это делают многие современные агропочвоведы, что на этом потери органического вещества заканчиваются, поскольку, якобы «срабатывается» лишь «лабильный гумус», а оставшийся «стабильный» будет существовать неограниченно долго. Как показывает модель, процесс агродеградации будет продолжаться и захватывать все более глубокие слои почвы, пока не наступит новое равновесие (стационарное состояние) с уменьшенными в 3–4 раза потоками поступающего из фитоценоза углерода растительных остатков. Только можно ли считать такую почву черноземом, если концентрация органического углерода в корнеобитаемой толще уменьшится с 40 до 10 кгС/м³, а общие запасы в 2 м профиле (интеграл функции $C(z)$) от 490 т/га гумуса) до 170 т/га?

Постепенно, но неуклонно теряется главное национальное богатство, наиважнейший ресурс, от которого напрямую зависит продовольственная безопасность страны, здоровье и благосостояние ее населения. И остановить эти потери воз-

можно только при переходе на альтернативные системы земледелия, в которых наряду с получением высоких урожаев должны быть заложены цель и механизмы воспроизводства почвенного ресурса, его гумусного и структурного состояния.

Мы завершили краткое рассмотрение возможностей компьютерной среды Matlab для численного моделирования задач экологии и иных естественнонаучных дисциплин, связанных с пространственно-временной динамикой и организацией биологических и биокосных систем. В подобных моделях предполагается непрерывное (континуальное) описание переменных состояния во времени, хотя по пространству здесь могут быть существенно неоднородные условия, как например в слоистых почвах и почвенных конструкциях [Смагин, 2012]. Однако и во времени для реальных природных систем часто возникают эффекты запаздывания, зависимости от предшествующих этапов (стадий, фаз) развития. Поэтому в следующей главе мы обратимся к проблеме дискретного описания динамики во времени.

ГЛАВА 14. МОДЕЛЬ РОСТА ПОПУЛЯЦИИ ЛЕСЛИ

14.1 Технология построения матрицы Лесли

Модель Лесли лежит в основе формализации закона Лотки о стабильности возрастной структуры (Leslie, 1945; Розенберг, 1984; Миркин и др., 1989) и описывает динамику численности или плотности популяции с учетом возрастной структуры. В простейшем случае – это аналог модели Мальтуса. Математическим аппаратом для этой модели является матричная алгебра.

Предположения для построения модели: ресурсы питания не ограничены; размножение происходит в определенные моменты времени, t_1, t_2, \dots, t_n ; популяция содержит n возрастных групп. Тогда в каждый фиксированный момент времени (например, t_0) популяцию можно охарактеризовать вектор-столбцом:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad (14.1)$$

Вектор $X(t_1)$, характеризующий популяцию в следующий момент времени, например, через год, связан с вектором $X(t_0)$ через матрицу перехода L :

$$X(t_1) = LX(t_0) \quad (14.2)$$

Установим вид этой матрицы. Из всех возрастных групп выделим те, которые производят потомство. Пусть их номера будут $k, k+1, \dots, k+p$. Предположим, что за единичный промежуток времени особи i -й группы переходят в группу $i+1$, от групп $k, k+1, \dots, k+p$ появляется потомство, а часть

особей от каждой группы погибает. Потомство, которое появилось за единицу времени от всех групп, поступает в группу 1. Тогда первая компонента вектора $X(t)$ имеет вид:

$$x_1(t_1) = \sum_{i=k}^{k+p} a_i x_i(t_0) = a_k x_k(t_0) + a_{k+1} x_{k+1}(t_0) + \dots + a_{k+p} x_{k+p}(t_0) \quad (14.3)$$

Вторая компонента получается с учетом двух процессов. Первый – переход особей, находившихся в момент t_0 в первой группе, во вторую. Второй процесс – возможная гибель части из этих особей. Поэтому вторая компонента $x_2(t_1)$ равна не всей численности $x_1(t_0)$, а только некоторой ее части

$$\beta_1 x_1(t_0), \quad 0 < \beta_1 < 1 \quad (14.4)$$

Аналогично получают третья компонента $\beta_2 x_2(t_0)$ и все остальные.

Предположим, что все особи, находившиеся в момент t_0 в последней возрастной группе к моменту t_1 погибнут. Поэтому последняя компонента вектора $X(t_1)$ составляется лишь из тех особей, которые перешли из предыдущей возрастной группы.

$$X_n(t_n) = \beta_{n-1} X_{n-1}(t_n), \quad 0 < \beta_n < 1 \quad (14.5)$$

Коэффициенты для каждой группы имеют следующий смысл:

α – коэффициент рождаемости;

β – коэффициент выживания.

Вектор численностей возрастных групп в момент времени t_1 представим в виде:

$$X(t_1) = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_2) \\ \dots \\ x_n(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum^{k+p} a_1 x_1(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \dots \\ \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0) \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

Вектор $X(t_1)$ получается умножением вектора $X(t_0)$ на матрицу перехода:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & a_i & a_{i+1} & \dots & a_{k+p} & 0 & 0 \\ \beta_i & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (14.6)$$

Структура матрицы перехода: по диагонали матрицы стоят нули, под диагональными элементами коэффициенты выживания β ; на первой строке стоят члены, характеризующие число особей, родившихся от соответствующих групп (коэффициенты рождаемости) α ; все остальные элементы матрицы равны нулю.

Зная структуру матрицы L и начальное состояние популяции – вектор-столбец $X(t_0)$, – можно прогнозировать состояние популяции в любой наперед заданный момент времени.

Для этого необходимо каждый раз умножать вектор состояния популяции на матрицу Лесли.

$$X(t_1) = L \cdot X(t_0), \quad (14.7)$$

$$X(t_2) = L \cdot X(t_1) = L \cdot L \cdot X(t_0) = L^2 \cdot X(t_0),$$

$$X(t_k) = L \cdot X(t_{k-1}) = L^k \cdot X(t_0)$$

Главное собственное число матрицы L дает скорость, с которой размножается популяция, когда ее возрастная структура стабилизировалась.

14.2 Пример матричной модели популяции из трех возрастных групп

Пусть возрастная динамика популяции характеризуется матрицей:

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_2) \\ x_3(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14.8)$$

Такая запись означает, что исходная популяция состоит из одной самки старшего возраста (вектор столбец в правой части уравнения). Каждое животное старшего возраста, прежде чем умереть, успевает произвести в среднем 12 потомков, каждое животное среднего возраста, прежде чем умереть или перейти в следующий возрастной класс (вероятности этих событий одинаковы) производит в среднем 9 потомков. Молодые животные не производят потомства и с вероятностью 1/3 попадают в среднюю возрастную группу. По прошествии одного временного интервала в популяции будет уже 12 самок младшего возраста:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14.9)$$

Далее процедуру следует повторять на каждом шаге. Из графика (Рисунок 14.1) видно, что до некоторого момента времени (t_{10}), наблюдаются колебания численности, после чего количество самок всех трех возрастов экспоненциально возрастает, причем соотношение между ними остается постоянным. Главное собственное число λ_1 при этом равно 2, т. е. размер популяции за каждый временной шаг удваивается.

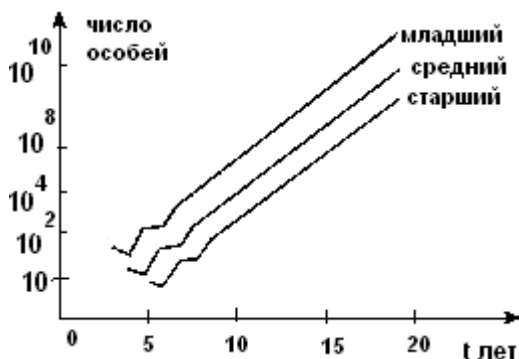


Рисунок 14.1 – Численность самок старшего, среднего и младшего возраста в зависимости от времени для первых 20 временных интервалов (Джефферс, 1981)

Наклон графика равен $\ln \lambda_1$ – собственной скорости естественного прироста. Соответствующий главному собственному числу собственный вектор отражает устойчивую структуру популяции и в нашем случае равен:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.10)$$

Этот пример страдает тем же недостатком, что и модель Мальтуса экспоненциального роста: мы допускаем, что популяция может неограниченно расти. Более реалистическая модель должна учитывать, что все элементы матрицы L являются некоторыми функциями размера популяции.

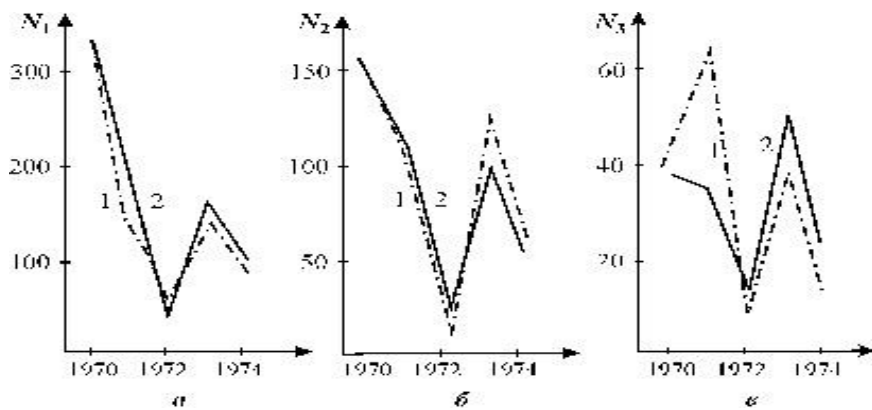


Рисунок 14.2 – Динамика численности ценопопуляции овсеца *Helictotrichon S.* Для различных возрастных групп; а – проростки, прегенеративные и генеративные особи, б - субсильные особи, в - сильные особи. 1 – эмпирические данные, 2 – прогноз по модели Лесли. (Розенберг, 1984)

Модели с применениями матриц Лесли для крупных возрастных групп могут дать описание колебательных изменений численности популяции. В качестве примеров использования модели П. Лесли можно привести в фитоценологии описание возрастной структуры сосны (*Pinus sylvestris*) в Шотландии (Usher, 1969, 1972) и описание возрастной структуры ценопопуляции овсеца Шелля – мелкодерновинного злака северных луговых степей (Розенберг, 1984) (*Helictotrichon schellianum*; Розенберг, 1982) (Рисунок 14.2). Эта модель позволила описать наблюдаемые в приро-

де явления – старение овсеца и колебания распределений по возрастному спектру в течение ряда лет.

14.3 Управление эксплуатацией популяции на основе матричной модели

Рассмотрим несколько модельных ситуаций управления тактикой рыбного промысла на основе матричной модели Лесли.

Пусть популяция представляет собой три возрастные группы и в начальный момент времени имеются только особи 1-ой возрастной группы.

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{pmatrix} \quad (14.11)$$

Тогда в следующий момент времени будет

$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14.12)$$

Отловим часть имеющихся особей $s_1 x_1(t_1)$; $0 \leq s_1 \leq 1$. После улова имеем вектор:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1^0 - s_1 \beta_1 x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1-s_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14.13)$$

В следующий момент времени t_2 имеем:

$$\begin{aligned}
 x(t_2) &= \begin{pmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \\ x_3(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1-s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1-s_1) \begin{pmatrix} \alpha \beta_1 x_1^0 \\ 0 \\ \beta_2 \beta_1 x_1^0 \end{pmatrix} = \\
 &= \beta_1 (1-s_1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha x_1^0 \\ 0 \\ \beta_2 x_1^0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{14.14}$$

Пусть $s_2 x_3(t_2)$ отлов пострепродуктивной группы. Тогда после отлова будем иметь:

$$\tilde{x}(t_2) = \begin{pmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \\ x_3(t_2) \end{pmatrix} = \beta_1 (1-s_1) \begin{pmatrix} \alpha x_1^0 \\ 0 \\ \beta_2 (1-s_2) x_1^0 \end{pmatrix} \tag{14.15}$$

В общей сложности после двух тактов отлова величина отлова составит $s = s_1 x_2(t_1) + s_2 x_3(t_1)$ и популяция придет в состояние $\tilde{x}(t_2)$.

1) *Изъятие части популяции с возвращением в исходное состояние.*

Подобрать коэффициенты s_1 и s_2 таким образом, чтобы популяция вернулась в исходное состояние, и рассчитать количество улова.

Решение.

Такое условие будет выполняться при условии, что $\tilde{x}(t_2) = x(t_0)$.

Приравняем компоненты этих векторов.

$$\begin{aligned}\beta_1(1-s_1)\alpha x_1^0 &= x_1^0, \\ \beta_1(1-s_1)\beta_2(1-s_2)x_1^0 &= 0\end{aligned}\quad (14.16)$$

Из первого уравнения, сокращая x_1 находим s_1 :

$$\begin{aligned}1-s_1 &= \frac{x_1^0}{\beta_1\alpha x_1^0} = \frac{1}{\beta_1\alpha}; \\ s_1 &= 1 - \frac{1}{\beta_1\alpha}.\end{aligned}\quad (14.17)$$

Второе уравнение выполняется, когда $s_2 = 1$, т. е. вылавливается вся пострепродуктивная группа.

Итак, в первоначальное состояние популяция вернется при выполнении условий:

$$s_1 = 1 - \frac{1}{\beta_1\alpha} \text{ и } s_2 = 1. \quad (14.18)$$

Улов рассчитаем по формуле:

$$\begin{aligned}s &= s_1x_2(t_1) + s_2x_3(t_2) = \left(1 - \frac{1}{\alpha\beta_1}\right) \cdot \beta_1x_1^0 + \beta_1\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha\beta_1}\right)\right)\beta_2x_1^0 = \\ &= x_1^0\left(\beta_1 - \frac{1}{\alpha} + \beta_1\beta_2\left(1 - 1 + \frac{1}{\alpha\beta_1}\right)\right) = x_1^0\left(\beta_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha}\right).\end{aligned}\quad (14.19)$$

Пример. Дана популяция речного карпа с тремя возрастными группами, у которой в начальный момент времени имеется 100 особей только 1-ой возрастной группы. Коэффициент выживаемости 1-ой возрастной группы равен 0,8; 2-ой возрастной группы – 0,7. Коэффициент рождаемости репродуктивной группы равен 3. Найти, какую часть особей необходимо вылавливать, чтобы после двух сезонов попу-

ляция пришла в исходное состояние. Рассчитать количество улова.

Решение. В нашей задаче имеем $\beta_1 = 0,8$; $\beta_2 = 0,7$; $\alpha = 3$; $x_0 = 100$

Вспользуемся готовыми формулами (14.17–14.19):

$$s_1 = 1 - \frac{1}{\beta_1 \alpha} = 1 - \frac{1}{0,8 \cdot 3} \approx 0,58;$$

$$s = x_1^0 \left(\beta_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha} \right) = 100 \cdot \left(0,8 - \frac{1}{3} + \frac{0,7}{3} \right) = 70.$$

2) *Изъятие популяции с сохранением определенной части предрепродуктивной группы*

Найти оптимальный режим отлова такой, чтобы величина отлова s была максимальной, а численность молодняка была бы не ниже некоторого числа m_1 .

Формально это условие можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \max s = \max [s_1 x_2(t_1) + s_2 x_3(t_2)], \\ \tilde{x}_1(t_2) \geq m_1, \\ \beta_1(1 - s_1)\alpha x_1^0 \geq m_1. \end{cases} \quad (14.20)$$

Из первого выражения видно, что $\max s = \max s_1 + \max s_2$.

Понятно, что $\max s_2 = 1$.

s_1 найдем из неравенства $\beta_1(1 - s_1)\alpha x_1^0 \geq m_1$.

Выразим отсюда сначала $(1 - s_1)$, а затем s_1 .

$$1 - s_1 \geq \frac{m_1}{\beta_1 \alpha x_1^0};$$

$$s_1 \leq 1 - \frac{m_1}{\beta_1 \alpha x_1^0}.$$

Понятно, что максимальное значение достигается при

$$s_1 = 1 - \frac{m_1}{\beta_1 \alpha x_1^0}. \quad (14.21)$$

Пример. По данным предыдущей задачи рассчитать режим отлова такой, чтобы улов был максимальный, а количество молодняка было не ниже 50.

Решение. Воспользуемся готовой формулой (14.21):

$$s_1 = 1 - \frac{m_1}{\beta_1 \alpha x_1^0} = 1 - \frac{50}{0,8 \cdot 3 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{4,8} = 1 - 0,208 \approx 0,8 \cdot$$

3) *Изъятия популяции с сохранением определенных частей предрепродуктивной и пострепродуктивной групп*

Найти максимальное s при условии, что

1) численность молодняка была бы не ниже некоторого уровня m_1 .

2) численность пострепродуктивной группы была бы не ниже некоторого уровня m_2 .

Формально это условие записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \max s = \max[s_1 x_2(t_1) + s_2 x_3(t_2)], \\ \tilde{x}_1(t_2) \geq m_1, \\ \tilde{x}_3(t_2) \geq m_2. \end{cases} \quad (14.22)$$

Максимальное значение s будет достигнуто при максимальном значении s_1 и максимальном значении s_2 .

$$\text{Из предыдущей задачи максимум } s_1 = 1 - \frac{m_1}{\beta_1 \alpha x_1^0}.$$

s_2 найдем, решая неравенство:

$$\beta_1(1 - s_2) \cdot \beta_2 \cdot (1 - s_1) \cdot x_1^0 \geq m_2;$$

$$1 - s_2 \geq \frac{m_2}{\beta_1(1 - s_1)\beta_2 x_1^0};$$

$$s_2 \leq 1 - \frac{m_2}{\beta_1(1 - s_1) \cdot \beta_2 \cdot x_1^0}.$$

Максимум достигается при равенстве, т. е.

$$s_2 = 1 - \frac{m_2}{\beta_1(1-s_1) \cdot \beta_2 \cdot x_1^0} = 1 - \frac{m_2}{\beta_1(1-1 + \frac{m_1}{\alpha\beta_1 x_1^0})\beta_2 \cdot x_1^0} = \quad (14.23)$$

$$= 1 - \frac{\alpha m_2}{m_1 \beta_2}.$$

Таким образом, достаточно простые выражения из матричной модели Лесли для дискретного роста популяций позволяют осуществлять важную задачу экологического нормирования и могут с успехом использоваться при оценках допустимого антропогенного воздействия на популяции биоресурсов с задачей сохранения их репродуктивности, видовой структуры и биоразнообразия.

ГЛАВА 15. СИСТЕМНО-ДИНАМИЧЕСКИЕ ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

15.1 Сущность системно-динамического имитационного моделирования

Для анализа динамического поведения сложных систем с нелинейными обратными связями был разработан метод *системной динамики*. Его основателем является профессор Массачусетского технологического института в городе Кембридже Джей Форрестер. За счет использования ЭВМ и алгоритмических имитационных моделей системная динамика позволяет обойти многие трудности математического моделирования, например, проблему размерности.

Применение системно-динамических имитационных моделей особенно привлекательно для описания экологических систем – необычайно сложных образований, включающих множество биологических, геологических, метеорологических и прочих факторов. Особое место в экологическом моделировании занимают балансовые компартментальные модели, когда рассматриваются потоки вещества и энергии между составляющими модель компартментами (системными уровнями), содержание «вещества» в каждом из которых представляет собой отдельную переменную системы. Для этих фазовых переменных пишутся дифференциальные уравнения одного и того же типа, отображающие динамику перемещения вещества и энергии между компартментами.

Системно-динамические модели широко используются для моделирования биогеохимических циклов в экосистемах, продукционных процессов в агроэкосистемах, глобальных процессов в биосфере.

Суть имитационного моделирования заключается в исследовании сложной математической модели с помощью

вычислительных экспериментов и обработки результатов этих экспериментов. Благодаря возможности проигрывать различные «сценарии» поведения и управления, имитационная модель может быть успешно использована для выбора оптимальной стратегии эксплуатации природной экосистемы или оптимального способа создания искусственной экосистемы.

Идея системно-динамических моделей основывается на допущении, что в любой момент можно количественно определить состояние системы и что изменение состояния можно описать с помощью математических уравнений. Математическим аппаратом системной динамики являются системы дифференциальных уравнений.

15.2 Основные переменные имитационной модели

В моделях системной динамики различают:

- переменные состояния (уровни, блоки, резервуары);
- переменные скорости (темпы, функции переноса);
- управляющие переменные (вынуждающие функции).

Переменные состояния – это те переменные, которые можно измерить, остановив мгновение. Например, количество энергии на трофических уровнях продуцентов, консументов, и редуцентов, биомасса, численность популяции, количество химических элементов в почве, растениях или животных.

Переменные скорости – это те переменные, которые описывают потоки веществ или энергии между переменными состояниями, например, между растительной биомассой и пасущимися животными.

Их величины определяются переменными состояниями и управления в соответствии с правилами, основанными на знании протекающих в системе физических, химических, биологических процессов.

Управляющие переменные или вынуждающие функции характеризуют влияние среды на систему через ее границы и их значение нужно непрерывно контролировать. Примерами таких переменных служат макрометеорологические величины (осадки, ветер, t^0 , радиация), а также пищевые ресурсы или миграции животных через границы системы.

После расчета значений всех переменных, характеризующих скорости потоков, полученные величины используются для расчета переменных состояния по правилу: переменная состояния в момент $(t+\Delta t)$ равна переменной состояния в момент t плюс скорость потока в момент t , умноженная на Δt .

Переменная состояния $(t+\Delta t)$ = состояние (t) + скорость $\cdot \Delta t$

Эта процедура, называемая интегрированием, дает новые значения переменных состояния, которые позволяют повторить расчет скоростей потоков.

Интервал времени Δt выбирается таким образом, чтобы скорость процесса за этот промежуток существенно не изменилась.

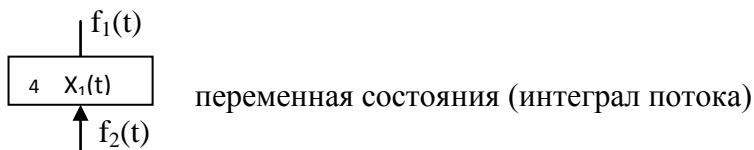
Следует помнить, что во избежание неустойчивости временной интервал интегрирования должен быть меньше одной трети временного коэффициента или времени реакции. (Время реакции – это характеристическое время системы, равное обратной величине самой быстрой относительной скорости изменения одной из ее переменных состояний). Чем меньше временной коэффициент, тем меньше временной интервал интегрирования.

15.3 Язык потоковых диаграмм, правила построения диаграммы связей

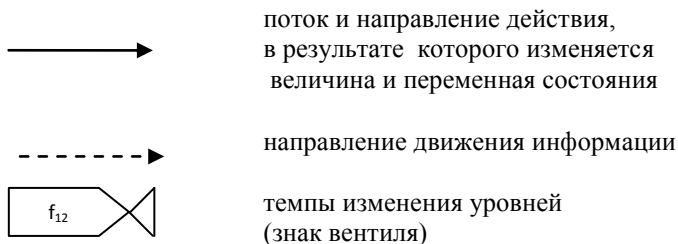
При построении имитационных моделей процессов круговорота веществ и потока энергии в экосистемах широко

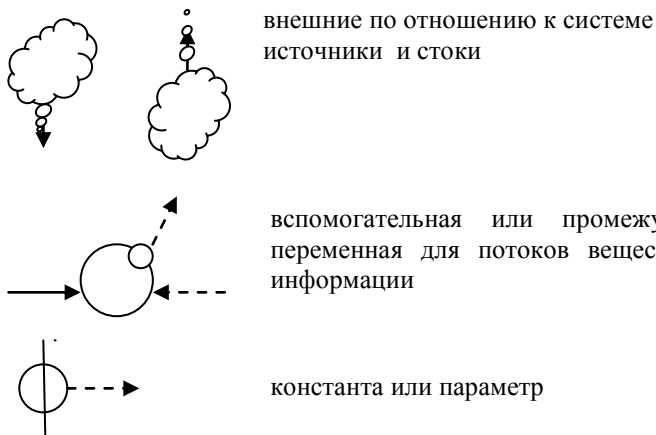
применяется язык потоковых диаграмм. Потоковая диаграмма представляет собой схему, на основании которой строятся дифференциальные уравнения имитационной модели. Он был разработан Дж. Форрестером (1961 г.) для изображения процесса переноса материалов, энергии, капитала, людских ресурсов и предназначался для построения глобальных моделей, прогнозирующих эколого-экономическую ситуацию в мире. Графический язык, отображающий специфику моделирования потоков веществ и энергии в экосистемах был предложен российскими математиками А.А. Ляпуновым и А.А. Титляковой. (1971).

Перечислим важнейшие элементы и операции языка потоковых диаграмм, которые необходимы при моделировании процессов переноса в экосистемах.



Каждому уровню сопоставляется одна переменная состояния, и символ этой переменной записывается в центре прямоугольника. В левом верхнем углу – порядковый номер уровня, в правом нижнем – номер уравнения, описывающего динамику соответствующей переменной.





Процедуру построения потоковых диаграмм рассмотрим на примере моделей экспоненциального и логистического роста.

При экспоненциальном росте количество (K) регулируется темпом роста (TP), который в свою очередь зависит от относительного темпа роста (OTR) и текущего значения количества (K).

При логистическом росте (K) регулируется темпом роста, который зависит от текущего значения K и двух констант OTR и емкости среды ES .

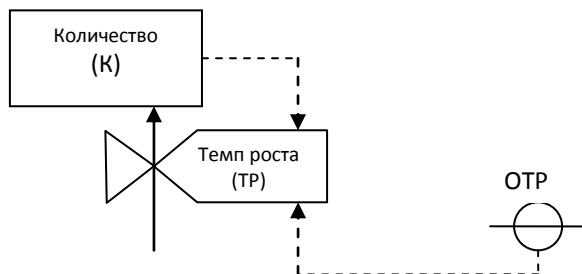


Рисунок 15.1 – Диаграмма для представления экспоненциального роста

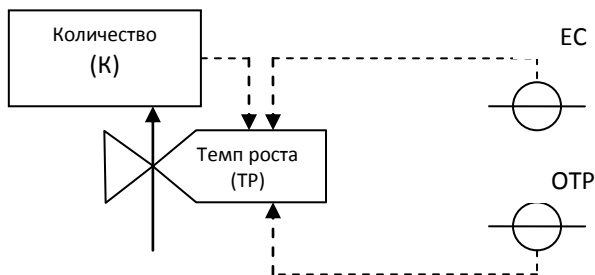


Рисунок 15.2 – Диаграмма логистического роста

15.4 Процедура построения имитационной модели

Построения имитационной модели состоит из следующих этапов.

В соответствии с задачами моделирования задается вектор состояния системы и вводится системное время, моделирующее ход времени в реальной системе.

Производится декомпозиция системы на отдельные блоки, связанные друг с другом, но обладающие относительной независимостью. Для каждого блока определяют, какие компоненты вектора состояния должны преобразовываться в процессе его функционирования.

Формулируют законы и гипотезы, определяющие поведение отдельных блоков и связь этих блоков друг с другом. Для каждого блока множество законов функционирования дополняется множеством логических операторов, формализующих опыт наблюдения за динамикой процессов в системе. При необходимости вводится «внутреннее системное время» данного блока модели, позволяющее моделировать более быстрые или более медленные процессы. Если в блоке используются случайные параметры, задаются правила отыскания на каждом шаге некоторых их реализаций. Раз-

рабатываются программы, соответствующие отдельным блокам.

Каждый блок верифицируется по фактическим данным, и при этом его информационные связи с другими блоками «замораживаются». Обычно последовательность действий при верификации блоков такова: часть имеющейся информации используется для оценки параметров модели, а затем по оставшейся части информации сравнением расчетных данных с фактическими проверяется адекватность модели.

Производится объединение разработанных блоков имитационной модели на базе стандартного или специально созданного математического обеспечения. Апробируются и отрабатываются различные схемы взаимодействия блоков. На этом этапе всю «большую модель» удобно рассматривать как комплекс автоматов с памятью или без нее, детерминированных или стохастических. Работа с моделью тогда представляет собой изучение коллективного поведения автоматов в случайной или детерминированной среде.

Производятся верификация имитационной модели в целом и проверка ее адекватности. Здесь решающими оказываются знания экспертов – специалистов, хорошо знающих реальную систему.

Планируются эксперименты с моделью. При анализе их результатов используются статистическая обработка информации, графические формы выдачи данных и пр. Результаты экспериментов пополняют информационный фонд (банк данных) и используются при дальнейшей работе с моделью.

На каждом из этапов модель может перестраиваться: расширяется список фазовых переменных, уточняется вид их взаимодействий, проверяются гипотезы о механизмах тех или иных процессов в рамках общей имитационной системы.

Ясно, что разработка имитационной модели сложной системы и работа с этой моделью требуют усилий целого коллектива специалистов, как в области компьютерной математики, так и в предметной области.

1.5 Основные этапы построения имитационной модели цикла азота в агроэкосистеме

Пройдем все этапы построения имитационной модели на примере, предложенном Т.Г. Гильмановым [1978].

1. *Формулировка цели моделирования.* Пусть цель моделирования – разработка модели потока азота в агроэкосистеме для понимания этого процесса и управления им.

2. *Общая характеристика системы-оригинала и спецификация внешних и внутренних переменных модели.* Считаем, что пастбище расположено на водоразделе, поэтому не испытывает биогеохимического влияния других систем.

Определим внешние системы, воздействующие на агроэкосистему:

Атмосфера A_0 .

Антропогенная система с/х производства M_0 .

Тогда множество элементов окружающей среды есть:

$\{A_0, M_0\}$,

Определим внутренние элементы системы:

Локальная атмосфера A .

Почва S .

Растительность G .

Животные AC .

Подстилающая порода PR .

Грунтовые воды GW ,

Тогда множество внутренних элементов системы:

$\{A, S, G, AC, PR, GW\}$.

Применяя сокращенную форму обозначения систем, запишем

$E_0 = E_0(V_0, X_0) = E_0(\{A_0, M_0\}, \{A, S, G, AC, PR, GW\})$

Визуально агроэкосистему можно представить в виде блок-схемы:

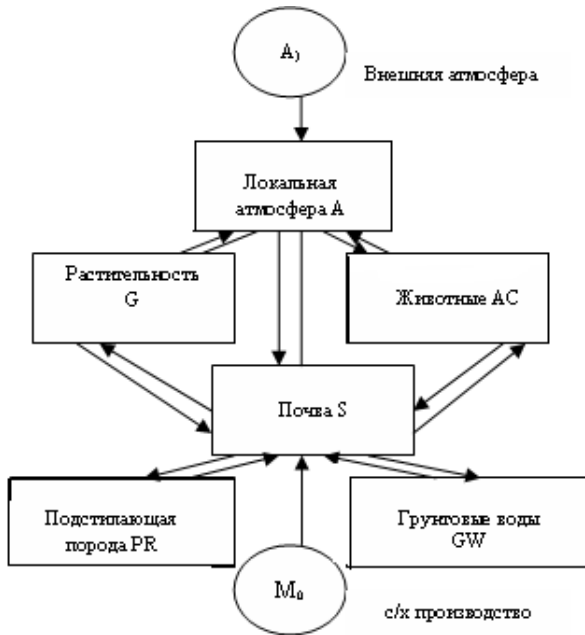


Рисунок 15.3 – Блок-схема агроэкосистемы E_0

3. *Определяем основные переменные системы.* Множество входных переменных состоит из одной вынуждающей функции, которая зависит от времени и контролирует скорость подачи удобрений $v = \{v(t)\}$.

Множество переменных состояния состоит из переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, которые показывают запасы азота в почве S , в биомассе растений G и животных $АС$ соответственно.

Множество переменных скорости, f_{R11} , f_{IR2} , f_{3R3} , f_{12} , f_{21} , f_{23} , f_{31} обозначают скорости потоков азота между экосистемой и средой и внутри экосистемы.

Таким образом, модель системы-оригинала E_0 можно изобразить в виде $E = (V, X) = E(\{v(t)\}, \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), f_{R11}, f_{1R2}, f_{3R3}, f_{12}, f_{21}, f_{23}, f_{31}\})$.

Эта модель является гомоморфным отображением системы E_0 на систему E $h: E_0 \rightarrow E$, при котором на переменную v отображаются те свойства атмосферной и агрономической внешних систем A_0, M_0 , которые регулируют скорость подачи удобрений. Аналогично на переменные $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ отображаются величины запасов азота в почве, растениях, животных, а вспомогательным переменным f_{ij} сопоставляются скорости поступления, перераспределения и выноса азота.

Остальные внутренние свойства системы оригинала E_0 в модели не рассматриваются.

15.6 Потокковая диаграмма движения азота в экосистеме, идентификация модели

Потокковая диаграмма изображает структуру модели и служит основой для построения системы разностных уравнений для реализации модели на компьютере в MS EXCEL.

Система E будет моделью системы-оригинала E_0 , если математические отношения между переменными модели E будут воспроизводить отношения между свойствами оригинала E_0 .

Установление таких математических отношений в виде дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений проводится на этапе идентификации структуры модели. Задача идентификации модели состоит в установлении конкретного вида функций f_{ij} и выводе уравнений, описывающих динамику переменных состояния $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ в течение рассматриваемого промежутка времени.

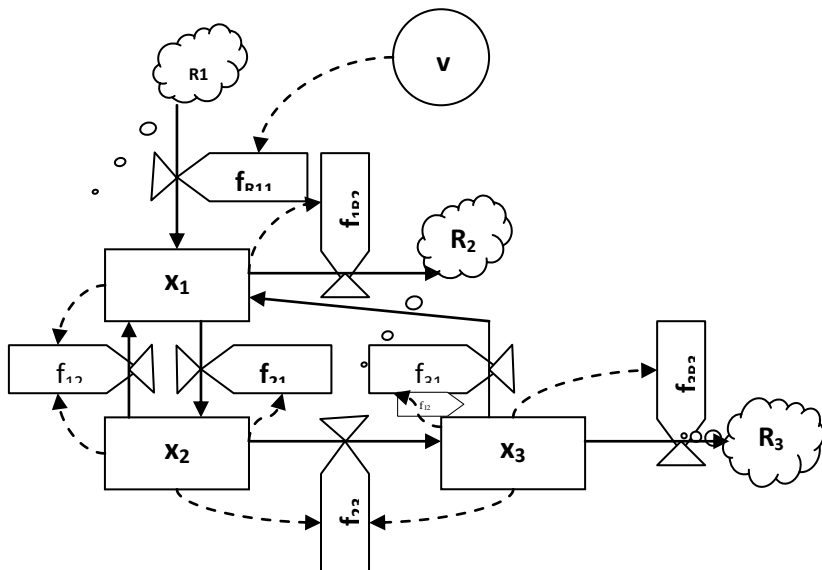


Рисунок 15.4 – Поточковая диаграмма цикла азота в агроэко­системе культурного пастбища [Гильманов, 78]

Предположим, что в результате наблюдений установ­лено, что вспомогательные переменные представ­лены следующими зависимостями:

$$f_{R11}(t) = v(t) = const;$$

$$f_{1R2}(x_1(t)) = a_1 x_1(t);$$

$$f_{3R3}(x_3(t)) = a_2 (x_3(t))^2;$$

$$f_{12}(x_1(t), x_2(t)) = a_3 x_1(t) \cdot x_2(t);$$

$$f_{21}(x_2(t)) = a_4 x_2(t);$$

$$f_{23}(x_2(t), x_3(t)) = a_5 x_2(t) \cdot x_3(t);$$

$$f_{31}(x_3(t)) = a_6 x_3(t), \text{ где } a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 - \text{числовые па-} \\ \text{раметры.}$$

Пусть в результате специальных исследований полу­чены следующие значения параметров:

$$a_1 = 2; a_2 = 1; a_3 = 10; a_4 = 5; a_5 = 10; a_6 = 5; a_1 = 2; v =$$

25

Синтез модели. В соответствие со структурой модели составим систему разностных уравнений на основе закона сохранения массы азота. Изменение количества азота в почве за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ равно произведению алгебраической суммы скоростей поступления и оттока азота из почвы на длину рассматриваемого промежутка времени Δt :

$$x_1(t+\Delta t) - x_1(t) = (v + f_{21} + f_{31} - f_{12} - f_{1R2}) \cdot \Delta t$$

Аналогично для запасов азота в растениях и животных:

$$x_2(t+\Delta t) - x_2(t) = (f_{12} - f_{21} - f_{23}) \cdot \Delta t$$

$$x_3(t+\Delta t) - x_3(t) = (f_{23} - f_{31} - f_{3R3}) \cdot \Delta t$$

Подставим вместо функций f_{ij} их оценки, полученные на этапе идентификации. Получим систему разностных уравнений:

$$x_1(t+\Delta t) - x_1(t) = (25 + 5x_2(t) + 5x_3(t) - 10x_1(t) \cdot x_2(t) - 2x_1(t)) \cdot \Delta t$$

$$x_2(t+\Delta t) - x_2(t) = (10x_1(t) \cdot x_2(t) - 5x_2(t) - 10x_2(t) \cdot x_3(t)) \cdot \Delta t$$

$$x_3(t+\Delta t) - x_3(t) = (10x_2(t) \cdot x_3(t) - 5x_3(t) - x_3^2(t)) \cdot \Delta t$$

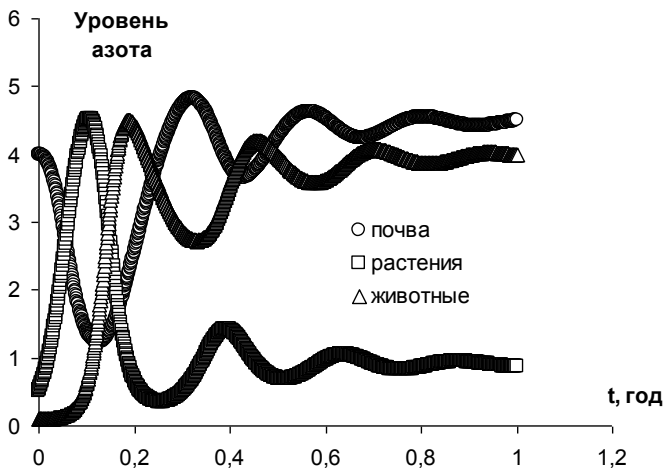


Рисунок 15.5 – Динамика азота на трех уровнях экосистемы культурного пастбища.

Для каждой тройки начальных условий по этим уравнениям могут быть вычислены значения переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ для всех последующих моментов времени Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$.

Такие вычисления могут проведены для любых параметров $\{a_i\}$ и v . Для $v = 25$ динамика переменных состояния изображена на рисунке 15.5.

15.7 Проверка, исследование и оптимизация модели

При наличии экспериментальных данных о поведении азота в реальной системе и располагая машинной реализацией модели E, можно сравнить фактические и расчетные данные и вынести заключение о степени адекватности модели.

Вычисления, выполненные для разных начальных условий, позволяют сделать вывод о том, что под постоянным внешним воздействием $v = 25$ с течение времени наша экосистема приходит к одному и тому же стационарному состоянию не зависимо от ее начального состояния. Стационарными значениями координат x_i^{st} соответствуют стационарные значения потоков f_{ij}^{st} и выходов f_{1R2}^{st} и f_{3R3}^{st} .

Располагая машинной реализацией модели E, можно рассматривать вопрос о том, насколько чувствительна модель к изменению значений параметров a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 . Например, насколько точно может быть предсказана величина потока азота из почвы во внешнюю среду f_{1R2}^{st} , если ошибка в определении параметров равна 1 %.

Можно также узнать, что произойдет, если будет увеличен отток азота из экосистемы с биомассой животных в результате более интенсивного вывода скота из экосистемы.

Можно ответить на вопрос, способствует ли увеличению вторичной продуктивности экосистемы введение в экосистему животных с большей интенсивностью потребления раститель-

ной массы. Для ответа на этот вопрос надо проследить, к чему приведет увеличение параметра a_5 .

Пусть задача управления нашей экосистемой состоит в получении максимального дохода от ее эксплуатации с применением удобрений. Введем целевую функцию.

$\Phi(v) = c_2 f_{3R3} - c_1 v - c_3 (f_{1R2})^4$, которая показывает баланс доходов и затрат.

Здесь f_{3R3} – доходы от реализации одной ед. азота в биомассе животных;

$c_1 v$ – затраты на внесение ед. азота с азотными удобрениями;

$c_3 (f_{1R2})^4$ – убытки, причиняемые в результате загрязнения водоема от эвтрификации, снижения питьевых качеств, гибели рыбы.

Используя машинную реализацию модели, можно установить, что величина f_{3R3} пропорциональна v . С увеличением v в 4 раза величина f_{3R3} увеличивается в 4 раза. Величина f_{1R2} пропорциональна корню квадратному из v , т. е.

$$f_{1R2} = k_2 \cdot \sqrt{v}; f_{3R3} = k_1 v.$$

Тогда можно записать:

$$\Phi(v) = c_2 k_1 v - c_1 v - c_3 k_2^4 v^2$$

Найдем максимум этой функции.

$$\Phi'(v) = c_2 k_1 - c_1 - 2c_3 k_2^4 v; \Phi'(v) = 0;$$

$$v_{max} = \frac{c_1 - c_2 k_1}{2c_3 k_2^4}.$$

Для получения максимального дохода от агроэкосистемы E_0 следует вносить удобрения с интенсивностью v_{max} .

Вместе с тем в отличие от непрерывных моделей, дискретные, подобно рассматриваемой выше модели цикла азота

могут быть весьма чувствительны ко временному шагу (Δt), иногда даже сильнее, чем к варьированию параметров. Например, при вычислениях для рисунка 15.5 мы использовали шаг 0,001 года. Увеличим его до 0,01 года. Результаты (рисунок 15.6) весьма сильно отличаются от первоначальных (рисунок 15.5). Об этих недостатках моделей такого рода следует знать и помнить при организации соответствующих исследований, равно как и при прогнозах на их основе.

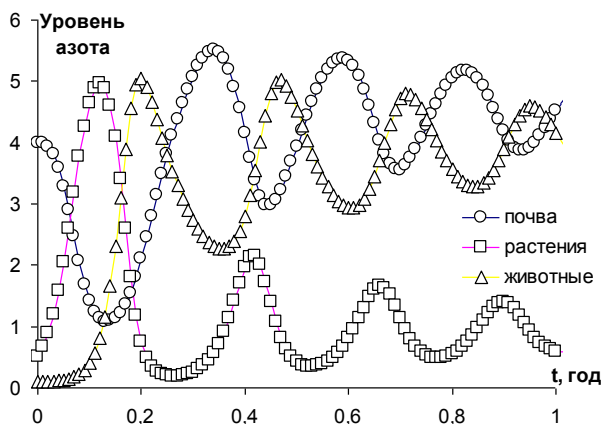


Рисунок 15.6 – Динамика азота на трех уровнях экосистемы культурного пастбища – расчет при более крупном шаге по времени

15.8 Модели агробиоценоза

Имитационные модели продукционного процесса растений (агробиоценозов) для разных культур являются одними из первых имитационных моделей. Агробиоценоз включает совокупность взаимовлияющих процессов биотического и абиотического характера. Для сельскохозяйственной науки наиболее важная часть агробиоценоза – это посев сельскохозяйственной культуры. Существует большое число моделей разных культур, как упрощенных, предназначенных для решения

конкретных вопросов управления, так и очень подробных, используемых в основном для исследовательских целей. При выборе методов моделирования агробиоценоза и степени сложности модели определяющая роль должна отводиться цели моделирования. Такой целью может быть выбор оптимальной стратегии проведения сельскохозяйственных мероприятий: орошения, полива, внесения удобрений; выбор наилучших сроков посева или посадки растений с целью получения максимальных урожаев.

Ввиду сложности агробиоценоза целесообразно представлять всю систему происходящих в нем процессов в виде блочной иерархической структуры. Обычно проводится деление модели на биотический и абиотический блоки. Блочная структура моделей дает большие преимущества для моделирования, позволяя изучать, изменять и детализировать одни блоки, не меняя других. Как правило, число параметров, которые входят внутрь блоков, существенно больше числа параметров, которыми блоки соединяются друг с другом. Это один из принципов построения имитационной модели.

Среди биотических процессов выделяют блок роста и развития посева сельскохозяйственной культуры, блок функционирования почвенной микрофлоры, блок функционирования почвенной фауны, блок развития энтомофауны, блок развития болезней сельскохозяйственных культур, блок взаимодействия сельскохозяйственной культуры с сорняками и др.

Абиотические блоки включают в себя модели, описывающие ряд геофизических процессов, характеристики которых важны для функционирования биотических процессов: формирование теплового, водного режимов почвы и приземных слоев воздуха, концентрации и передвижения биогенных и токсических солей, различных остатков распада пестицидов, ростовых веществ и метаболитов в почве, концентрация CO_2 в посевах.

Модели продукционного процесса сельскохозяйственных растений обычно имеют балансовый характер, то есть для каждого вещества производится расчет всех «притоков» и «оттоков». Например, при расчете водного режима (водный блок) учитываются выпадение осадков (или дождевание), перехват этих осадков надземными органами растений, возможное образование слоя влаги на поверхности почвы, перемещение влаги в почве из одного слоя в другой, обмен с грунтовыми водами, поглощение воды корнями и пр. Таким же образом в модели замыкаются циклы круговорота по углероду, азоту и другим элементам.

На рисунке 15.7 изображена блок-схема модели продуктивности агроэкосистемы, взятая из монографии Н.Ф. Бондаренко и др. «Модели продуктивности экосистем» (1982).

Из блоков, изображенных на рисунке 15.7, наиболее разработаны в настоящее время блоки, описывающие не собственно биологические, а скорее геофизические процессы: формирование теплового и водного режима, концентрации и передвижения биогенных и токсических солей, концентрации CO_2 в посевах, влаго- и теплообмен в почве, влаго- и теплоперенос в системе почва – растение – приземный воздух.

Это связано в первую очередь с большей изученностью этих процессов и возможностью их описывать при помощи аппарата дифференциальных уравнений, разработанного для подобных задач в гидро- и аэродинамике. При этом посев формально рассматривается как неоднородная по вертикали пленка, покрывающая поверхность поля.

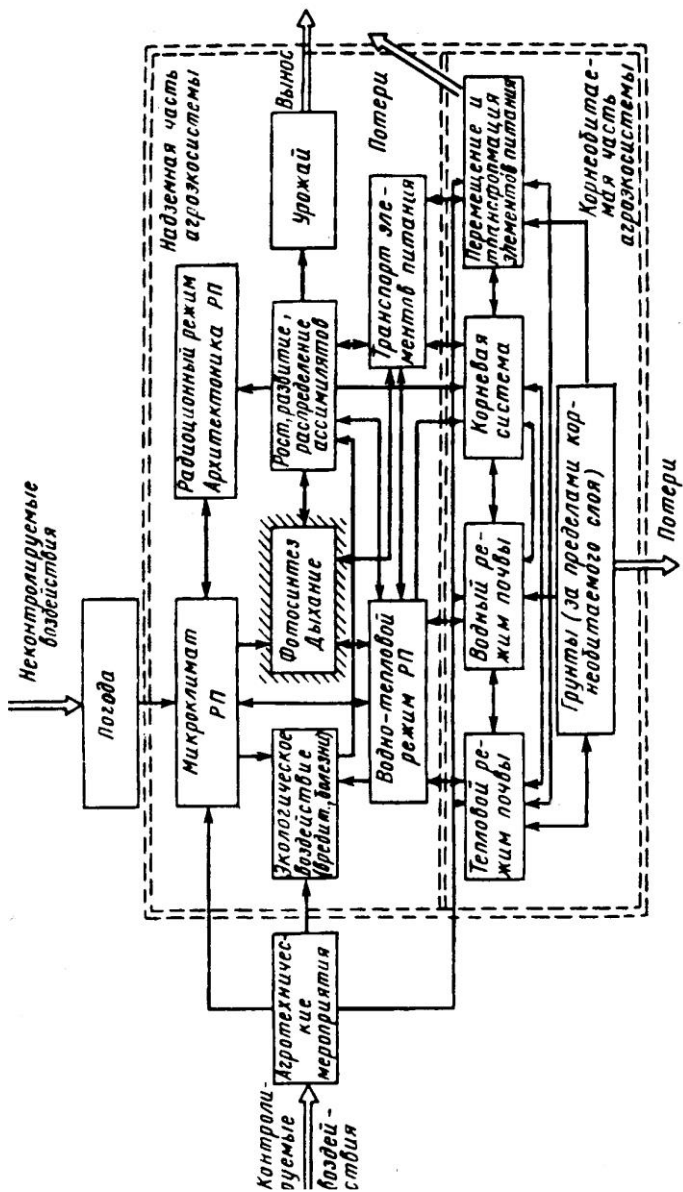


Рисунок 15.7 – Блок-схема модели агроценоза

15.9 Глобальные модели

Модели глобальной динамики сыграли особую роль в становлении имитационного моделирования. Именно для этих моделей был разработан формализм представления системы в виде узлов и потоков между ними, который затем в разных видах использовался практически во всех моделях сложных систем. Первые глобальные модели были созданы Джеймсом Форрестером и его учениками-коллегами – Денисом и Данеллой Медоузами с соавторами по заказу Римского клуба в 60–80 годы 20 века. Полученные с их помощью результаты были опубликованы в знаменитой переведенной на 35 языков книге «Пределы роста» и впервые послужили предостережением человечеству в том, что Земля – ограниченная система, безудержный прогресс ведет к истощению ее ресурсов, и человечество ждет глобальный экологический кризис.

По результатам моделирования авторы сделали следующие выводы. Экспоненциальный рост численности населения, капитала, потребления ресурсов и загрязнения ОС продолжается. Существует точка зрения, что стабилизация численности населения произойдет в силу системного развития человечества в процессе так называемого демографического перехода. Критическая дата падения (стабилизации) численности человечества около 2030 г. Возможно, численность будет еще продолжать расти примерно до конца следующего века и остановится на цифре 12–14 млрд. Возможные пути достижения предельно допустимого уровня численности человечества схематически приведена на рисунке 15.8.

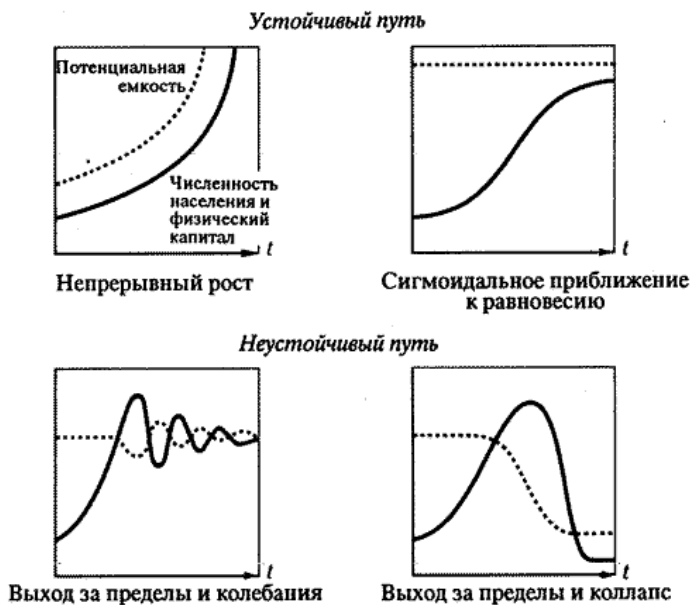


Рисунок 15.8 – Возможные пути достижения предельно допустимого уровня численности населения. (Медоуз и др.,94)

Когда численность населения и экономики выходит за пределы емкости Земли, есть только два пути назад: неизбежный коллапс, либо добровольно контролируемое снижение обществом объемов потребления. Прогноз развития системы в случае сохранения существующих в настоящее время тенденций представлен на рисунке 15.9. Как видно из рисунка, он соответствует четвертому сценарию «выхода за пределы» и коллапса.

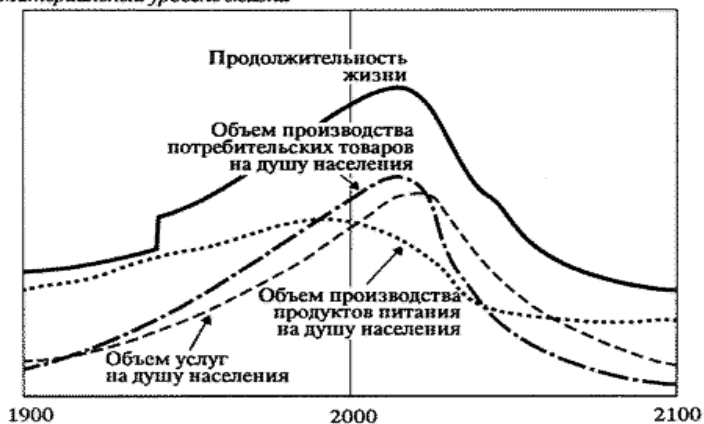


Рисунок 15.9 – Результаты моделирования развития глобальных показателей при сохранении существующих тенденций развития. (Медоуз и др., 94)

Для того, чтобы осуществился сценарий монотонного приближения к устойчивому равновесию необходимо принятие программ стабилизации численности населения и объема промышленного производства, внедрения технологий, уменьшающих выбросы загрязняющих веществ, эрозию почв и повышающих эффективность использования природных ресурсов (рисунок 15.10.).

Состояние мира



Материальный уровень жизни

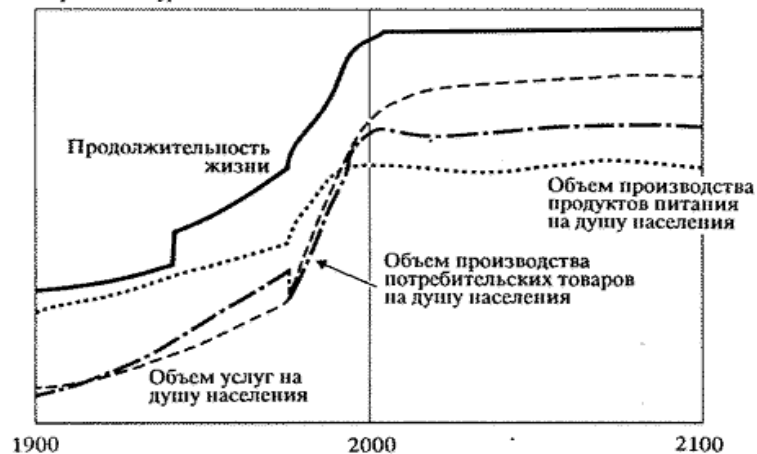


Рисунок 15.10 – Развитие глобальных показателей в случае принятия программы стабилизации численности населения и объема промышленного производства, внедрения технологий, уменьшающих выбросы загрязняющих веществ, эрозии почв, и повышающих эффективность использования природных ресурсов.

В настоящее время активно разрабатываются глобальные климатические, геоэкологические модели, позволяющие рассчитать динамику климата, локальных метеоусловий, фотосинтез, «парниковый эффект» и другие жизненно-важные процессы, протекающие в масштабе планеты.

Смысл таких глобальных моделей заключается в том, что они позволяют оценить вклад отдельных процессов и регионов в общий баланс вещества и энергии на Земле, и решать обратную задачу о влиянии на локальные процессы этих глобальных показателей. Такой всесторонний учет множества факторов и связей возможен только с использованием современной вычислительной техники и геоинформационных технологий.

ГЛАВА 16. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ ЭКОЛОГИИ

16.1 Основные цели и задачи исследования операций

Научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными системами – называется *исследование операций*.

Цель исследования операций – количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.

Применение методов исследования операций предполагает:

- построение математических моделей для задач принятия решений в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;

- изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений;

- установление критериев эффективности, позволяющих оценить преимущество того или иного варианта действия.

Определим некоторые понятия теории исследования операций.

Операция – любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели. Результат операции зависит от способа ее проведения, организации, иначе – от выбора некоторых параметров.

Решение – определенный выбор параметров.

Оптимальными считают те решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других. Поэтому основной задачей исследования операций является предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Различают модели *сетевого планирования и управления, теорией игр и оптимизационные модели*.

Задачи сетевого планирования и управления рассматривают соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций (работ) и моментами начала всех операций комплекса. Эти задачи состоят в нахождении минимальных продолжительностей комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения (часто применяется при планировании природоохранных мероприятий).

Задачи теорией игр. Большинство хозяйственных операций можно рассматривать как действия, совершаемые в условиях противодействия. К противодействиям относятся такие факторы, как конкуренция, дефицит ресурсов, аварии, стихийные бедствия. В задачах теории игр необходимо выработать рекомендации по разумному поведению участников конфликта, определить их оптимальные стратегии, или уменьшить степень противодействия.

Оптимизационные модели применяют для нахождения оптимальных вариантов решения в ситуациях дефицита ресурсов при наличии конкурирующих потребностей. Многие из оптимизационных задач решаются методом линейного программирования или сводятся к ним.

16.2 Примеры применения оптимизационных моделей в экологии

В практической работе по охране и рациональному использованию природных экосистем человек может задавать и регулировать те или иные воздействия с целью оптимизации их состояния. Например, при управлении заповедником стремятся к сохранению редких видов организмов, в агроэкосистемах – к получению высокого урожая. При управлении водоемом можно использовать принудительную аэрацию для оптимизации его экологического состояния. Оптимизационные задачи часто применяются в исследованиях по управле-

нию и планированию лесных запасов, при экономическом анализе мероприятий по улучшению качества древесных лесных пород, при анализе развития сельскохозяйственных мероприятий. К такому типу задач относятся и задачи рационального размещения источников загрязнения при ограничениях на уровень загрязнения окружающей среды.

Можно привести множество примеров оптимизационных задач и из области теоретической экологии. Какова максимальная скорость, с которой ткани животного могут обеспечиваться кислородом? Какова минимальная скорость размножения, необходимая для выживания данного вида? Какова максимальная биомасса, которую может поддерживать данная экосистема? Как можно удовлетворить пищевые потребности хищника при минимальных затратах энергии?

Задача максимизации и минимизации в биологии обычно сопровождается ограничениями или пределами на биологические переменные. Эти ограничения могут быть следствием физиологических пределов или пределов доступности жизненных ресурсов. Например, скорость размножения данного вида может быть ограничена длительным периодом беременности либо доступным пространством или пищей.

В рамках нашего курса будем рассматривать оптимизационные модели, решаемые методом линейного программирования.

16.3 Основы теории линейного программирования

Линейное программирование – наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Эта линейная функция называется целевой, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называется системой ограничений.

Первые постановки задач линейного программирования были сформулированы известным советским математиком Л. В. Канторовичем, которому за эти пионерские работы была присуждена Нобелевская премия. Значительное развитие теория и алгоритмический аппарат линейного программирования получили с изобретением и распространением ЭВМ и формулировкой американским математиком Дж. Данцингом симплекс-метода.

Линейное программирование является одним из наиболее употребительных аппаратов математической теории оптимального принятия решений, в том числе и при решении экологических проблем [Гурман, 81].

Для решения задач линейного программирования разработано сложное программное обеспечение, позволяющее эффективно и надежно решать практические задачи больших объемов, и снабжены развитыми системами подготовки исходных данных, средствами их анализа и представления полученных результатов.

16.4 Примеры классических задач линейного программирования

Постановка практической задачи ЛП включает следующие основные этапы: определение показателя эффективности, переменных задачи, задание линейной целевой функции F , подлежащей минимизации или максимизации, функциональных и областных ограничений.

Чтобы понять, откуда берутся задачи линейного программирования, рассмотрим некоторые, уже ставшие классическими, примеры подобных задач. В некоторых из них сформулируем математическую постановку задачи.

Задача о диете. Задача о диете возникает при составлении наиболее экономного (т. е. наиболее дешевого) рациона

питания животных, удовлетворяющего определенным требованиям.

Предположим, что в нашем распоряжении имеется 3 продукта питания (сено, зерно, комбикорм). Обозначим эти продукты через I, II, III.

Стоимость 1 кг корма соответственно равны 4, 5, 6 денежным единицам. Рациональная диета должна доставлять животному определенные компоненты (белки, жиры, углеводы, витамины, микроэлементы и т. д.). Обозначим эти компоненты через S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 . Тогда можно составить таблицу-справочник, указывающую, какое количество каждого компонента имеется в единице веса каждого продукта. Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Таблица 16.1 – Задача составления рациона

Питательное вещество	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		
		I	II	III
S_1	9	3	1	2
S_2	8	1	2	5
S_3	12	2	1	1
S_4	10	3	4	5
S_5	5	1	2	2

Составим математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2, x_3 – количество кормов I, II, III, входящих в дневной рацион. Тогда этот рацион (см. таблица 16.1.) будет включать:

$(3x_1 + 1x_2 + 2x_3)$ единиц питательного вещества S_1 ,

$(1x_1 + 2x_2 + 5x_3)$ единиц питательного вещества S_2 ,

$(2x_1 + 1x_2 + 1x_3)$ единиц питательного вещества S_3 ,

$(3x_1+4x_2+5x_3)$ единиц питательного вещества S_4 ,
 $(1x_1+2x_2+2x_3)$ единиц питательного вещества S_5 .

Так как содержание питательных веществ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 в рационе должно быть не менее соответственно 9, 8, 12, 10, 5, единиц, то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 8, \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geq 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 10, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \end{cases} \quad (16.1)$$

Кроме того, очевидно, что все переменные x_1, x_2, x_3 неотрицательны, т. е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad (16.2)$$

Общая стоимость рациона составит (в денежных единицах)

$$F = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \quad (16.3)$$

Итак, математическая модель задачи: составить рацион $X = (x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющий системе (16.1) и условию (16.2), при котором функция (16.3) принимает минимальное значение.

Обратите внимание на полученный результат. Во-первых, достаточно реальная задача приобрела строгую математическую форму. Во-вторых, целевая функция (стоимость рациона) является линейной функцией переменных. В третьих, сами ограничения на значения переменных имеют вид линейных неравенств. Все это и определило название этого класса задач – задачи линейного программирования.

Задача об использовании ресурсов. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4 . Запасы ресурсов и число единиц ресур-

сов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 16.2 (цифры условные).

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3 руб. Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно P_1 и P_2 , запланированных к производству. Для их изготовления (см. таблица 16.2.) потребуется $(1x_1 + 3x_2)$ единиц ресурса S_1 , $(2x_1 + 1x_2)$ единиц ресурса S_2 , (x_2) единиц ресурса S_3 и $(3x_1)$ единиц ресурса S_4 .

Таблица 16.2 – Задача об использовании ресурсов

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	–	1
S_4	21	3	–

Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21, единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразятся системой неравенств:

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \end{cases} \quad (16.4)$$

По смыслу задачи переменные

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (16.5)$$

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ руб. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ руб. – от реализации продукции P_2 , т. е.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \quad (16.6)$$

Итак, математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе (16.4) и условию (16.5), при котором функция (16.6) принимает максимальное значение.

По-разному можно понимать экологический смысл этой экономической задачи. Во-первых, ограничение на запасы ресурсов могут быть вызваны не только экономическими причинами, но и экономией невозобновимых ресурсов; во-вторых, они могут быть вызваны стремлением к получению минимальных отходов при их переработке.

16.5 Примеры задач линейного программирования в области экологии

Задача о рационе хищника. Средний дневной рацион хищника составляет 10 ед. пищи A , 12 ед. пищи B , и 12 ед. пищи C . Эти потребности удовлетворяются в процессе его питания двумя видами жертвы. Одна жертва вида I дает соответственно 5, 2, 1 ед. пищи A , B , C , а вида II соответственно 1, 2 и 4 ед. пищи A , B и C . На поимку и усвоение жертвы вида I требуется в среднем 3 ед. энергии. Аналогичные потребности для вида II составляют 2 ед. энергии. Сколько жертв каждого вида следует поймать хищнику, чтобы удовлетворить свои пищевые потребности с наименьшими затратами энергии?

Задача о заселении озера рыбами. Озеро заселяется двумя видами рыб: S_1, S_2 . Средняя масса рыбы S_1 равна 4 кг; рыбы S_2 – 2кг. В озере имеется два вида пищи F_1 и F_2 . Средние потребности рыбы S_1 составляют 1 ед. F_1 и 3 ед. F_2 в

день. Аналогичные потребности для вида S_2 составляют две единицы F_1 и 1 ед. F_2 . Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне 500 ед. F_1 и 900 ед. F_2 . Как следует заселять озеро, чтобы максимизировать общую массу двух видов рыб?

Задача о рационе хищника, максимизирующем энергетическую ценность пищи. Гнездо хищника находится в точке A . Потенциальные источники его пищи находятся на участках B и C . Время, необходимое хищнику для того, чтобы добраться до участков B и C и возвратиться с единицей добычи, полагается равным 2 и 3 мин соответственно. На участке B хищник затрачивает на поимку единицы добычи x_1 2 мин. На участке C ему требуется лишь 1 мин, чтобы поймать единицу добычи x_2 . Энергетическая ценность одной единицы x_1 оценивается в 25 Дж, а единицы x_2 – в 30 Дж. Известно также, что на путь из гнезда в любой из участков и обратно хищник может затрачивать не более 120 мин в сутки и что на поиск жертв он может тратить не более 80 мин в сут. Требуется узнать, сколько каких жертв должен потреблять хищник, чтобы максимизировать энергетическую ценность своей пищи?

Задача о максимизации чистой энергетической прибавки животного в зависимости от его активности. Активность пасущегося животного можно грубо разделить на три состояния: 1) поедание пищи; 2) передвижение; (к новым пастбищам или с целью избегания хищников); 3) покой. Чистая энергетическая прибавка сверх основных потребностей на поддержание жизни при поедании пищи составляет 200 калорий в час. Чистые энергетические потери при движении и покое соответственно составляют 150 и 50 калорий в час. Допустим, что животное должно находиться в покое не менее 6 ч. в день и что время, затрачиваемое на поедание пищи, не может превосходить времени движения (ради избегания хищников и предотвращения переедания). Как должен

быть разбит день между тремя состояниями животного, чтобы максимизировать чистую энергетическую прибавку?

В заключение приведем пример формализации задачи из области природоохранной деятельности.

Задача оптимизации программы вырубki леса с учетом фактора биоразнообразия. Перед тем, как сформулировать математическую постановку задачи, необходимо исследовать проблему, собрать необходимые данные для решения задачи.

Леса включают в себя приблизительно 12000 га и находятся на побережье. Приблизительно 2400 га – это устье реки, парки или леса, использующиеся для других рекреационных целей. Остальные 9500 га, которые состоят из 10 отдельных участков, размеры которых колеблются от 110 до 3870 га, доступны для многоцелевого использования и могут подвергаться техногенному воздействию. Участки леса находятся среди земель, на которых производится как сельскохозяйственная, так и лесная продукция. Доминирующая древесная порода – сосна: 85 % лесной территории покрыты сосняками или смешанными сосновыми древостоями. Оставшиеся 15 % территории покрыты смешанными лиственными древостоями. Леса, предназначенные для многоцелевого использования, разделены на 66 выделов на основе данных последнего лесоустройства. Имеются таблицы хода роста древостоев. Планируемый 60-летний горизонт проведения лесозаготовок разделен на 3 промежутка по 20 лет каждый.

Цель управления многоцелевыми лесами заключается в максимизации выхода ликвидной древесины с учетом необходимости сохранения живой первозданной природы. Кроме того, объем древесины, приблизительно равный расчетной лесосеке, полагается заданным. Лесозаготовки выполняются по сплошосечной технологии.

Решим данную проблему на примере участка площадью в 360 га, состоящего из трех выделов, характеристики которых представлены в таблице 16.3. Заметим, что рассматриваемая далее технология принятия решений ввиду аналогичности целей и ограничений может быть использована и для планирования лесозаготовок по другим участкам.

Таблица 16.3 – Характеристики выделов

Тип древос- стоя	Пло- щадь	Запас вырубаемой древесины в будущем, м ³ /га, через		
		0 – 20 лет	21 – 40 лет	41 – 60 лет
1	100	3	10	30
2	200	12	17	20
3	60	25	20	18

1. В качестве показателя эффективности целесообразно взять годовой выход деловой древесины.

2. В качестве управляемых переменных задачи следует взять площади каждого из трех типов древостоя, которые могут быть вырублены в каждый из трех периодов, т. е. 9 переменных x_{ij} , где i – тип древостоя, j – период рубки:

x_{11} – площадь древостоя типа 1 вырубаемого в период 1, га;

x_{12} – площадь древостоя типа 1 вырубаемого в период 2, га;

x_{13} – площадь древостоя типа 1 вырубаемого в период 3, га;

x_{21} – площадь древостоя типа 2 вырубаемого в период 1, га;

x_{22} – площадь древостоя типа 2 вырубаемого в период 2, га;

x_{23} – площадь древостоя типа 2 вырубаемого в период 3, га;

x_{31} – площадь древостоя типа 3 вырубаемого в период 1, га;

x_{32} – площадь древостоя типа 3 вырубаемого в период 2, га;

x_{33} – площадь древостоя типа 3 вырубаемого в период 3, га.

3. Целевая функция:

$$F = 3x_{11} + 12x_{21} + 25x_{31} + 10x_{12} + 17x_{22} + 20x_{32} + 30x_{13} + 20x_{23} + 18x_{33} \rightarrow \max.$$

4. Ограничения:

По общей вырубаемой площади, га. Общая вырубаемая площадь в каждом типе древостоя за 3 периода не может превышать площадь типа древостоя. Это очевидное ограничение может быть формализовано следующим образом:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 200,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 60.$$

По равномерности выхода вырубаемой древесины, м³. То же самое требование налагается на объем древесины, который вырубается каждый период. С повторяющимися циклами, проблема решается получением самого высокого уровня рубки:

$$3 x_{11} + 12 x_{21} + 25 x_{31} = 2000,$$

$$10 x_{12} + 17 x_{22} + 20 x_{32} = 2000,$$

$$30 x_{13} + 20 x_{23} + 18 x_{33} = 2000.$$

По расчетной лесосеке, га. Периодическая вырубаемая лесосека для целей сохранения первозданной природы предполагается равной 120 га. Такое ограничение еще указывает и на то, что весь лес должен быть вырублен в 60 лет. Для трех периодов это условие формулируется следующим образом:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120.$$

По ограничению в сохранении окружающей среды, га. Условие принимает во внимание ограничения экологов. Вырубемая лесосека для каждого типа древостоя в каждый период обеспечивает вегетационную структуру для обитателей леса. Это требование помогает обеспечить сбалансированность распределения возрастного состава деревьев. Максимальная вырубаемая площадь по каждому типу древостоя за каждый период: для древостоя 1 типа – 40 га, 2 типа – 90 га, 3 типа – 25 га:

$$x_{11} \leq 40, x_{21} \leq 90, x_{31} \leq 25,$$

Необходимо найти такое решение системы $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$,

где

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l; l \leq n), \quad (16.9)$$

при котором линейная функция F принимает оптимальное (т. е. максимальное или минимальное) значение.

Система (16.7) называется *системой ограничений*, а функция F – *линейной функцией*, линейной формой, целевой функцией или функцией цели.

Более кратко общую задачу линейного программирования можно представить в виде:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\text{ или } \rightarrow \min) \quad (16.10)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad (i = k + 1, k + 2, \dots, m), \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l; l \leq n). \end{aligned} \quad (16.11)$$

Оптимальным решением (или оптимальным планом) задачи линейного программирования называется решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ системы ограничений (16.7), удовлетворяющее условию (16.9), при котором линейная функция (16.8) принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Если все переменные неотрицательные ($x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$) и система ограничений состоит лишь из одних неравенств, задача линейного программирования называется *стандартной*. Если система ограничений состоит из одних уравнений, то задача называется *канонической*.

Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче.

Тогда формулировка задачи в канонической форме будет следующей: найти такое решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$, удовлетворяющее системе (16.12) и условию (16.9), при котором функция (16.8) принимает максимальное значение.

16.7 Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Математическая постановка задачи линейной оптимизации хорошо изучена и не представляет научных проблем. Для нашего курса практического применения в моделировании необходимо четко помнить фундаментальную теорему линейного программирования. *Задача линейного программирования тогда и только тогда имеет решение, когда многогранник решений ограничен.* Необходимо ясно представлять, когда решение единственно, не ограничено, не существует и имеется множество решений. Наиболее четкое представление всех возможных ситуаций дает графическая интерпретация в двухмерном пространстве.

Продемонстрируем графический способ решения оптимизационной задачи на примере задачи о рационе хищника из § 16.5.

Средний дневной рацион хищника составляет 10 ед. пищи A , 12 ед. пищи B , и 12 ед. пищи C . Эти потребности удовлетворяются в процессе его питания двумя видами жертвы. Одна жертва вида I дает соответственно 5, 2, 1 ед. пищи A , B , C , а вида II соответственно 1, 2 и 4 ед. пищи A , B и C . На поимку и усвоение жертвы вида I требуется в среднем 3 ед. энергии. Аналогичные потребности для вида II составляют 2 ед. энергии. Сколько жертв каждого вида следует поймать хищнику, чтобы удовлетворить свои пищевые потребности с наименьшими затратами энергии?

Составим справочную таблицу задачи (таблица 16.4).

Таблица 16.4 – Рацион хищника

Состав пищи	Необходимый минимум	Состав пищи в каждой жертве	
		I	II
<i>A</i>	10	5	1
<i>B</i>	12	2	2
<i>C</i>	12	1	4

Постановка задачи.

1. В качестве показателя эффективности целесообразно взять энергетические затраты хищника.

2. В качестве управляемых переменных задачи следует взять:

x_1 – количество жертв I вида, отлавливаемого хищником;

x_2 – количество жертв II вида, отлавливаемого хищником.

3. Целевая функция:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$$

где 3 – энергетические затраты хищника на поимку жертвы вида I; 2 – энергетические затраты хищника на поимку жертвы вида II.

4. Ограничения по составу необходимых питательных веществ в рационе хищника:

$$5x_1 + 1x_2 \geq 10,$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 12,$$

$$1x_1 + 4x_2 \geq 12.$$

5. Ограничения по области определения: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Решение (рисунок 16.1).

На первом шаге следует определить все возможные отрицательные значения переменных x_1 и x_2 , которые удовлетворяют ограничениям. С этой целью в декартовой системе координат наносим линии, соответствующие уравнениям прямых:

$$5x_1 + 1x_2 = 10;$$

$$\begin{aligned}
 2x_1 + 2x_2 &= 12; \\
 1x_1 + 4x_2 &= 12; \\
 x_1 &= 0, x_2 = 0.
 \end{aligned}$$

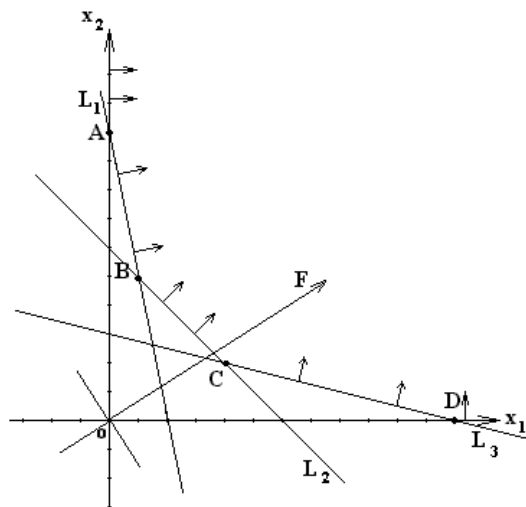


Рисунок 16.1 – Графический метод решения задачи о рационе хищника

Строить их проще всего по двум точкам. Например, построим первую линию. Пусть $x_1 = 0$, тогда $x_2 = 10$. Если взять $x_1 = 1$, то x_2 получится 5. Дальше через эти две точки можно по линейке провести прямую линию. Аналогично строим все остальные линии. Не забываем, что уравнение оси абсцисс: $x_2 = 0$, а оси ординат: $x_1 = 0$.

Дальше заштриховываем область, в точках которой выполняются все ограничения. Каждая такая точка называется *допустимым решением*, а множество всех допустимых решений называется *допустимой областью*. Очевидно, что решение задачи ЛП состоит в отыскании наилучшего решения в допустимой области, которое, в свою очередь, называется *оптимальным*.

В рассматриваемом примере оптимальное решение представляет собой допустимое решение, минимизирующее функцию $F = 3x_1 + 2x_2$.

Значение целевой функции, соответствующее оптимальному решению, называется *оптимальным значением* задачи ЛП. В нашем случае, для нахождения оптимального решения проводим через начало координат радиус-вектор целевой функции, он имеет координаты (3;2). Затем строим линию уровня, перпендикулярную радиус-вектору. Путем параллельного переноса полученной прямой находим вершины, в которых происходит только касание с допустимой областью. В рассматриваемой задаче многоугольник решений представляет собой неограниченную область, а точкой входа в область является точка В. Ее координаты находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 = 12, \\ x_1 = 1; x_2 = 5; \end{cases}$$

Таким образом, рацион, удовлетворяющий пищевые потребности хищника при наименьших затратах энергии, означает ежедневное потребление в среднем одной жертвы вида I и пяти жертв вида II. Энергетические затраты хищника при этом составят $3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 13$ ед. энергии. Специализируясь только на одном виде жертвы, хищник смог бы удовлетворить свои потребности, но лишь при существенно большем потреблении и более высоких затратах энергии.

16.8 Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим способом

1. Обозначим неизвестные.
2. Составим систему ограничений и целевую функцию.
3. Запишем уравнения граничных прямых и построим их графики.
4. Определим область допустимых решений системы ограничений задачи.
5. Приравняем целевую функцию нулю и строим радиус-вектор

$$\vec{F} = \left(\frac{dF}{dx_1}; \frac{dF}{dx_2} \right).$$

Координатами вектора \vec{F} являются координаты целевой функции.

6. Проводим линию уровня, которая перпендикулярна \vec{F} .
7. Линию уровня перемещаем по направлению вектора \vec{F} для задач на максимум и в направлении, противоположном \vec{F} для задач на минимум.

Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока у нее не окажется одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка, определяющая единственное решение задач ЛП, и будет точкой экстремума.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон области допустимых решений, то в таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а задача будет иметь бесчисленное множество решений.

16.9 Алгоритм симплексного метода

Графический метод ввиду большой размерности реальных практических задач ЛП достаточно редко применяется,

однако он позволяет ясно уяснить одно из основных свойств ЛП – *если в задаче ЛП существует оптимальное решение, то оно находится, по крайней мере, в одной из вершин допустимой области*. Несмотря на то, что допустимая область задачи ЛП состоит из бесконечного числа точек, оптимальное решение всегда можно найти путем целенаправленного перебора конечного числа ее вершин.

Рассматриваемый симплекс-метод решения задачи ЛП основывается на этом фундаментальном свойстве.

Практические расчеты при решении реальных задач симплексным методом выполняется в настоящее время с помощью компьютеров. Если расчеты осуществлять вручную, то удобно использовать так называемые симплексные таблицы. Далее мы рассмотрим алгоритм их составления, не углубляясь в его подробное обоснование. Для определенности считаем, что решается задача на отыскание максимума.

1. После введения добавочных переменных систему уравнений и линейную функцию записываем в виде, который называется *расширенной системой*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$F - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = 0.$$

Предполагаем, что все добавочные переменные имеют тот же знак, что и свободные члены; в противном случае используем так называемый *M-метод*.

2. Исходную расширенную систему заносим в первую симплексную таблицу. Последняя строка таблицы, в которой приведено уравнение для линейной функции цели, называется *оценочной*. В ней указываются коэффициенты функции цели с противоположным знаком: $b_i = -c_i$. В ле-

вом столбце таблицы записываем основные переменные (базис), в первой строке таблицы – все переменные (отмечая при этом основные), во втором столбце – свободные члены расширенной системы b_1, b_2, \dots, b_m . Последний столбец подготовлен для оценочных отношений, необходимых при расчете возможного наибольшего значения переменной. В рабочую часть таблицы (начиная с третьего столбца и второй строки) занесены коэффициенты a_{ij} при переменных из расширенной системы. Далее таблица преобразуется по определенным правилам.

3. Проверяем выполнение критерия оптимальности при решении задачи на максимум – наличие в последней строке отрицательных коэффициентов $b_i < 0$ ($c_i > 0$). Если таких нет, то решение оптимально, достигнут $\max F = c_0$ (в левом нижнем углу таблицы), основные переменные принимают значения a_{i0} (второй столбец), т. е. получаем оптимальное базисное решение.

4. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент $b_i < 0$ в последней строке определяет *разрешающий столбец* s .

Составляем оценочные ограничения каждой строки по следующим правилам:

- 1) ∞ , если b_i и a_{is} имеют разные знаки;
- 2) ∞ , если $b_i = 0$ и $a_{is} < 0$;
- 3) ∞ , если $a_{is} = 0$;
- 4) 0, если $b_i = 0$ и $a_{is} > 0$;
- 5) $\left| \frac{b_i}{a_{is}} \right|$, если a_{i0} и a_{is} имеют одинаковые знаки.

Определяем $\min \left\{ \left| \frac{b_i}{a_{is}} \right| \right\}$. Если конечного минимума нет,

то задача не имеет конечного оптимума ($F_{\min} = \infty$). Если минимум конечен, то выбираем строку q , на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее разре-

шающей строкой. На пересечении разрешающей строки и столбца находится *разрешающий элемент* a_{is} .

5. Переходим к следующей таблице по правилам:

а) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной x_q – переменную x_s ;

б) новую строку с номером q получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{qs} ;

в) расставляем нули и единицы:

– в новой таблице в столбце, соответствующем разрешающему столбцу предыдущей таблицы на месте разрешающего элемента – «1», остальные – «0»;

– если в начальной строке новой таблицы имеются коэффициенты, равные «0», то соответствующие им столбцы переписываются без изменения;

– если в разрешающем столбце симплексной таблицы имеются коэффициенты, равные «0», то соответствующие строки в новой таблице переписываются без изменения;

– остальные элементы таблицы вычисляются по правилу треугольника:

новый коэф- фици- ент	=	пре- ды- ду- щий	–	соответствующий коэффициент разрешающего столбца старой таблицы	×	соответствующий коэффициент начальной строки новой таблицы
--------------------------------	---	---------------------------	---	---	---	--

Далее переходим к пункту 3 алгоритма.

16.10 Пример решения задачи симплекс-методом

Задача об использовании ресурсов. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов $S_1, S_2, S_3,$ и S_4 . Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 16.5.

Таблица 16.5 – Справочная таблица для задачи о ресурсах

В ид ре сурса	За пас ре сурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	–	1
S_4	21	3	–

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3 руб. Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от реализации будет максимальной. Такая постановка задачи часто применяется в экономике. Но ограничения на ресурсы могут быть вызваны и экологическими соображениями.

Постановка задачи.

Обозначим через x_1 и x_2 – число единиц продукции соответственно P_1 и P_2 , запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $(1x_1 + 3x_2)$ единиц ресурса S_1 , $(2x_1 + 1x_2)$ единиц ресурса S_2 , $(1x_2)$ единиц ресурса S_3 , и $3x_1$ единиц ресурса S_4 . Так как потребление ресурсов S_1 , S_2 , S_3 , и S_4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21. \end{cases} \quad (16.13)$$

По смыслу задачи переменные

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (16.14)$$

Суммарная прибыль F от реализации продукции P_1 составит $2x_1$ руб. и от реализации продукции P_2 : $3x_2$ руб., т. е.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \quad (16.15)$$

Итак, математическая модель задачи: *найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе 16.13 и условию 16.14, при котором функция 16.15 принимает максимальное значение.*

Расширенная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21. \end{cases}$$

Линейную функцию представим в виде:

$$F - 2x_1 - 3x_2 = 0.$$

Заполняем первую симплексную таблицу (таблица 16.6), в которой переменные x_3, x_4, x_5, x_6 основные. Последняя строка заполняется коэффициентами линейной функции с противоположным знаком (см. п. 2 алгоритма).

Таблица 16.6 – Первая симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	18	1	3	1	0	0	0	18/3
x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
x_5	5	0	1	0	0	1	0	5
x_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
F	0	-2	-3	0	0	0	0	

В соответствии с п. 3 алгоритма проверяем критерий оптимальности.

В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем из них наибольший по модулю (-3); второй столбец разрешающий, переменная x_2 перейдет в основные (этот столбец отмечен стрелкой).

В соответствии с п. 4 находим оценочные отношения $x_2 = \min \{18/3; 16; 5; \infty\} = 5$.

Третья строка является разрешающей (отмечена горизонтальной стрелкой). На пересечении разрешающих строки и столбца стоит разрешающий элемент $a_{33} = 1$.

Строим таблица 5.2 по правилам п. 5 алгоритма:

- а) в новом базисе основные переменные: x_3, x_4, x_2, x_6 ;
- б) расставляем нули и единицы;

В последней строке против всех основных переменных ставим 0. Третья строка получается делением на разрешающий элемент $a_{33} = 1$. Остальные клетки заполняем по правилу треугольника.

Например, $b' = 18 - \frac{3 \cdot 5}{1} = 3$, $a' = 1 - \frac{3 \cdot 0}{1}$ и т. д.

Получаем вторую симплексную таблицу (таблица 16.7).

Таблица 16.7 – Вторая симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	3	1	0	1	0	-3	0	3
x_4	11	2	0	0	1	-1	0	11/2
x_2	5	0	1	0	0	1	0	∞
x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
F	15	-2	0	0	0	3	0	

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь первый столбец разрешающий; x_1 – переходит в основные, $\min\{3/1; 11/2; \infty; 7\} = 3$; первая строка разрешающая; a_{11} – разрешающий элемент.

Новая симплексная таблица примет вид таблицы 16.8.

Таблица 16.8 – Третья симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1	0	-3	0	∞
x_4	5	0	0	-2	1	5	0	5/5
x_2	5	0	1	0	0	1	0	5/1
x_6	12	0	0	-3	0	9	1	12/9
F	21	0	0	2	0	-3	0	

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен; пятый столбец и вторая строка разрешающие, $a_{25} = 5$ – разрешающий элемент. Приходим к таблице 16.9.

Таблица 16.9 – Четвертая симплексная таблица

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1	0	-1/5	3/5	0	0	
x_5	1	0	0	-2/5	1/5	1	0	
x_2	4	0	1	2/5	-1/5	0	0	
x_6	3	0	0	3/5	-9/5	0	1	
F	24	0	0	4/5	3/5	0	0	

Критерий оптимальности выполнен, значит $F_{max} = 24$, оптимальное базисное решение (6; 4; 0; 0; 1; 3).

Прибыль предприятия принимает максимальное значение 24 руб. при реализации 6 единиц продукции P_1 ($x_1 = 6$) и 4 единиц продукции P_2 ($x_2 = 4$). Дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 показывает разницу между запасами ресурсов каждого вида и их потреблением, т. е. остатки ресурсов. При оптимальном плане производства $x_3 = x_4 = 0$, т. е. остатки ресурсов S_1 и S_2 равны нулю, а остатки ресурсов S_3 и S_4 равны соответственно 1 и 3 единицы.

Мы рассмотрели алгоритм решений задач ЛП симплекс-методом. Конечно «вручную» подобные вычисления и анализ уже не проводятся и для этого используются современные компьютерные возможности. В настоящее время существует множество простых для пользователя программных продуктов, реализующих симплекс-метод для компьютерного линейного программирования. Интересующимся рекомендуем наше университетское пособие [Глаголев, Смагин, 2005], где рассмотрена агроэкологическая целевая задача ЛП для экономии затрат на внесение удобрений с решением как графическим, так и симплекс-методом на базе компьютерной среды Matlab.

16.11 Анализ задач линейного программирования

При построении моделей оптимизационных задач исследователю необходимо пройти следующие этапы моделирования:

1. Постановка задачи и обоснование критерия оптимальности. На данном этапе необходимо сформулировать задачу, провести качественный и количественный анализ моделируемого объекта, оценить возможность сбора достоверной информации. Для выбора критерия оптимальности необходимо провести сравнение возможных критериев и выбрать соответствующий задачам эксперимента критерий.

2. Разработка структурной математической модели. На данном этапе производится выбор метода решения поставленной задачи, определяются учитываемые ограничения и участвующие в них переменные, производится унификация символики и подбираются аналоги в постановке задачи.

3. Сбор и обработка информации. Наиболее трудоемкий этап. Необходимо классифицировать и выверить собранную информацию, провести занесение ее в созданные базы данных, сформировать дубликаты баз, провести контрольное суммирование и т. д.

4. *Построение числовой модели.* Запись матрицы задачи в соответствии с принятыми обозначениями и с учетом единиц измерения для конкретной программы расчета на ЭВМ.

5. *Решение задачи на ЭВМ.* Включает в себя отладку, исправление синтаксических ошибок, контрольные прогоны задачи на известных тестовых примерах, получение исчерпывающей выходной информации на твердых носителях или в электронной форме для чтения на своем компьютере в форме, удобной для представления отчета.

6. *Анализ решения.* Оценка адекватности полученного решения. Ретроспективные расчеты по модели, сопоставление с имеющимися результатами других исследователей, предыдущими данными, расчетами по другим моделям, экспертными оценками и т. д. Подготовка и редактирование данных для отчета.

7. *Корректировка задачи при установлении неадекватности.* Установление областей применимости модели, границ параметров по каждому эндогенному параметру и областей применимости модели по экзогенным параметрам.

8. *Написание отчета по исследованию модели.* Подведение итогов, формулирование выводов и предложений, построение прогнозов развития исследуемого объекта, выявление связей между основным параметрами и результирующим показателем.

16.12 Сущность и цели анализа решения задач ЛП

Впервые анализ оптимального плана поставил как экономическую задачу Л. В. Канторович. Анализ опирается на двойственные оценки оптимального плана, матрицу коэффициентов замещения и границы устойчивости каждой строки и переменной. Различают два уровня анализа для специалистов (сокращенная форма) и для практических работников (полная форма). Сокращенная форма анализа до-

пускает понятные только специалистам сокращения и специальную терминологию. Полная форма должна содержать информацию в понятной всем практическим работникам форме.

Цели анализа:

а) дать общую оценку полученному решению, выявить вошедшие и не вошедшие в оптимальный план переменные, выявить экстремальное значение целевой функции;

б) сопоставить полученное решение с рассчитанным традиционными методами решением и определить эффект оптимизации плана;

в) выявить возможности и резервы развития моделируемого объекта в расчетном периоде для подготовки управленческих решений;

г) установить пределы возможностей корректировки оптимального решения и получения новых вариантных решений при изменении первоначальных параметров задачи.

16.13 Пример анализа оптимального решения

Покажем анализ оптимального решения на простом примере. Пусть хозяйство располагает 850 га земли, 15 тыс. т органических удобрений и затрачивает 50 тыс. чел.-дн. Имеются семена картофеля, капусты и многолетних трав.

Необходимо найти оптимальное распределение имеющейся земли с учетом того, что каждый гектар земли под капустой принесет 1000 руб. дохода, картофеля – 800, а многолетних трав – 200 руб.

Затраты труда на возделывание 1 га капусты, картофеля и многолетних трав равны, соответственно, 50, 30 и 15 чел.-дн. Расходы органических удобрений на те же культуры равны 20, 15 и 10 т на 1 га. В процессе решения задачи получим итоговую таблицу 16.10.

Таблица 16.10 – Итоговая таблица анализа оптимального решения

Строка	Коэффициент	Решение	Удобрения	Земля	Многолетние травы
Картофель	800	400	-0,2	4	2
Недоиспользованный труд	0	15500	-4	30	5
Капуста	1000	450	0,2	-3	-1
Доход		770000	40	200	400

В данной таблице экстремальное значение целевой функции равно 770000, двойственные оценки 40, 200 и 400.

Решением задачи является 400 га картофеля и 450 га капусты без использования многолетних трав. В таком случае остаются недоиспользованными 15500 чел.-дн. Верхняя, правая часть таблицы является *матрицей замещения*, внизу расположены двойственные оценки.

Двойственные оценки имеют размерность целевой функции и численно равны изменению целевой функции при изменении значения ресурса на единицу. В частности, в данном примере двойственная оценка 40 равно максимально возможному приращению дохода при увеличении имеющегося количества удобрений на 1 т. На 200 руб. может увеличиться доход при увеличении площади земли на 1 га. Крайний справа столбец отражает не вошедшую в базис переменную. В таких случаях для анализа все значения в таком столбце умножаются на единицу. Тогда при введении в севооборот многолетних трав каждый гектар будет снижать доход на 400 руб.

Чрезвычайно интересно анализировать матрицу замещения. Элементы матрицы имеют размерность соответствующей строки и указывают, каким образом должны измениться величины в строке для достижения оптимального

плана при изменении величины ресурса в столбце. В нашем примере при получении дополнительной тонны удобрений максимально возможный эффект в 40 руб. может быть достигнут только посредством уменьшения площади под картофелем на 0,2 га и соответствующего увеличения ее под капустой. При этом недоиспользованный труд будет уменьшен на 4 чел.-дн.

Существуют пределы корректировок оптимальных планов. Это связано с неотрицательностью большинства переменных в оптимальном плане. Например, при введении 1 га многолетних трав площадь под картофелем уменьшится на 2 га. При введении в севооборот 100 га трав площадь картофеля уменьшится на 200 га. Можно бы предположить, что при введении 300 га трав, площадь соответственно уменьшилась на 600 га, но это невозможно, ибо общая площадь под картофелем всего равна 400 га. Легко подсчитать предел корректировки введения многолетних трав. Эта величина определяется делением общей площади под культурой (400 га) на соответствующий коэффициент (в нашем случае 2) и предельная корректировка равна 200 га.

В последующих разделах мы продолжим анализ оптимизационных задач в экологии в связи с антропогенными воздействиями человека на природу, регуляцией природопользования и экологизации производства.

ГЛАВА 17. ЭЛЕМЕНТЫ ЭКОЛОГИСТИКИ

17.1. Проблема экологии транспорта

Автотранспорт является одним из крупнейших загрязнителей атмосферного воздуха. Для решения проблемы загрязнения окружающей среды, связанной с выбросами от транспортных средств, разработан комплекс компьютерных программ. Они используются как для оценки воздействия на качество атмосферного воздуха различных действующих объектов транспортной инфраструктуры, так и для моделирования изменения концентраций основных загрязнителей при проведении комплексов различных мероприятий (градостроительных, по организации и регулированию дорожного движения, по улучшению организации перевозок, контролю выбросов транспортных средств и др.).

Одна из классических задач линейного программирования, которая была специально создана для управления транспортными перевозками, так и называется *транспортная задача*.

Цель транспортной задачи – разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и в результате является одним из способов решения проблемы загрязнения окружающей среды.

17.2 Общая постановка задачи

В общем виде задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства A_1, A_2, \dots, A_m имеется однородный груз в количестве соответственно a_1, a_2, \dots, a_m .

Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n в количестве соответственно b_1, b_2, \dots, b_n .

Стоимость перевозки единицы груза (тариф) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij} .

Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы и имеющий минимальную стоимость.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть *закрытыми и открытыми*.

Если $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то задача называется *закрытой*.

Если $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$, то – *открытой*.

Обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j . Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Ее условия запишем в распределительную таблицу, которую будем использовать для нахождения решения (таблица 17.1.).

Таблица 17.1– Распределительная таблица

A_i	B_j					
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_j
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_j
A_1 a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1j} c_{1j}	...	x_{1n} c_{1n}
A_2 a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2j} c_{2j}	...	x_{2n} c_{2n}
...
A_i a_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	...	x_{ij} c_{ij}	...	x_{in} c_{in}
...
A_m a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mj} c_{mj}	...	x_{mn} c_{mn}

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид:

$$L(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Оптимальным решением задачи является матрица

$$X_{opt} = (x_{ij})_{m \times n},$$

удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции. Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:

- нахождение исходного опорного решения;
- проверка этого решения на оптимальность;
- переход от одного опорного решения к другому.

Рассмотрим каждый из этих этапов.

17.3. Нахождение исходного опорного решения

Условия задачи и ее исходное опорное решение будем записывать в распределительную таблицу. Клетки, в которые поместим грузы, называются занятыми, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные клетки незанятые, или пустые, им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать тарифы. Существует несколько способов нахождения исходного опорного решения.

Рассмотрим один из них – *метод минимального тарифа (элемента)*. Согласно этому методу, грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок c_{ij} . Далее поставки распреде-

ляются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем $m + n - 1$. В этом случае недостающее их число заполняется клетками с нулевыми поставками, такие клетки называют условно занятыми.

Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждой строке и столбце было не менее чем по одной занятой клетке.

Рассмотрим нахождение исходного опорного решения транспортной задачи на конкретном примере.

17.4 Определение эффективного варианта доставки изделий к потребителю

На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (усл. ед.).

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Проверим, является ли данная транспортная задача закрытой:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т,}$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т,}$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j,$$

следовательно, данная транспортная задача закрытая. Найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа (таблица 17.2).

Таблица 17.2 – Поиск опорного решения

a_i		b_j		
		1	2	3
		140	300	160
1	90	2	5	2
2	400	4	1	5
3	110	3	6	8
		90	300	60

Число занятых клеток в таблице 17.2 равно $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, т. е. условие невырожденности выполнено. Получили исходное опорное решение, которое запишем в виде матрицы:

$$X_I = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составляет

$$L(X_{\text{оннл}}) = 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610 \text{ усл. ед.}$$

17.5 Проверка найденного опорного решения на оптимальность

Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система $m + n$ действительных чисел u_i и v_j , удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ для свободных клеток.

Числа u_i и v_j называют *потенциалами*. В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i .

Потенциалы и v_j находят из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для занятых клеток. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Так, если известен потенциал u_i , то $v_j = c_{ij} - u_i$; если известен потенциал v_j , то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Эту оценку называют *оценкой свободных клеток*. Если $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} \geq 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Проверим найденное опорное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу 17.3 столбец u_i и строку v_j . Полагая $u_1 = 0$, запишем это значение в последнем столбце таблицы.

Рассмотрим занятую клетку первой строки, которая расположена в первом столбце (1,1), для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$, откуда $v_1 = 2$. Это значение запишем в последней строке таблицы. Далее надо рассматривать ту из занятых клеток таблицы, для которой один из потенциалов известен.

Таблица 17.3 – Проверка опорного решения на оптимальность

a_i		b_j			u_i	
		1	2	3		
		140	300	160		
1	90	90	2	5	2	0
2	400	4	300	1	5	-2
3	110	50	3	6	8	1
v_j		2	3	7		

Рассмотрим занятую клетку (3,1): $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, откуда $u_3 = 1$.

Для клетки (3,3): $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.

Для клетки (2,3): $u_2 + v_3 = 5$, $u_3 = 7$, $v_2 = -2$.

Для клетки (2,2): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

Получили одну оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

17.6. Переход от одного опорного решения к другому

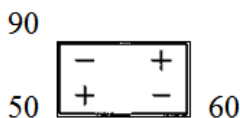
Наличие положительной оценки свободной клетки ($\Delta_{ij} > 0$) при проверке опорного решения на оптимальность свидетельствует о том, что полученное решение не оптимально и для уменьшения значения целевой функции надо перейти

к другому опорному решению. При этом надо перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные.

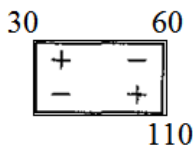
Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых клеток – свободной. Для свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$ строится цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого, кроме одной, находятся в занятых клетках; углы прямые, число вершин четное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (–) и (+). У вершин со знаком (–) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (–). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение.

Это решение проверяем на оптимальность, и т. д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим переход от одного опорного решения к другому на заданном примере. Строим цикл для клетки (1,3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (–) и записываем грузы:



У вершин со знаком (–) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл:



Новое опорное решение:

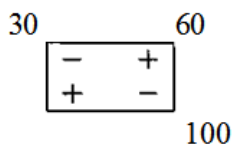
$$X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого запишем его в распределительную таблицу, найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток (таблица 17.4).

Таблица 17.4 – Поиск потенциалов занятых и свободных клеток

a_i		b_j			u_i
		1	2	3	
		140	300	160	
1	90	30	5	60	0
2	400	4	1	5	33
3	110	3	6	8	2
v_j		2	-2	2	

Построим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$:



Произведем перераспределение грузов:

+	-
-	+

Получим новое решение, которое занесем в таблицу 17.5. Проверим его на оптимальность.

Таблица 17.5 – Новое решение

a_i		b_j			u_i	
		1	2	3		
		140	300	160		
1	90	30	2	5	2	0
2	400	4	300	1	5	33
3	110	110	3	6	8	2
v_j		2		-2	2	

Получим

$$\Delta_{11} = -1; \Delta_{12} = -1; \Delta_{32} = -6; \Delta_{33} = -4.$$

Итак,

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное. Стоимость транспортных расходов равна

$$L(X)_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ усл. ед.}$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на $1610 - 1280 = 330$ усл. ед.

ГЛАВА 18. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

18.1. Определение эколого-экономической системы

Академик М. Я. Лемешев определил *эколого-экономическую систему (ЭЭС)* как интеграцию экономики и природы, представляющую собой взаимосвязанное и взаимообусловленное функционирование общественного производства и протекание естественных процессов в природе.

Существует две интерпретации понятия ЭЭС – глобальная и территориальная. Согласно первой ЭЭС трактуется как экологически ориентированная социально-экономическая формация – цель устойчивого развития.

Для отдельного региона или промышленного комплекса ЭЭС – это ограниченная определенной территорией часть техносферы, в которой природные, социальные и производственные структуры и процессы связаны взаимоподдерживающими потоками вещества, энергии и информации.

ЭЭС представляет собой сочетание совместно функционирующих экологической и экономической систем, обладающей эмерджентными свойствами.

Напомним, что экосистема – это сообщество различных живых организмов, так взаимодействующих между собой и со средой обитания, что поток энергии создает устойчивую структуру и круговорот веществ между живой и неживой частями системы.

В свою очередь экономическая система является организованной совокупностью производительных сил, которая преобразует входные материально-энергетические потоки природных и производственных ресурсов в выходные потоки предметов потребления и отходов производства. Таким образом, часть материальных элементов экологической си-

стемы, в том числе и элементов среды обитания человека, используется как ресурс экономической системы.

За последние 250 лет человечеству удалось существенно увеличить производство и улучшить качество жизни. И сейчас экономический прогресс открывает все более и более эффективные способы превращения имеющихся в его распоряжении ресурсов в желанные товары и услуги. Но это не отменяет фундаментального закона – *человек все равно испытывает и будет испытывать дефицит*.

Ресурсы в мире ограничены, а человеческие желания бесконечны. И, поскольку всего того, что хочется, иметь невозможно, приходится выбирать.

Если для производства какого-либо одного товара мы используем труд, станки, природные ресурсы, то это вынуждает отказываться от других товаров, которые могли бы быть произведены в иной ситуации. Этот выбор в рыночной экономике осуществляют *потребительский спрос и издержки производства*. Спрос на товар – сигнал потребителя, указывающий предпринимателю, что следует производить.

Однако чтобы произвести, исходные ресурсы должны быть «откуплены» у других направлений их использования. Издержки, затраты на закупку ресурсов напоминают предпринимателю, что существуют и другие производства, требующие тех же ресурсов.

В результате производители имеют сильный стимул поставлять на рынок только те товары, которые могут быть проданы по цене, по крайней мере, равной издержкам их производства, и, особенно, те товары, ценность которых в глазах потребителя в наибольшей степени превышает затраты на их производство.

Важно понимать, что товар может быть предоставлен человеку или группе людей бесплатно, только если его кто-

то оплатит. И это лишь перераспределит бремя издержек, ничуть его не уменьшая.

Политики часто говорят о «бесплатном образовании», «бесплатной медицине» или «бесплатном жилье». Эти выражения способны лишь ввести в заблуждение. Ни одно из благ не предоставляется бесплатно – для производства каждого из них требуются дефицитные ресурсы.

Например, здания, труд и другие ресурсы, вовлеченные в процесс обучения, могли бы использоваться для производства продовольствия, оказания услуг в сфере отдыха и развлечений и т. д.

Издержки «производства образования» есть стоимость тех товаров, от которых пришлось отказаться в результате того, что требуемые для их производства ресурсы были потрачены на образование. Правительство может переложить эти издержки, с одних плеч на другие, но избавиться от них невозможно.

18.2. Модель В.В. Леонтьева «затраты – выпуск» и ее экологический смысл

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой – потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида.

Впервые эта проблема была сформулирована в виде *математической модели* в 1936 году в трудах известного американского экономиста В.В. Леонтьева. С помощью нее он пытался проанализировать причины экономической депрессии США 1929–32 гг.

Основной смысл межотраслевой модели Леонтьева заключается в следующем: в основе экономики лежит баланси-

рование товарных и денежных потоков между различными ее отраслями, и изменение в любой из них немедленно сказывается и на всех остальных.

В 1973 г. В.В. Леонтьев был удостоен Нобелевской премии по экономике «за развитие метода «затраты – выпуск» и за его применение к важным экономическим проблемам».

Будучи одним из первых экономистов, озабоченных воздействием экономической активности на качество окружающей среды, Леонтьев привел в своей Нобелевской лекции модель «затраты – выпуск», относящуюся к мировой экологии, в которой загрязнение среды отчетливо фигурировало как самостоятельный сектор.

На макроэкономическом уровне эта модель применяется для анализа взаимосвязей между экономической и экологической системами.

В последние годы Леонтьев все большее внимание уделял экономическим аспектам охраны окружающей среды. По его мнению, проблему охраны среды должно решать государство. Он предлагает включить в национальный доход альтернативную стоимость загрязнения окружающей среды, а затем эквивалент этой стоимости за счет добавки к цене посредством специального налога изымать из корпораций и направлять на восстановление окружающей среды.

Анализ «затраты-выпуск» выявляет не только отношения обмена между отраслями, но и линейную зависимость между количеством отходов и уровнем производства в отрасли.

Для многих продуктов эмпирически определено количество шести вредных веществ, выбрасываемых в окружающую среду при уровне спроса на продукт в размере 1 млн долл. (Leontief – Ford, 1971).

В других исследованиях расчеты отходов ведутся по отношению к уровню дохода отрасли.

Для того чтобы проследить материальные потоки на более низкой ступени агрегирования, исследуется производственный процесс на предприятии с использованием внутривыпускных функций потребления. Кроме того, модели «затраты – выпуск» могут применяться для анализа взаимосвязей между предприятием и окружающей средой с целью совершенствования производственного процесса.

Структуру модели «затраты – выпуск», отражающей эколого-экономические взаимосвязи региона, можно представить в виде таблицы (таблица 18.1).

Таблица 18.1 – Эколого-экономический баланс

Затраты		Выпуск							
		Отрасли					Естественная среда		
		Сельское хозяйство	Промышленность	Сфера услуг	Домашнее хозяйство	Государственный сектор	Воздух	Вода	Земля
Отрасли	Сельское хозяйство	Экономические взаимосвязи					Воздействие экономики на естественную среду		
	Промышленность								
	Сфера услуг								
	Домашнее хозяйство								
	Государственный сектор								
Естественная среда	Воздух	Использование естественной среды для нужд экономики					Экологические взаимосвязи		
	Вода								
	Земля								

Таблица 18.2 представляет собой вариант таблицы 18.1, приспособленный для анализа производственных взаимосвязей на предприятии, причем здесь допустима любая степень конкретизации как факторов производства и внешних загрязнений, так и товарного продукта и отходов производства.

Таблица 18.2 – Балансовая матрица производства

Вход		Выход			
		Товарный продукт	Отходы (выбросы)		
			твердые	жидкие	газообразные
Факторы производства	Материалы				
	Энергия				
	Рабочее время				
	Машинное время				
Внешние загрязнения	Твердые				
	Жидкие				
	Газообразные				

Наглядным способом анализа материальных потоков между экономической и экологической системами является модификация метода «затраты – выпуск»: метод материального баланса.

С макроэкономической точки зрения этот баланс представляет собой сопоставление сырых материалов, взятых из природной среды, и отходов производства, возвращаемых в природную среду.

С микроэкономической точки зрения этот метод описывает потоки входящих, исходящих и повторно используемых материалов в производственном процессе на предприятии.

В основе концепции материального баланса лежит фундаментальное положение об изменении и сохранении вещества. Отображение в балансе исходных и конечных материалов производственного процесса позволяет выявить все побочные продукты производства, оценить их экономическую полезность и соответствие требованиям охраны окружающей среды.

Поскольку каждый вид энергии связан с массой, потоки вещества получают полное отражение только в том случае, если материальный баланс дополняется энергетическим.

На основе технических методов количественного и качественного измерения, контроля и анализа массы и энергии составляется комбинированный энергоматериальный баланс. При этом в зависимости от состава потоков вещества возникают проблемы агрегирования и дезагрегирования по таким критериям, как, например, вид вещества; агрегатное состояние; величина частиц; пропорции составных частей смеси; концентрация; загрязненность; температура; плотность; точка кипения; молекулярная масса и т. д.

Широко распространенным примером процесса преобразования исходных веществ в другие виды вещества и энергии является сжигание топлива в двигателе автомобиля. При этом коэффициент полезного действия в процессе производства основного продукта – движения – равен в среднем 24 %. Остальные 76 % составляют: энергия отходящих газов, – 37 %, тепло – 33 % и потери, связанные с трением механических частей двигателя – 6 %.

Решение физических проблем измерения, учета и преобразования веществ – задача естественных и технических наук. При экономическом анализе деятельности предприятия входящие и исходящие потоки продуктов в зависимости от их роли в достижении целей предприятия получают позитивную или негативную оценки. Если процессы потребления и /или производства продуктов не связаны с затрата-

ми или доходами, они не оказывают никакого влияния на прибыль, ликвидность и рост оборота. Изображение таких процессов в виде дополнительных затрат или дополнительных доходов необходимо для того, чтобы иметь возможность проверить действенность мероприятий, направленных на превращение издержек, связанных с охраной окружающей среды, в технологические (основные) издержки самого предприятия. Тем самым могут быть своевременно выявлены и учтены необходимые изменения производственного процесса.

18.3. Математический аппарат модели «затраты – выпуск»

Модель «затраты – выпуск» основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа. Рассмотрим ее на примере классической модели «затраты – выпуск».

В основе лежит система линейных уравнений, описывающих соотношения между материальными затратами в каждой из отраслей производства с одной стороны и полными и конечными объемами продукции отраслей с другой стороны.

Пусть имеется n отраслей народного хозяйства. Весь выпускаемый продукт отрасли делится на потребляемый населением и другими отраслями, в том числе внутри той же отрасли.

Тогда

$$X_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_i \quad (18.1)$$

где X_i – выпуск продукции i -й отрасли, x – потребление отраслями, y – потребление населением.

В такой системе будет $2n+n^2$ неизвестных. Но если предположим, что поставки из одной отрасли в другую линейно зависят от объема выпускаемой продукции с коэффициентом зависимости a_{ij} , тогда получим:

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n + y_i \quad (18.2)$$

где a_{ij} коэффициент со значениями от 0 до 1.

Данную систему уравнений легко переписать в матричной форме:

$$X = AX + Y \quad (18.3)$$

В такой формулировке могут быть решены две задачи.

В первом, наиболее простом случае, когда известен вектор валового выпуска X , требуется рассчитать вектор конечного потребления Y .

Во втором случае уравнение межотраслевого баланса используется для целей планирования со следующей формулировкой задачи: для периода T (например, год) известен вектор конечного потребления Y и требуется определить вектор X валового выпуска. Здесь необходимо решать систему линейных уравнений с известной матрицей A и заданным вектором Y .

18.4 Алгоритм модели межотраслевого баланса

Рассчитать баланс можно как в денежном, так и в натуральном эквиваленте.

Производство каждого вида продукта связано с использованием сырья и материалов (поставляемых другими производствами), а также с созданием добавленной стоимости, куда относят затраты на воспроизводство ресурсов (амортизация, заработная плата) и прибыль, получаемую произво-

дителем. С другой стороны, продукцию данного производства потребляют другие производства, а также остается накопление (капитализация) и потребление.

Итак, использованные сырье и материалы из других производств, представляют собой сумму материальных затрат. Амортизация, заработная плата, прибыль – сумму добавленной стоимости. Передача произведенной продукции другим производствам – сумму промежуточной продукции. Остатки в фондах накопления и потребления – сумму конечной продукции. Вся сумма произведенной промежуточной и конечной продукции по всем производствам представляет собой валовую продукцию.

Баланс экономики формируется и рассчитывается следующим образом:

1. Определяется перечень производств в данной модели (для простоты одно производство – один продукт), следует помнить, что производство может находиться за границами экономической системы, и его продукт поступает в систему из вне, например, посредством торговли, также необходимо помнить, что услуги также являются продуктами, а их предоставление – производством;

2. Делается предположение о необходимых затратах материалов (продукции других производств) для изготовления продукции каждого из введенных производств. Важно обратить внимание на то, чтобы на этом этапе не появилось множество дополнительных продуктов, ранее не запланированных;

3. Вначале составляется матрица использования сырья и материалов. В колонках и строках прописываются названия производств. Итогом для каждого производства по строке будет сумма промежуточной продукции. Итогом по столбцу – сумма материальных затрат;

4. Далее в продолжение строк по каждому производству прописываются суммы на накопление и потребление, а в

продолжение столбцов расходы на амортизацию, заработную плату, другие подобные расходы и прибыль. Первая часть (по строке) даст сумму конечной продукции, а вторая часть (по столбцу) сумму добавленной стоимости.

5. При составлении баланса необходимо соблюдать следующие правила:

– сумма материальных затрат должна быть равна сумме промежуточной продукции;

– сумма добавленной стоимости должна быть равна сумме конечной продукции;

– валовая продукция равняется сумме материальных затрат и сумме добавленной стоимости.

Для трех производств (*A*, *B*, *B*) данная модель будет выглядеть следующим образом: (данные условны, решение в денежном выражении) (таблица 18.3).

Таблица 18.3 – Межотраслевой баланс

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	Сумма промежуточной продукции	Фонд накопления	Фонд потребления	Сумма конечной продукции	Валовая продукция
<i>A</i>	-	20	10	30	5	5	10	40
<i>B</i>	10	-	20	30	10	10	20	50
<i>B</i>	10	10	-	20	0	40	40	60
Сумма материальных затрат	20	30	30	80	15	55	70	150
Амортизация	5	5	5	15				
Оплата труда	10	10	10	30				
Прибыль	5	5	15	25				
Сумма добавочной стоимости	20	20	30	70				
Всего	40	50	60	150				150

Численное решение балансовых моделей возможно при помощи системы линейных уравнений, в которой неизвестным будет являться добавочная стоимость каждого вида производства. Решение системы уравнений даст сбалансированную экономику по производству ресурсов, затратам, возможным наценкам.

18.5. Достоинства и недостатки метода «затраты – выпуск»

Достоинства метода:

– позволяет планировать отрасли системно с учетом места и веса каждой отрасли; дает возможность планирования на ряд лет, позволяя найти пути подъема как всей экономики страны, так и отдельных отраслей.

Недостатки:

– опора на матрицу коэффициентов полных затрат приводит к трудоемкому процессу сбора и обработки большого объема статистической информации. Процесс производится с периодичностью 5 лет, что не дает полной картины динамики отрасли; нет учета технологических изменений в отраслях за период между сбором информации о матрице затрат.

В заключение еще раз отметим, что оптимизационные задачи чрезвычайно многообразны и в экологической отрасли это в первую очередь задачи нормирования воздействий на экосистемы, оптимизации их функций и состояния. При составлении подобных задач наряду с экономической эффективностью следует в первую очередь помнить об устойчивости экосистемы и основные накладываемые ограничения должны быть связаны именно с этим базовым экологическим понятием. Природные экосистемы характеризуются оптимальным балансом между продуктивностью и устойчи-

востью, и никогда в них не реализуется максимально возможная продуктивность в ущерб устойчивости и биоразнообразию. Человек в погоне за урожаем, выгодой, часто нарушает этот природный закон и впоследствии ему приходится тратить много больше средств на восстановление природной среды, чем он сэкономил, получив «максимум» целевой функции в виде сиюминутной прибыли. В наше прагматичное время, когда деньги, прибыль ставятся во главу угла всей жизни общества, ученым-экологам особенно важно понимать истинный смысл денег как некоего условного, договорного средства регуляции общественных отношений, но никак не истинного богатства, ресурса, от которого зависит жизнь и благосостояние человека и природы. Поэтому, занимаясь постановкой оптимизационных задач в сфере экологии и природопользования, не следует увлекаться чрезмерно этим сугубо человеческим критерием ценности, не имеющим ничего общего с потребностями природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимова, Т. А. Экология. Человек – Экономика – Биота – Среда: учебник для вузов / Т. А. Акимова, В. В. Хаскин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 566 с.
2. Алимов, А. Ф. Введение в продукционную гидробиологию / А. Ф. Алимов. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 152 с.
3. Антомонов, Ю. Г. Моделирование биологических систем: справочник / Ю. Г. Антомонов. – Киев: Наукова думка, 1977. – 260 с.
4. Антоненко, Д. А. Сложный компост и его влияние на свойства почвы и продуктивность сельскохозяйственных культур: монография / Д. А. Антоненко, И. С. Белюченко, В. Н. Гукалов [и др.] – Краснодар: КубГАУ, 2015. – 180 с.
5. Андерсен, Дж. М. Экология и науки об окружающей среде: биосфера, экосистемы, человек / Дж. М. Андерсен. – М.: Мысль, 1985. – 165 с.
6. Белюченко, И. С. Система мониторинга и экологического проектирования / И. С. Белюченко. – Краснодар: КГАУ, 1994. – 60 с.
7. Белюченко, И. С. Экология Кубани / И. С. Белюченко. – Краснодар: КубГАУ, 2005. – Ч. I – 513 с.
8. Белюченко, И. С. Экология Кубани / И. С. Белюченко. – Краснодар: КубГАУ, 2005. – Ч. II – 470 с.
9. Белюченко, И. С. Методическое пособие по статистической обработке данных экологического мониторинга / И. С. Белюченко, О. А. Мельник, Ю. Ю. Петух [и др.] – Краснодар: КубГАУ, 2010. – 55 с.
10. Белюченко, И. С. Введение в экологический мониторинг: учебное пособие / И. С. Белюченко. – Краснодар, 2011. – 297 с.

11. Белюченко, И. С. Основы экологического мониторинга / И. С. Белюченко, А. В. Смагин. Краснодар: КубГАУ, 2012. – 252 с.
12. Белюченко, И. С. Практикум по курсу «Системная экология» / И. С. Белюченко, Е. И. Муравьев, Е. В. Попок, Л. Б. Попок. – Краснодар: КубГАУ, 2007. – 184 с.
13. Белюченко, И. С. Практикум по экологии (учебно-методическое пособие) / И. С. Белюченко, Л. Б. Попок. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – 293 с.
14. Белюченко, И. С. Биомониторинг состояния окружающей среды: учебное пособие / И. С. Белюченко, Е. В. Федоненко, А. В. Смагин [и др.] – Краснодар: КубГАУ, 2014. – 153 с.
15. Белюченко, И. С. Отходы быта и производства как сырье для подготовки сложных компостов / И. С. Белюченко. – Монография. – Краснодар: Изд-во КубГАУ, – 2015. – 418 с.
16. Бондаренко, Н. Ф. Моделирование продуктивности агроэкосистем / Н. Ф. Бондаренко, Е. Е. Жуковский, И. Г. Мушкин. – Л.: Гидрометеиздат, 1982. – 142 с.
17. Бродский, А. К. Краткий курс общей экологии. / А. К. Бродский. – СПб: Деан, 2001. – 224 с.
18. Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. – СПб.: Лань, 2002. – 960 с.
19. Василевич, В. И. Статистические методы в геоботанике / В. И. Василевич. – Л.: Наука, 1969. – 232 с.
20. Гильманов, Т. Г. Математическое моделирование биогеохимических циклов в травяных экосистемах / Т. Г. Гильманов. – М.: МГУ, 1978. – 168 с.
21. Медоуз, Д. Х. За пределами роста / Д. Х. Медоуз, Д. Л. Медоуз, Й. Рэндерс. – М.: Изд. группа «Прогресс», «Пангея», 1994. – 304 с.

22. Гирусов, Э. В. Экология и экономика природопользования: учебник для вузов / под ред. Э. В. Гирусова. – М.: Закон и право, ЮНИТИ, 1998. – 455 с.
23. Глаголев, М. В. Приложения MATLAB для численных задач биологии, экологии и почвоведения / М. В. Глаголев, А. В. Смагин. – М.: МГУ, 2005. – 200 с.
24. Гринин, А. С. Математическое моделирование в экологии: учеб. пособие для вузов / А. С. Гринин, Н. А. Орехов, В. Н. Новиков. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 269 с.
25. Горелов, А. А. Экология: наука – моделирование – философский очерк / А. А. Горелов. – М.: Наука, 1985. – 207 с.
26. Горстко, А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием / А. Б. Горстко. – М.: Знание, 1991. – 156 с.
27. Грейг-Смит П. Количественная экология растений / П. Грейг-Смит. – М.: Мир, 1967. – 359 с..
28. Гурман, В. И. Модели управления природными ресурсами / В. И. Гурман. – М.: Наука, 1981. – 264 с.
29. Джефферс, Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии / Дж. Джефферс. – М.: Мир, 1981. – 256 с.
30. Джонс, Дж. К. Методы проектирования / Дж. Джефферс. – М.: МИР. 1986. – 326 с.
31. Девис, Дж. Статистика и анализ геологических данных / Дж. Джефферс. – М.: Мир, 1977. – 574 с.
32. Попок, Л. Б. Компьютерный анализ данных в экологии и природопользовании: практическое пособие / Л. Б. Попок [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://window.edu.ru/resource/171/79171>
33. Лакин, Г. Ф. Биометрия / Г. Ф. Лакин. – М.: Высшая школа, 1990 – 351с.
34. Лебедева, Н. В. Биологическое разнообразие: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Н. В. Лебедева,

- Н. Н. Дроздов, Д. А. Криволицкий. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2004. – 432 с.
35. Леонтьев, В. В. Межотраслевая экономика / В. В. Леонтьев. – М., 1997. – 315 с.
 36. Моисеев, Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
 37. Мэгарран, Э. Экологическое разнообразие и его измерение / Э. Мэгарран. – М.: Мир, 1992. – 184 с.
 38. Пианка, Э. Эволюционная экология / Э. Пианка. – М.: Мир, 1981. – 357 с.
 39. Попок, Л. Б. Основы компьютерных технологий в экологии и природопользовании: практ. пособие для магистров / Л. Б. Попок, Л. Е. Попок, И. С. Белюченко. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – 53 с.
 40. Попок, Л. Б. Корреляционно-регрессионный анализ в изучении взаимосвязи содержания тяжелых металлов с агрофизическими и агрохимическими свойствами почв / Л. Б. Попок, И. С. Белюченко // Экол. Вестник сев. Кавказа. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 45–49.
 41. Практикум по анализу данных на компьютере: учеб. пособие для вузов / И. А. Кацко, Н. Б. Паклин – М.: Колос, 2009. – 278 с.
 42. Практикум по экологии: учебно-методическое пособие под общ. ред. И. С. Белюченко и Л. Б. Попок – Краснодар: КубГАУ, – 2010. – 282 с.
 43. Пригожин, И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой / И. Пригожин, И. Стенгерс – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.
 44. Пузаченко, Ю. Г. Математические методы в экологических и географических исследованиях: учеб. пособие для студ. вузов / Ю. Г. Пузаченко. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 416 с.
 45. Пэнтл, Р. Методы системного анализа окружающей среды / Р. Пэнтл. – М.: Мир, 1979. – 214 с.

46. Ризниченко, Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г. Ю. Ризниченко. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.– 184 с.
47. Розенберг, Г.С. Модели в фитоценологии / Г. С. Розенберг. – М.: Наука, 1984. – 264 с.
48. Свирижев, Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю.М. Свирижев. – М.: 1987. – 368 с.
49. Смагин, А.В. Почва как результат самоорганизации биогеоценоза / А. В. Смагин // Докл. АН СССР, 1989, т. 308, № 3, с.729–731.
50. Смагин, А.В. Моделирование естественной и антропогенной динамики черноземов / А. В. Смагин // Экол. Вестник Сев. Кавказа. – 2009. – Т. 5, № 4. – С. 5–16.
51. Смагин, А.В. Режимы функционирования динамических биокосных систем / А. В. Смагин // Почвоведение. – 1999. – № 12. – С. 1433 – 1447.
52. Смагин, А.В. Моделирование динамики органического вещества почв / А. В. Смагин, Н. Б. Садовникова, М. В. Смагина [и др.]. – М.: МГУ, 2001. – 120 с.
53. Смагин, А.В. Теория и практика конструирования почв / А. В. Смагин – М.: МГУ, 2012. – 544 с.
54. Смит, Дж. М. Модели в экологии / Дж. М. Смит. – М.: Мир, 1976. – 184 с.
55. Уатт, К. Экология и управление природными ресурсами / К. Уатт. – М.: Мир, 1971. – 463 с.
56. Уемов, А. И. Системный подход и общая теория систем / А. И. Уемов. – М.: Мысль, 1978. – 272 с.
57. Уланова, Н. Г. Математические методы в геоботанике / Н. Г. Уланова.– М.: Изд-во МГУ, 1995. – 109 с.
58. Федоров, В. Д. Экология / В. Д. Федоров, Т. Г. Гильманов. М.: МГУ, 1980. – 464 с.
59. Харвей, Д. Научное объяснение в географии / Д. Харвей. – М.: Прогресс, 1974. – 502 с.

- 60 Шэннон, Р. Имитационное моделирование систем искусство и наука / Р. Шэннон. – М.: Мир, 1978. –85 с.
- 61 Gorchakova A. Yu., Belyuchenko I.S. About aftergrowth of grasses // *Bothalia Journal*. – Pretoria, South Africa. – 2014. – Vol. 44. – № 6. – P. 13–20.
- 62 Gorchakova A. Yu., Belyuchenko I.S. Development and yield capacity of grass // *Life Science Journal*. – 2014. – Vol. 11. – № 11. – P. 467–472.
- 63 Gorchakova A. Yu., Belyuchenko I.S. Revisiting of grass brunching // *Bothalia journal*. – Pretoria, South Africa. – 2014. – Vol. 44. – № 8. – P. 163–179.
- 64 Gorchakova A. Yu., Belyuchenko I.S. About features of grass brunching // *Bothalia Journal*. – Pretoria, South Africa. – 2014. – Vol. 29. – № 8. –P. 80–98.
- 65 Belyuchenko I.S. Wastes of different production and their properties'in // *Ciencia e Tecnica Vitivinicola*. – Printed in Portugal. – 2014. – Vol. 29. – № 9. –P. 37–50.
- 66 Belyuchenko I.S., Gorchakova A. Yu. Ecological aspects of practical plant introduction in the botanical garden of Kuban Agrarian University (Russia) / co-aut. A. Yu. Gorchakova // *Bothalia journal*. – Pretoria, South Africa. – 2014. – Vol. 44. – № 10. –P. 15–25.
- 67 Belyuchenko I.S. Complex compost and its impact on agrochemical properties of typical chernozem in Krasnodar territory // *Bothalia Journal*. – Pretoria, South Africa. – 2014. – Vol. 44. – № 12. – P. 14–19.
- 68 Belyuchenko I.S., Gorchakova A. Yu., Slavgorodskaya D. A. Colloidality of household and industrial waste and their role in the formation of complex compost // *Ciencia e Tecnica Vitivinicola*. – Printed in Portugal. – 2014. – Vol. 29. – № 12. – P. 110–121.
- 69 Belyuchenko I.S. Complex compost and soil protection from heavy metals in the agrolandscape system // *Bothalia journal*. – 2014. – Vol. 44. – № 12. – P. 69–79.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
Глава 1. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ, ИХ СУЩНОСТЬ И ПРИНЦИПЫ.....	4
1.1 Основные аспекты системных исследований.....	4
1.2 Сущность системного подхода.....	8
1.3 Математизация экологии.....	10
Глава 2. МЕТОДЫ СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ НАУКАХ.....	12
2.1 Проблематика экологических исследований.....	12
2.2 Основные направления экологических исследований.....	13
2.3 Полевые наблюдения.....	14
2.4 Экспериментальные методы.....	16
2.5 Прогнозирование.....	18
Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА.....	24
3.1 Проблема эксперимента при исследовании систем.....	24
3.2 Основные понятия моделирования.....	24
3.3 Виды моделирования.....	25
3.4 Адекватность модели.....	28
Глава 4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	30
4.1 Основные типы информации и источники ее получения.....	30
4.2 Компьютерная система функционального анализа данных.....	31
4.3 Правила составления сводных таблиц.....	33
4.4 Проверка данных.....	34
4.5 Планирование выборочных исследований.....	36

4.6	Доверительный интервал. Определение объема выборки.....	37
Глава 5.	ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ.....	43
5.1	Анализ первичных статистик.....	43
5.2	Параметрические критерии сравнения выборок.....	47
5.2.1	Критерий Стьюдента для сравнения независимых выборок.....	48
5.2.2	Критерий Стьюдента для сравнения зависимых выборок.....	49
5.3	Непараметрические критерии сравнения выборок.....	50
5.3.1	Сравнение двух независимых выборок непараметрическими методами.....	52
5.3.2	Сравнение двух зависимых выборок непараметрическими методами.....	54
Глава 6.	ОЦЕНКА ВЗАИМОСВЯЗЕЙ В СИСТЕМЕ.....	56
6.1	Постановка задачи о статистической зависимости	56
6.2	Зависимые и независимые переменные.....	57
6.3	Коэффициент корреляции.....	59
6.4	Интерпретация коэффициента корреляции.....	62
6.5	Ранговый коэффициент корреляции Спирмена.....	64
6.6	Коэффициент взаимной сопряженности.....	66
6.7	Определение значимости показателей.....	67
Глава 7.	РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ И АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ.....	69
7.1	Задачи регрессионного анализа.....	69
7.2	Примеры регрессионных моделей в экологии.....	69
7.3	Линейные регрессионные модели.....	70
7.4	Метод наименьших квадратов.....	71
7.5	Проверка адекватности модели.....	73
7.6	Прогнозирование с помощью регрессионных моделей.....	77
7.7	Выбор формы функциональной зависимости в уравнениях регрессии.....	78

7.8	Аппроксимация данных с помощью стандартного набора функций электронных таблиц EXCEL.....	79
7.9	Аппроксимация данных в компьютерной среде S-Plot.....	82
Глава 8.	ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	89
8.1	Схема дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный комплекс.....	89
8.2	Проведение дисперсионного анализа с помощью электронных таблиц EXCEL.....	93
Глава 9.	ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ.....	96
9.1	Примеры динамических рядов и их характерные особенности.....	96
9.2	Сущность анализа динамических рядов.....	97
9.3	Анализ и прогнозирование тренда.....	98
9.4	Задача выбора наилучшего уравнения тренда.....	102
9.5	Обнаружение колебательных составляющих динамического ряда.....	104
9.6	Расчет статистических характеристик динамических рядов.....	105
Глава 10.	МЕТОДЫ АНАЛИЗА БОЛЬШИХ СИСТЕМ.....	112
10.1	Сущность многомерного статистического анализа и его применение в экологии.....	112
10.2	Многомерная регрессионная модель.....	113
10.3	Интерпретация результатов многомерного регрессионного анализа.....	115
10.4	Кластерный анализ.....	118
10.5	Пример процедуры кластеризации в пакете STATISTICA.....	121
10.6	Сущность и вычислительный подход дискриминантного анализа.....	128
10.7	Метод главных компонент и факторный анализ....	129
10.8	Особенности применения многомерного анализа при исследовании экологических систем.....	133

Глава 11. ОЦЕНКА ОСНОВНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОПУЛЯЦИЙ И ВИДОВОГО РАЗНООБРАЗИЯ	135
11.1 Оценка численности и абсолютной плотности популяции.....	135
11.2 Теоретические модели распределения особей в пространстве (распределение Пуассона).....	139
11.3 Оценка адекватности модели распределения организмов в пространстве.....	142
11.4 Индекс Одума.....	144
11.5 Модели распределения значимости видов.....	146
11.6 Графический анализ распределения видов в сообществе.....	151
11.7 Количественные меры видового разнообразия.....	155
11.8 Рекомендации для анализа данных по разнообразию видов.....	159
Глава 12. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОПУЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ.....	163
12.1 Количественная оценка рождаемости, смертности, скорости роста популяции.....	163
12.2 Биотический потенциал популяции.....	165
12.3 Продолжительность жизни и выживаемость.....	166
12.4 Демографические таблицы популяций, кривые выживания.....	167
12.5 Оценка скорости роста популяции.....	168
12.6 Модель экспоненциального роста популяции Мальтуса.....	170
12.7 Пример расчета мальтузианского параметра по экспериментальным данным.....	173
12.8 Модель логистического роста.....	175
12.9 Дискретный аналог дифференциальных уравнений роста популяции.....	179
12.10 Модели взаимодействия в популяционной динамике.....	182

12.11	Практическое применение моделей взаимодействия видов в экологии.....	186
Глава 13 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СРЕДЕ MATLAB.....		
13.1	Краткая вводная информация.....	191
13.2	Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений в компьютерной среде Matlab.....	192
13.3	Интегрирование уравнений в частных производных в компьютерной среде Matlab.....	200
Глава 14 МОДЕЛЬ РОСТА ПОПУЛЯЦИИ ЛЕСЛИ.....		
14.1	Технология построения матрицы Лесли.....	210
14.2	Пример матричной модели популяции из трех возрастных групп.....	213
14.3	Управление эксплуатацией популяции на основе матричной модели.....	216
Глава 15. СИСТЕМНО-ДИНАМИЧЕСКИЕ ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ.....		
15.1	Сущность системно-динамического имитационного моделирования.....	222
15.2	Основные переменные имитационной модели.....	223
15.3	Язык потоковых диаграмм, правила построения диаграммы связей.....	224
15.4	Процедура построения имитационной модели.....	227
15.5	Основные этапы построения имитационной модели цикла азота в агроэкосистеме.....	229
15.6	Потоковая диаграмма движения азота в экосистеме, идентификация модели.....	231
15.7	Проверка, исследование и оптимизация модели	234
15.8	Модели агробиоценоза.....	236
15.9	Глобальные модели.....	240
Глава 16. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ ЭКОЛОГИИ.....		
		245

16.1	Основные цели и задачи исследования операций.....	245
16.2	Примеры применения оптимизационных моделей в экологии.....	246
16.3	Основы теории линейного программирования.....	247
16.4	Примеры классических задач линейного программирования.....	248
16.5	Примеры задач линейного программирования в области экологии.....	252
16.6	Формулировка общей задачи линейного программирования.....	257
16.7	Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.....	260
16.8	Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим способом.....	264
16.9	Алгоритм симплексного метода.....	264
16.10	Пример решения задачи симплекс-методом.....	267
16.11	Анализ задач линейного программирования.....	272
16.12	Сущность и цели анализа решения задач ЛП.....	273
16.13	Пример анализа оптимального решения.....	274
Глава 17.	ЭЛЕМЕНТЫ ЭКОЛОГИСТИКИ.....	277
17.1	Проблема экологии транспорта.....	277
17.2	Общая постановка задачи.....	277
17.3	Нахождение исходного опорного решения.....	279
17.4	Определение эффективного варианта доставки изделий к потребителю.....	280
17.5	Проверка найденного опорного решения на оптимальность.....	282
17.6	Переход от одного опорного решения к другому...	283
Глава 18.	МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	287
18.1	Определение эколого-экономической системы (ЭЭС).....	287

18.2	Модель В.В. Леонтьева «затраты – выпуск» и ее экологический смысл.....	289
18.3	Математический аппарат модели «затраты – выпуск».....	294
18.4	Алгоритм модели межотраслевого баланса.....	295
18.5	Достоинства и недостатки метода «затраты – выпуск».....	298
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	300

Учебное издание

Белюченко Иван Степанович (КубГАУ),
Смагин Андрей Валентинович (МГУ),
Попок Людмила Борисовна (КубГАУ),
Попок Леонид Евгеньевич (КубГАУ)

**АНАЛИЗ ДАННЫХ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЭКОЛОГИИ
И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИИ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 18.05.2015. Формат 60×84 ¹/₁₆.

Усл. печ. л – 18,2, Уч.-изд. л. – 14,2.

Тираж 150 экз. Заказ №

Типография
Кубанского государственного аграрного университета.
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13