Министерство сельского хозяйства РФ
ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный аграрный университет»

Д.В. Корнеев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕИЯ И МЕХАНИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

Учебное пособие

Краснодар, 2011

УДК 531(0,75.8)
ББК 30,13
К67

Рецензент:

Петунина Ирина Александровна – доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики КубГАУ

Корнеев Д.В.
К67 Теоретическая механика: Исследование механического движения и механического взаимодействия материальных тел: учебное пособие / Д.В. Корнеев. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – 114 с.

Учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, обучающихся по направлению подготовки 110800 «Агроинженерия» (квалификация (степень) «Бакалавр»).

Учебное пособие содержит краткий курс теоретической механики по основным темам дисциплины, контрольные задания по данным темам, а также примеры задач с контрольными вопросами по каждой теме. Задания, включенные в работу, разработаны на основе «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике». М.: Высшая школа. 1985 г., под общей редакцией проф. А.А. Яблонского и ряда методических пособий, разработанных на кафедре тракторов, автомобилей и технической механики Кубанского госагроуниверситета. Они подобраны таким образом, чтобы студент смог самостоятельно развить и укрепить свои знания по теоретической механике с целью использования их в решении практических задач по расчету различных механических устройств, применяемых в промышленности и сельском хозяйстве.

Задания настоящего учебного пособия могут быть использованы для разработки индивидуальных заданий расчетно-графической работы по теоретической механики.

УДК 531(0,75.8)
ББК 30,13

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Многолетний опыт обучения студентов по дисциплине: «Теоретическая механика», на кафедре тракторов, автомобилей и технической механики показал, что одним из наиболее эффективных способов освоения законов и теорем теоретической механики, с целью их практического использования, является выполнение расчетно-графической работы.

Индивидуальность заданий побуждает студентов самостоятельно преодолевать трудности при решении сложных задач, что играет решающую роль в формировании таких качеств инженера, какие требуются от технического специалиста в условиях современного производства.

Правильное оформление расчетно-графической работы предполагает грамотное и аккуратное выполнение письменного текста и графической части.

Работа оформляется на листах стандартного формата А4. Она должна быть выполнена разборчивым почерком или отпечатана. Страницы должны содержать поля размером: слева - 3 см.; справа - 1 см.; сверху и снизу - 2,5 см. Страницы должны быть пронумерованы. Последняя страница оставляется для замечаний рецензента. В содержании расчетно-графической работы недопустимы никакие сокращения в словах, кроме общепринятых.

На титульном листе расчетно-графической работы указываются: факультет, название дисциплины, группа, фамилия и инициалы студента, выполнившего работу (см. Приложение 1).

Вариант работы определяется по двухзначному шифру, устанавливаемому преподавателем каждому студенту. Предпоследняя цифра шифра обозначается буквой *a*, последняя цифра шифра – буквой *b*.

При определении условий задания число *c* определяется по номеру группы студента (Например: группа «МХ-1005» - число $c = 5$ **).**

Коэффициента *К* для своих заданий студент определяет по формуле:

$$K = \frac{-1^{\,a} + \ -1^{\,b}}{2}.$$

Номер схемы, соответствующей заданному варианту, определяется по формуле:

$$У = 2 + K.$$

Решение каждой задачи обязательно начинать с новой страницы. Сверху указывается номер задачи, ее название. Далее выполняется расчет условий для соответствующего варианта и выполняется чертеж схемы к задаче. Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи. Он должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволить ясно показать все силы и другие вектора. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями и подробным изложением всех расчетов.

Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для устранения недочетов.

1 СТАТИКА

1.1 С.1. Плоская произвольная система сил

1.1.1 Теоретические основы

При решении задачи расчетно-графической работы на тему «Плоская произвольная система сил» необходимо в соответствии с заданием рассмотреть равновесие плоской жесткой конструкции под действием приложенных к ней активных сил и с учетом наложенных на нее идеальных связей.

В механике все тела считаются абсолютно твердыми. Они делятся на свободные и несвободные.

Свободное тело это тело, перемещение которого ничем не ограничено.

Несвободное тело это такое тело, у которого хотя бы одно из направлений ограничено другим телом или телами. Тело, ограничивающее перемещение рассматриваемого тела называется **связью** по отношению к нему. Сила, с которой связь действует на тело, называется **реакцией связи** и, по модулю, равняется силе, с которой рассматриваемое тело действует на связь.

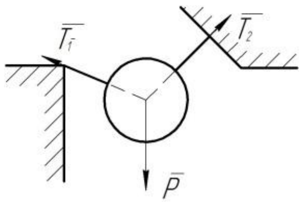


Рисунок 1.1

В механике, при решении задач статики, используют **принцип освобождаемости от связей**, который основывается на том, что мысленно отбрасываются связи а их действия заменяются реакциями связи, при этом, тело можно рассматривать как свободное.

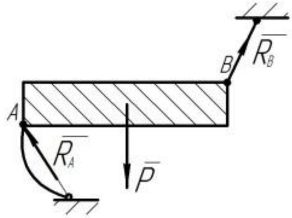


Рисунок 1.2

В приведенных заданиях используются следующие типы связей без учета сил трения:

- гибкая связь;
- невесомый стержень;
- подвижный цилиндрический шарнир;
- неподвижный цилиндрический шарнир.

Заменяя действие связи соответствующей реакцией связи необходимо помнить, что

- в случае гибкой связи, реакция направлена по нити в сторону от тела (Рисунок 1.1);
- реакция невесомого стержня направлена вдоль прямой, проходящей через концы этого стержня (Рисунок 1.2);

- в случае, когда связь выполнена в виде подвижного цилиндрического шарнира, реакция всегда будет направлена перпендикулярно направляющей поверхности (Рисунок 1.3);

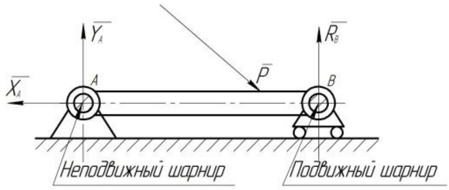


Рисунок 1.3

- в случае, когда связь выполнена в виде неподвижного цилиндрического шарнира, направление реакции, в общем случае, неизвестно, поэтому ее раскладывают на две составляющие, направленные вдоль взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости перпендикулярной оси шарнира.

При решении задач статики рассматривается равновесие твердые тел под действием приложенных к ним уравновешенных систем сил.

Рассмотрим условие равновесия плоской произвольной системы сил (Рисунок 1.4).

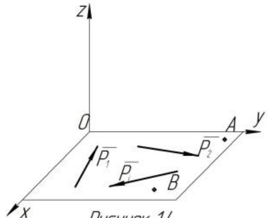


Рисунок 1.4

Существует III вида аналитического условия равновесия плоской произвольной системы сил:

I-й вид:

$$I\begin{cases}\sum X_i = 0\\ \sum Y_i = 0\\ \sum M_O\ \bar{P}_i\ = 0\end{cases} \tag{1.1}$$

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на две оси, лежащие в плоскости действия системы сил, равнялась нулю, и сумма моментов относительно любой точки, принадлежащей данной плоскости (например т.*O*), также равнялась нулю.

II-й вид:

$$II\begin{cases}\sum X_i = 0\\ \sum M_A\ \bar{P}_i\ = 0\\ \sum M_B\ \bar{P}_i\ = 0\end{cases} \tag{1.2}$$

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на любую ось, лежащую в плоскости действия системы сил(например ось *Ox*), равнялась нулю, и сумма моментов всех сил относительно двух любых точек, принадлежащих данной плоскости (например точки *A* и *B*), также равнялась нулю.

Примечание: *Прямая AB д.б. не перпендикулярна оси OX.*

III-й вид:

$$III\begin{cases}\sum M_O(\overline{P}_i)=0\\ \sum M_A(\overline{P}_i)=0\\ \sum M_B(\overline{P}_i)=0\end{cases}\qquad(1.3)$$

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно трех произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил (например точки *A, B* и *O*), равнялась нулю.

Примечание: *Точки O, A и B не должны лежать на одной прямой.*

Все три вида условия равновесия плоской произвольной системы сил являются равно достаточными.

При составлении уравнений условия равновесия необходимо помнить, что **момент силы относительно какой либо точки (полюса), как скалярная величина, определяется, как произведение модуля силы на длину плеча, т.е. кратчайшего расстояния между линией действия силы и полюсом (перпендикуляра, опущенного из полюса на линию действия силы)**.

Момент силы считается положительным $(+)$, если вектор силы стремится повернуть тело вокруг полюса против хода часовой стрелки, и отрицательным $(-)$ - если по ходу часовой стрелки.

В случае если определение длины плеча вызывает затруднение, то целесообразно применить теорему Вариньона:

Момент равнодействующей системы сил относительно какого либо центра равняется сумме моментов сил, составляющих эту систему, относительно того же центра.

$$\overline{M}_O(\overline{R})=\sum\overline{M}_O(\overline{P}_n),\qquad(1.4)$$

Применяя данную теорему, необходимо вектор силы раскладывать на два взаимно перпендикулярных вектора таким образом, чтобы плечи этих векторов относительно выбранного полюса были бы определены.

Например: пусть к раме *AB* приложена сила $\overline{P}$ (Рисунок 1.5). Момент силы $\overline{P}$ относительно т. *A* будет равен:

$$\overline{M}_A(\overline{P})=\overline{r}\times\overline{P}.$$

Т.к. $\overline{P}=\overline{P'}+\overline{P''}$

то:

$$\overline{M}_A(\overline{P})=\overline{r}\times\overline{P}=\overline{r}\times\overline{P'}+\overline{r}\times\overline{P''},$$

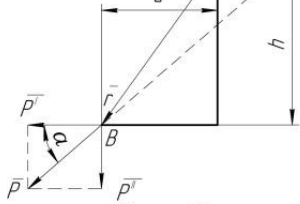


Рисунок 1.5

следовательно $\quad \overline{M}_A\left(\bar{P}\right) = \overline{M}_A\left(\bar{P}'\right) + \overline{M}_A\left(\bar{P}''\right).$

Силы $\bar{P}$, $\bar{P}'$ и $\bar{P}''$ приложены к одной точке и лежат в одной плоскости, поэтому вектора моментов этих сил относительно т.A будут лежать вдоль прямой проходящей через т.A и перпендикулярной плоскости действия векторов $\bar{P}$, $\bar{P}'$ и $\bar{P}''$, а модуль момента силы $M_A \ \bar{P}$ определится как:

$$M_A\left(\bar{P}\right) = M_A\left(\bar{P}'\right) + M_A\left(\bar{P}''\right)$$

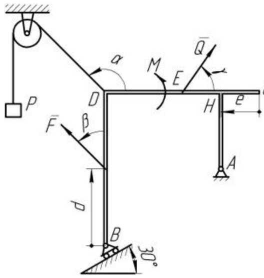
или $M_A\left(\bar{P}\right) = -P \cdot l = -P' \cdot h + P'' \cdot d = -P\cos\alpha \cdot h + P\sin\alpha \cdot d$

1.1.2 Задание С.1

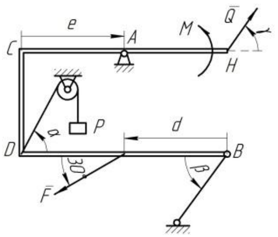
Плоская произвольная система сил

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке *A* шарнирно, а в точке *B* прикреплена к невесомому стержню или к шарнирной опоре на катках. К раме в точке *D* привязан трос, перекинутый через гладкий блок и несущий груз $P = 20 кН$. На раму действует пара сил с моментом $M = 100 кНм$ и силы $F = 10 кН$ и $Q = 15 кН$.

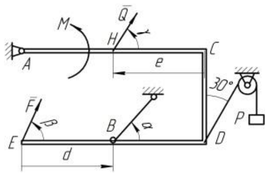
Определить реакции связей в точках *A* и *B*, если $\alpha = 25\ a+1\ ^{\circ}$; $\beta = 25\ c+2\ ^{\circ}$; $\gamma = 15\ b+1\ ^{\circ}$; $d = 0,2a$ (м); $e = 0,2b$ (м).



У1



У2



У3

$BD = DC = 2\,м$; $AH = EC = 1\,м.$

$CH = BD = 2\,м$; $CD = HB = 1\,м.$

$AC = DE = 2\,м$; $CD = AE = 1\,м.$

1.1.3 Пример выполнения задания С.1

Дано:

Жесткая рама, закрепленная в точке C шарнирно, а в точке A прикрепленная к невесомому стержню, как показано на схеме (Рисунок 1.6), находится в равновесии под действием сил $P_1 = 2кН$, $P_2 = 3кН$ и пары сил с моментом $M = 10кНм$.

Определить реакции связей в точках А и С.

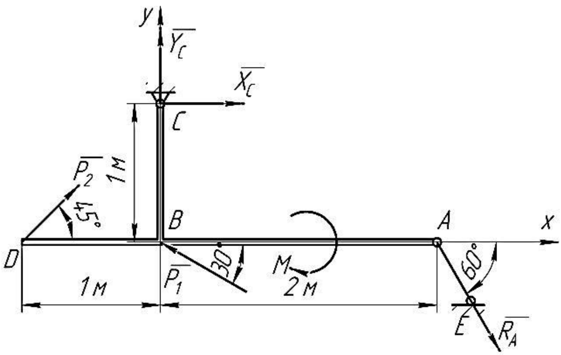


Рисунок 1.6

Решение

Рассмотрим систему уравновешенных сил, приложенных к жесткой раме. Действие на конструкцию связей заменяем соответствующими реакциями связей $\overline{R_A}$, $\overline{X_C}$ и $\overline{Y_C}$.

Запишем условие равновесия для полученной плоской произвольной системы сил:

$$\sum X_i = R_A \cos 60^\circ - P_1 \cos 30^\circ + P_2 \cos 45^\circ + X_C = 0$$

$$\sum Y_i = -R_A \sin 60^\circ + P_1 \sin 30^\circ + P_2 \sin 45^\circ + Y_C = 0$$

$$\sum M_C \quad \overline{F_i} \quad = R_A \cos 60^\circ BC - R_A \sin 60^\circ AB - P_1 \cos 30^\circ BC +$$

$$+ P_2 \cos 45^\circ BC - P_2 \sin 45^\circ DB - M = 0$$

Решая совместно данную систему уравнений получим:

$$R_A = \frac{P_1 \cos 30^\circ BC - P_2 \cos 45^\circ BC + P_2 \sin 45^\circ DB + M}{\cos 60^\circ BC - \sin 60^\circ AB} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,87 \cdot 1 - 3 \cdot 0,71 \cdot 1 + 3 \cdot 0,71 \cdot 1 + 10}{0,5 \cdot 1 - 0,87 \cdot 2} = -9,47 \quad кН$$

$$Y_C = R_A \sin 60^\circ - P_1 \sin 30^\circ - P_2 \sin 45^\circ = -9,47 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,71 = -7,87 \quad кН$$

$$X_C = -R_A \cos 60^\circ + P_1 \cos 30^\circ - P_2 \cos 45^\circ = 9,47 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,87 - 3 \cdot 0,71 = 4,35 \quad кН$$

Ответ:

$$R_A = -9,47 \quad кН \quad ; \; Y_C = -7,87 \quad кН \quad ; \; X_C = 4,35 \quad кН \quad .$$

1.1.4 Контрольные вопросы по теме

1. Перечислите основные виды связей? Как определяются направления их реакций связей?
2. Как определяется вектор момента силы относительно точки?
3. Определение момента силы относительно точки как скалярной величины.
4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия равновесия плоской произвольной системы сил.
5. Запишите аналитические условия равновесия произвольной системы сил, действующих на твердое тело.
6. Чему равен момент равнодействующей системы сил, приложенных к твердому телу, относительно точки и оси?
7. Сформулируйте условия равновесия системы сходящихся сил и системы параллельных сил, лежащих в одной плоскости.
8. Сколько существует форм условий равновесия плоской произвольной системы сил? Сформулируйте каждое из них.
9. Как предпочтительнее проводить ось координат при составлении уравнений равновесия твердого тела?
10. Относительно каких точек предпочтительно вычислять моменты при составлении уравнений равновесия твердого тела?
11. Практический вопрос.

1.2 С.4. Ферма

1.2.1 Теоретические основы

Ферма – это шарнирно-стержневая, геометрически неизменяемая конструкция.

Фермы бывают
- плоские;
- пространственные.

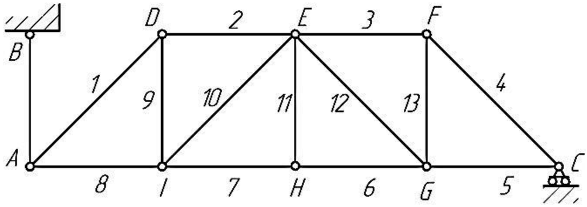


Рисунок 1.7

Ферма состоит из стержней (обозначенных цифрами) и узлов (обозначенных буквами).

Стержни 1, 2, 3, 4 называются **стержнями верхнего пояса**.

Стержни 5, 6, 7, 8 называются **стержнями нижнего пояса**.

Стержни 9, 11, 13 – **стойки**.

Стержни 10, 12 – **раскосы**.

Стержень AB называется **опорным.**

Расчет фермы сводится к определению усилий в опорах фермы и в ее стержнях под действием внешних нагрузок. Для упрощения расчета фермы принимаем некоторые допущения:

1. Стержни, из которых состоит ферма, прямолинейны и невесомы.
2. Узлы выполнены в виде шарниров без трения.
3. Внешние нагрузки приложены к узлам.

Вследствие этих допущений, усилия в стержнях направлены вдоль осей стержней, т.е. стержни работают только на растяжение или на сжатие.

Расчет плоской фермы

Перед началом расчета фермы необходимо вычислить **статическую определимость фермы**, которая определяется по формуле:

$$m = 2n - 3, \qquad (1.5)$$

где m - число стержней;

n - число узлов.

Если m меньше правой части уравнения, то ферма нежесткая.

Если m больше правой части уравнения, то ферма статически неопределима.

<u>Примечание:</u> *Опорные стержни не входят в число стержней фермы, т.е. при подсчете стержней они не учитываются.*

Существует несколько способов расчета фермы, в том числе:

1. Метод вырезания узлов.
2. Метод Риттера.

Существуют правила позволяющие определить нагрузку в некоторых стержнях фермы без расчета, их называют **леммами о нулевых стержнях.**

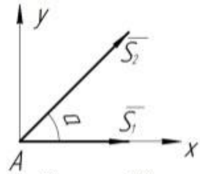


Рисунок 1.8

1-я лемма

Если в незагруженном узле, под углом не равным 180^0, сходятся два стержня, то нагрузка в обоих стержнях нулевая.

$$\sum X_i = S_1 + S_2 \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; S_1 = 0$$
$$\sum Y_i = S_2 \sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow\; S_2 = 0$$

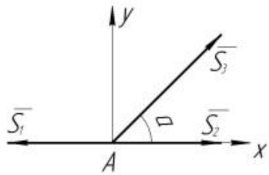


Рисунок 1.9

2-я лемма

Если в незагруженном узле сходятся три стержня, причем два из них лежат на одной прямой (S_1, S_2), а третий (S_3) примыкает к ним под каким-то углом α, то нагрузка в третьем будет равна 0, а усилия в первых двух будут равны между собой.

$$\begin{cases} \sum X_i = -S_1 + S_2 + S_3 \cos\alpha = 0 \\ \sum Y_i = S_3 \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} S_1 = S_2 \\ S_3 = 0 \end{cases}$.

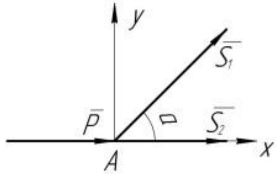


Рисунок 1.10

3-я лемма

Если в загруженном узле под каким-то углом $\alpha \neq 180^0$ сходятся два стержня, причем ось одного из них (S_2) совпадает с линией действия внешней нагрузки (сила $\overline{P}$), то усилие в этом стержне будет равно внешней нагрузке, а в другом (S_1) будет равна 0.

$$\sum X_i = P + S_2 + S_1 \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow S_2 = -P$$
$$\sum Y_i = S_1 \sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow S_1 = 0$$

Определение нагрузок в стержнях методом вырезания узлов

Метод вырезания узлов основывается на том, что вся ферма находится в равновесии, следовательно, если мысленно вырезать какой либо узел и заменить действие рассеченных стержней соответствующими реакциями, то и этот узел также будет находиться в равновесии, при этом мы получаем систему сходящихся сил. Так как для равновесия системы сходящихся сил на плоскости необходимо и достаточно составить два уравнения:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases}, \qquad (1.6)$$

то при выборе узла для расчета, необходимо, чтобы в нем сходилось не более двух стержней с неизвестными нагрузками.

Недостатком метода вырезания узлов является то, что при достаточно сложной конструкции фермы, состоящей из большого числа стержней и узлов, в процессе каждого вычисления допускаются определенные погрешности, которые при каждом новом вычислении накладываются на предыдущие, и при большом количестве узлов в ферме они становятся уже достаточно значимыми.

Метод Риттера (метод сечений)

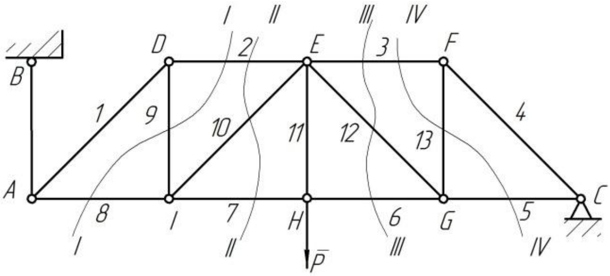


Рисунок 1.11

Заключается в следующем: так как вся ферма находится в равновесии, то и любая ее отсеченная часть будет находиться в равновесии, если заменить действие отсеченной ее части соответствующими реакциями, при этом равновесие получившейся плоской произвольной системы сил удобно определять уравнениями сумм моментов сил относительно точек пересечения неизвестных реакций, совпадающие с узами фермы, называемые **Точками Риттера**.

Метод считается проверочным по отношению к методу вырезания узлов, т.к. позволяет рассчитать усилие в заданных стержнях, исключая расчет промежуточных стержней.

Условия выбора сечения фермы:

1. Сечение должно быть сквозным;
2. Сечение должно проходить не более чем через 3 стержня.

Последовательность расчета фермы методом Риттера

1. Определяем реакции в опорах фермы;
2. Разрезаем ферму сквозным сечением так, чтобы в сечение попало не более трех стержней (сечение *I*, *II*, *III* или *IV*);
3. Отбрасываем какую либо из рассеченных частей фермы, а для сохранения равновесия оставшейся, заменяем действие отброшенной части фермы реакциями рассеченных стержней;
4. Записываем для полученной плоской произвольной системы сил условие равновесия (II-й или III-й вид)

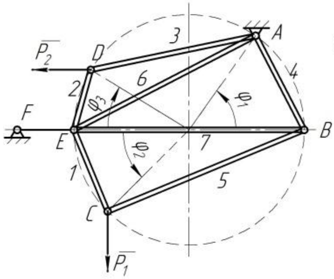
Преимущество метода Риттера перед методом вырезания узлов заключается в том, что, т.к. нет необходимости рассчитывать усилие в других стержнях фермы, то соответственно и в расчете исключаются погрешности предыдущих вычислений, что делает полученный результат более точным.

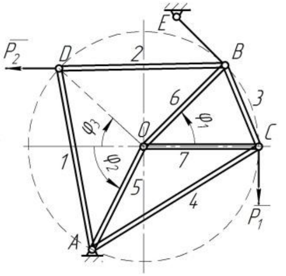
Недостатком метода является то, что возможен расчет только тех стержней, через которые возможно провести сквозное сечение с рассечением не более трех стержней.

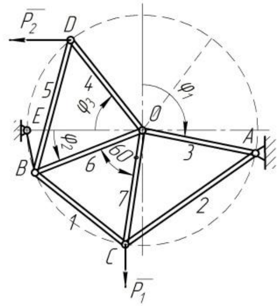
1.2.2 Задание С.4

Расчет фермы

Ферма, состоящая из 7 стержней, находится под действием двух активных сил: вертикальной $\overline{P}_1 = 100\,H$, приложенной в точке C, и горизонтальной $\overline{P}_2 = 200\,H$, приложенной в точке D. Конфигурация фермы определяется углами φ_1, φ_2 и φ_3. Узлы фермы расположены на окружности радиусом $r = 2\,м$ или в ее центре.







У1

$\varphi_1 = 20\ a+1\ ^\circ$;

$\varphi_2 = 15\ в+1\ ^\circ$;

$\varphi_3 = 10\ c+1\ ^\circ$;

Стержни *FD* и *DB* горизонтальны.

У2

$\varphi_1 = 15\ в+1\ ^\circ$;

$\varphi_2 = 10\ a+1\ ^\circ$;

$\varphi_3 = 15c^\circ$;

$\angle OBE = 90^\circ$.

У3

$\varphi_1 = 10\ в+3\ ^\circ$;

$\varphi_2 = 15\ a+1\ ^\circ$;

$\varphi_3 = 10\ c+1\ ^\circ$.

Определить:

1. Усилия в опорных узлах;
2. Усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов;
3. Проверить усилия в любых трех стержнях методом Риттера.

1.1.3 Пример выполнения задания С.4

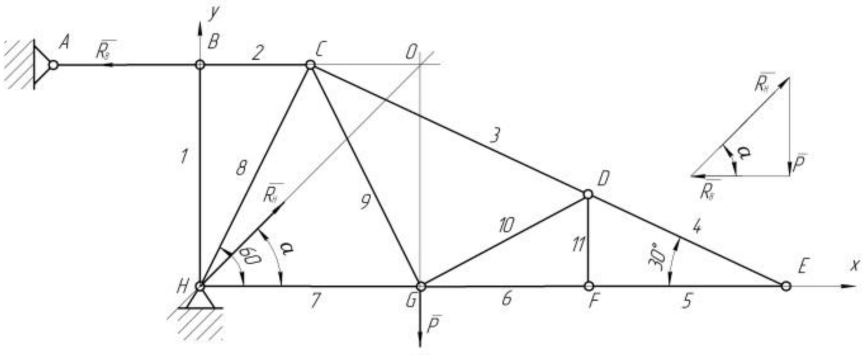


Рисунок 1.12

Дано:

Ферма, состоящая из 11 стержней и 7 узлов, находится под нагрузкой от внешней силы $\bar{P} = 5кН$. Стержни 7, 8 и 9 равны между собой и равны 2 метрам.

Определить:

1. Усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов.
2. Произвести проверку расчетов нагрузок в любых трех стержнях методом Риттера.

Решение

1. Вычислим статическую определимость фермы:

$$m = 2n - 3$$

где m - число стержней, $m = 11$;

n - число узлов, $n = 7$.

$$11 = 2 \cdot 7 - 3$$

Равенство справедливо, соответственно ферма статически определима.

2. Определим реакции в опорах фермы:

Ферма опирается в узле H, со связью в виде неподвижного цилиндрического шарнира, и в узле B, со связью в виде невесомого стержня. Т.к. ферма находится в равновесии под действием трех сил: $\bar{P}, \bar{R}_B, \bar{R}_H$, то для определения неизвестных реакций связей воспользуемся теоремой о трех непараллельных силах приложенных к телу, находящемуся в равновесии. Согласно этой теоремы:

$$\bar{P} + \bar{R}_B + \bar{R}_H = 0$$

Спроецируем данное векторное уравнение на оси координат:

$$\sum X_i = -R_B + R_H \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow R_B = R_H \cos\alpha = 7,6 \cdot \cos 41^0 = 5,7\kappa H$$

$$\sum Y_i = -P + R_H \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow R_H = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin 41^0} = 7,6\kappa H$$

3. Определим нулевые стержни (если есть):

Рассмотрим узел F. На основании 2-й леммы: $S_{11} = 0$, а $S_6 = S_5$.

Далее рассмотрим узел D. Согласно этой же, 2-й леммы: $S_{10} = 0$, а $S_3 = S_4$.

Согласно 1-й леммы, в узле E $S_4 = S_5 = 0$, следовательно: S_6 и S_3 также равны 0.

В узле B загруженный, и в нем сходятся два стержня, причем ось стержня №2 совпадает с линией действия реакции $\bar{R}_B$, следовательно, применив лемму №3 получаем, что $S_1 = 0$, а $S_2 = R_B = 5,7\kappa H$.

4. Определим нагрузки в оставшихся стержнях **методом вырезания узлов**:

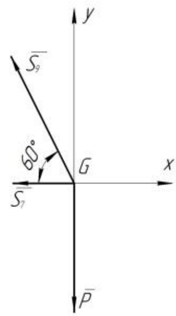


Рисунок 1.13

Рассмотрим **узел** G **:**

Заменим действие рассеченных стержней 7 и 9 соответствующими реакциями $\bar{S}_7$ и $\bar{S}_9$. Для удобства последующих расчетов условно будем считать, что все стержни работают на растяжение, а, полученный в результате расчета, знак «-» укажет на то, что данный стержень работает на сжатие.

Запишем условие равновесия для данной системы сил:

$$\begin{cases} \sum X_i = -S_7 - S_9 \cos 60^0 = 0 \Rightarrow S_7 = -S_9 \cos 60^0 = -5,7 \cdot 0,5 = -2,9\kappa H \\ \sum Y_i = -P + S_9 \sin 60^0 = 0 \quad \Rightarrow S_9 = \dfrac{P}{\sin 60^0} = \dfrac{5}{0,87} = 5,7\kappa H \end{cases}$$

Далее, рассмотрим **узел С**:

$$\begin{cases} \sum X_i = -S_2 - S_8 \cos 60^0 + S_9 \cos 60^0 = 0 \\ \sum Y_i = -S_8 \sin 60^0 - S_9 \sin 60^0 = 0 \end{cases}$$

$S_8 = -S_9 = -5,7кН$

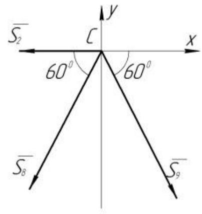


Рисунок 1.14

В итоге мы получили:

$S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_{10} = S_{11} = 0$ - стержни нулевые;

$S_2 = 5,7кН$, $S_9 = 5,7кН$ - стержни растянутые;

$S_7 = -2,9кН$, $S_8 = -5,7кН$ - стержни сжатые.

Для удобства полученные результаты заносим в **таблицу значений нагрузок**

5. Проверка расчета нагрузок в 3, 9 и 7 стержнях **методом Риттера**

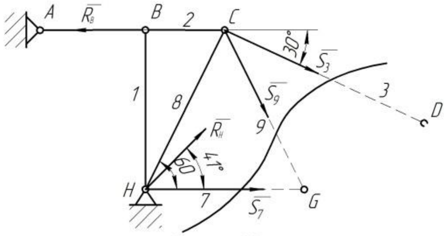


Рисунок 1.15

Проведем сечение через 3, 9 и 7 стержни фермы. Заменив действие рассеченных стержней соответствующими реакциями $\overline{S}_3$, $\overline{S}_9$ и $\overline{S}_7$, рассмотрим равновесие левой части фермы.

Составим аналитическое условие равновесия получившейся плоской произвольной системы сил:

$$\begin{cases} \sum M_G \ \overline{F}_i \ = R_B \cdot BH - R_H \sin 41^\circ \cdot GH - S_3 \cos 30^\circ \cdot BH = 0 \\ \sum M_C \ \overline{F}_i \ = R_H \cos 41^\circ \cdot BH - R_H \sin 41^\circ \cdot BC + S_7 \cdot BH = 0 \\ \sum M_B \ \overline{F}_i \ = R_H \cos 41^\circ \cdot BH + S_7 \cdot BH - S_9 \sin 60^\circ \cdot BC - S_3 \sin 30^\circ \cdot BC = 0 \end{cases}$$

$$BC = \frac{1}{2} GH = 1м ,$$

$$BH = BC \cdot \mathrm{tg}\, 60^\circ = 1,73м$$

$$S_3 = \frac{R_B \cdot BH - R_H \sin 41^\circ \cdot GH}{\cos 30^\circ \cdot BH} = \frac{5,7 \cdot 1,73 - 7,6 \cdot 0,66 \cdot 2}{0,87 \cdot 1,73} = -0,1\kappa H;$$

$$S_7 = \frac{-R_H \cos 41^\circ \cdot BH + R_H \sin 41^\circ \cdot BC}{BH} = \frac{-7,6 \cdot 0,75 \cdot 1,73 + 7,6 \cdot 0,66 \cdot 1}{1,73} = -2,8\kappa H;$$

$$S_9 = \frac{R_H \cos 41^\circ \cdot BH + S_7 \cdot BH - S_3 \sin 30^\circ \cdot BC}{\sin 60^\circ \cdot BC} =$$

$$= \frac{7,6 \cdot 0,75 \cdot 1,73 - 2,8 \cdot 1,73 + 0,1 \cdot 0,5 \cdot 1}{0,87 \cdot 1} = 5,8\kappa H.$$

С учетом погрешности вычислений мы получили значения нагрузок в стержнях 3, 9 и 7, как по модулю, так и по характеру, такие же, как и полученные при расчете фермы методом вырезания узлов, что говорит о том, что расчет фермы был произведен верно.

Ответ

Таблица значений нагрузок

R_B	R_H	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	**нагрузка**
5,7	7,6	0	5,7	0	0	0	0	-2,9	-5,7	5,7	0	0	**величина, *кН***

1.2.4 Контрольные вопросы по теме

1. Основные понятия фермы.
2. Расчет статической определимости фермы.
3. Леммы о нулевых стержнях.
4. Расчет фермы методом вырезания узлов.
5. Расчет фермы методом Риттера.
6. Условия выбора сечения Риттера.
7. Практический вопрос.

1.3 С.7. Пространственная произвольная система сил

1.3.1 Теоретические основы

Пространственная произвольная система сил – это система сил, линии действия которых произвольно расположены в пространстве (Рисунок 1.16).

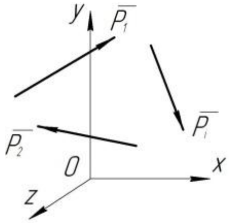


Рисунок 1.16

Для равновесия пространственной произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на три оси координат равнялись 0 и суммы моментов всех сил относительно этих осей также равнялись нулю.

<u>Примечание:</u> Оси, относительно которых составляются уравнения не должны лежать в одной плоскости и быть параллельны.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \\ \sum Z_i = 0 \\ \sum M_x \ \overline{P_i} \ = 0 \\ \sum M_y \ \overline{P_i} \ = 0 \\ \sum M_z \ \overline{P_i} \ = 0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

При составлении уравнений сумм моментов сил относительно координатных осей необходимо помнить, что **для определения момента силы относительно оси, необходимо спроектировать силу на плоскость, перпендикулярную оси и найти момент полученной проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.**

Случаи, когда момент силы относительно оси равен 0:

Из определения следует, что момент силы относительно оси равен 0 в случае:

1. Когда линия действия силы параллельна оси, относительно которой определяется момент силы;
2. Когда линия действия силы пресекает ось, относительно которой определяется момент силы;

3. Когда линия действия силы и ось совпадают;

т.е., **момент силы относительно оси равен 0, когда сила и ось лежат в одной плоскости**.

Знак момента определяется в зависимости от видимого возможного поворота тела под действием приложенной силы вокруг соответствующей оси.

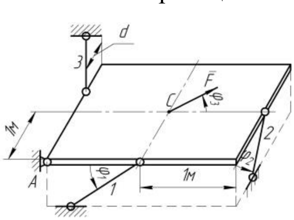
Момент силы относительно оси считается положительным, если со стороны положительного направления оси виден условный поворот вокруг нее под действием силы против хода часовой стрелки. Если виден условный поворот по часовой стрелке – то момент считается отрицательным.

1.3.2 Задание С.7

Пространственная произвольная система сил

Однородная плита весом $P = 100\ H$ и размером $2 \times 2\ м$ находится в равновесии. В плоскости плиты в точке C приложена сила $F = 100\ H$.

Найти реакции опор.



У1

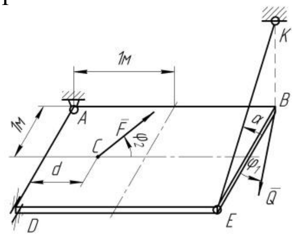
A - сферический шарнир;
1, *2* и *3* – невесомые стержни;

$\varphi_1 = 15(b+1)^\circ$;

$\varphi_2 = 15(b+2)^\circ$;

$\varphi_3 = 30(c+4)^\circ$;

$d = 0,2(a+2),\ м$.



У2

A - сферический шарнир;
D - цилиндрический шарнир;
EK - невесомый стержень;

$Q = 100\ H$;

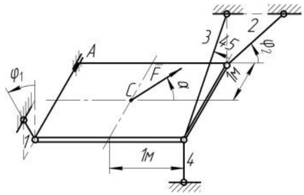
(вектор $\bar{Q}$ расположен в плоскости BKE)

$\varphi_1 = 30(a+1)^\circ$;

$\varphi_2 = 15(c+1)^\circ$;

$d = 0,2(b+1),\ м$;

$\alpha = 30(a+1)^\circ$.



У3

A - цилиндрический шарнир;
1, *2* и *3* – невесомые стержни;

$\varphi_1 = 15(b+1)^\circ$;

$\varphi_2 = 15(a+2)^\circ$;

$\alpha = 30c^\circ$.

1.3.3 Пример выполнения задания С.7

Дано:

Однородная плита $OABC$ весом $G = 30\,H$ удерживается в горизонтальном положении сферическим шарниром O, цилиндрическим шарниром A и тросом в точке B. Определить реакции связей если угол $\alpha = 60^\circ$.

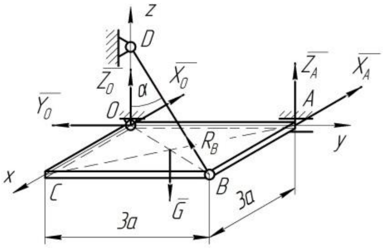


Рисунок 1.17

Решение

Заменив связи в точках O, A и B реакциями связей $\bar{X}_O$, $\bar{Y}_O$, $\bar{Z}_O$, $\bar{X}_A$, $\bar{Z}_A$ и $\bar{R}_B$ соответственно, видно, что плита находится в равновесии под действием пространственной произвольной системы сил.

Составим уравнения аналитического условия равновесия полученной системы сил:

$$\begin{cases} X_i = -X_A - X_O - R_B \cdot \sin\alpha \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ Y_i = -Y_O - R_B \cdot \sin\alpha \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ Z_i = Z_O + Z_A + R_B \cdot \cos\alpha - G = 0 \\ M_x \;\; \bar{F}_i \;\; = -G \cdot \dfrac{BC}{2} + R_B \cdot \cos\alpha \cdot BC + Z_A BC = 0 \\ M_y \;\; \bar{F}_i \;\; = G \cdot \dfrac{AB}{2} - R_B \cdot \cos\alpha \cdot AB = 0 \\ M_z \;\; \bar{F}_i \;\; = X_A \cdot OA = 0 \end{cases}$$

Решая совместно данную систему уравнений получим:

$$X_A = 0$$

$$R_B = \frac{G \cdot \dfrac{AB}{2}}{\cos\alpha \cdot AB} = \frac{G}{2\cos 60^\circ} = \frac{30}{2 \cdot 0,5} = 30 \;\; H$$

$$Z_A = \frac{G \cdot \dfrac{BC}{2} - R_B \cdot \cos\alpha \cdot BC}{BC} = \frac{G}{2} - R_B \cdot \cos 60^\circ = \frac{30}{2} - 30 \cdot 0,5 = 0$$

$$Z_O = G - Z_A - R_B \cdot \cos\alpha = 30 - 0 - 30 \cdot 0,5 = 15 \;\; H$$

$$Y_O = -R_B \cdot \sin\alpha \cdot \cos 45^\circ = -30 \cdot 0,87 \cdot 0,71 = -18,53 \;\; H$$

$$X_O = -X_A - R_B \cdot \sin\alpha \cdot \cos 45^\circ = -30 \cdot 0,87 \cdot 0,71 = -18,53 \ \ H$$

Ответ

$X_A = 0$; $Z_A = 0$; $X_O = -18,53 \ \ H$; $Y_O = -18,53 \ \ H$; $Z_O = 15 \ \ H$; $R_B = 30 \ \ H$.

1.3.4 Контрольные вопросы по теме

1. Как определяется момент силы относительно оси.
2. Перечислите случаи, когда момент силы относительно оси равен 0.
3. Дайте понятие пространственной системы сил.
4. Классифицируйте пространственные системы сил.
5. Дайте определение аналитическому условию равновесия пространственной произвольной системы сил.
6. Практический вопрос.

2 КИНЕМАТИКА

2.1 К.1. Исследование движения точки по заданным уравнениям ее движения

2.1.1 Теоретические основы

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение точек или тел, без учета сил, вызывающих это движение.

В кинематике движение точки или тела считается заданным, если существует способ, с помощью которого можно однозначно определить положение точки относительно заданной системы отсчета.

Система отсчета – это система координат, условно связанная с телом отсчета.

В зависимости от используемых систем отсчета различают следующие способы задания движения точки:

1) Векторный способ задания движения точки;
2) Координатный способ задания движения точки;
3) Естественный способ задания движения точки.

Векторный способ задания движения точки.

При векторном способе задания движения точки положение точки М (Рисунок 2.1) определяется радиус-вектором $\overline{r}$, исходящим из точки отсчета (т. *O*) в точку, соответствующую положению точки *M* в какой-то момент времени. Радиус вектор $\overline{r}$ является функцией времени, которая является однозначной, непрерывной и дважды дифференцируемой.

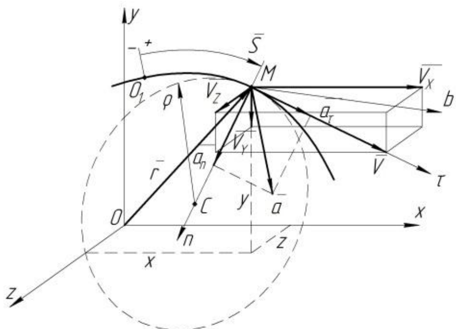


Рисунок 2.1

$$\overline{r} = f \;\; t \;\; , \tag{2.1}$$

Скорость – это векторная величина, характеризующая изменение положения точки в единицу времени.

Вектор скорости в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора этой точки по времени.

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{r}' , \tag{2.2}$$

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону ее движения.

Ускорение – это вектор, характеризующий изменение вектора скорости по величине и направлению в единицу времени.

Вектор ускорения в данный момент будет равен 1-ой производной по времени от вектора скорости или 2-ой производной по времени от радиус-вектора, лежит в соприкасающейся плоскости и направлен во внутрь вогнутости траектории.

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}, \qquad (2.3)$$

Координатный способ задания движения точки

При координатном способе положение точки определяется координатами *x, y, z*, которые являются функциями времени, однозначными, непрерывными и дважды дифференцируемыми.

$$\begin{cases} x = x\ \ t \\ y = y\ \ t \\ z = z\ \ t \end{cases} \qquad (2.4)$$

Координатный и векторный способ взаимосвязаны: $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Уравнения (2.4) являются уравнениями движения точки, а также уравнениями траектории в параметрической форме (параметр t). Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, следует, путем математических преобразований уравнений (2.4), исключить параметр t и получить координатное уравнение.

Вектор скорости точки при координатном способе задания движения определяется через свои проекции на соответствующие оси координат, которые, в свою очередь, определяются как первые производные по времени от соответствующих координат.

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Тогда модуль вектора скорости определится по формуле:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\ \dot{x}\ ^2 + \ \dot{y}\ ^2 + \ \dot{z}\ ^2} \qquad (2.6)$$

Направление вектора скорости по отношению к осям координат определяется соответствующими направляющими косинусами:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{V_x}{V} \\ \cos\beta = \dfrac{V_y}{V} \\ \cos\gamma = \dfrac{V_z}{V} \end{cases} \qquad (2.7)$$

где α, β, γ - соответственно, углы между вектором скорости и осями координат Ox, Oy, Oz .

Вектор ускорения при координатном способе задания движения точки определяется через свои проекции на соответствующие оси координат, которые, в свою очередь, определяются как первые производные по времени от соответствующих проекций вектора скорости или вторые производные по времени от соответствующих координат.

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dot{V}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dot{V}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dot{V}_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (2.8)$$

Модуль и направление вектора ускорения определяется аналогично вектору скорости.

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\,, \qquad (2.9)$$

Естественный способ задания движения точки

Чтобы задать движение точки естественным способ необходимо знать:

1. Траекторию движения точки: (O_1M);

2. Начало отсчета с указанием положительного и отрицательного направления отсчета дуговой координаты (точка O_1; + и -);

3. Закон движения точки по своей траектории в виде функции изменения дуговой координаты в зависимости от времени $S = f\ t$ (функция однородна, непрерывна и дважды дифференцируема) отсчитываемой от начала координат.

Все кинематические параметры движения точки определяются в проекциях на естественные оси координат:

$\bar{\tau}$ - **тангенциальная ось** - направлена по касательной в мгновенной точке к траектории движения точки в сторону положительного отсчета дуговой координаты;

$\bar{n}$ - **нормальная ось** - лежит в соприкасающейся плоскости и направлена перпендикулярно тангенциальной оси во внутрь вогнутой части траектории;

$\bar{b}$ - **бинормальная ось** – перпендикулярна первым двум осям и направлена в сторону, откуда виден кратчайший переход против хода часовой стрелки от первой $\bar{\tau}$ оси ко второй $\bar{n}$.

Так как естественные оси координат движутся вместе с точкой, то их направление и положение постоянно изменяется, поэтому они считаются **подвижными**.

Вектор скорости всегда направлен вдоль тангенциальной $\bar{\tau}$ оси. Модуль вектора скорости определяется как производная по времени от дуговой координаты S

$$V = \frac{dS}{dt} \tag{2.10}$$

При естественном способе задания движения точки **вектор полного ускорения** складывается из соответствующих проекций на нормальную n и тангенциальную τ оси.

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau \tag{2.11}$$

где: $\bar{a}_\tau$ - тангенциальное ускорение. Направлено вдоль тангенциальной оси. В случае если тангенциальное ускорение совпадает по направлению с вектором скорости, то движение ускоренное, если противоположно – движение замедленное.

Модуль определяется по формуле:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \tag{2.12}$$

$\bar{a}_n$ - нормальное ускорение. Направлено вдоль нормальной оси во внутрь вогнутой части траектории. Модуль определяется по формуле:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \tag{2.13}$$

где ρ - радиус кривизны траектории в данной точке.

Проекция полного ускорения на бинормальную ось всегда равна 0 $\bar{a}_b = 0$, т.к. вектор ускорения точки всегда лежит в соприкасающейся плоскости.

Тангенциальное (касательное) ускорение – характеризует изменение вектора скорости по величине.

Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Тангенциальное ускорение равно 0 когда:

1. Скорость постоянна по модулю;
2. Если скорость достигает экстремальное значение.

Нормальное ускорение равно 0 когда:

1. Скорость равна 0;
2. Движущаяся точка совпадает с точкой перегиба траектории;
3. Траектория движения точки – прямая.

Кинематические параметры, полученные при координатном и естественном способе задания движения, взаимосвязаны. Их связь выражается уравнениями:

$$a_\tau = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V}, \tag{2.14}$$

$$a_n = \frac{\left| a_y V_x - a_x V_y \right|}{V}, \tag{2.15}$$

2.1.2 Задание К.1

Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки *M*, установить вид ее траектории, ее скорость, полное, касательное нормальное ускорения и радиус кривизны траектории. Построить траекторию, определить положение точки, векторы скорости и ускорений в заданный момент времени.

Уравнения движений точки приведены в условии:

$$У2\begin{cases} x = \dfrac{a-5}{2}t^2 + Kt + b \\ y = ct \end{cases} \qquad t_1 = 1\ c$$

$$У1\begin{cases} x = \;2+K\;\; \cos t + 4 - a \\ y = c\;\;3-K\;\;\; \sin t^{\;|K|+1} + b - a \end{cases} \qquad t_1 = \frac{\pi}{4}\ c$$

$$У3\begin{cases} x = \;2+K\;\;\; \sin t^{\;|K|+1} + 4 - a \\ y = c\;\;3-K\;\; \cos t + b - 4 \end{cases} \qquad t_1 = \frac{\pi}{4}\ c$$

2.1.3 Пример выполнения задания К.1

Дано:

Движение точки *M* задано уравнениям

$$\begin{cases} x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) - 2,\ \text{см} \\ y = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) + 3,\ \text{см} \end{cases} \tag{2.16}$$

Установить вид траектории движущейся точки, ее скорость, полное, касательное нормальное ускорения и радиус кривизны траектории. Построить траекторию, определить положение точки, векторы скорости и ускорений в момент времени $t_1 = 1c$.

Решение

1) Определим вид траектории движущейся точки.

Для этого, путем математических преобразований, из заданных параметрических (параметр - t) уравнений получим координатное уравнение ($y = f\quad x$).

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) \\ \frac{y-3}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) \end{cases}$$

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1 \tag{2.17}$$

Траекторией движения точки является окружность, радиусом *2(см)*, с центром в т.O_1 координатой *(-2;3)* (Рисунок 2.2).

2) Определим положение точки на своей траектории в заданный момент времени $t_1 = 1\ c$.

Для этого подставляем значение времени $t_1 = 1\ c$ в исходные уравнения

$$\begin{cases} x_1 = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\cdot 1^2\right) - 2 = 2\cdot 0,5 - 2 = -1 \ \ см \\ y_1 = -2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\cdot 1^2\right) + 3 = -2\cdot 0,87 + 3 = 1,26 \ \ см \end{cases}$$

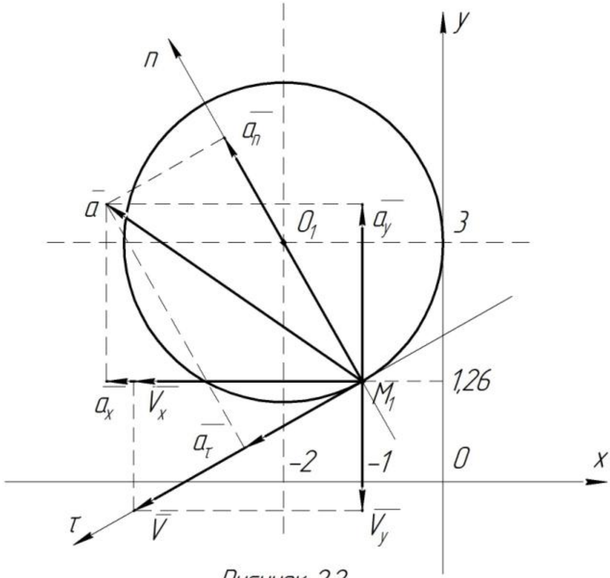


Рисунок 2.2

Таким образом, в момент времени $t_1 = 1\ c$ движущаяся точка M находится в положении точки M_1(-1; 1,26).

3) Определяем скорость точки в заданный момент времени.

Для этого сначала определим уравнения изменения проекций вектора скорости на оси координат, которые определяются как первые производные по времени от соответствующих координат (Уравнений (2.16)).

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = \left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) - 2\right)' = -2\dfrac{2}{3}\pi t\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) = -\dfrac{4}{3}\pi t\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \left(-2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) + 3\right)' = -\dfrac{4}{3}\pi t\cos\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) \end{cases} \tag{2.18}$$

Тогда в момент времени $t_1 = 1\ c$ проекции вектора скорости на оси координат равны:

$$\begin{cases} V_{x_1} = -\dfrac{4}{3}\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -3,64 \ \ см/с \\ V_{y_1} = -\dfrac{4}{3}\pi \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2,09 \ \ см/с \end{cases} \tag{2.19}$$

Полученные проекции на схеме покажем как вектора в выбранном масштабе, приложенные в точке M_1, параллельные соответствующим осям координат. Так как модули проекций отрицательны, то эти вектора направлены противоположно положительному направлению осей координат.

Модуль и направление вектора скорости определится как диагональ прямоугольника, построенного на проекциях вектора скорости, как на сторонах.

$$V_1 = \sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2} = \sqrt{(-3,64)^2 + (-2,09)^2} = 4,20 \ \ см/с \tag{2.20}$$

4) Определяем ускорение точки в заданный момент времени.

Для этого сначала определим уравнения изменения проекций вектора ускорения на оси координат, которые определяются как первые производные по времени от соответствующих проекций вектора скорости или вторые производные по времени от соответствующих координат.

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \left(-\dfrac{4}{3}\pi t \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right)\right)' = -\left(\dfrac{4}{3}\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) + \dfrac{4}{3}\pi t \cdot \dfrac{2}{3}\pi t \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right)\right) \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \left(-\dfrac{4}{3}\pi t \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right)\right)' = -\left(\dfrac{4}{3}\pi \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) - \dfrac{4}{3}\pi t \cdot \dfrac{2}{3}\pi t \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -\left(\dfrac{4}{3}\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) + \dfrac{8}{9}\pi^2 t^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right)\right), \ см/с^2 \\ a_y = -\left(\dfrac{4}{3}\pi \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right) - \dfrac{8}{9}\pi^2 t^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t^2\right)\right), \ см/с^2 \end{cases} \tag{2.21}$$

Тогда в момент времени $t_1 = 1 \ с$ проекции вектора ускорения на оси координат равны:

$$\begin{cases} a_{x_1} = -\left(\dfrac{4}{3}\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{8}{9}\pi^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = -8,01 \ \ см/с^2 \\ a_{y_1} = -\left(\dfrac{4}{3}\pi \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{8}{9}\pi^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 5,54 \ \ см/с^2 \end{cases} \tag{2.22}$$

Полученные проекции на схеме покажем аналогично проекциям вектора скорости, т.е. в виде векторов в соответствующем масштабе, параллельных соответствующим осям координат и с учетом знака проекции.

Модуль и направление вектора ускорения определится как диагональ прямоугольника, построенного на проекциях вектора ускорения, как на сторонах.

$$a_1 = \sqrt{\left(a_{x_1}\right)^2 + \left(a_{y_1}\right)^2} = \sqrt{\left(-8,01\right)^2 + \left(5,54\right)^2} = 9,74 \ \left(см/с^2\right) \qquad (2.23)$$

5) Определим тангенциальное $\bar{a}_\tau$ ускорение движущейся точки.

Модуль тангенциального ускорения определим по известной формуле (2.14):

$$a_{\tau_1} = \frac{a_{x_1}V_x + a_{y_1}V_{y_1}}{V_1} = \frac{\left(-8,01\right)\cdot\left(-3,64\right) + 5,54\cdot\left(-2,09\right)}{4,20} = 4,19 \ \left(см/с^2\right) \qquad (2.24)$$

Направление вектора $\bar{a}_\tau$ определим как проекцию полного ускорения на тангенциальную ось.

6) Определим нормальное $\bar{a}_n$ ускорение движущейся точки.

Так как полное ускорение $\bar{a}$ точки является геометрической суммой тангенциального $\bar{a}_\tau$ и нормального $\bar{a}_n$ ускорений,

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n ,$$

то модуль нормального ускорения определим по формуле:

$$a_{n_1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau_1}^2} = \sqrt{9,74^2 - 4,19^2} = 8,79 \ \left(см/с^2\right) \qquad (2.25)$$

Направление вектора $\bar{a}_n$ определится как проекция полного ускорения на нормальную ось.

7) Определим радиус кривизны ρ траектории в заданный момент времени.

Радиус кривизны траектории определим из известной формулы для определения модуля нормального ускорения (2.13):

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{4,20^2}{8,79} = 2 \ \left(см\right) \qquad (2.26)$$

Ответ

$V_1 = 4,20 \ \left(см/с\right)$; $a_1 = 9,74 \ \left(см/с^2\right)$; $a_{\tau_1} = 4,19 \ \left(см/с^2\right)$;

$a_{n_1} = 8,79 \ \left(см/с^2\right)$; $\rho = 2 \ \left(см\right)$.

2.1.4 Контрольные вопросы по теме

1. Что изучает кинематика?
2. Что называется траекторией точки?
3. Какие существуют способы задания движения точки и в чем заключается каждый из них?
4. Как при координатном способе задания движения точки определяется ее траектория?
5. Чему равен и как направлен в пространстве вектор скорости?
6. Чему равны проекции скорости точки на неподвижные оси декартовой системы координат?
7. Как по проекциям скорости найти ее модуль и направление?
8. Чему равна проекция скорости точки на касательную к траектории?
9. Чему равен и как направлен в пространстве вектор ускорения?
10. Как определяются проекции ускорения точки на неподвижные оси декартовой системы координат?
11. Как по проекциям ускорения определить его модуль и направление в пространстве?
12. Чему равны проекции ускорения точки на касательную и главную нормаль к траектории?
13. В каких случаях касательное ускорение точки равно пулю?
14. В каких случаях нормальное ускорение точки равно нулю?
15. Какое движение точки называется равномерным, равнопеременным?
16. Практический вопрос.

2.2 К.4. Кинематический анализ плоского многозвенного механизма

2.2.1 Теоретические основы

При выполнении данной задачи расчетно-графической работы проводится кинематический анализ плоского многозвенного механизма.

Механизм – это совокупность материальных точек (тел) движение которых взаимосвязано.

Кинематический анализ данного механизма заключается в определении характера и соответствующих кинематических параметров движения каждого звена этого механизма.

Различают три вида движения тел:

1) Поступательное движение;

2) Вращательное движение;

3) Плоско-параллельное (сложное) движение.

Поступательное движение

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, проведенная в теле остается, при движении тела, параллельной своему первоначальному положению.

Признаки:

При поступательном движении тела, траектории всех точек одинаковы. В любой момент времени скорости и ускорения всех точек тела геометрически равны.

Поступательное движение характеризуется:

- линейным перемещением $\breve{S}, \bar{r}$ $м$;

- скоростью $\bar{V}$ $м/с$;

- ускорением $\bar{a}$ $\left[м/с^2 \right]$.

Вращательное движение

Вращательное движение – это такое движение, при котором все точки тела, лежащие на прямой, называемой осью вращения, при движении тела, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета.

Признаки:

При вращательном движении у тела обязательно должна быть неподвижная ось вращения.

Вращательное движение характеризуется:

- углом поворота тела $\varphi = f(t)$ $\quad рад$;
- угловой скоростью $\omega = \varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt}$ $\quad рад/с$;
- угловым ускорением $\varepsilon = \omega' = \varphi'' = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\left[рад/с^2 \right]$

Угловую скорость и угловое ускорение удобно представлять в виде скользящих векторов направленных вдоль оси вращения по направлению, определяемому по правилу буравчика (Рисунок 2.3).

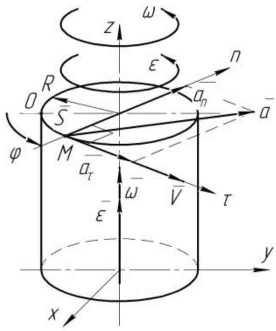


Рисунок 2.3

Если вектора $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ сонаправлены, то движение ускоренное, если противоположны – замедленное.

Угловые кинематические параметры вращающегося твердого тела и линейные кинематические параметры точки, принадлежащей этому телу, взаимосвязаны. Покажем на примере точки *M* находящейся на расстоянии R от оси вращения.

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d\,(\varphi R)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R, \tag{2.27}$$

т.е.

$$V = \omega R, \tag{2.28}$$

Тогда

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R, \tag{2.29}$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R, \tag{2.30}$$

Полное ускорение точки равно:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\varepsilon R)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \tag{2.31}$$

Плоско-параллельное движение

Плоско-параллельное движение – это движение, при котором все точки движутся в плоскостях параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Поэтому, движение тела можно описать движением плоской фигуры, получающейся в сечении этого тела одной из плоскостью, параллельной неподвижной плоскости.

В свою очередь, движение фигуры в своей плоскости можно описать движением отрезка АВ, принадлежащего этой фигуре (Рисунок 2.4).

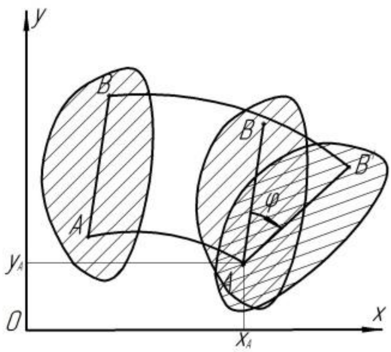


Рисунок 2.4

В общем случае, плоско-параллельное движение можно представить, как совокупность поступательного движения, вместе с некоторым полюсом (т. A), и вращательного: поворот тела (отрезка AB) вокруг этого полюса, т.е. для описания плоско-параллельного движения необходимо задаться следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x_A = f_1\ t \\ y_A = f_2\ t \\ \varphi = f_3\ t \end{cases}, \qquad (2.32)$$

Причем, поступательная часть плоско-параллельного движения зависит от выбора полюса, а вращательная – не зависит от выбранного полюса.

Для того чтобы найти скорости всех точек и угловую скорость звена необходимо продифференцировать систему уравнений (2.32).

$$\begin{cases} V_{x_A} = \dfrac{dx_A}{dt} \\ V_{y_A} = \dfrac{dy_A}{dt} \\ \omega_{AB} = \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}, \qquad (2.33)$$

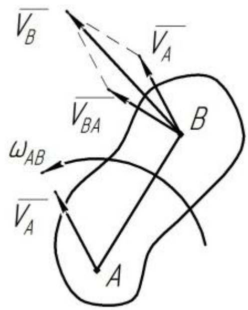


Рисунок 2.5

Тогда, зная скорость полюса (т. A) и угловую скорость звена ω_{AB} можно определить скорость произвольной точки B (Рисунок 2.5)

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \qquad (2.34)$$

Скорость любой точки тела при его плоскопараллельном движении равна векторной сумме абсолютной скорости полюса ($\bar{V}_A$) и относительной скорости данной точки ($\bar{V}_{BA}$) при ее вращении вместе с телом вокруг полюса.

При этом

$$V_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB, \tag{2.35}$$

Вектор $\bar{V}_{BA}$ всегда направлен перпендикулярно AB в сторону угловой скорости звена ω_{AB}.

Аналогия между вращательным и плоско-параллельным движением

Вращательное движение

Вращательное движение характеризуется поворотом тела вокруг оси, скорость которой равна 0 (точка O), а скорости всех остальных точек зависят от угловой скорости вращения тела и пропорциональны удалению этих точек от центра вращения (Рисунок 2.6).

$V_A = \omega \cdot OA$, $\quad V_B = \omega \cdot OB$,

$V_C = \omega \cdot OC$

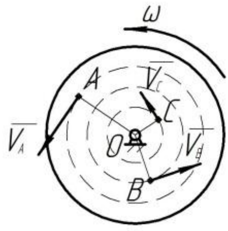


Рисунок 2.6

Плоско-параллельное движение

В любой момент движения плоской фигуры в ее плоскости существует точка, абсолютная скорость которой, в данный момент времени, равна нулю. Эта точка называется **Мгновенным центром скоростей (*МЦС*)** (Рисунок 2.7).

Т.е., тело, как будто, поворачивается вокруг МЦС в данный момент времени.

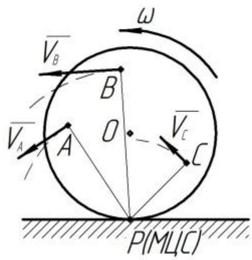


Рисунок 2.7

<u>Примечание:</u> *МЦС существует, если* $\omega \neq 0$

Тогда, скорости точек зависят от угловой скорости вращения тела и пропорциональны расстоянию от МЦС до соответствующей точки.

$V_A = \omega \cdot PA$, $\quad V_B = \omega \cdot PB$, $\quad V_C = \omega \cdot PC$

Для того чтобы найти положение *МЦС* в данный момент времени для звена, совершающего плоско-параллельное движение, необходимо восстановить перпендикуляры к линиям действия векторов скоростей двух любых точек этого звена. *МЦС* будет точка пересечения этих перпендикуляров.

<u>Примечание:</u> *Если перпендикуляры к скоростям любых двух точек звена не пересекаются, т.е. параллельны, то это означает, что МЦС удаляется в бесконечность,*

тогда $\omega = \dfrac{V_A}{PA} = \dfrac{V_A}{\infty} = 0$.

Так как угловая скорость звена $\omega = 0$, то звено в данный момент времени движется поступательно. Отсюда следует, что скорости и ускорения всех точек этого звена в данный момент времени равны как по модулю, так и по направлению.

В некоторых случаях, при определении скоростей точек звена, совершающего плоско-параллельное движение, удобно воспользоваться **теоремой о проекциях скоростей двух точек на прямую, проходящую через эти точки**, которая гласит:

проекции скоростей точек плоского тела при плоско-параллельном движении на прямую, проходящую через эти точки, алгебраически равны (Рисунок 2.8).

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta, \tag{2.36}$$

При определении скоростей точек и угловых скоростей звеньев исследуемого механизма пользуются одним из следующих методов:

1. Метод построения плана скоростей.
2. Метод определения положения *МЦС*.

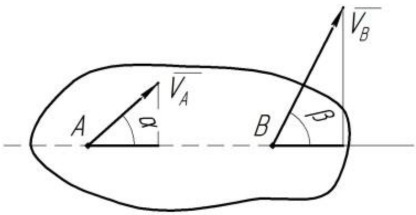


Рисунок 2.8

Метод построения плана скоростей заключается в последовательном составлении и графо-аналитическом решении уравнений (2.34) для всех точек исследуемого механизма. При этом графическая часть решения оформляется отдельно от механизма в виде совокупности всех векторов абсолютных скоростей, отложенных из одной точки, называемой полюсом построения, в определенном направлении и с учетом выбранного масштаба.

Метод определения положения *МЦС* заключается в определении положения *МЦС* для каждого звена плоского механизма, а далее, с учетом свойств *МЦС* определения направлений и модулей скоростей всех точек и угловых скоростей звеньев механизма. При этом графическая часть решения накладывается на сам механизм, начерченный в определенном положении в заданный момент времени.

Определение ускорения точек плоской фигуры

Так как ускорение является первой производной по времени от скорости или второй производной по времени от закона движения, то ускорение полюса и угловое ускорение тела при плоском движении определится как производная от системы уравнений (2.33)

$$\begin{cases} a_{x_A} = \dfrac{dV_{x_A}}{dt} = \dfrac{d^2 x_A}{dt^2} \\ a_{y_A} = \dfrac{dV_{y_A}}{dt} = \dfrac{d^2 y_A}{dt^2}, \\ \varepsilon_{AB} = \dfrac{d\omega_{AB}}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \end{cases} \qquad (2.37)$$

Тогда, учитывая, что плоское движение является совокупностью поступательного движения всего тела вместе с некоторым полюсом и вращательного движения всего тела вокруг этого полюса, **вектор абсолютного ускорения любой точки этого тела $\bar{a}_B$ определится как геометрическая сумма векторов абсолютного ускорения полюса $\bar{a}_A$ и относительного ускорения этой точки при ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса $\bar{a}_{BA}$** (Рисунок 2.9).

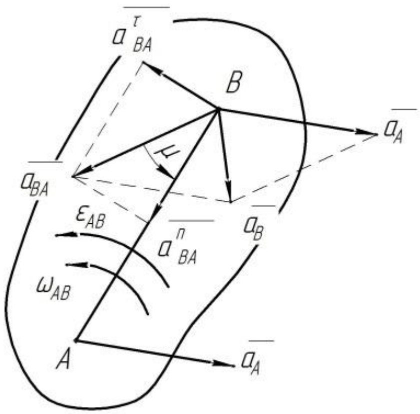


Рисунок 2.9

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \qquad (2.38)$$

Для определения вектора относительного ускорения $\bar{a}_{BA}$ его целесообразно разложить на тангенциальную $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ и нормальную $\bar{a}^{n}_{BA}$ составляющие, тогда уравнение (2.38) примет вид:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{n}_{BA} + \bar{a}^{\tau}_{BA}, \qquad (2.39)$$

При этом нормальная составляющая относительного ускорения $\bar{a}^{n}_{BA}$ по модулю будет равна

$$a^{n}_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot BA, \qquad (2.40)$$

а направлена вдоль прямой AB от точки B к точке A.

Тангенциальная составляющая относительного ускорения $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ по модулю будет равна

$$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot BA, \qquad (2.41)$$

а направлена перпендикулярно прямой AB в сторону углового ускорения ε_{AB}.

Тогда вектор относительного ускорения $\overline{a}_{BA}$ будет направлен к прямой АВ под углом μ, тангенс которого определится по формуле

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^{n}} = \frac{\varepsilon_{AB} \cdot BA}{\omega_{AB}^{2} \cdot BA} = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^{2}}, \qquad (2.42)$$

Одним из методов определения ускорений всех точек и угловых ускорений звеньев многозвенного механизма является **метод построения плана ускорений**, который заключается в последовательном составлении и графо-аналитическом решении уравнений (2.39) для всех точек исследуемого механизма. При этом графическая часть решения оформляется в виде совокупности всех векторов абсолютных ускорений, отложенных из одной точки, называемой полюсом построения, в определенном направлении и с учетом выбранного масштаба.

Другим методом определения ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма является **метод определения мгновенного центра ускорений (*МЦУ*)**.

Сущность данного метода заключается в следующем.

При плоском движении тела в плоскости его движения существует точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется **мгновенным центром ускорений** (*МЦУ*).

Положение *МЦУ* можно определить, если известны: ускорение какой либо точки тела $\overline{a}_A$, а также величины угловой скорости ω и углового ускорения ε этого тела.

Для этого, используя формулу (2.42), вычисляют величину угла μ. Далее, под углом μ к вектору известного абсолютного ускорения точки $\overline{a}_A$ (Рисунок 2.10), отложенного в сторону углового ускорения, откладывают луч *AQ*, при этом точка *Q* будет удалена от точки *A* на расстоянии

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (2.43)$$

Ускорение любой точки этого тела (т. *B*) в данный момент времени равно ее ускорению во вращательном движении вокруг *МЦУ*, при этом ускорения точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений

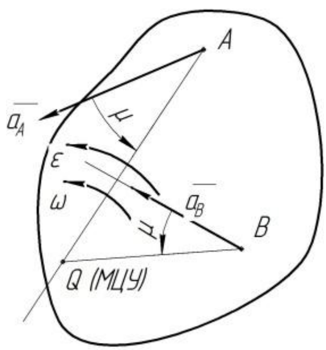


Рисунок 2.10

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ}\,, \qquad (2.44)$$

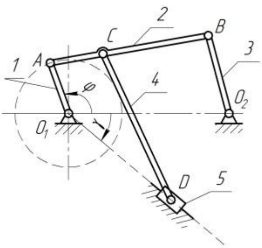
а направлены они под тем же углом μ к прямым, соединяющим эти точки и *МЦУ*.

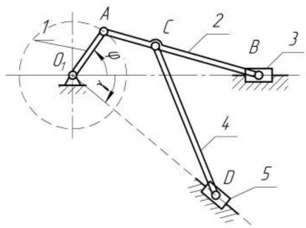
2.2.2 Задание К.4

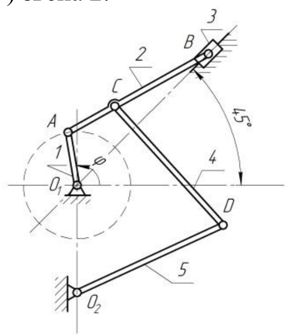
Кинематический анализ многозвенного механизма

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2\,рад/с$. Для заданного углами φ, γ и размерами звеньев положения механизма определить:

1. Скорости точек *B*, *C* и *D* и угловые скорости звеньев с помощью мгновенных центров скоростей (*МЦС*).
2. Скорости точек *B*, *C* и *D* и угловые скорости звеньев с помощью плана скоростей.
3. Ускорения точек *B*, *C* и *D* и угловые ускорения звеньев с помощью плана ускорений.
4. Положение мгновенного центра ускорений (*МЦУ*) звена 2.







У1

$O_1A = 20 см$;

$O_1O_2 = 70 см$;

$AB = 60 см$;

$O_2B = 30 см$;

$AC = 8c,\ см$;

$CD = 60 см$;

$\varphi = 30в^\circ$;

$\gamma = 20\ \ a+1\ \ ^\circ$.

У2

$O_1A = 20 см$;

$AB = 60 см$;

$AC = 8c,\ см$;

$CD = 60 см$;

$\varphi = 30в^\circ$;

$\gamma = 20\ \ a+1\ \ ^\circ$.

У3

$O_1A = 20 см$;

$AB = 60 см$;

$AC = 8c,\ см$;

$CD = 60 см$;

$O_1O_2 = 20\ \ a+1\ \ ,\ см$;

$O_2D = 60 см$;

$\varphi = 30в^\circ$.

2.2.3 Пример выполнения задания К.4

Дано:

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2\,рад/с$ (Рисунок 2.11). $O_1A = 20\,см$; $AB = 60\,см$; $AC = 20\,см$; $CD = 30\,см$; $DO_2 = 50\,см$;

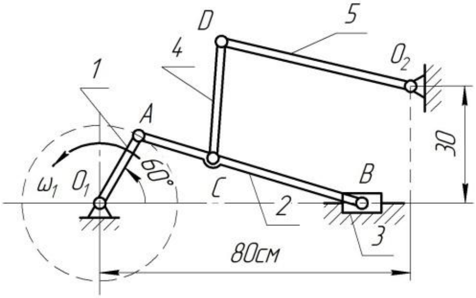


Рисунок 2.11

Для заданного положения механизма определить:

1. Скорости точек *B*, *C* и *D* и угловые скорости звеньев с помощью мгновенных центров скоростей (*МЦС*).
2. Скорости точек *B*, *C* и *D* и угловые скорости звеньев с помощью плана скоростей.
3. Ускорения точек *B*, *C* и *D* и угловые ускорения звеньев с помощью плана ускорений.
4. Положение мгновенного центра ускорений (*МЦУ*) звена 2.

Решение

1) Определим скорости точек *B*, *C* и *D* и угловые скорости звеньев с помощью мгновенных центров скоростей (*МЦС*).

Строим схему механизма в выбранном масштабе (Рисунок 2.12).

Звенья O_1A и O_2D вращаются вокруг неподвижных центров O_1 и O_2 соответственно.

Скорость точки *A*, принадлежащей вращающемуся звену O_1A, определим по формуле:

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A = 2 \cdot 20 = 40\ см/с \tag{2.45}$$

Вектор $\bar{V}_A$ направлен перпендикулярно звену O_1A в направлении угловой скорости ω_1.

МЦС звена *AB* (т. P_{AB}) определим на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек *A* и *B*, проведенных их этих точек. Для этого восстановим перпендикуляры к векторам скоростей точек *A* и *B*, направление которых известно ($\bar{V}_A$ направлен перпендикулярно звену O_1A ; $\bar{V}_B$ направлен вдоль направляющей O_1B) и найдем точку их пересечения P_{AB} .

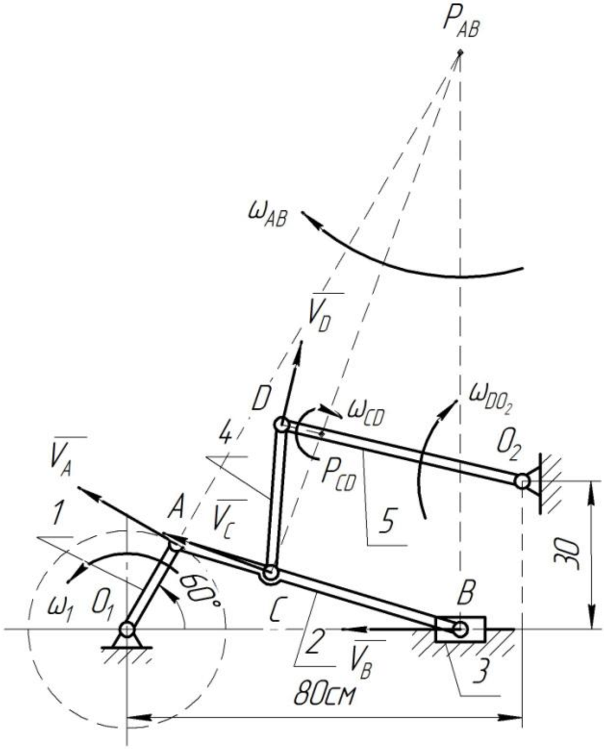


Рисунок 2.12

Определив положение P_{AB} , измерим отрезок $P_{AB}A$ и найдем угловую скорость звена AB:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_{AB}A} = \frac{40}{114,9} = 0,35 \ \ рад/с \tag{2.46}$$

Примечание: При измерении расстояний между соответствующими точками и МЦС необходимо учитывать масштаб построения схемы механизма и в формулы подставлять их абсолютное значение.

Определим скорость точки B:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot P_{AB}B = 0,35 \cdot 116,8 = 40,88 \ \ см/с \tag{2.47}$$

Вектор скорости $\bar{V}_B$ направлен перпендикулярно $P_{AB}B$ в направлении угловой скорости ω_{AB}.

Для того чтобы определить направление вектора скорости точки C проведем отрезок $P_{AB}C$. Вектор $\bar{V}_C$ будет направлен перпендикулярно $P_{AB}C$ в сторону угловой скорости ω_{AB}.

Модуль скорости точки C равен:

$$V_C = \omega_{AB} \cdot P_{AB}C = 0,35 \cdot 112,0 = 39,20 \ \ см/с \qquad (2.48)$$

Аналогично найдем скорость точки D и угловые скорости звеньев CD и O_2D:

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{P_{CD}C} = \frac{39,20}{29,8} = 1,32 \ \ рад/с \qquad (2.49)$$

$$V_D = \omega_{CD} \cdot P_{CD}D = 1,32 \cdot 8,2 = 10,82 \ \ см/с \qquad (2.50)$$

$$\omega_{DO_2} = \frac{V_D}{DO_2} = \frac{10,82}{50} = 0,22 \ \ рад/с \qquad (2.51)$$

2) Определим скорости точек *B, C* и *D* и угловые скорости звеньев с помощью плана скоростей.

Вычисляем скорость точки A:

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A = 2 \cdot 20 = 40 \ \ см/с \qquad (2.52)$$

Вектор $\bar{V}_A$ направлен перпендикулярно звену O_1A в направлении угловой скорости ω_1.

Определим скорость точки B, решив графически векторное уравнение:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} \qquad (2.53)$$

Строим план скоростей. Из произвольно выбранного полюса построения плана скоростей (т. P_V) проводим вектор $\overline{P_V a}$ произвольной длины параллельно и сонаправленно вектору $\bar{V}_A$ (Рисунок 2.13).

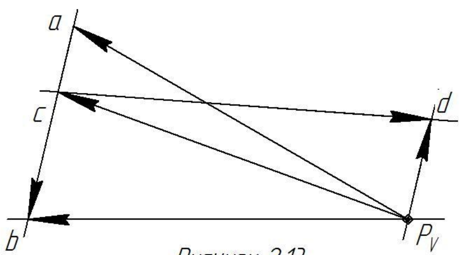


Рисунок 2.13

Для привязки длин векторов, получаемых на плане скоростей, к модулям этих векторов определим масштаб построения плана скоростей. Для этого разделим модуль вектора скорости $\bar{V}_A$, выраженный в $см/с$, на длину вектора $\overline{P_V a}$, выраженный в *мм*:

$$\mu_V = \frac{|\bar{V}_A|}{P_V a} = \frac{40}{47} = 0,851\left(\frac{см/с}{мм}\right) \tag{2.54}$$

Рассмотрим вектора, входящие в уравнение (2.53). Так как любой вектор характеризуется двумя параметрами: его модулем и направлением действия, то, для наглядности, две черты под соответствующим вектором будут означать, что для данного вектора известен и его модуль, и направление; одна черта под вектором будет говорить о том, что для данного вектора известно, в данном случае, только один параметр – направление:

$$\underset{\parallel O_1B}{\underline{\bar{V}_B}} = \underline{\underline{\bar{V}_A}} + \underset{\perp AB}{\underline{\bar{V}_{BA}}} \tag{2.55}$$

Так как вектор $\bar{V}_{BA}$ перпендикулярен звену *AB*, а вектор $\bar{V}_B$ направлен вдоль O_1B, то для графического решения векторного уравнения на плане скоростей проведем через точку *a* прямую, перпендикулярную звену *AB*, а через полюс P_V прямую, параллельную O_1B. Пересечение этих прямых укажет положение точки *b*.

Вектор $\overline{P_V b}$ определяет модуль и направление вектора $\bar{V}_B$.

Измерив длину вектора $\overline{P_V b}$, определим модуль вектора $\bar{V}_B$:

$$V_B = P_V b \cdot \mu_V = 46 \cdot 0,851 = 39,15 \ \ см/с \tag{2.56}$$

Аналогично определим модуль вектора относительной скорости $\bar{V}_{BA}$:

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V = 24 \cdot 0,851 = 20,42 \ \ см/с \tag{2.57}$$

Так как вектор $\bar{V}_{BA}$ характеризует относительное вращение звена *AB* вокруг точки *A*, то угловая скорость этого звена определится по формуле:

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{20,42}{60} = 0,34 \ \ рад/с \tag{2.58}$$

Скорость точки *C* определим из условия, что отрезки, получаемые на плане скоростей, пропорциональны отрезкам на плане механизма, т.е.:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB} \ \Rightarrow \ ac = \frac{AC \cdot ab}{AB} = \frac{20 \cdot 24}{60} = 8 \ \ мм \tag{2.59}$$

Таким образом, отложив на отрезке *ab* отрезок *ac*, найдем положение точки *c* и, соответственно, длину и направление вектора $\overline{P_V c}$.

Тогда:

$$V_C = P_V c \cdot \mu_V = 45 \cdot 0,851 = 38,30 \ \text{см/с} \tag{2.60}$$

Продолжая построение плана скоростей, определим скорость точки D, а также угловые скорости звеньев CD и DO_2:

$$\underset{\perp DO_2}{\underline{\bar{V}_D}} = \underline{\underline{\bar{V}_C}} + \underset{\perp DC}{\underline{\bar{V}_{DC}}} \tag{2.61}$$

$$V_D = P_V d \cdot \mu_V = 12 \cdot 0,851 = 10,21 \ \text{см/с} \tag{2.62}$$

$$V_{DC} = cd \cdot \mu_V = 45 \cdot 0,851 = 38,30 \ \text{см/с} \tag{2.63}$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_{DC}}{CD} = \frac{38,30}{30} = 1,28 \ \text{рад/с} \tag{2.64}$$

$$\omega_{DO_2} = \frac{V_D}{DO_2} = \frac{10,21}{50} = 0,20 \ \text{рад/с} \tag{2.65}$$

Для сравнения результатов, полученных различными способами, значения скоростей точек и угловых скоростей звеньев, определенные методом *МЦС* и методом построения плана скоростей, заносим в таблицу значений:

Способ опреде-ления	**Найденные значения**						
	V_A, см/с	V_B, *см/с*	V_C, *см/с*	V_D, *см/с*	ω_{AB}, *рад/с*	ω_{CD}, *рад/с*	ω_{DO_2}, *рад/с*
По *МЦС*	40	40,88	39,20	10,82	0,35	1,32	0,22
По плану скоро-стей	40	39,15	38,30	10,21	0,34	1,28	0,20

3) Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма методом построения плана ускорений.

Определим ускорений точки A.

Так как кривошип O_1A вращается равномерно вокруг оси, проходящей через точку O_1, то ускорение точки A будет направлено вдоль звена O_1A от точки A к точке O_1 и равно:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A = 4 \cdot 20 = 80 \ \text{см/с}^2 \tag{2.66}$$

Ускорение точки B определим, решив графически векторное уравнение:

$$\underset{\parallel O_1B}{\underline{\bar{a}_B}} = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underset{\parallel AB}{\underline{\underline{\bar{a}_{BA}^n}}} + \underset{\perp AB}{\underline{\bar{a}_{BA}^\tau}} \tag{2.67}$$

где $\overline{a}_A$ - вектор абсолютного ускорения точки *A*. Известен как по модулю, так и по направлению.

$\overline{a}_{BA}^n$ - нормальная составляющая вектора относительного ускорения точки *B* вокруг точки *A*. Всегда направлена вдоль звена *AB* от точки *B* к точке *A* и равна:

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,34^2 \cdot 60 = 6,94 \ \text{см}/c^2 \qquad (2.68)$$

$\overline{a}_{BA}^\tau$ - тангенциальная составляющая вектора относительного ускорения точки *B* вокруг точки *A*. Всегда направлена перпендикулярно звену *AB*. Модуль этой составляющей определится по формуле:

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB \qquad (2.69)$$

Так как угловое ускорение ε_{AB} не известно, то модуль a_{BA}^τ определить пока невозможно.

$\overline{a}_B$ - вектор абсолютного ускорения точки *B*. В нашем случае известно только направление этого вектора: направлен вдоль направляющей BO_1 ползуна.

Для решения векторного уравнения с двумя неизвестными строим план ускорений.

Решение начнем с правой части уравнения.

Из произвольной точки на плоскости π, называемой полюсом построения плана ускорений, откладываем вектор $\overline{\pi a}$ произвольной длины, параллельный звену O_1A в направлении от точки *A* к точке O_1 (Рисунок 2.14).

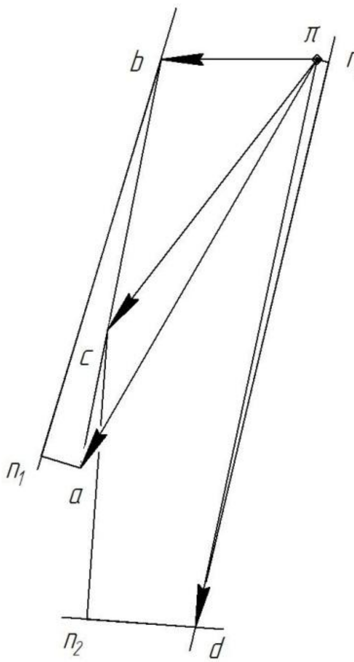


Рисунок 2.14

Для привязки векторов, получаемых на плане ускорений к модулям этих векторов, определим масштаб построения плана ускорений:

$$\mu_a = \frac{|\overline{a}_A|}{\pi a} = \frac{80}{56} = 1,429\left(\frac{\text{см}/c^2}{\text{мм}}\right).$$

Далее, к вектору $\overline{a}_A$ необходимо прибавить вектор $\overline{a}_{BA}^n$, для этого определим длину соответствующего ему вектора $\overline{an_1}$

$$an_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{6,94}{1,429} = 4,9 \ \ мм \quad .$$

Отложим из точки *a* на плане ускорений вектор $\overline{an_1}$ параллельно звену *AB* в направлении от точки *B* к точке *A*.

Затем, в соответствии с векторным уравнением, к вектору $\bar{a}_{BA}^n$ необходимо прибавить перпендикулярный ему вектор $\bar{a}_{BA}^\tau$ модуль которого неизвестен. Поэтому, через точку n_1 проведем прямую, перпендикулярную звену *AB*. На этом графическое решение правой части векторного уравнения пока окончено.

Переходим к решению левой части уравнения.

Через полюс π проведем прямую, параллельную направляющей ползуна BO_1.

Пересечение двух прямых укажет положение точки *b*, определяющей с учетом масштаба модуль и направления искомых векторов.

Таким образом:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 19 \cdot 1,429 = 27,15 \ \ см/c^2 \tag{2.70}$$

$$a_{BA}^\tau = n_1 b \cdot \mu_a = 49 \cdot 1,429 = 70,02 \ \ см/c^2 \tag{2.71}$$

Определим угловое ускорение ε_{AB} звена *AB*:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{70,02}{60} = 1,17 \ \ рад/c^2$$

Для определения направления углового ускорения ε_{AB} мысленно перенесем вектор $\overline{n_1 b}$, соответствующий вектору $\bar{a}_{BA}^\tau$, из плана ускорений в точку *B* плана механизма. Рассматривая движение точки *B* вокруг точки *A*, видно, что угловое ускорение будет направлено против движения часовой стрелки.

Ускорение точки *C* определим аналогично скорости, т.е. из условия, что отрезки, получаемые на плане ускорений, подобны отрезкам на плане механизма:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB} \ \Rightarrow \ ac = \frac{AC \cdot ab}{AB} = \frac{20 \cdot 50}{60} = 16,7 \ \ мм \tag{2.72}$$

Определив положение точки *c* на отрезке *ab* плана ускорений, найдем длину вектора $\overline{\pi c}$ и определим модуль вектора $\bar{a}_C$:

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a = 41 \cdot 1,429 = 58,59 \ \ см/c^2 \tag{2.73}$$

Продолжая построение плана ускорений, определим ускорение точки *D* и угловые ускорения звеньев *CD* и DO_2:

$$\bar{a}_D = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underset{\parallel DC}{\underline{\underline{\bar{a}_{DC}^{n}}}} + \underset{\perp DC}{\underline{\bar{a}_{DC}^{\tau}}} \tag{2.74}$$

Так как вектор ускорения $\bar{a}_D$ неизвестен как по модулю, так и по направлению, то для решения векторного уравнения этот вектор необходимо разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие $\bar{a}_D^n$ и $\bar{a}_D^\tau$, тогда уравнение (2.74) примет вид:

$$\underset{\parallel DO_2}{\underline{\underline{\bar{a}_D^n}}} + \underset{\perp DO_2}{\underline{\bar{a}_D^\tau}} = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underset{\parallel DC}{\underline{\underline{\bar{a}_{DC}^{n}}}} + \underset{\perp DC}{\underline{\bar{a}_{DC}^{\tau}}} \tag{2.75}$$

где $\bar{a}_D^n$ - вектор нормальной составляющей абсолютного ускорения точки D.

Точка D в абсолютном движении совершает вращение вместе со звеном DO_2 вокруг оси, проходящей через точку O_2, поэтому вектор $\bar{a}_D^n$ направлен вдоль звена DO_2 от точки D к точке O_2, а его модуль равен:

$$a_D^n = \omega_{DO_2}^2 \cdot DO_2 = 0,20^2 \cdot 60 = 2 \ \ см/с^2 \tag{2.76}$$

Длина соответствующего ему вектора $\overline{\pi n_3}$ на плане ускорений равна:

$$\pi n_3 = \frac{a_D^n}{\mu_a} = \frac{2}{1,429} = 1,4 \ \ мм \quad .$$

$\bar{a}_D^\tau$ - вектор тангенциальной составляющей абсолютного ускорения точки D. Направлен перпендикулярно звену DO_2, а его модуль определяется по формуле:

$$a_D^\tau = \varepsilon_{DO_2} \cdot DO_2 \tag{2.77}$$

Однако определить его модуль математически невозможно, т.к. неизвестно значение углового ускорения звена ε_{DO_2}.

$$a_{DC}^n = \omega_{CD}^2 \cdot CD = 1,28^2 \cdot 30 = 49,15 \ \ см/с^2$$

$$cn_2 = \frac{a_{DC}^n}{\mu_a} = \frac{49,15}{1,429} = 34,4 \ \ мм$$

Произведя графические построения, находим искомые величины:

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a = 69 \cdot 1,429 = 98,60 \ \ см/с^2 \tag{2.78}$$

$$a_{DC}^\tau = n_2 d \cdot \mu_a = 13 \cdot 1,429 = 18,58 \ \ см/с^2 \tag{2.79}$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{a_{DC}^\tau}{DC} = \frac{18,58}{30} = 0,62 \ \ рад/с^2 \tag{2.80}$$

$$a_D^{\tau} = n_3 d \cdot \mu_a = 69 \cdot 1,429 = 98,60 \ \ см/с^2 \qquad (2.81)$$

$$\varepsilon_{DO_2} = \frac{a_D^{\tau}}{DO_2} = \frac{98,60}{50} = 1,97 \ \ рад/с^2 \qquad (2.82)$$

4) Определение положения мгновенного центра ускорений (*МЦУ*) звена 2.

Примем точку *A* за полюс. Тогда ускорение точки *B*:

$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$.

Построим параллелограмм ускорений в соответствии с данным векторным уравнением при точке *B* на плане механизма (Рисунок 2.15).

Определим угол между вектором относительного ускорения $\bar{a}_{BA}$ и звеном *AB* $\alpha = 84^{\circ}$.

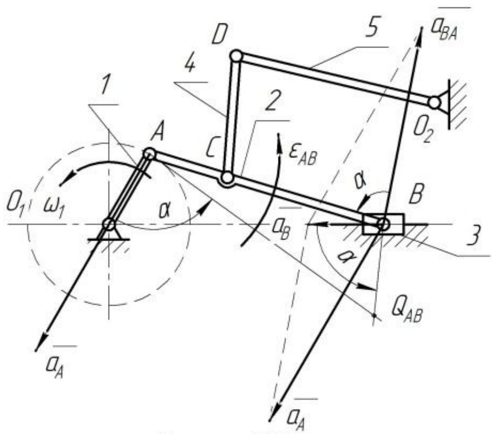


Рисунок 2.15

Направление перехода от вектора относительного ускорения $\bar{a}_{BA}$ к звену *AB* указывает направление углового ускорения ε_{AB}, т.е. против хода часовой стрелки.

Отложим лучи AQ_{AB} и BQ_{AB} от векторов ускорений $\bar{a}_A$ и $\bar{a}_B$, приложенных в точках *A* и *B* соответственно, под углом $\alpha = 84^{\circ}$ в направлении углового ускорения ε_{AB}, т.е. против хода часовой стрелки. Точка пересечения этих лучей определит положение точки Q_{AB} - мгновенного центра ускорений звена *AB*.

Ускорение любой точки звена *AB* пропорционально удалению точки от *МЦУ* и направлено под углом $\alpha = 84^{\circ}$ к прямой, проходящей через эту точку и *МЦУ* (точку Q_{AB}) в направлении углового ускорения ε_{AB} .

2.2.4 Контрольные вопросы по теме

1. Поступательное движение твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек поступательно движущегося тела.
2. Вращательное движение твердого тела. Определение угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела.
3. Связь между линейными и угловыми кинематическими параметрами при вращательном движении.
4. Плоскопараллельное движение твердого тела. Разложение движения твердого тела на поступательное движение и движение вокруг полюса.
5. Определение скоростей точек тела, совершающего плоское движение.
6. Определение скоростей точек и угловой скорости тела с помощью мгновенного центра скоростей.
7. Определение скоростей точек и угловой скорости тела с помощью построения плана скоростей. Последовательность расчета.
8. Определение ускорений точек и углового ускорения тела, совершающего плоское движение.
9. Определение ускорений точек и углового ускорения тела с помощью построения плана ускорений.
10. Определение ускорений точек и углового ускорения тела с помощью мгновенного центра ускорений.
11. Практический вопрос.

2.3 К.7. Сложное движение точки

2.3.1 Теоретические основы

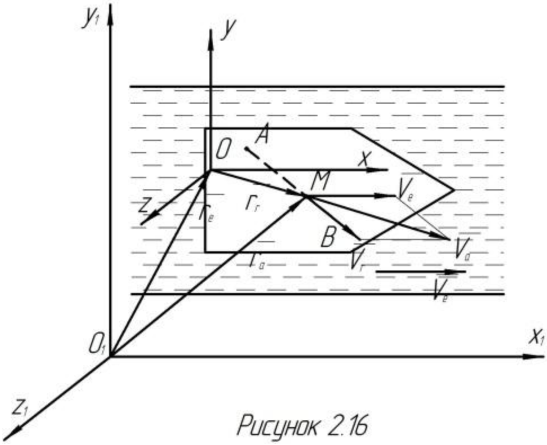


Рисунок 2.16

Часто встречаются случаи, когда точка (тело) движется относительно одной системы отсчета, которая, в свою очередь, движется относительно другой системы отсчета, обычно принимаемую за неподвижную. Такое движение называется **сложным**.

Например, плот движется по реке со скоростью течения реки, при этом по палубе перемещается человек из точки *A* в точку *B* (Рисунок 2.16).

Свяжем подвижную систему отсчета *Oxyz* с плотом.

Движение человека относительно палубы из точки А в точку В, т.е. **движение точки относительно подвижной системы отсчета, называется относительным движением**, которое характеризуется траекторией относительного движения, относительной скоростью ($\overline{V_r}$) и относительным ускорением ($\overline{a_r}$).

Движение плота вместе с человеком относительно берега реки, т.е. **движение подвижной системы отсчета с неизменно связанной с ней точкой относительно неподвижной, называется переносным движением**, которое характеризуется траекторией переносного движения, переносной скоростью ($\overline{V_e}$) и переносным ускорением ($\overline{a_e}$).

Движение человека относительно берега реки, т.е. **движение точки (тела) относительно неподвижной системы отсчета, называется абсолютным движением**. Характеризуется траекторией абсолютного движения, абсолютной скоростью ($\overline{V_a}$) и абсолютным ускорением ($\overline{a_a}$).

Т.е. абсолютное движение складывается из переносного движения и относительного:

$$\overline{r_a} = \overline{r_e} + \overline{r_r}, \tag{2.83}$$

а абсолютная скорость при сложном движении точки определяется как векторная сумма скоростей переносного и относительного движений:

$$\overline{V_a} = \overline{V_e} + \overline{V_r} \,. \qquad (2.84)$$

В общем случае, абсолютное ускорение точки при сложном движении определяется по теореме Кориолиса.

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и Кориолисова ускорения.

$$\overline{a_a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_k} \,, \qquad (2.85)$$

где $\overline{a_k}$ - ускорение Кориолисова

$$\overline{a_k} = 2\overline{\omega_e} \times \overline{V_r} \,, \qquad (2.86)$$

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin \overline{\omega_e V_r} \,, \qquad (2.87)$$

Чтобы найти направление вектора Кориолисова ускорения необходимо мысленно перенести вектор переносной угловой скорости $\overline{\omega_e}$ в рассматриваемую точку и затем следовать одному из следующих правил:

1. **Правило векторного произведения**

Вектор Кориолисова ускорения направлен перпендикулярно векторам $\overline{\omega_e}$ и $\overline{V_r}$ в ту сторону, откуда виден кратчайший переход от вектора $\overline{\omega_e}$ к вектору $\overline{V_r}$ против хода часовой стрелки (Рисунок 2.17).

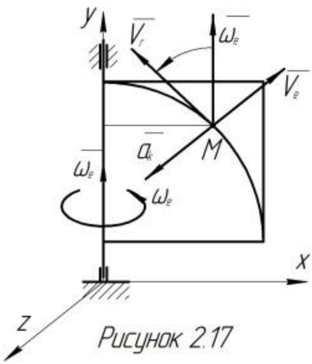


Рисунок 2.17

2. **Правило Жуковского**

Для того чтобы найти направление Кориолисова ускорения необходимо вектор относительной скорости $\overline{V_r}$ спроецировать на плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{\omega_e}$ (оси вращения), и повернуть полученную проекцию в сторону переносного вращения на 90° (Рисунок 2.18).

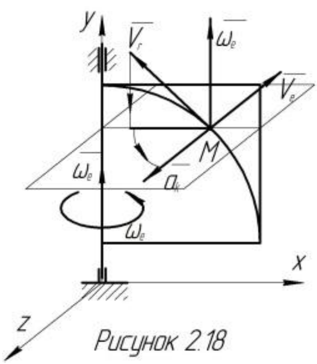


Рисунок 2.18

Случаи, когда Кориолисово ускорение равно 0

Равенство 0 Кориолисова ускорения следует из уравнения (2.87):

1. Кориолисово ускорение равно нулю, ес-

ли вектор переносной угловой скорости ($\overline{\omega_e}$) равен нулю, т.е. когда переносное движение поступательное.

2. Кориолисово ускорение равно нулю, если скорость точки в относительном движении ($\overline{V_r}$) в данный момент времени равна нулю (состояние относительного покоя).
3. Кориолисово ускорение равно нулю, если $\sin \overline{\omega_e}\overline{V_r} = 0$, т.е. вектора $\overline{\omega_e}$ и $\overline{V_r}$ параллельны.

Указания к решению задач

Решение задач на определение кинематических параметров сложного движения сводится к определению векторов $\bar{V_e}$, $\bar{V_r}$, $\bar{V_a}$, $\overline{a_e}$, $\overline{a_r}$, $\bar{a}_a$ а в случае если переносное движение вращательное, то и вектора $\overline{a_k}$.

1. Вычерчиваем точку, совершающую сложное движение в конкретный момент времени.

Для определения ускорений $\overline{a_e}$, $\overline{a_r}$, и $\overline{a_k}$ необходимо знать положение движущейся точки на ее относительной траектории.

2. Определяем кинематические параметры относительного движения.

Для определения относительной скорости $\overline{V_r}$ и ускорения $\overline{a_r}$ следует мысленно остановить вращение подвижной системы отсчета и определить скорость и ускорение точки в ее относительном движении по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &V_x^r = \frac{dx_r}{dt};\ V_y^r = \frac{dy_r}{dt};\ V_z^r = \frac{dz_r}{dt} \\ &a_x^r = \frac{dV_x^r}{dt} = \frac{d^2x_r}{dt^2};\ a_y^r = \frac{dV_y^r}{dt} = \frac{d^2y_r}{dt^2};\ a_z^r = \frac{dV_z^r}{dt} = \frac{d^2z_r}{dt^2} \end{aligned}\right\}$$

- при координатном способе задания относительно движения.

$$\left.\begin{aligned} &V_r = \frac{dS_r}{dt} \\ &a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d^2S_r}{dt^2};\ a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} \end{aligned}\right\}$$

- при естественном способе задания относительного движения.

3. Определяем кинематические параметры переносного движения.

Для определения переносной скорости $\overline{V_e}$ и ускорения $\overline{a_e}$ необходимо вычислить скорость и ускорение той точки, неизменно связанной с подвижной системой отсчета, с которой в данный момент совпадает движущееся тело. При этом:

$$V_e = \omega_e R, \tag{2.88}$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e R;\; a_e^n = \omega_e^2 R, \tag{2.89}$$

где R - расстояние от точки до оси вращения в рассматриваемый момент времени.

4. Определяем ускорение Кориолиса.

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin\ \overline{\omega_e}\overline{V_r}\ , \tag{2.90}$$

Направление ускорения Кориолиса определяем либо по правилу векторной алгебры, либо по правилу Жуковского.

5. Определяем абсолютное ускорение точки.

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_k, \tag{2.91}$$

В общем случае геометрическое определение вектора полного ускорения вызывает значительные трудности, поэтому целесообразно воспользоваться методом проекций. Для этого необходимо приложить прямоугольную систему координат $Mxyz$ с началом, совпадающим с исследуемой точкой, и спроектировать выражение (2.91) на оси этой системы координат:

$$\left.\begin{aligned} \overline{a}_{a_X} &= \overline{a}_{e_X}^\tau + \overline{a}_{e_X}^n + \overline{a}_{r_X}^\tau + \overline{a}_{r_X}^n + \overline{a}_{k_X} \\ \overline{a}_{a_Y} &= \overline{a}_{e_Y}^\tau + \overline{a}_{e_Y}^n + \overline{a}_{r_Y}^\tau + \overline{a}_{r_Y}^n + \overline{a}_{k_Y} \\ \overline{a}_{a_Z} &= \overline{a}_{e_Z}^\tau + \overline{a}_{e_Z}^n + \overline{a}_{r_Z}^\tau + \overline{a}_{r_Z}^n + \overline{a}_{k_Z} \end{aligned}\right\} \tag{2.92}$$

Модуль вектора абсолютного ускорения определится по формуле:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^{\ 2} + a_{ay}^{\ 2} + a_{az}^{\ 2}}, \tag{2.93}$$

Направление вектора абсолютного ускорения определится через направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{a_{ax}}{a_a};\; \cos\beta = \frac{a_{ay}}{a_a};\; \cos\gamma = \frac{a_{az}}{a_a}, \tag{2.94}$$

где α, β, γ - соответственно углы между ветром $\overline{a}_a$ и осями Mx, My, Mz.

2.3.2 Задание К.7

Сложное движение точки

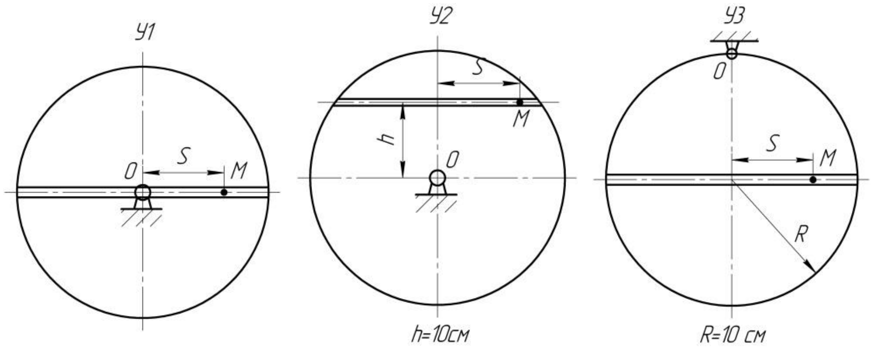
Диск вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости диска, с угловой скоростью $\omega = \frac{1}{2}\; t-4 \;^{2} + kt + 0,5, \quad рад/с$. По диаметру (по хорде) движется точка M по закону:

$$S = \frac{1}{2}\; t \;\; b - t \;\; + c \;\; , \quad см \quad .$$

В момент времени $t_1 = a$ найти:

1. абсолютную скорость точки M, $V_a \;\; см/с$;

2. абсолютное ускорение точки M, $a_a \;\; см/с^2$.



2.3.3 Пример выполнения задания К.7

Дано:

По радиусу диска (Рисунок 2.19), вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t \;\; рад/с$, в направлении от центра диска к его ободу движется точка *M* по закону $OM = 4t^2 \;\; см$.

Радиус *OM* составляет с осью O_1O_2 угол 60°.

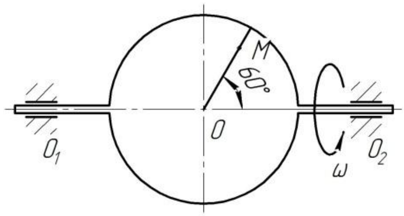


Рисунок 2.19

Определить:

В момент времени $t_1 = 1 \;\; с$:

1. Абсолютную скорость точки *M*, $V_a \;\; см/с$;
2. Абсолютное ускорение точки *M*, $a_a \;\; см/с^2$.

Решение

Точка *M* при движении по радиусу диска с одновременным вращением вместе с диском вокруг оси O_1O_2 совершает сложное движение. Свяжем подвижную систему координат с плоскостью диска с началом в точке *O*. Тогда, движение точки по радиусу вращающегося диска является относительным движением, а вращение точки вместе с диском вокруг оси O_1O_2 является переносным движением (Рисунок 2.20).

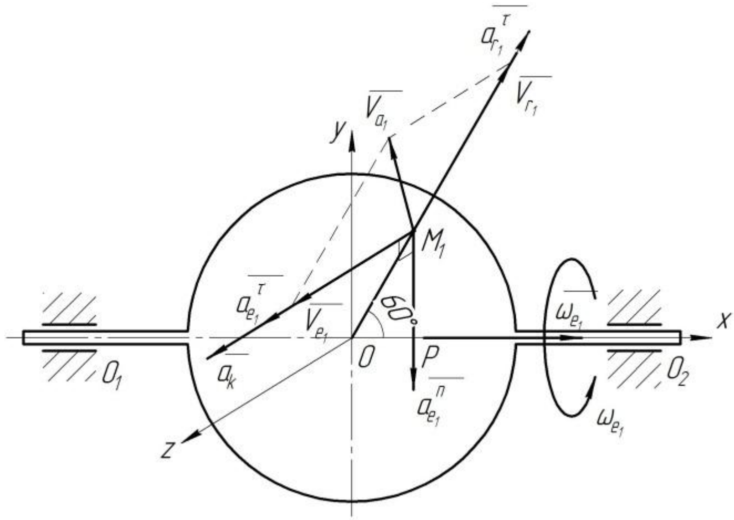


Рисунок 2.20

1) Определение абсолютной скорости $\bar{V}_{a_1}$ точки M в заданный момент времени t_1.

1.1) Определим положение точки M в относительном ее движении и значение угловой переносной скорости ω_{e_1} вращения диска в заданный момент времени t_1:

$$OM_1 = 4t_1^2 = 4 \cdot 1^2 = 4 \ \text{см} \tag{2.95}$$

$$\omega_{e_1} = 2t_1 = 2 \ \text{рад}/c \tag{2.96}$$

1.2) Определим модуль и направление переносной скорости $\bar{V}_{e_1}$ точки M в заданный момент времени t_1.

Для этого мысленно остановим точку M в относительном ее движении. Точка M будет вращаться вместе с диском вокруг оси O_1O_2.

При этом:

$V_{e_1} = \omega_{e_1} \cdot PM_1$,

где PM_1 - расстояние между точкой M и осью вращения диска O_1O_2 в заданный момент времени.

Это расстояние определим из прямоугольного треугольника OM_1P:

$$PM_1 = OM_1 \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot 0,87 = 3,48 \ \text{см} \tag{2.97}$$

Тогда:

$$V_{e_1} = \omega_{e_1} \cdot M_1P = 2 \cdot 3,48 = 6,96 \ \text{см/с} \qquad (2.98)$$

Вектор переносной скорости $\bar{V}_{e_1}$ направлен перпендикулярно плоскости диска в сторону переносного вращения.

1.3) Определим модуль и направление относительной скорости $\bar{V}_{r_1}$ точки M в заданный момент времени t_1.

Для этого мысленно остановим вращение точки M вместе с диском и рассмотрим ее движение только вдоль радиуса диска.

Так как скорость точки есть первая производная по времени от закона движения точки по своей траектории, то:

$$V_r = \frac{d\left(OM\right)}{dt} = \left(4t^2\right)' = 8t \qquad (2.99)$$

Тогда в момент времени t_1:

$$V_{r_1} = 8t_1 = 8 \ \text{см/с} \qquad (2.100)$$

Точка M в относительном движении движется прямолинейно, поэтому вектор относительной скорости направлен вдоль прямой OM_1 из точки M_1 сонаправленно с положительным отсчетом дуговой координаты OM_1, т.е. в направлении обода диска.

1.4) Определим модуль и направление абсолютной скорости $\bar{V}_{a_1}$ точки M в заданный момент времени t_1.

Вектора переносной скорости $\bar{V}_{e_1}$ и относительной скорости $\bar{V}_{r_1}$ взаимно перпендикулярны, поэтому вектор абсолютной скорости $\bar{V}_{a_1}$, являющийся геометрической суммой векторов $\bar{V}_{e_1}$ и $\bar{V}_{r_1}$, по модулю и по направлению определится как диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\bar{V}_{e_1}$ и $\bar{V}_{r_1}$ как на сторонах:

$$V_{a_1} = \sqrt{\left(V_{e_1}\right)^2 + \left(V_{r_1}\right)^2} = \sqrt{6,96^2 + 8^2} = 10,60 \ \text{см/с} \qquad (2.101)$$

2) Определение абсолютного ускорения $\bar{a}_{a_1}$ движения точки M в заданный момент времени t_1.

Запишем теорему Кориолиса в развернутом виде:

$$\bar{a}_{a_1} = \bar{a}_{e_1}^{\tau} + \bar{a}_{e_1}^{n} + \bar{a}_{r_1}^{\tau} + \bar{a}_{r_1}^{n} + \bar{a}_{k_1} \tag{2.102}$$

и найдем модуль и направление каждого составляющего ее вектора в заданный момент времени.

2.1) Определим модуль и направление вектора переносного тангенциального ускорения $\bar{a}_{e_1}^{\tau}$ в заданный момент времени t_1:

$$a_{e_1}^{\tau} = \varepsilon_{e_1} \cdot PM_1 \tag{2.103}$$

где ε_{e_1} - переносное угловое ускорение, $\left[рад/с^2 \right]$.

ε_{e_1} определяется как первая производная по времени от переносной угловой скорости ω_e, т.е.:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = \left(2t \right)' = 2 \left[рад/с^2 \right] \tag{2.104}$$

Из формулы видно, что диск вращается равноускоренно, поэтому

$\varepsilon_{e_1} = 2 \left[рад/с^2 \right]$.

Тогда:

$a_{e_1}^{\tau} = \varepsilon_{e_1} \cdot PM_1 = 2 \cdot 3{,}48 = 6{,}96 \left[см/с^2 \right]$.

Вектор $\bar{a}_{e_1}^{\tau}$ всегда направлен по касательной к траектории переносного движения, а так как его модуль положителен, то он сонаправлен с вектором переносной скорости $\bar{V}_{e_1}$.

2.2) Определим модуль и направление вектора переносного нормального ускорения $\bar{a}_{e_1}^{n}$ в заданный момент времени t_1:

$$a_{e_1}^{n} = \omega_{e_1}^2 \cdot PM_1 = 2^2 \cdot 3{,}48 = 13{,}92 \left[см/с^2 \right] \tag{2.105}$$

Вектор $\bar{a}_{e_1}^{n}$ всегда направлен по радиусу к оси вращения, т.е. вдоль PM_1 от точки M_1 к точке P.

2.3) Определим модуль и направление вектора относительного тангенциального ускорения $\bar{a}_{r_1}^{\tau}$ в заданный момент времени t_1.

Т.к. тангенциальное ускорение определяется как первая производная по времени от скорости, то:

$$a_r^{\tau} = \frac{dV_r}{dt} = \left(8t \right)' = 8 \left[см/с^2 \right] \tag{2.106}$$

Т.е. в относительном движении точка M движется равноускорено

$a_{r_1}^{\tau} = 8 \; см/c^2$.

2.4) Определим модуль и направление вектора относительного нормального ускорения $\bar{a}_{r_1}^{n}$ в заданный момент времени t_1.

В относительном движении точка M движется прямолинейно, поэтому $a_{r_1}^{n} = 0$.

2.5) Определим модуль и направление вектора Кориолисова ускорения $\bar{a}_{k_1}$ в заданный момент времени t_1:

$$a_{k_1} = 2\omega_{e_1} V_{r_1} \sin \overline{\omega_{e_1}} \overline{V_{r_1}} \qquad (2.107)$$

где $\sin \overline{\omega_{e_1}} \overline{V_{r_1}}$ - синус угла между вектором переносной угловой скорости $\bar{\omega}_{e_1}$ и вектором относительной скорости $\bar{V}_{r_1}$.

Т.к. вектор $\bar{\omega}_{e_1}$ направлен вдоль оси переносного вращения в сторону, откуда видно переносное вращение против хода часовой стрелки, то угол между векторами $\bar{\omega}_{e_1}$ и $\bar{V}_{r_1}$ составляет 60°.

Таким образом:

$$a_{k_1} = 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \sin 60^{\circ} = 27,84 \; см/c^2 \qquad (2.108)$$

Направление вектора Кориолисова ускорения определим по правилу Жуковского.

2.6) Определим модуль вектора абсолютного ускорения $\bar{a}_{a_1}$ в заданный момент времени t_1.

Для этого воспользуемся методом проекций, т.е. спроецируем векторное уравнение (2.102) на приложенную систему координат xyz.

$$a_{a_{X_1}} = a_{e_{X_1}}^{\tau} + a_{e_{X_1}}^{n} + a_{r_{X_1}}^{\tau} + a_{r_{X_1}}^{n} + a_{k_{X_1}} = a_{r_1}^{\tau} \cdot \cos 60^{\circ} = 8 \cdot 0,5 = 4 \; см/c^2$$

$$a_{a_{Y_1}} = a_{e_{Y_1}}^{\tau} + a_{e_{Y_1}}^{n} + a_{r_{Y_1}}^{\tau} + a_{r_{Y_1}}^{n} + a_{k_{Y_1}} = -a_{e_1}^{n} + a_{r_1}^{\tau} \cdot \sin 60^{\circ} = -13,92 + 8 \cdot 0,87 = -6,96 \; см/c^2$$

$$a_{a_{Z_1}} = a_{e_{Z_1}}^{\tau} + a_{e_{Z_1}}^{n} + a_{r_{Z_1}}^{\tau} + a_{r_{Z_1}}^{n} + a_{k_{Z_1}} = a_{e_1}^{\tau} + a_{k_1} = 6,96 + 27,84 = 34,80 \; см/c^2$$

Тогда модуль абсолютного ускорения

$$a_{a_1} = \sqrt{\left(a_{a_{X_1}}\right)^2 + \left(a_{a_{Y_1}}\right)^2 + \left(a_{a_{Z_1}}\right)^2} = \sqrt{\left(4\right)^2 + \left(-6,96\right)^2 + \left(34,80\right)^2} = 35,71 \; см/c^2 \; .$$

Ответ: $V_{a_1} = 10,60 \; см/c$; $a_{a_1} = 35,71 \; см/c^2$.

2.3.4 Контрольные вопросы по теме

1. Сложное движение точки. Разложение абсолютного движения точки на относительное и переносное.
2. Определение абсолютной скорости при сложном движении точки.
3. Определение абсолютного ускорения при сложном движении точки в случае поступательного переносного движения.
4. Определение абсолютного ускорения точки при сложном ее движении в случае вращательного переносного движения. Теорема Кориолиса.
5. Кориолисово ускорение. Определение модуля и направления Кориолисова ускорения.
6. Правило векторной алгебры и правило Жуковского для определения направления вектора Кориолисова ускорения.
7. Случаи, когда Кориолисово ускорение равно 0.
8. Последовательность решения задач при исследовании сложного движения точки.
9. Практический вопрос.

3 ДИНАМИКА

3.1 Д.1. Дифференциальное уравнение движения материальной точки

3.1.1 Теоретические основы

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучается связь между движением материальной точки или механической системы и силами, действующими на нее.

Основные законы динамики материальной точки

1) Закон инерции (Закон Галелея-Ньютона)

Изолированная материальная точка с течением времени сохраняет состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно.

Изолированная материальная точка – это точка, на которую не действуют никакие силы или они уравновешены.

$\bar{R} = 0$; $\bar{v} = const$.

Инерция – это присущее материи свойство сохранять состояние покоя или равномерное прямолинейное движение.

Инерциальная система – это такая система отсчета, относительно которой материальная точка, на которую не действуют силы, сохраняет состояние покоя или движется прямолинейно и равномерно.

2) Основной закон движения (Закон Ньютона)

Ускорение точки прямо пропорционально силе (результирующей сил), действующей на точку и обратно пропорционально массе точки.

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}, \qquad (3.1)$$

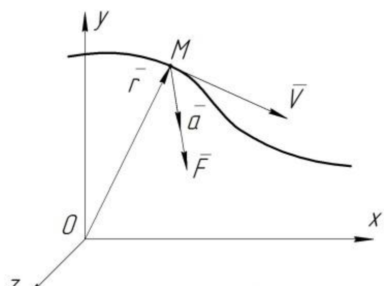


Рисунок 3.1

Направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора силы (Рисунок 3.1).

Из закона следует, что:

$$\bar{F} = m\bar{a}, \qquad (3.2)$$

Первый и второй закон выполняются только в инерциальной системе отсчета.

3) Закон действия и противодействия

Всякому действию соответствует противодействие (Рисунок 3.2)**.**

$$\bar{P}_1 = -\bar{P}_2 , \tag{3.3}$$

$$m_1\bar{a}_1 = -m_2\bar{a}_2$$

$$\bar{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\bar{a}_1 , \tag{3.4}$$

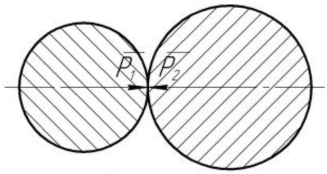


Рисунок 3.2

Однако равновесие отсутствует, т.к. силы приложены к разным телам.

4) Закон независимости действия сил

Если на материальную точку или тело действует система сил, то ускорение, которое получит она, будет равно геометрической сумме ускорений от действий каждой i **-ой силы, входящей в действующую систему сил.**

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n$$

т.к. $\bar{F}_1 = m\bar{a}_1$; $\bar{F}_2 = m\bar{a}_2$; … ; $\bar{F}_n = m\bar{a}_n$, то

$$\bar{R} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 + \ldots + m\bar{a}_n = m\ \ \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n\ \ = m\bar{a} ,$$

Таким образом

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = \sum a_i , \tag{3.5}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых и естественных системах координат

Пусть материальная точка M движется по некоторой криволинейной траектории под действием произвольной системы сил с результирующей $\bar{R}$ (Рисунок 3.3).

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_i = \sum \bar{F}_i = m\bar{a} , \tag{3.6}$$

в свою очередь $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{r}''$,

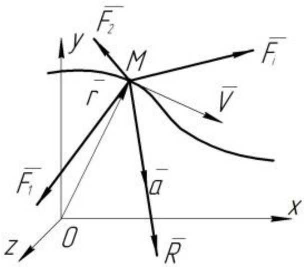


Рисунок 3.3

Тогда:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{R}\,, \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) представляет собой **векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки**.

Спроецируем обе части уравнения (3.6) на декартовы оси координат:

$$ma_x = R_x$$

$$ma_y = R_y$$

$$ma_z = R_z$$

но $a_x = x''$, $a_y = y''$, $a_z = z''$, тогда:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= R_x \\ my'' &= R_y \\ mz'' &= R_z \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Уравнения (3.8) представляют собой **дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовой системе координат**.

Спроецируем уравнение (3.6) на естественные оси координат:

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= R_\tau \\ ma_n &= R_n \\ ma_b &= R_b \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

т.к. $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$; $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$; $a_b = 0$

то уравнения (3.9) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= R_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= R_n \\ 0 &= R_b \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Уравнения (3.10) представляют собой **дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественных координатах**.

В связи с этим, целью динамики является решение одной из следующих задач.

Первая (прямая) задача динамики

По заданной массе точки и закону ее движения определить силу, обуславливающую это движение.

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= R_x \\ my'' &= R_y \\ mz'' &= R_z \end{aligned}\right\} \qquad R = \sqrt{x''^{\,2} + y''^{\,2} + z''^{\,2}}, \quad (3.11)$$

Вторая (обратная) задача динамики

По заданным силам, действующим на точку, и ее массе определить закон движения точки.

Последовательность решения:

1. Составляем систему дифференциальных уравнений описывающих второй закон динамики

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= R_x \\ my'' &= R_y \\ mz'' &= R_z \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

2. Интегрируя дважды данную систему дифференциальных уравнений и найдя 6 постоянных интегрирования, получаем конкретный закон движения точки.

Примечание: для определения постоянных интегрирования необходимо знать начальные условия движения точки.

При этом, сила может быть как постоянна, так и быть функцией одной или нескольких переменных. Рассмотрим отдельные случаи:

1) $\bar{P} = const$ - сила тяжести;

2) $\bar{P} = f(t)$ - силы, при работе машин или механизмов;

3) $\bar{P} = f(\bar{v})$ - сила сопротивления среды;

4) $\bar{P} = f(\bar{S})$ - сила упругости и электромагнитные силы.

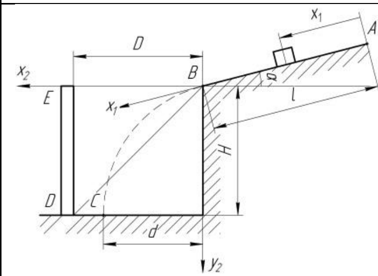
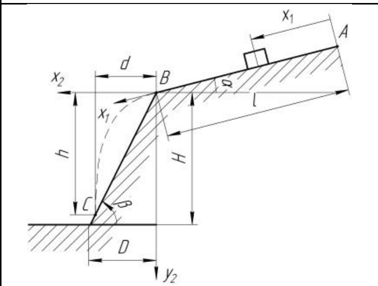
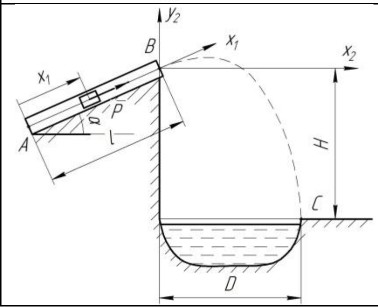
Решение данной задачи расчетно-графической работы сводится к решению обратной задачи динамики точки, на которую действуют постоянные по модулю силы.

3.1.2 Задание Д.1

Исследование движения материальной точки

Тело движется из точки A по прямолинейному участку AB длиной l, наклоненному к горизонту под углом α, в течение τ c. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. В точке B тело покидает прямолинейный участок со скоростью V_B и попадает со скоростью V_C в точку C, находясь в воздухе T c.

Определить значения, соответствующие определенной схеме в таблице.

	Схема	Дано	Определить
У1		$l = 10\ м$; $\alpha = 15\ a+1\ ^\circ$; $f = 0{,}1 \cdot a$; $D = 4 \cdot c\ м$; $H = 20\ м$; $V_A = в\ м/с$.	d; τ; T; V_C.
У2		$l = 10\ м$; $\alpha = 10 \cdot c\ ^\circ$; $\beta = 90 - 15\ a+1\ ^\circ$ $f = 0{,}1 \cdot a$; $H = 20\ м$; $V_A = в\ м/с$.	τ; d; h; T; V_C.
У3		$m = 0{,}5 кг$; $l = в\ м$; $\alpha = 15\ a+1\ ^\circ$; $V_A = 0$; $D = 10\ м$; $H = 3 \cdot c\ м$.	$P_{\min}$ - минимальное значение движущей силы, необходимой для достижения тела края рва (т. С); τ; T; V_C.

<u>Примечание.</u> При решении задания принять движущееся тело за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать.

3.1.3 Пример выполнения задания Д.1

Дано:

В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» *DC*. Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки *A* откоса и полагая при этом его начальную скорость $V_A = 0$, определить наименьшую ширину полки d и скорость V_C, с которой камень падает на нее. По участку *AB* откоса, составляющему угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом и имеющему длину $l = 4м$, камень движется $\tau = 1с$. Высота отвесной стены откоса $h = 5м$.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке *AB* постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение камня на участке *AB* (Рисунок 3.4). Принимая камень за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес камня $\overline{mg}$, нормальную реакцию опоры $\bar{N}$ и силу трения скольжения $\bar{F}_{тр}$. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке *AB* в векторной форме:

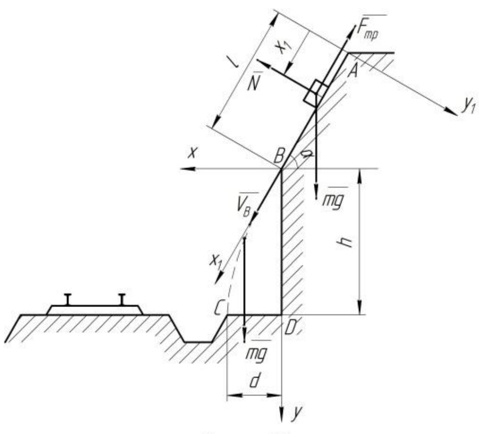


Рисунок 3.4

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_i = \overline{mg} + \bar{N} + \bar{F}_{тр} .$$

Запишем векторное уравнение в проекциях на систему координат Ax_1y_1:

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр} \tag{3.13}$$

$$0 = mg \cdot \cos\alpha - N \tag{3.14}$$

Так как $F_{тр} = fN$, а $N = mg \cdot \cos\alpha$, то:

$$F_{тр} = f \cdot mg \cdot \cos\alpha \tag{3.15}$$

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg \cdot \sin\alpha - f \cdot mg \cdot \cos\alpha;$$

$$\frac{dV_x}{dt} = g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha \tag{3.16}$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение дважды:

$$\int dV_{x_1} = \int (g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\, dt;$$

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = (g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\, t + C_1 \tag{3.17}$$

$$\int dx_1 = \int \left((g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\, t + C_1\right) dt;$$

$$x_1 = (g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{3.18}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями движения на исследуемом участке *AB*:

при $t = 0$, $V_{x_{1_0}} = 0$; $x_{1_0} = 0$.

Подставив данные значения в уравнения (3.17), (3.18), получим:

$V_{x_{1_0}} = C_1 = 0$; $\qquad$ $x_{1_0} = C_2 = 0$.

Тогда, уравнение изменения скорости и уравнение движения камня на участке *AB* примут вид:

$$V_{x_1} = (g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\, t \tag{3.19}$$

$$x_1 = (g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\frac{t^2}{2} \tag{3.20}$$

Запишем эти уравнения для момента τ, когда камень будет находиться в точке *B*, т.е. когда он достигнет края склона и в следующий момент начнет падение.

$$\left.\begin{aligned} V_B &= (g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\, \tau \\ l &= (g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha)\frac{\tau^2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Далее перейдем к исследованию движения камня на участке *BC*.

На этом участке камень находится в свободном падении, т.е. движется под действием только силы тяжести $\overline{mg}$.

Запишем второй закон динамики в дифференциальном виде для данного случая в векторной форме:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt}=\sum\overline{F_i}=\overline{mg}$$

Спроектировав данное векторное уравнение на оси системы координат xBy и проинтегрировав его дважды, получим:

$$m\frac{dV_x}{dt}=0;\qquad m\frac{dV_y}{dt}=mg;$$

$$\int dV_x=0\int dt;\qquad \int dV_y=g\int dt;$$

$$V_x=\frac{dx}{dt}=C_3;\qquad V_y=\frac{dy}{dt}=gt+C_5;$$

$$\int dx=C_3\int dt;\qquad \int dy=\int\left(gt+C_5\right)dt;$$

$$x=C_3t+C_4.\qquad y=g\frac{t^2}{2}+C_5t+C_6.$$

Для определения коэффициентов C_3, C_4, C_5 и C_6 рассмотрим начальные условия движения на участке BC:

при $t=0$, $V_{x_0}=V_B\cos\alpha$; $V_{y_0}=V_B\sin\alpha$; $x_0=0$; $y_0=0$.

Подставив данные значения в найденные уравнения, получим:

$$V_B\cos\alpha=C_3;\qquad V_B\sin\alpha=C_5;$$

$$0=C_3\cdot 0+C_4\Rightarrow C_4=0\qquad 0=g\frac{0^2}{2}+C_5\cdot 0+C_6\Rightarrow C_6=0$$

Тогда в конечном виде уравнения скоростей и уравнения движения камня на участке AB в проекциях на оси координат примут вид:

$$\begin{cases} V_x=V_B\cos\alpha \\ V_y=gt+V_B\sin\alpha \\ x=V_B\cos\alpha\cdot t \\ y=g\dfrac{t^2}{2}+V_B\sin\alpha\cdot t \end{cases}\qquad(3.22)$$

Исключив из уравнений движения параметр t и решив их совместно, найдем уравнение траектории движения камня на участке BC:

$$t=\frac{x}{V_B\cos\alpha};$$

$$y=\frac{gx^2}{2\left(V_B\cos\alpha\right)^2}+\frac{V_Bx\sin\alpha}{V_B\cos\alpha},$$

или $y = \dfrac{gx^2}{2V_в^2 \cos^2\alpha} + x\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Из полученного координатного уравнения видно, что траекторией движения камня на участке BC будет являться ветвь параболы.

Запишем систему уравнений (3.22) для момента времени $t = T$, когда камень будет находиться в положении точки C, т.е. когда он достигнет края полки, но еще ее не коснется, т.е.

при $t = T$, $V_x = V_{C_X}$; $V_y = V_{C_Y}$; $x = d$; $y = h$.

Тогда

$$\begin{cases} V_{C_X} = V_B \cos\alpha \\ V_{C_Y} = gT + V_B \sin\alpha \\ d = V_B \cos\alpha \cdot T \\ h = g\dfrac{T^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot T \end{cases} \qquad (3.23)$$

Решая совместно системы уравнений (3.21) и (3.23) найдем неизвестные величины:

$$g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha = \frac{2l}{\tau^2};$$

$$V_B = \frac{2l}{\tau} = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8 \ \ см/с \ .$$

$$V_{C_X} = V_B \cos\alpha = 8 \cdot \cos 60^\circ = 4 \ \ см/с \ ;$$

Решая последнее уравнение системы (3.23), как квадратное, найдем время движения камня на участке BC:

$$4{,}91 \cdot T^2 + 6{,}96 \cdot T - 5 = 0$$

$$g\frac{T^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot T - h = 0;$$

Решим его через дискриминант:

$$D = в^2 - 4ac = 6{,}96^2 + 4 \cdot 4{,}91 \cdot 5 = 146{,}64;$$

$$T_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6{,}96 \pm \sqrt{146{,}64}}{2 \cdot 4{,}91};$$

$$T_1 = -1{,}94; \qquad T_2 = 0{,}52.$$

Так как время не может быть отрицательным, то значение времени T , удовлетворяющее условия задачи, является $T_2 = 0{,}52с$.

Из предпоследнего уравнения системы (3.23) найдем величину d, размер полки DC:

$d = 8 \cdot \cos 60^{\circ} \cdot 0,52 = 2,08 \ \textit{м}$.

Далее найдем проекцию вектора скорости V_{C_Y} :

$V_{C_Y} = 9,81 \cdot 0,52 + 8 \cdot \sin 60^{\circ} = 12,06 \ \textit{см/с}$.

Зная значение проекций V_{C_X} и V_{C_Y} найдем модуль вектора скорости камня в точке С:

$V_C = \sqrt{V_{C_X}^{\ 2} + V_{C_Y}^{\ 2}} = \sqrt{4^2 + 12,06^2} = 12,71 \ \textit{см/с}$.

Ответ

$d = 2,08 \ \textit{м}$; $V_C = 12,71 \ \textit{см/с}$.

3.1.4 Контрольные вопросы по теме

1. Дайте определение предмету «Динамика». Основные понятия и определения.
2. Сформулируйте первый закон динамики.
3. Сформулируйте второй закон динамики.
4. Сформулируйте третий закон динамики.
5. Сформулируйте четвертый закон динамики.
6. Дайте понятие первой (прямой) задачи динамики, последовательность решения задачи.
7. Дайте понятие второй (обратной) задачи динамики, последовательность решения задачи.
8. Чем инерциальные системы отсчета отличаются от неинерциальных.
9. Запишите дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки.
10. Практический вопрос.

3.2 Д.10 Теорема об изменении кинетической энергии

3.2.1 Теоретические основы

Рассмотрим движение точки массой m под действием силы $\bar{F}$. Согласно второму закону динамики

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{3.24}$$

Умножим обе части этого уравнения на дифференциал $d\bar{r} = \bar{V}dt$.

$$m\bar{a} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \tag{3.25}$$

т.к. $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt}$, то в левой части получим:

$$m\bar{a} \cdot d\bar{r} = m\frac{d\bar{V}}{dt} \cdot \bar{V}dt = m\bar{V}d\bar{V} = md\left(\frac{V^2}{2}\right) = d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$$

в результате равенство (3.25) примет вид:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \tag{3.26}$$

Выражение $\dfrac{mV^2}{2} = T$ называется кинетической энергией материальной точки.

Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведений массы точки на квадрат ее скорости.

В случае если рассматривается движение твердого тела, то при различных видах движения кинетическая энергия тела определится по формуле:

1) Поступательное движение:

$$T_{пост} = \frac{mV^2}{2}, \tag{3.27}$$

2) Вращательное движение:

$$T_{вр} = \frac{J_z\omega^2}{2}, \tag{3.28}$$

3) Плоско-параллельное движение.

Т.к. плоскопараллельное движение – это совокупность вращательного и поступательного движений, то кинетическая энергия определится по формуле:

$$T_{пл} = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_z\omega^2}{2}, \tag{3.29}$$

где V_C - скорость центра масс тела;

J_z - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной плоскости движения тела, $кг \cdot м^2$.

Разделив обе части выражения (3.26) на dt получим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальном виде.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \bar{F}\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\bar{V} \ , \qquad (3.30)$$

Производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна скалярному произведению вектора силы, действующей на эту точку, на вектор скорости этой точки (мощности силы).

Проинтегрировав выражение (3.30), получим теорему об изменении кинетической энергии в интегральном виде:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \bar{F} \cdot \bar{S} \ , \qquad (3.31)$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении $\bar{S}$ равно произведению вектора силы, действующей на точку, на это перемещение (работе силы).

Величина, равная скалярному произведению вектора силы, действующей на точку, на перемещение точки есть работа силы:

$$A = \bar{F} \cdot \bar{S}, \quad Дж = Н \cdot м \ , \qquad (3.32)$$

В простом случае, когда тело движется прямолинейно, а сила, приложенная к нему, постоянна по модулю и по направлению, то работа силы определяется по формуле:

$$A = FS\cos\alpha \ , \qquad (3.33)$$

где α - угол между вектором силы и вектором перемещения.

Работа силы P, приложенной к телу, на каком либо его перемещении S, определяется, как скалярное произведение модуля силы на перемещение и на косинус угла α между вектором силы и перемещения.

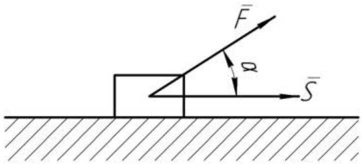


Рисунок 3.5

Если $0 \le \alpha < 90^\circ$, то работа силы положительна;

если $\alpha = 90^\circ$, то работа силы равна 0;

если $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$, то работа силы отрицательна.

В случае если движение криволинейно, а сила изменяется по величине и по направлению, то следует разбить траекторию движения на бесконечно малые элементарные участки. Тогда элементарная работа δA силы на бесконечно малом участке определится, как:

$$\delta A = FdS\cos\alpha = Fdr\cos\alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz\ , \qquad (3.34)$$

где δA - элементарная работа на бесконечно малом перемещении.

Полная работа силы на каком либо конечном перемещении (AB):

$$A = \int_A^B \delta A = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)\ , \qquad (3.35)$$

Если $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, то

$dx = \dot{x}dt$; $dy = \dot{y}dt$; $dz = \dot{z}dt$.

Тогда $$A = \int_A^B \left(F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z} \right) dt\ , \qquad (3.36)$$

Из выражения (3.36) видно, что работа, в общем случае, зависит от конкретного закона движения.

При вращательном движении элементарная работа определяется по формуле:

$$\delta A_i = M_z\left(\bar{F}_i\right)\delta\varphi\ , \qquad (3.37)$$

где $M_z\left(\bar{F}_i\right)$ - вращающий момент i-ой силы относительно оси z;

$\delta\varphi$ - элементарный угол поворота.

Если на тело действует не одна сила, то элементарная работа определится как сумма работ моментов всех сил.

$$\delta A = \sum M_z\left(\bar{F}_i\right) d\varphi\ , \qquad (3.38)$$

Полная работа на конечном угловом перемещении тела определяется по формуле:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi\ , \qquad (3.39)$$

Если $M_z = const$ то

$$A = M_z\left(\varphi - \varphi_0\right)\ , \qquad (3.40)$$

Мощностью силы называют ту работу, которую она может совершить в единицу времени.

$$N_{cp} = \frac{A}{t}, \left[\frac{H\cdot м}{c}\right] \qquad (3.41)$$

Мгновенная мощность в данный момент времени определится по формуле:

$$N = \frac{\delta A}{dt}, \qquad (3.42)$$

При поступательном движении $\delta A = FdS\cos\alpha$,
тогда

$$N = \frac{\bar{P}d\bar{S}\cos\alpha}{dt} = \bar{P}\bar{V}\cos\alpha, \qquad (3.43)$$

При вращательном движении $\delta A_i = M_z \ \ \bar{P}_i \ \ \delta\varphi$,

тогда

$$N = \frac{M_z \ \ \bar{P}_i \ \ \delta\varphi}{dt} = M_z \ \ \bar{P}_i \ \ \cdot\omega, \qquad (3.44)$$

Так как механическая система является совокупностью материальных точек, а силы, действующие на нее делятся на внешние $\bar{F}_i^e$ и внутренние $\bar{F}_i^j$, то теорема об изменении кинетической энергии для механической системы примет вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j \qquad (3.45)$$

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на механическую систему на этом перемещении.

где T, T_0 - соответственно конечная и начальная кинетическая энергия механической системы, определяемые по формуле:

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}, \qquad (3.46)$$

$\sum A_i^e$ - сумма работ всех внешних сил, приложенных к механической системе на конечном ее перемещении;

$\sum A_i^j$ - сумма работ всех внутренних сил, приложенных к механической системе на конечном ее перемещении.

При выполнении данной задачи расчетно-графической работы необходимо применить теорему об изменении кинетической энергии при исследовании движения механической системы.

Последовательность решения задачи:

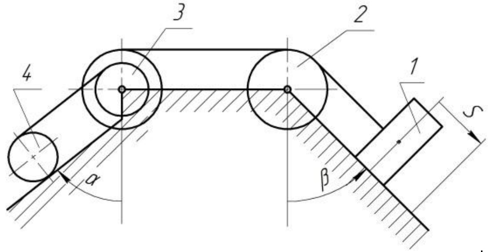
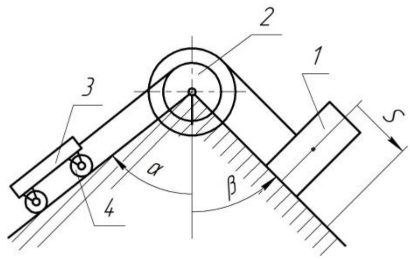
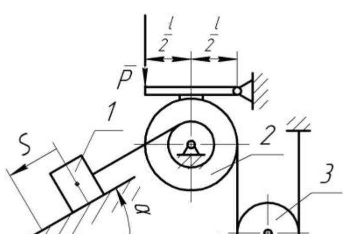
1. Вычерчивается исследуемая механическая система в конечном положении.
2. Определяется кинематическая связь между всеми звеньями механической системы.

3. Определяется кинетическая энергия всей механической системы, как сумма кинетических энергий всех ее звеньев, выраженных через скорость ведущего звена.
4. Показав все внешние силы, приложенные к механической системе и определив перемещение точек приложения этих сил, определяется сумма работ всех внешних сил, выраженных через перемещение ведущего звена.
5. Составив теорему об изменении кинетической энергии механической системы с учетом полученных значений кинетической энергии механической системы и суммарной работы всех внешних сил, действующих на механическую систему, определяется скорость ведущего звена в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S .

3.2.2 Задание Д.10

Теорема об изменении кинетической энергии

Механическая система, состоящая из четырех тел массами $m_1 = m$; $m_2 = \dfrac{m}{a+1}$; $m_3 = \dfrac{m}{c}$ и $m_4 = \dfrac{m}{a+c}$, приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Начальное положение системы показано на схеме. Учитывая трение скольжения (коэффициент трения скольжения $f_1 = 0{,}05c$) тела *1* и сопротивление качению тела *4* в схемах У1 и У2, пренебрегая массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, считая, что все катки катятся без проскальзывания, определить скорость тела *1* в тот момент, когда пройденный им путь станет равным $S = 1$ $м$.

1		$\alpha = 90 - 10a\,^\circ$; $\beta = 5 \cdot b\,^\circ$; $R_2 = R_3 = 30$ $см$; $r_3 = \dfrac{2}{3}R_3$; $r_4 = r_3$; $i_{3_x} = 25$ $см$; $\delta_4 = 0{,}15$ $см$.
2		$\alpha = 90 - 10a\,^\circ$; $\beta = 5 \cdot b\,^\circ$; $R_2 = 30$ $см$; $r_2 = \dfrac{2}{3}R_2$; $i_{2_x} = 22$ $см$; $R_4 = 10$ $см$; $\delta_4 = 0{,}10$ $см$
3		$\alpha = 90 - 15a\,^\circ$; $R_2 = 40$ $см$; $r_2 = \dfrac{1}{2}R_2$; $f_2 = 0{,}05c$ $i_{2_x} = 30$ $см$; $R_3 = 30$ $см$; $P = \dfrac{mg}{100} \cdot b$

Обозначения:

R_2; R_3; R_4; r_2; r_3 - соответственно, радиусы больших и малых окружностей тел *2*, *3*, *4*;

i_{2_x}; i_{3_x} - соответственно, радиусы инерции тел *2*, *3* относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры масс;

δ - коэффициент трения качения;

f_2 - коэффициент трения скольжения колодки по поверхности тела *2* (Схема У3).

3.2.3 Пример выполнения задания Д.10

Дано:

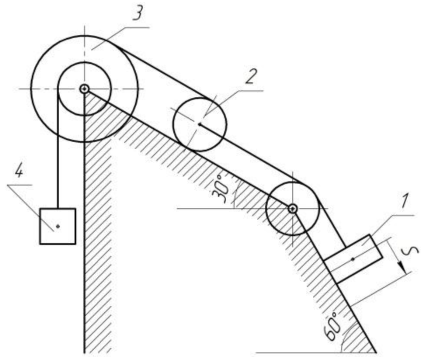


Рисунок 3.6

Механическая система, состоящая из четырех тел массами $m_1 = m$; $m_2 = \frac{1}{2}m$; $m_3 = \frac{1}{3}m$ и $m_4 = \frac{1}{4}m$, приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Начальное положение системы показано на схеме (Рисунок 3.6). Учитывая трение скольжения тела 1 ($f_1 = 0,2$) и сопротивление качению ($\delta_2 = 0,1R_2$) тела *4*, пренебрегая массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, считая, что однородный диск 2 катится без проскальзывания, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным $S = 1\ м$.

Радиус инерции третьего звена $i_{3_z} = \frac{2}{3}R_3$.

Решение

Для определения скорости первого звена V_1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным $S = 1\ м$ воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j \tag{3.47}$$

Для рассматриваемой системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями,

$$\sum A_i^j = 0 .$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (3.47) принимает вид:

$$T = \sum A_i^e \tag{3.48}$$

1. Вычерчиваем механическую систему в конечном положении (Рисунок 3.7).

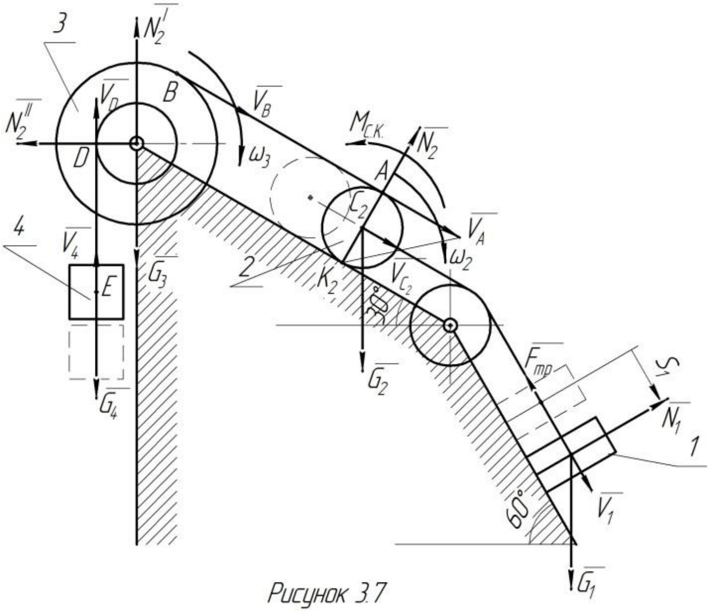


Рисунок 3.7

2. Определяем кинематическую связь между всеми звеньями механической системы.

Кинематическую связь выразим через скорость первого звена V_1 .

Так как звено *2* связано со звеном *1* нерастяжимой нитью, то:

$$V_{C_2} = V_1 \tag{3.49}$$

Звено 2 совершает плоскопараллельное движение. Определим его угловую скорость мгновенного вращения вокруг *МЦС* (точка K_2):

$$\omega_2 = \frac{V_{C_2}}{R_2} = \frac{V_1}{R_2} \tag{3.50}$$

Звено *3*, совершающее вращательное движение, связано со звеном *2* нерастяжимой нитью *AB*, поэтому:

$$V_B = V_A = \omega_2 \cdot K_2 A = \frac{V_1}{\cancel{R_2}} \cdot 2\cancel{R_2} = 2V_1 \tag{3.51}$$

Тогда угловая скорость звена *3* равна:

$$\omega_3 = \frac{V_B}{R_3} = \frac{2V_1}{R_3} \tag{3.52}$$

Звено *4*, совершающее поступательное движение, связано со звеном *3* нерастяжимой нитью, поэтому:

$$V_4 = V_E = V_D = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{\cancel{2}V_1}{\cancel{R_3}} \cdot \frac{\cancel{R_3}}{\cancel{2}} = V_1 \tag{3.53}$$

Уравнения (3.49) - (3.53) определяют кинематическую связь механической системы, выраженную через скорость V_1 звена *1*.

Данная кинематическая связь справедлива для определения зависимостей и других кинематических параметров этой системы. Так на примере зависимости перемещений звеньев механизма уравнения (3.49) - (3.53) примут вид:

$$S_{C_2} = S_1 \tag{3.54}$$

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{R_2} \tag{3.55}$$

$$S_B = 2S_1 \tag{3.56}$$

$$\varphi_3 = \frac{2S_1}{R_3} \tag{3.57}$$

$$S_4 = S_1 \tag{3.58}$$

3. Определяем кинетическую энергию механической системы T в тот момент, когда пройденный путь первого звена станет равным $S = 1\ м$. Величина T равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = \sum T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \tag{3.59}$$

Суммарную кинетическую энергию механической системы выразим через скорость первого звена V_1 .

Звено *1* совершает поступательное движение, поэтому:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m V_1^2 \tag{3.60}$$

Звено *2* совершает плоско-параллельное движение, поэтому:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_{2_z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} m \cancel{R_2^2} \cdot \frac{V_1^2}{\cancel{R_2^2}} = \frac{3}{8} m V_1^2 \tag{3.61}$$

где J_{2_z} - момент инерции звена *2* относительно оси, проходящей через его центр масс (точку C_2).

Так как звено *2* – сплошной однородный диск, то момент инерции этого звена относительно его центральной оси равен:

$$J_{2_Z} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = \frac{1}{4} m R_2^2 \qquad (3.62)$$

Звено *3* совершает вращательное движение, поэтому:

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3_Z} \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \cdot \frac{4}{9} \cancel{R_3^2} \cdot \frac{4V_1^2}{\cancel{R_3^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \cdot \frac{16}{9} V_1^2 = \frac{16}{54} m V_1^2 = \frac{8}{27} m V_1^2 \qquad (3.63)$$

где J_{3_Z} - момент инерции звена *3* относительно оси, проходящей через его центр масс (точку C_2).

Так как звено *3* – неоднородный диск, то, зная радиус инерции этого звена i_{3_Z}, момент инерции определится по формуле:

$$J_3 = m_3 i_{3_Z}^2 \qquad (3.64)$$

Звено *4* совершает поступательное движение, поэтому:

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 = \frac{1}{8} m V_1^2 \qquad (3.65)$$

Подставляя полученные значения в уравнение (3.59) найдем кинетическую энергию всей механической системы:

$$T = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{3}{8} m V_1^2 + \frac{8}{27} m V_1^2 + \frac{1}{8} m V_1^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{8}{27} + \frac{1}{8} \right) m V_1^2 = 1,30 \cdot m V_1^2 \qquad (3.66)$$

4. Покажем все внешние силы, приложенные к механической системе, и определим сумму работ всех внешних сил, выраженных через перемещение ведущего звена (с учетом уравнений (3.54) - (3.58)).

$$\sum A_i^e = A_{\bar{G}_1} + A_{\bar{N}_1} + A_{\bar{F}_{тр}} + A_{\bar{G}_2} + A_{\bar{N}_2} + A_{M_{C.K.}} + A_{\bar{G}_3} + A_{\bar{N}_3'} + A_{\bar{N}_3''} + A_{\bar{G}_4} \qquad (3.67)$$

$$A_{\bar{G}_1} = G_1 S_1 \sin 60^\circ = 0,87 mg S_1 \qquad (3.68)$$

$$A_{\bar{N}_1} = 0 \qquad (3.69)$$

$$A_{\bar{F}_{тр}} = -fN \cdot S_1 = -fmg\cos 60^\circ \cdot S_1 = -0,2 \cdot 0,5mgS_1 = -0,1mgS_1 \qquad (3.70)$$

$$A_{\bar{G}_2} = G_2 \sin 30^\circ \cdot S_{C_2} = 0,5m_2 gS_{C_2} = 0,25mgS_1 \qquad (3.71)$$

$$A_{\bar{N}_2} = 0 \qquad (3.72)$$

$$A_{M_{С.К.}} = -M_{С.К.} \cdot \varphi_2 = -\delta N_2 \varphi_2 = -\delta_2 m_2 g \cdot \cos 30^\circ \cdot \varphi_2 =$$

$$= -0,1\cancel{R_2} \cdot 0,5mg \cdot 0,87 \frac{S_1}{\cancel{R_2}} = -0,044mgS_1 \qquad (3.73)$$

$$A_{\bar{G}_3} = A_{\bar{N}_3'} = A_{\bar{N}_3''} = 0 \qquad (3.74)$$

$$A_{\bar{G}_4} = -G_4 S_4 = -m_4 gS_4 = -0,25mgS_1 \qquad (3.75)$$

Тогда уравнение (3.67), с учетом выражений (3.68) - (3.75), примет вид:

$$\sum A_i^e = A_{\bar{G}_1} + A_{\bar{F}_{тр}} + A_{\bar{G}_2} + A_{M_{С.К.}} + A_{\bar{G}_4} =$$

$$= 0,87mgS_1 - 0,1mgS_1 + 0,25mgS_1 - 0,044mgS_1 - 0,25mgS_1 = 0,726mgS_1$$

(3.76)

4. Запишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы с учетом полученных значений кинетической энергии механической системы (3.66) и суммарной работы всех внешних сил, действующих на механическую систему, (3.76) и определим скорость ведущего звена в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S .

$$1,30 \cdot \cancel{m} V_1^2 = 0,726\cancel{m} gS_1 \qquad (3.77)$$

В итоге получим:

$$V_1 = \sqrt{\frac{0,726gS_1}{1,30}} = \sqrt{\frac{0,726 \cdot 9,81 \cdot 1}{1,30}} = 2,34 \ \ м/с \qquad (3.78)$$

Ответ

$V_1 = 2,34 \ \ м/с$.

3.2.4 Контрольные вопросы по теме

1. Что такое осевой момент инерции тела?
2. Дайте определение теоремы о моменте инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс механической системы?
3. Приведите формулы для определения моментов инерции некоторых однородных тел (кольцо, диск, стержень)?
4. Как определяется работа силы?
5. Как определяется работа момента силы?
6. Чему равна мощность силы, мощность момента силы?
7. Как определяется кинетическая энергия механической системы и твердого тела при различных видах его движения?
8. Дайте определение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы?
9. Сформулируйте закон сохранения кинетической энергии?
10. Практический вопрос.

3.3 Д.14. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

3.3.1 Теоретические основы

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Если механическая система с наложенными на нее стационарными идеальными и удерживающими связями находится в равновесии, то сумма элементарных работ всех активных сил на возможном перемещении из положения равновесия равна нулю.

$$\sum \delta A_i^a = 0 \tag{3.79}$$

В общем случае на систему могут быть наложены внешние и внутренние связи. На практике эти связи реализуются в виде: шарниров, нитей, стержней, поверхностей, направляющих и т.д., но их можно представить в виде геометрических линий, математических поверхностей, плоскостей, которые описываются уравнениями или неравенствами.

Классификация связей

1. Стационарные связи

Связи, которые не меняются с течением времени называются стационарными. Уравнения этих связей не зависят явным образом от времени.

Пример:

Кривошипно-шатунный механизм.

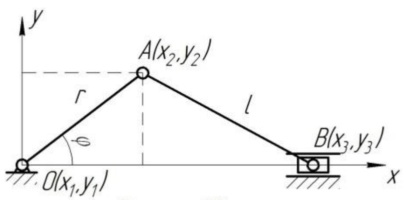


Рисунок 3.8

Для определения произвольного положения КШМ необходимо определить положения трех точек (O, A, B), для этого необходимо составить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = y_3 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0 \end{cases} \tag{3.80}$$

В уравнения (3.80) явно не входит параметр t, поэтому этот вид связи можно считать стационарным.

2. Удерживающие связи

Удерживающая связь – это связь, при которой в любой момент движения точка остается на поверхности связи. Уравнения удерживающих связей определяется равенствами, а неудерживающих связей – неравенствами.

Положение точки *A* (Рисунок 3.9) при данном виде связи определится неравенством

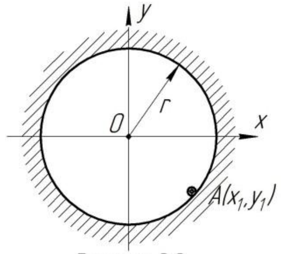


Рисунок 3.9

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 \leq 0 \tag{3.81}$$

т.е. данная связь является неудерживающей.

3. Идеальная связь

Связь без трения

4. Голономные и неголономные связи

Голономными называются связи, которые накладывают ограничение только на перемещение точек механической системы.

В уравнения этих связей входят только координаты точек системы и не входят производные от них (проекции скоростей).

Неголономными называются связи, которые накладывают ограничения на скорости точек механической системы.

В уравнения неголономных связей помимо координат точек системы входят их скорости.

Возможные перемещения

Возможным перемещением (dr_i) называется всякое воображаемое бесконечно малое перемещение точек системы, которое могли бы совершить эти точки в данный момент из данного положения, не нарушая наложенных на них связей (Рисунок 3.10).

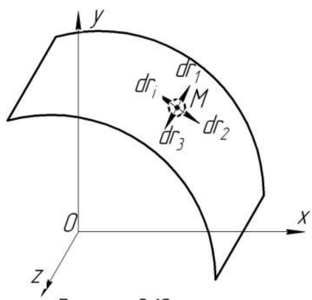


Рисунок 3.10

Понятие возможного перемещения точки или механической системы есть понятие чисто геометрическое и не зависит от действующих на точку или систему сил, а зависит только от характера наложенных связей.

Действительное перемещение это одно из возможных перемещений.

Перемещение, при котором точка или система покидает наложенные связи, не является «возможным».

3.3.2 Задание Д.14

Принцип возможных перемещений

Используя схемы механизмов, приведенных в условиях задания К.4, применяя принцип возможных перемещений и пренебрегая силами сопротивления, найти момент M_1, который надо приложить к кривошипу *1*, чтобы уравновесить механизм.

На механизм действуют:

1. $M_2 = 20\ \ Нм$ - момент пары сил, приложенный к звену, номер которого $N = 3 - n$, где $n = \ -1^{\ b}$, и направленный против часовой стрелки;

2. В точке C приложена сила $F = 10\ \ H$, направленная по горизонтали вправо.

3.3.3 Пример выполнения задания Д.14

Дано:

Механизм (Рисунок 3.11) находится в равновесии под действием пары сил моментом $M = 200\ Нм$, приложенной к звену $OA = 20\ см$, и силы $\bar{P}$, приложенной к точке *D*. Применяя принцип возможных перемещений и пренебрегая силами сопротивления, определить для заданного положения механизма значение силы $\bar{P}$, необходимой для удержания механизма в равновесии.

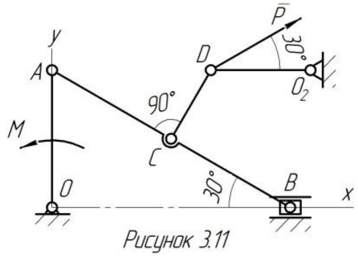


Рисунок 3.11

Решение

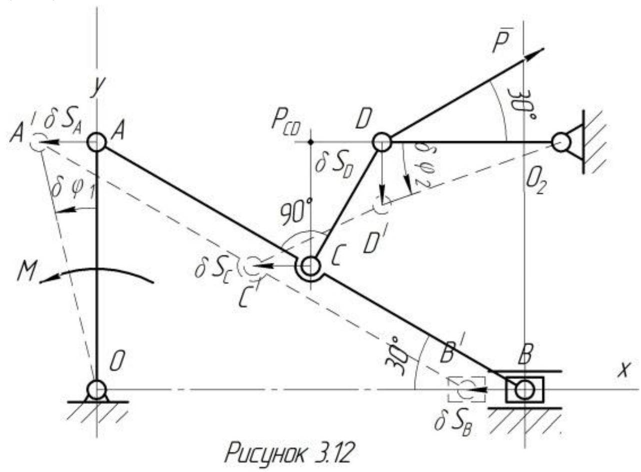


Рисунок 3.12

Рассматриваемый механизм находится в равновесии под действием следующих активных сил:

1) пары сил с моментом M;

2) силы $\bar{P}$.

Связи, наложенные на механизм, допускают следующие возможные перемещения его звеньев и точек:

Поворот кривошипа *OA* на угол $\delta\varphi_1$, перемещение точки *A* на величину δS_A, перемещение ползуна *B* на величину δS_B, перемещение точки

C на величину δS_C, перемещение точки D на величину δS_D и, как следствие, поворот кривошипа O_2D на угол $\delta\varphi_2$ (Рисунок 3.12).

1. Запишем принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) для полученной системы активных сил, приложенных к исследуемому механизму:

$$\sum \delta A_i^a = \delta A_M + \delta A_{\bar{P}} = 0 \tag{3.82}$$

2. Найдем перемещение всех точек системы, выраженные через перемещение одной из его точек.

Звено OA совершает вращательное движение, поэтому:

$$\delta S_A = OA \cdot \delta\varphi_1 \tag{3.83}$$

Звено AB совершает плоскопараллельное движение. Определим положение $МЦС$ этого звена. Для этого восстановим перпендикуляры к векторам перемещений точек A и B, направление которых известно, и найдем точку их пересечения. Очевидно, что эти перпендикуляры при данном положении механизма будут взаимно параллельны. Это говорит о том, что звено AB совершает мгновенное поступательное движение, поэтому перемещение всех его точек будут равны как по модулю, так и по направлению, т.е.:

$$\delta S_B = \delta S_C = \delta S_A = OA \cdot \delta\varphi_1 \tag{3.84}$$

Звено CD также совершает плоскопараллельное движение. Перемещение точки D можно определить с помощью определения положения $МЦС$ этого звена, тогда:

$$\frac{\delta S_C}{P_{CD}C} = \frac{\delta S_D}{P_{CD}D} \tag{3.85}$$

либо применив теорему о равенстве проекций скоростей двух точек звена, совершающего плоскопараллельное движение, на прямую проходящую через эти точки, которая справедлива также и для перемещений:

$$\delta S_C \cdot \cos 60^\circ = \delta S_D \cdot \cos 30^\circ \tag{3.86}$$

Откуда

$$\delta S_D = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} \delta S_C = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot OA \cdot \delta\varphi_1 \tag{3.87}$$

3. Определим элементарные работы всех активных сил, приложенных к механической системе на возможном перемещении с учетом уравнений (3.83) - (3.87):

$$\delta A_M = M \cdot \delta\varphi_1 \tag{3.88}$$

$$\delta A_{\bar{P}} = -P \sin 30^\circ \cdot \delta S_D = -P \sin 30^\circ \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot OA \cdot \delta\varphi_1 \tag{3.89}$$

4. Подставим значения, элементарных работ, полученные в уравнениях (3.88) и (3.89) в уравнение (3.82) и решим его:

$$M\cdot\delta\varphi_1 - P\sin 30^\circ \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}\cdot OA\cdot\delta\varphi_1 = 0 \tag{3.90}$$

$$M\cdot\cancel{\delta\varphi_1} = P\sin 30^\circ \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}\cdot OA\cdot\cancel{\delta\varphi_1}$$

$$P = \frac{M\cos 30^\circ}{OA\sin 30^\circ\cos 60^\circ} = \frac{200\cdot 0,87}{20\cdot 0,5\cdot 0,5} = 34,8\ \ H \quad .$$

Ответ $P = 34,8\ \ H$

3.3.4 Контрольные вопросы по теме

1. Связи и их классификация.
2. Что такое возможное перемещение и действительное перемещение?
3. Дайте понятие элементарной работы силы на возможном перемещении?
4. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).
5. Практический вопрос.

3.4 Д.19. Общее уравнение динамики

3.4.1 Теоретические основы

Принцип Даламбера для материальной точки (Принцип кинетостатики)

Пусть на несвободную материальную точку m действует активная сила $\bar{F}_a$.

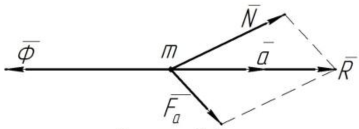


Рисунок 3.13

Если мысленно отбросить связь, заменив ее действие реакцией связи $\bar{N}$, то основной закон динамики примет для этой точки вид:

$$m\bar{a} = \bar{F}^a + \bar{N} \qquad (3.91)$$

Перепишем данное выражение в виде:

$$\bar{F}^a + \bar{N} + \ -m\bar{a}\ \ = 0$$

обозначая $-m\bar{a}\ = \bar{\Phi}$ получим:

$$\bar{F}^a + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0 \qquad (3.92)$$

Сила $\bar{\Phi}$, равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется **силой инерции** точки m.

Выражение (3.92) представляет собой принцип Даламбера для несвободной материальной точки.

В любой момент движения материальной точки приложенные к ней активная сила и реакция связи как бы уравновешенны условно приложенной к этой точке ее силой инерции.

В действительности силы инерции приложены к тем телам, которые в данный момент движутся с ускорением.

Принцип Даламбера – это условный, формальный прием, позволяющий рассматривать задачи динамики методами статики.

Принцип Даламбера для механической системы

Для i – ой точки механической системы имеем:

$$\bar{F}_i^a + \bar{N}_i + \bar{\Phi}_i = 0 \qquad (3.93)$$

просуммировав выражение (3.93) для всех точек механической системы получим:

$$\sum \bar{F}_i^a + \sum \bar{N}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0 \qquad (3.94)$$

Умножим обе части равенства (3.93) на радиус вектор $\bar{r}_i$ и просуммируем по всем точкам механической системы:

$$\sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i^a + \sum \bar{r}_i \times \bar{N}_i + \sum \bar{r}_i \times \bar{\Phi}_i = 0 \tag{3.95}$$

Из выражений (3.94) и (3.95) следует, что:

$$\bar{R}^a + \bar{R}^N + \bar{R}^\Phi = 0 \tag{3.96}$$

$$\bar{M}_O^a + \bar{M}_O^N + \bar{M}_O^\Phi = 0 \tag{3.97}$$

где $\bar{R}^a$ - главный вектор активных сил;

$\bar{R}^N$ - главный вектор реакций связи;

$\bar{R}^\Phi$ - главный вектор сил инерции;

$\bar{M}_O^a$ - главный момент активных сил;

$\bar{M}_O^N$ - главный момент реакций связи;

Уравнения (3.96) и (3.97) представляют собой векторное выражение принципа Даламбера для механической системы:

В любой момент движения механической системы действующие на нее активные силы, реакции связей, а так же условно приложенные силы инерции взаимно уравновешенны.

Спроецировав выражения (3.96) и (3.97) на оси координат, получим аналитический вид принципа Даламбера.

$$\begin{cases} \sum X_i = \sum X_i^a + \sum N_{i_X} + \sum \Phi_{i_X} = 0 \\ \sum Y_i = \sum Y_i^a + \sum N_{i_Y} + \sum \Phi_{i_Y} = 0 \\ \sum Z_i = \sum Z_i^a + \sum N_{i_Z} + \sum \Phi_{i_Z} = 0 \\ \sum M_X = \sum M_X \; \bar{F}_i^a + \sum M_X \; \bar{N}_i + \sum M_X \; \bar{\Phi}_i = 0 \\ \sum M_Y = \sum M_Y \; \bar{F}_i^a + \sum M_Y \; \bar{N}_i + \sum M_Y \; \bar{\Phi}_i = 0 \\ \sum M_Z = \sum M_Z \; \bar{F}_i^a + \sum M_Z \; \bar{N}_i + \sum M_Z \; \bar{\Phi}_i = 0 \end{cases} \tag{3.98}$$

Система уравнений (3.98) есть уравнения кинетостатического равновесия механической системы.

Как было показано, принцип Даламбера позволяет записывать динамические уравнения движения, в виде уравнений статики, так как при добавлении сил инерции к активным силам и силам реакции связей, действующим на систему, получается условно уравновешенная система сил. Но если система сил уравновешенна, то к ней применим принцип возможных перемещений (3.79).

Последовательное применение этих принципов к движущейся механической системе, на которую наложены стационарные идеальные голономные удерживающие связи, позволяет сформулировать общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)

Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)

Если к движущейся механической системе с наложенными на нее стационарными идеальными голономными удерживающими связями условно приложить, действующие на ее точки, силы инерции, то сумма элементарных работ всех внешних активных сил и сил инерции в любой момент времени на любом возможном ее перемещении равна нулю.

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_{\bar{\Phi}_i} = 0 \qquad (3.99)$$

Последовательность решения задач с использованием общего уравнения динамики для механических систем с одной степенью свободы

1. Изобразить механическую систему в промежуточном ее положении и приложить к ней все внешние активные силы.

В случае неидеальных связей заменить их реакциями, включив последние в число активных сил.

2. Приложить к точкам механической системы все силы инерции.

3. Задать системе возможное перемещение и определить перемещения всех точек механической системы, выраженные через перемещение одного из ее звеньев.

4. Определить на выбранном возможном перемещении работы всех активных сил и сил инерции.

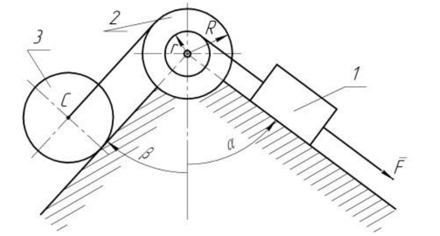
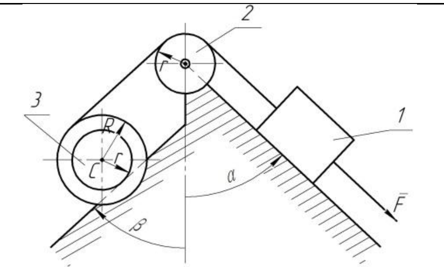
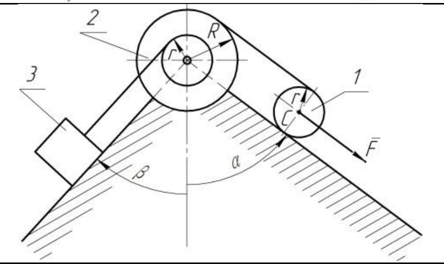
5. Подставить полученные значения в уравнение (3.99) и решить его.

3.4.2 Задание Д.19

Общее уравнение динамики (Принцип Даламбера-Лагранжа)

Тело 1 весом G_1, к которому приложена сила $\bar{F}$, параллельная наклонной шероховатой поверхности, с помощью нити приводит во вращение тело 2 весом G_2, которое, в свою очередь, приводи в движение тело 3 весом G_3.

Пренебрегая весом нерастяжимых нитей и считая, что катки катятся без скольжения, найти ускорения тел и натяжения нитей, которыми они скреплены.

У1		$\alpha = 15a^\circ$; $\beta = \ 90 - 5b\ ^\circ$; $R = 2r$; $i_{Z_2} = \frac{2}{3}R$; $G_1 = G = 10\ \kappa H$; $G_2 = 0{,}5G$; $G_3 = 0{,}2G$; $f_1 = 0{,}05c$.
У2		$\alpha = 15a^\circ$; $\beta = \ 90 - 5b\ ^\circ$; $R = \frac{2}{3}r$; $i_{Z_3} = \frac{3}{4}R$; $G_1 = G = 10\ \kappa H$; $G_2 = 0{,}5G$; $G_3 = 0{,}2G$; $f_1 = 0{,}05c$.
У3		$\alpha = 15\ a + 1\ ^\circ$; $\beta = 10b^\circ$; $R = \frac{1}{2}r$; $i_{Z_2} = \frac{2}{3}R$; $G_1 = G = 10\ \kappa H$; $G_2 = 0{,}5G$; $G_3 = 0{,}2G$; $f_3 = 0{,}05c$.

где f - коэффициент трения скольжения соответствующего тела по наклонной поверхности;

i_Z - радиус инерции соответствующего тела.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции не заданы, считать сплошными однородными дисками.

3.4.3 Пример выполнения задания Д.19

Дано:

Тело 1 весом $G_1 = G = 50\ H$ с помощью нити приводит во вращение тело 2 весом $G_2 = 0,5G$, которое, в свою очередь, приводи в движение тело 3 и 4 весом $G_3 = 0,1G$ и $G_4 = 0,2G$ соответственно (Рисунок 3.14).

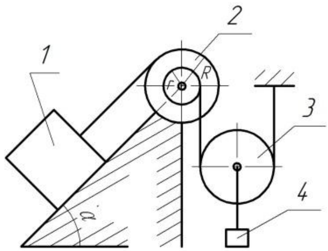


Рисунок 3.14

Пренебрегая весом нерастяжимых нитей, найти ускорения тел и натяжения нитей, которыми они скреплены.

При этом коэффициент трения скольжения тела 1 по наклонной плоскости $f_1 = 0,25$, угол наклона плоскости $\alpha = 45^\circ$, $R_2 = R_3 = R = 2r = 20\ см$, радиус инерции тела 2 относительно его оси вращения $i_{Z_2} = \dfrac{2}{3}R$, тело 3 – сплошной однородный диск.

Решение

1. Изобразим механическую систему в промежуточном ее положении и приложим к ней все внешние активные силы (Рисунок 3.15), т.е. $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{G}_4$. Силу трения $\overline{F}_{тр}$ условно также считаем активной силой.

2. Приложим к точкам механической системы все силы инерции.

Так как силы инерции противоположны по направлению ускорениям точек, к которым они приложены, то сначала определим направления ускорений всех тел механической системы.

Тело 1 совершает поступательное движение с ускорением $\overline{a}_1$, направленным вниз вдоль наклонной плоскости.

Тело 2 совершает вращательное движение с угловым ускорением ε_2, сонаправленным с направлением вращения тела, т.е. против часовой стрелки.

Тело 3 совершает плоскопараллельное движение: центр его движется вертикально вверх с ускорением $\overline{a}_{C_3}$, а само оно поворачивается с угловым ускорением ε_3.

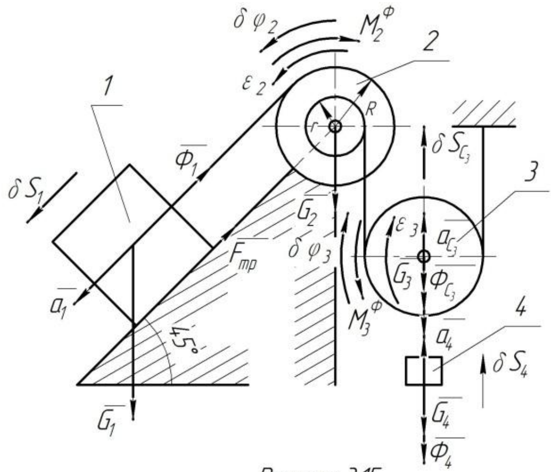


Рисунок 3.15

Тело 4 движется поступательно вертикально вверх с ускорением $\overline{a}_4$.

Тогда к механической системе будут приложены следующие силы инерции:

сила инерции $\overline{\Phi}_1$, противоположная ускорению $\overline{a}_1$;

момент сил инерции M_2^Φ противоположный угловому ускорению ε_2;

сила инерции $\overline{\Phi}_{C_3}$, противоположная ускорению $\overline{a}_{C_3}$;

момент сил инерции M_3^Φ противоположный угловому ускорению ε_3;

сила инерции $\overline{\Phi}_4$, противоположная ускорению $\overline{a}_4$;

3. Зададим системе возможное перемещение и определим перемещения всех точек механической системы, выраженные через перемещение тела 1.

Возможное перемещение тела 1 - δS_1,

при этом тело 2 повернется на элементарный угол поворота:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R} \tag{3.100}$$

при этом на малый радиус тела 3 намотается нить длиной

$$\delta S_3 = \delta\varphi_2 \cdot r = \frac{\delta S_1 \cdot \cancel{R}}{\cancel{R} \cdot 2} = \frac{\delta S_1}{2} \tag{3.101}$$

Тело 3 повернется на элементарный угол:

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_3}{2R} = \frac{\delta S_1}{4R} \qquad (3.102)$$

а его центр масс (точка C_3) переместится на величину:

$$\delta S_{C_3} = \delta\varphi_3 \cdot R_3 = \frac{\delta S_1 \cdot \cancel{R}}{4\cancel{R}} = \frac{\delta S_1}{4} \qquad (3.103)$$

Так как тело 4 подвязано к центру масс тела 3 (точке C_3), то его элементарное перемещение:

$$\delta S_4 = \delta S_{C_3} = \frac{\delta S_1}{4} \qquad (3.104)$$

Уравнения (3.100) - (3.104) выражают кинематическую связь данной механической системы, выраженную через перемещение первого тела δS_1.

Данная кинематическая связь справедлива для определения зависимостей и других кинематических параметров этой системы. Так, на примере ускорений звеньев механизма, уравнения (3.100) - (3.104) примут вид:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R} \qquad (3.105)$$

$$a_3 = \frac{a_1}{2} \qquad (3.106)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{4R} \qquad (3.107)$$

$$a_{C_3} = \frac{a_1}{4} \qquad (3.108)$$

$$a_4 = \frac{a_1}{4} \qquad (3.109)$$

4. Определим на выбранном возможном перемещении работы всех активных сил и сил инерции.

$$\delta A_{\bar{G}_1} = G_1 \sin 45^\circ \cdot \delta S_1 = 0,71 \cdot G\delta S_1 \qquad (3.110)$$

$$\delta A_{\bar{F}_{тр}} = -F_{тр} \cdot \delta S_1 = -fG\cos 45^\circ \cdot \delta S_1 = -0,1775 \cdot G\delta S_1 \qquad (3.111)$$

$$\delta A_{\bar{G}_2} = 0 \qquad (3.112)$$

$$\delta A_{\bar{G}_3} = -G_3 \cdot \delta S_{C_3} = -0,025 \cdot G\delta S_1 \qquad (3.113)$$

$$\delta A_{\bar{G}_4} = -G_4 \cdot \delta S_4 = -\frac{1}{4} G_4 \cdot \delta S_1 = -0,05 \cdot G\delta S_1 \qquad (3.114)$$

$$\delta A_{\bar{\Phi}_1} = -\Phi_1 \cdot \delta S_1 = -\frac{G}{g} \cdot a_1 \delta S_1 \qquad (3.115)$$

$$\delta A_{M_2^{\Phi}} = -M_2^{\Phi}\cdot\delta\varphi_2 = -J_2\varepsilon_2\cdot\delta\varphi_2 = -\frac{G_2}{g} i_{Z_2}^2\,\varepsilon_2\cdot\delta\varphi_2 =$$
$$= -\frac{4}{18}\frac{G}{g}\cancel{R}^2\,\frac{a_1}{\cancel{R}}\,\frac{\delta S_1}{\cancel{R}} = -\frac{2}{9}\frac{G}{g}\cdot a_1\delta S_1 \qquad (3.116)$$

$$\delta A_{\bar{\Phi}_{C_3}} = -\Phi_{C_3}\cdot\delta S_{C_3} = -\frac{G_3}{g}a_{C_3}\cdot\delta S_{C_3} =$$
$$= -\frac{0,1G}{g}\cdot\frac{a_1}{4}\cdot\frac{\delta S_1}{4} = -0,00625\frac{G}{g}\cdot a_1\delta S_1 \qquad (3.117)$$

$$\delta A_{M_3^{\Phi}} = -M_3^{\Phi}\cdot\delta\varphi_3 = -J_3\varepsilon_3\cdot\delta\varphi_3 = -\frac{G_3}{2g}\cancel{R}^2\,\frac{a_1}{4\cancel{R}}\cdot\frac{\delta S_1}{4\cancel{R}} =$$
$$= -\frac{0,1G}{32g}\cdot a_1\delta S_1 \qquad (3.118)$$

$$\delta A_{\bar{\Phi}_4} = -\Phi_4\cdot\delta S_4 = -\frac{G_4}{g}\cdot a_4\delta S_4 = -\frac{0,2G}{g}\cdot\frac{a_1}{4}\cdot\frac{\delta S_1}{4} = -0,0125\frac{G}{g}\cdot a_1\delta S \qquad (3.119)$$

5. Подставим полученные значения в уравнение (3.99) и решим его.

$$\delta A_{\bar{G}_1} + \delta A_{\bar{F}_{mp}} + \delta A_{\bar{G}_3} + \delta A_{\bar{G}_4} + \delta A_{\bar{\Phi}_1} + \delta A_{M_2^{\Phi}} + \delta A_{\bar{\Phi}_{C_3}} + \delta A_{M_3^{\Phi}} + \delta A_{\bar{\Phi}_4} =$$
$$= 0,71\cdot G\delta S_1 - 0,1775\cdot G\delta S_1 - 0,025\cdot G\delta S_1 - 0,05\cdot G\delta S_1 - \frac{G}{g}\cdot a_1\delta S_1 -$$
$$-\frac{2}{9}\frac{G}{g}\cdot a_1\delta S_1 - 0,00625\frac{G}{g}\cdot a_1\delta S_1 - \frac{0,1G}{32g}\cdot a_1\delta S_1 - 0,0125\frac{G}{g}\cdot a_1\delta S = \qquad (3.120)$$
$$= 0,4575\cdot G\delta S_1 - 1,244\frac{G}{g}\cdot a_1\delta S_1 = 0$$

$$0,4575\cdot\cancel{G}\,\cancel{\delta S_1} = 1,244\frac{\cancel{G}}{g}\cdot a_1\,\cancel{\delta S_1}$$
$$a_1 = \frac{0,4575}{1,244}g = 3,61\ \ см/с^2 \qquad (3.121)$$

Тогда, с учетом уравнений (3.105) - (3.109), ускорения всех тел системы равны:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R} = \frac{3,61}{20} = 0,18\ \ рад/с^2 \qquad (3.122)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{4R} = \frac{3,61}{80} = 0,045 \ \ рад/с^2 \qquad (3.123)$$

$$a_4 = a_{C_3} = \frac{a_1}{4} = \frac{3,61}{4} = 0,90 \ \ см/с^2 \qquad (3.124)$$

5. Определим натяжения нитей, связывающих тела системы.

Определим натяжение нити, связывающей тела 1 и 2, для этого мысленно разрежем нить между первым и вторым тело и запишем общее уравнение динамики для тела 1, заменив действие разрезанной нити соответствующей реакцией $\overline{T}_{1-2}$ (Рисунок 3.16).

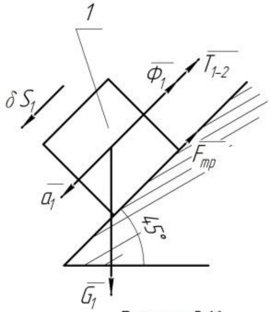


Рисунок 3.16

$$\delta A_{\overline{G}_1} + \delta A_{\overline{F}_{тр}} + \delta A_{\overline{T}_{1-2}} + \delta A_{\overline{\Phi}_1} =$$

$$= 0,71 \cdot G\,\cancel{\delta S_1} - 0,1775 \cdot G\,\cancel{\delta S_1} - T_{1-2} \cdot \cancel{\delta S_1} - \frac{G}{g} \cdot a_1\,\cancel{\delta S_1} = 0 \qquad (3.125)$$

$$0,71 \cdot 50 - 0,1775 \cdot 50 - T_{1-2} - 5,1 \cdot 3,61 = 0$$

$$T_{1-2} = 8,21 \ \ Н \qquad (3.126)$$

Натяжение нити между телом 2 и 3 можно определить, заменив действия связей соответствующими реакциями $\overline{T}_{2-1}$, $\overline{T}_{2-3}$, $\overline{N}_2'$, $\overline{N}_2''$ и записав дифференциальное уравнение вращательного движения для тела 2 (Рисунок 3.17).

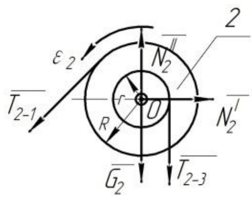


Рисунок 3.17

$$J_O \varepsilon_2 = \sum M_O \ \ \overline{F}_i \qquad (3.127)$$

$$J_O \varepsilon_2 = T_{2-1} \cdot R - T_{2-3} \cdot r$$

$$\frac{G_2}{g} i_{Z_2}^2 \varepsilon_2 = T_{2-1} \cdot R - T_{2-3} \cdot r$$

$$2,55 \cdot 177,78 \cdot 0,18 = 8,21 \cdot 20 - T_{2-3} \cdot 10$$

$$T_{2-3} = 8,26 \ \ Н \qquad (3.128)$$

Аналогично определяются натяжения остальных нитей.

3.4.4 Контрольные вопросы по теме

1. Принцип кинетостатики (принцип Даламбера) для механической системы.
2. Связи и их классификация.
3. Возможные перемещения.
4. Элементарная работа силы на возможном перемещении.
5. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа).
6. Практический вопрос.

Приложение 1

Министерство сельского хозяйства РФ
ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный аграрный университет»

Кафедра тракторов, автомобилей и технической механики

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по теоретической механике

на тему: «**Исследование механического движения и механического взаимодействия материальных тел**»

Вариант № _______

Выполнил: студент гр. ___________
____
Ф.И.О.

Проверил:_______________________
____
ученое звание, степень, Ф.И.О. преподавателя

Краснодар, 20___ г.

Учебное пособие

Корнеев Дмитрий Витальевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА:
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕЕИЯ И МЕХАНИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

В авторской редакции

Подписано в печать __.___.2011. Формат ________
Тираж 100 экз. Печ.л. – 6,9. Учет.-изд. л. – 117.
Заказ № _______

Типография Кубанского государственного аграрного университета, 350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13