

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И.Т. Трубилина»**

А.В. Огняник, Е.И. Трубилин

МОДЕЛИРОВАНИЕ В АГРОИНЖЕНЕРИИ

Курс лекций

Краснодар
КубГАУ
2019

УДК 631.3:519.24 (075.8)
ББК 40.7
М74

Рецензент:

Е. И. Винеvский –зав. лабораторией механизации и агротехнологии Всероссийский научно-исследовательский институт табака, махорки и табачных изделий, д-р техн. наук, профессор.

М74 Моделирование в агроинженерии : курс лекций / сост. А. В. Огняник, Е. И. Трубилин, – Краснодар : КубГАУ, 2019. – 102 с.

В представленном курсе лекций рассмотрены основы теории и методы компьютерного моделирования. Приведены основы планирования и обработки результатов моделирования. Рекомендуется для аудиторной и самостоятельной работы.

Предназначены для магистрантов направления подготовки 35.04.06 Агроинженерия. Очной и заочной форм обучения.

УДК 631.3:519.24 (075.8)
ББК 40.7

©Огняник А. В., Трубилин Е. И., 2019
©ФГБОУ ВПО «Кубанский
государственный аграрный
университет имени И.Т. Трубилина», 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
ЛЕКЦИЯ 1 Определение и понятие системы и ее элементов.....	5
ЛЕКЦИЯ 2 Понятие модели и моделирования. Классификация моделей	12
ЛЕКЦИЯ 3 Получение данных.....	17
ЛЕКЦИЯ 4 Аппроксимация исходных данных.....	28
ЛЕКЦИЯ 5 Функции роста.....	32
ЛЕКЦИЯ 6 Системы уравнений для описания моделей черного ящика.....	39
ЛЕКЦИЯ 7 Принципы выбора структуры модели.....	45
ЛЕКЦИЯ 8 Обследование объекта, построение сценария его функционирования и концептуальной модели.....	48
ЛЕКЦИЯ 9 Проверка и оценивание моделей.....	54
ЛЕКЦИЯ 10 Принципы оценки адекватности и точности модели.....	58
ЛЕКЦИЯ 11 Планирование модельного эксперимента.....	61
ЛЕКЦИЯ 12 Основные понятия линейного программирования.....	68
ЛЕКЦИЯ 13 Имитационное моделирование и его этапы.....	77
ЛЕКЦИЯ 14 Элементы теории массового обслуживания.....	80
ЛЕКЦИЯ 15 Генерация случайных чисел.....	88
ЛЕКЦИЯ 16 Средства описания поведения объектов.....	94
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	100

Введение

Необходимость использовать достижения научно-технического прогресса, осуществлять качественные изменения в технике и технологии при быстром обновлении продукции отраслей, решать вопросы рационального использования материальных и трудовых ресурсов, повышения эффективности работы оборудования требует научной обоснованности методов управления производством.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натуральный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. В принципе возможно, но вряд ли разумно поставить эксперимент по распространению какой-либо болезни, например чумы, или осуществить облучение мощным лазерным импульсом сада, чтобы изучить его последствия. Однако все это вполне можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

Данное учебное пособие подготовлено на основании опыта чтения лекционного курса и лабораторных занятий в Мичуринском государственном аграрном университете.

Предмет дисциплины – основы моделирования технологических процессов сельскохозяйственного производства, имитационного моделирования, средства компьютерного моделирования в известных программных средах.

Курс базируется на дисциплинах- информатике, математике, конкретных технологиях производства сельскохозяйственной продукции, электротехнике, электроснабжении предприятий, переработке сельскохозяйственной продукции, специальных инженерных дисциплинах, компьютерной графике.

Цель учебного пособия - активно закрепить, обобщить, углубить и расширить знания, полученные при изучении базовых дисциплин, приобрести новые знания по моделированию процессов и сформировать умения и навыки, необходимые для последующей инженерной деятельности в этой области.

Студент, изучивший курс «Моделирование в агроинженерии», должен знать:

- современные программные средства моделирования;
 - основы теории моделирования и планирования экспериментов;
 - методы формализации и представления операций переработки для подготовки имитационной модели;
 - основы статистической обработки и принятия решений по результатам имитационного моделирования;
- и уметь:
- составить имитационную модель отдельных операций, например переработки - сельскохозяйственного сырья или работы электрической сети;
 - провести имитационный эксперимент на компьютере.

ЛЕКЦИЯ 1

Определение и понятие системы и ее элементов

Система – совокупность элементов, являющаяся объектом исследования, изучения или наблюдения. Элементами могут быть физические объекты (оборудование, машины, приборы, здания и т.п.), явления (нагревание, охлаждение, свечение, электромагнетизм), процессы, в том числе и технологические (упаковка, взвешивание, сортирование, мойка и т.п.). Элемент системы- ее неделимая часть в рамках конкретного исследования, реализующая конкретные функции. Элемент системы описывается множеством различных характеристик, параметров, связями с соседними элементами. Связи между элементами делают систему единым целым. Элементы отличаются друг от друга выполняемыми функциями, состояниями, входами и выходами. Любой элемент может рассматриваться как более мелкая система.

Термин «система» появился в научной литературе давно и является таким же неопределенным, как термины «множество» или «совокупность». Наиболее широко этот термин первоначально использовался в механике, где обозначал материальную систему, т.е. совокупность материальных точек, подчиненных определенным связям. В дальнейшем понятие системы было распространено на биологические, экономические, технологические и другие объекты.

Система- понятие относительное. Некоторая совокупность элементов может быть частью более крупной системы, небольшой ее частью или рассматриваться самостоятельно, не зависимо от окружающего мира. Это зависит от цели исследования. Для установления системы, сферы ее действия необходимо выявить ее границы и состав. При установлении границ системы выявляются причинно-следственные взаимосвязи между ее элементами.

Для выделения системы требуется определить:

- цель, для достижения которой формируется система;
- объект исследования, состоящий из множества элементов, связанных с точки зрения цели в единое целое системными признаками;
- субъект исследования, наблюдения, заказчика, формирующего систему;
- характеристики внешней среды по отношению к системе и отражение их взаимосвязей с системой.

Цель функционирования определяет системные признаки, с помощью которых описываются элементы системы. Система с точки зрения цели есть упорядоченное представление об объекте (существующем или проектируемом). Разные субъекты, в зависимости от цели, могут иметь свои представления об элементах системы, их взаимосвязях и связях с внешней средой.

Цель- это субъективный образ, абстрактная модель несуществующего, но желаемого состояния производства, которое решило бы возникшую проблему.

Цели, которые ставит перед собой человек, редко достижимы только за счет его собственных возможностей, или возможностей производства, к которому он причастен.

Стечение обстоятельств, характеризующееся различием между необходимым (желаемым) и существующим, называется проблемой, или проблемной ситуацией. Проблемность существующего положения, в частности с производством продукции, осознается в несколько стадий: от смутного ощущения, что «что-то не так», к осознанию потребности, затем выявлению проблемы и, наконец, к формулировке цели.

Вся последующая деятельность, способствующая решению этой проблемы, направлена на достижение поставленной цели. Эта деятельность направлена на отбор из окружающей среды элементов, свойства которых можно использовать на достижение поставленной цели, и на объединение этих элементов надлежащим образом, т.е. как работу по созданию того, что мы называем системой.

В таблице 1.1. приведены примеры целей и систем, предназначенных для их реализации. Соответствие между целями и системами сформулировать достаточно сложно. Так, если между первыми тремя целями и системами формулировка соответствия не вызывает затруднений, то остальные две цели могут иметь несколько систем, и наоборот. Для обеспечения быстрого перемещения сельскохозяйственной продукции с поля в качестве системы можно использовать не только грузовой автомобиль, но тракторный прицеп, контейнеровоз и т.п. Аналогично звуковая информация может быть передана по мобильной радиостанции.

Таблица 1.1. Цели и системы

№пп	Цель	Система
1	В произвольный момент указать время	Часы
2	Обеспечить производство зерна пшеницы определенной массы	Сельскохозяйственное предприятие
3	Обеспечить выпечку хлеба в заданном ассортименте для значительного количества людей	Пекарня
4	Обеспечить быстрое перемещение заданного количества сельскохозяйственной продукции от поля до склада	Грузовой автомобиль
5	Передать звуковую информацию в пределах определенного района мгновенно независимо от места ее источника	Мобильный телефон

Упорядоченность представления субъекта есть целенаправленное выделение элементов системы, установлении их признаков, взаимосвязей между собой и с внешней средой. При выделении системы учитывают наиболее существенные признаки, все второстепенное, несущественное- исключается.

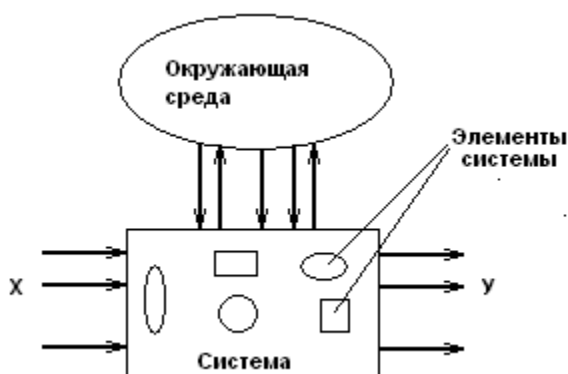
Решение проблемы есть то, что заполняет промежуток между существующей и желаемой системами. Важное значение для человека имеют наглядные, образные, визуальные модели. Для наглядного представления

системы ее изображают в виде «черного ящика», выделенного из окружающей среды и имеющего входы и выходы, рис.1.1. Название «черный ящик» образно подчеркивает полное отсутствие сведений о внутреннем содержании ящика: задаются, фиксируются, перечисляются только входные и выходные связи системы со средой. Такой подход, несмотря на его простоту и на отсутствие сведений о внутренней структуре системы, часто оказывается полезным.

Сопоставляя входы и выходы за ряд моментов времени, находят такие входные параметры X , при которых рассчитанные значения выходных параметров Y лучше всего аппроксимируют фактические значения выходов.

Сущность метода "черного ящика" состоит в том, что при исследовании объектов они рассматриваются как недоступный для наблюдения, изучения и описания "черный ящик", имеющий определенные входы и выходы. Вследствие сложности устройства "черного ящика", т.е. изучаемого объекта, возможно лишь наблюдать состояние входов в него и соответствующих им выходов, т.е. изучать поведение, не зная его внутреннего устройства.

Однако, как бы детально ни изучалось поведение "черного ящика", нельзя вывести обоснованного суждения о его внутреннем устройстве, ибо одним и тем же поведением могут обладать различные объекты, а одно и то же соотношение между входами и выходами может в пределах имеющихся статистических данных удовлетворительно описываться несколькими различными математическими выражениями. С увеличением числа факторов регрессионной



модели обычно падает ее достоверность. Как показывает практика, удовлетворительные модели получаются при описании ситуации, в которой выходной фактор существенно связан не более чем с пятью-шестью входными факторами.

Во многих случаях достаточно содержательного словесного описания входов и выходов.

Рис.1.1. К понятию «черного ящика».

Опишем входы и выходы системы «грузовой автомобиль». В данном случае за выход можно принять Y_1 - грузоподъемность автомобиля, а также, например, Y_2 -затраты горючего на единицу перевезенной продукции. Сформулировав таким образом выходы системы, можно прийти к выводу, что они могут относиться ко всем автомобилям, а не только к грузовым. Чтобы различить автомобили вообще и грузовые автомобили можно указать, что грузоподъемность должна быть, например, не меньше 5 т. Еще можно добавить достаточную для определенной зоны эксплуатации проходимость автомобиля.

В качестве входов для грузового автомобиля обозначим те его элементы, которые предназначены для управления во время движения: X_1 - руль, X_2 , X_3

,X4 - педали сцепления, газа и тормоза, X5 - рычаг переключения передач, X6 – переключатели сигнализации и освещения, X7 - ручка ручного тормоза. Необходимо учесть также буквальные входы: X8 - двери кабины и X9 -борта для загрузки продукции в кузов автомобиля.

Дальнейший анализ возможных входов грузового автомобиля показывает, что входное воздействие на него оказывает X10 - другие пассажиры, тип и количество груза, способы крепления последнего в кузове.

Окружающая среда также оказывает входные воздействия на грузовой автомобиль. В перечень входов следует поэтому записать X11 - окна и зеркала, с помощью которых водитель наблюдает за окружающей средой. Но тогда можно отметить, что свойства дороги, по которой движется грузовой автомобиль, также оказывают входное воздействие: по разному приходится действовать водителю при езде по асфальту и по грунтовой дороге, в поле, дождь, гололед, грязь. Добавляем к списку входов X12 - механическое воздействие грунта на колеса. Рассуждая далее, можно определить в качестве входов следующие воздействия внешней среды: X13 – аэродинамическое сопротивление воздуха, X14 -силы инерции, возникающие при торможении, причем последние зависят как от окружающей среды, так и от самого грузового автомобиля и груза.

Рассмотренный пример свидетельствует, что построение модели «черного ящика» не является тривиальной задачей, так как на вопрос, сколько и какие входы и выходы следует включать в модель ответ не прост. Главной причиной большого количества входов и выходов в модели «черного ящика» является то, что всякая реальная система взаимодействует с объектами окружающей среды неограниченным числом способов.

Различают детерминированные и стохастические системы.

В детерминированных системах цель исследования полностью определена, сами элементы и отношения между ними и внешней средой известны. Примером детерминированной системы может быть, например, уборка фруктов как производственно-экономическая система. Элементами системы являются деревья и фрукты на них, подъездные пути, транспортные средства, тара, упаковочный материал, количество сборщиков и т.п. Существенными системными признаками являются качество фруктов, их количество, цена на рынке, себестоимость производства, погодные условия, квалификация сборщиков. К несущественным признакам можно отнести фамилии сборщиков, цвет материала из которого сделана тара и т.д.

Системы со стохастической структурой не имеют либо ясно выраженной цели исследования, либо выраженных существенных элементов и отношений между ними (признаков). Подобные системы выделяются на этапах разработки, проектирования сложных производств, технологических процессов и оборудования.

Системы разделяются на управляемые и неуправляемые. Управление можно определить как организацию различных действий, процессов для достижения намеченной цели.

Управляемые системы обеспечивают целенаправленное функционирование при изменяющихся внутренних или внешних условиях. Управление осуществляется человеком или специальным устройством (для технических систем). К управляемым системам относятся, например, движение автотранспорта, работа технологической линии или предприятия в целом.

Неуправляемые системы не обеспечивают целенаправленного функционирования. К неуправляемым относятся стихийные явления природы, работа оборудования после отказа, движение ветра.

При рассмотрении, анализе и синтезе систем существуют два подхода: индуктивный (классический) и системный.

Индуктивный подход предполагает изучение системы путем перехода от частного к общему и дальнейший синтез системы за счет слияния ее компонентов.

Системный подход предполагает переход от общего к частному при выделении исследуемого объекта из окружающей среды при единой цели.

Структуру системы можно изучать исходя из состава отдельных подсистем (структурный подход) или путем анализа функционирования отдельных свойств, позволяющих достичь заданной цели (функциональный подход).

Структурный подход позволяет выделить состав элементов системы и связи между ними. Наиболее общее описание структуры - топологическое описание на базе теории сетей и графов.

Структура системы - совокупность связей между элементами системы, отражающая их взаимодействие. Структура системы может изучаться с разных позиций извне (состава отдельных элементов системы и отношений между ними) и изнутри (при анализе свойств системы, приводящих к намеченной цели). Связи между элементами, определяющие систему, могут быть устойчивые, неустойчивые, статистически устойчивые.

Устойчивые связи существуют постоянно в течение рассматриваемого промежутка времени или возникают регулярно.

Не устойчивые связи возникают редко, от случая к случаю.

Статистически устойчивые связи с течением времени стремятся к определенным значениям.

Связи могут определяться экономическими отношениями, физическими или социальными законами, отношениями родства, подчиненности и т.д. Они могут быть функциональными, информационными, причинными, логическими и т.д.

Функциональный подход рассматривает отдельные функции, алгоритмы, приводящие к достижению цели.

Характеристики системы могут быть количественные и качественные. Количественно система характеризуется числами, выражающими отношение между заданной величиной (эталон) и исследуемой величиной. Качественные характеристики выражаются описанием типа хороший, плохой, больше, меньше или с помощью различных шкал, например методами экспертных оценок.

Функционирование системы – проявление функций системы во времени, переход от одного состояния к другому (движение в пространстве состояний). При использовании системы важно качество ее функционирования. Один и тот же закон функционирования может быть реализован с помощью различных алгоритмов. Процесс функционирования можно рассматривать как последовательную смену состояний. анализа функционирования отдельных свойств. Совокупность всех возможных значений состояний системы называют пространством состояний системы-.

Внешняя среда- множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием. Внешняя среда определяет условия функционирования системы посредством воздействия внешних факторов, являющихся движущей силой процесса и определяющих характеристики этого процесса. В зависимости от цели внешние факторы могут быть стимулирующими, регулируемыми, ограничивающими, возмущающими и разрушающими.

Стимулирующие факторы стимулируют развитие процесса, например, подача углекислого газа (внешний фактор) в теплицу (систему) приводит к ускорению созревания растений.

Регулирующие, управляющие факторы приводят к изменению целей, режимов и алгоритмов функционирования системы.

Ограничивающими факторами являются различные нормативно-правовые акты, законы, нормы поведения, технические условия, регламенты и стандарты функционирования технологических процессов и технических систем.

Возмущающие факторы – это отрицательные факторы, негативно влияющие на работу системы, достижение ее цели. Эти факторы можно спрогнозировать и компенсировать.

Разрушающие факторы – это отрицательные факторы, которые сложно спрогнозировать, а значит, и предотвратить. Они приводят к частичному или полному уничтожению системы.

Отношения между элементами системы и системой определяются их иерархией.

Иерархия – это упорядоченная по старшинству совокупность элементов и подсистем, входящих в данную систему, например, завод – цех – участок – линия- аппарат. Смысл термина «иерархия» (или более полно — «организационная иерархия») удобнее всего пояснить на типичном для сельского хозяйства примере:

Уровень	Описание уровня
...	...
$i+1$	Совокупность организмов (стадо, сельскохозяйственная культура)
i	Организм (животное, растение)
$i-1$	Органы
$i-2$	Ткани

i-3	Клетки
i-4	Органеллы
i-4	Макромолекулы.

В иерархической системе объект расчленяется на уровни согласно принципу подчинения низших уровней высшим. Степень декомпозиции будет определяться как спецификой решаемой задачи, так и имеющейся информацией об объекте.

Иерархическая организация, конечно, не является исключительной особенностью сельского хозяйства - такой подход к структурированию приложим к самым разнообразным системам - коммерческим предприятиям, комплектам компьютерных программ, социальному устройству, электронному оборудованию и т. п.

Объекты, принадлежащие каждому структурному уровню, могут рассматриваться и как системы, образованные из подсистем (объекты более низких уровней), и как подсистемы, входящие в состав некоторой системы (объект более высокого уровня).

Для иерархических систем характерны три важных свойства:

1. Каждый уровень иерархии имеет свой собственный язык, свою систему концепций или принципов. К примеру, понятия «производство продуктов животноводства», «урожайность сельскохозяйственной культуры» практически лишены смысла на уровне клетки или органеллы.

2. На каждом уровне иерархии происходит обобщение свойств объектов более низких уровней. Закономерности, обнаруженные и описанные для последних, могут быть включены в объясняющую (функциональную) схему, обретая при этом связь с объектом высшего уровня. Таким образом, описание на уровне i способствует объяснению (пониманию) явлений, имеющих место на уровне $i-1$.

3. Взаимосвязи между уровнями не симметричны. Для нормального функционирования объектов высшего уровня необходимо, чтобы успешно «работали» объекты более низкого уровня, но не наоборот.

Однако главная задача при этом — выбрать компоненты системы таким образом, чтобы каждому из них была присуща относительная автономия, то есть чтобы внутренние связи в пределах каждой подсистемы были сильными, а взаимодействия между подсистемами — слабыми. Обычно решающим оказывается то обстоятельство, что подсистемы, подлежащие рассмотрению, должны быть хорошо изучены и описаны.

ЛЕКЦИЯ 2

Понятие модели и моделирования. Классификация моделей

Научные знания можно разделить на две категории: фундаментальные и прикладные.

Фундаментальные знания описывают наиболее общие законы природы и техники.

Прикладные знания представляют собой разновидность фундаментальных знаний и находят применение при организации производства товаров и в сфере услуг. Какая-то часть этих товаров и услуг используется в процессе исследований, что, в свою очередь, повышает уровень фундаментальных и прикладных знаний.

Для согласования результатов «смежных» исследовательских программ и выработки единого убедительного для практики заключения - хорошим средством оказывается модель.

Модель – материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим адекватное с оригиналом поведение в рамках заданных допущений. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала путем исследования его модели, а не самого объекта. Моделирование оправдано в том случае, когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать.

С моделями и моделированием мы сталкиваемся в нашей жизни каждый день. В детстве ребенка окружают игрушки — машинки, куклы, конструкторы и т. д. - модели, повторяющие отдельные свойства реально существующих предметов. Играя, ребенок получает важные знания о них и, вырастая, начинает грамотно применять уже реальные объекты. В процессе мышления человек оперирует образами объектов окружающего мира, которые являются разновидностями моделей – когнитивными (мысленными) моделями.

Реальная польза от моделирования может быть получена при условии, что модель адекватна оригиналу в том смысле, что должна с достаточной точностью отображать интересующие исследователя характеристики оригинала.

В большинстве случаев моделирование вовсе не заменяет реальный объект и не отменяет необходимости в его разработке и натурном испытании. Оно просто значительно уменьшает объём работ по проектированию и исследованию объектов. В тех же случаях, когда это не так, стоимость моделирования может оказаться вполне сравнимой со стоимостью разработок и натурных испытаний изделий (вспомним тренажерную модель самолета).

Дадим классификацию моделей, отражающую в первую очередь методологические вопросы процедуры построения математических моделей и нахождения их решения с помощью ЭВМ.

Если исходить из целевого направления информационных потоков, циркулирующих между объектами и окружающим миром, модели можно разделить на модели для исследования и модели для управления.

Модели для исследования являются формой организации и представления знаний, средством соединения новых знаний с имеющимися. При расхождении модели с реальностью, это несоответствие ликвидируется путем изменения модели.

Модели для управления являются средством организации практических действий, способом представления эталонных действий или их результата, т.е. являются рабочим представлением целей. Моделей для управления используются для того, чтобы при обнаружении расхождения между моделью и реальным процессом направить усилия на изменение реальности так, чтобы приблизить ее к модели. Они носят нормативный характер, играют роль стандарта, под который подгоняются как сама деятельность, так и ее результат. Примерами моделей управления служат планы и программы, уставы организаций, законы, алгоритмы, рабочие чертежи и шаблоны, параметры отбора, технологические допуски, технические и агротехнологические требования и т.д.

Основное различие между исследовательскими моделями и моделями для управления состоит в том, что модели для исследований отражают существующее, а модели для управления – не существующее, но желаемое и возможно осуществимое.

По форме представления модели делят на физические, символические и смешанные.

Физические модели подразделяются на модели подобия и аналоговые.

Модели подобия характеризуются некоторыми масштабными изменениями, выбираемыми в соответствии с критериями подобия (например, глобус- модель земного шара). Природа процесса и его физическая сущность одинаковы как для модели, так и для исследуемого оригинала.

Аналоговые модели основаны на известных аналогиях между протеканием процессов в механических, тепловых, электрических, пневматических, гидравлических и других динамических системах и предназначены для исследования статических и динамических свойств объекта.

Символические модели характеризуются тем, что параметры реального объекта и отношения между ними представлены символами:

- семантическими (словами),
- математическими,
- логическими.

Класс символических моделей весьма широк. Наряду со словесными описаниями функционирования объектов - сценариями, сюда также относятся схематические модели: чертежи, графики и блок-схемы, логические блок-схемы

(например, алгоритмы программ) и таблицы решений, таблицы и номограммы, а также математические описания — математические модели.

Математическая модель представляет собой набор формальных соотношений, которые отображают поведение исследуемой системы и состоящее из совокупности связанных между собой математическими зависимостями (формулами, уравнениями, неравенствами, логическими условиями) величин -факторов. По своей роли эти факторы целесообразно подразделить на параметры и характеристики (рис.1.2).

Модели функционирования включают широкий спектр символических моделей, например:

модель жизненного цикла системы, описывающая процессы существования системы от зарождения до прекращения функционирования;

модели операций, выполняемых объектом, представляют описание взаимосвязанной совокупности процессов функционирования отдельных элементов объекта. Так, в состав моделей операций могут входить модели надежности, характеризующие выход элементов системы из строя под влиянием эксплуатационных факторов;

информационные модели, отображающие во взаимосвязи источников и потребителей информации, виды информации, характер ее преобразования, а также их временные и количественные характеристики;

процедурные модели, описывающие порядок взаимодействия элементов исследуемого объекта при выполнении различных операций, например обработки материалов, деятельности персонала, использования информации, в том числе и реализации процедур принятия управленческих решений;

временные модели, описывающие процедуру функционирования объекта во времени и распределение ресурса "время" по отдельным компонентам объекта.

Параметрами объекта называются факторы, характеризующие свойства объекта или составляющих его элементов. В процессе исследования объекта ряд параметров может изменяться, поэтому они называются переменными, которые в свою очередь подразделяются на переменные состояния и переменные управления.

Переменные состояния объекта являются функцией переменных управления и воздействий внешней среды.

Характеристиками (выходными характеристиками) называются интересующие исследователя непосредственные конечные результаты функционирования объекта (естественно, что выходные характеристики являются переменными состояниями).

Характеристики внешней среды описывают свойства внешней среды, которые сказываются на процессе и результата функционирования объекта. Значения ряда факторов, определяющие начальное состояние объекта или внешней среды, называются начальными условиями.

При описании математической модели оперируют следующими понятиями:
- критерий оптимальности;

- целевая функция;
- система ограничений;
- уравнение связи;
- решение модели.

Критерием оптимальности называется некоторый показатель, служащий формализацией конкретной цели управления и выражаемый при помощи целевой функции через факторы модели. Критерий оптимальности определяет смысловое содержание целевой функции. В ряде случаев в качестве критерия оптимальности может выступать одна из выходных характеристик объекта.

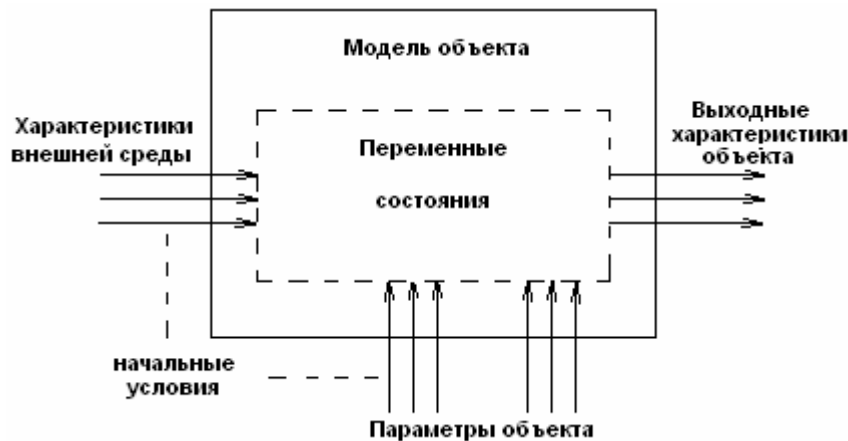


Рис.1.2.
Классификация факторов по их роли в модели.

Целевая функция математически связывает между собой факторы модели, и ее значение определяется значениями этих величин. Содержательный смысл целевой функции придает только критерию оптимальности.

Система ограничения определяет пределы, сужающие область осуществимых, приемлемых или допустимых решений и фиксирующие внешние и внутренние свойства объекта. Ограничения определяют область протекания процесса, пределы изменения параметров и характеристик объекта.

Уравнения связи являются математической формализацией системы ограничений.

Критерии оптимальности и система ограничений определяют концепцию построения будущей математической модели, т.е. концептуальную модель, а их формализация, т.е. целевая функция и уравнения связи, представляет собой математическую модель.

Решением математической модели называется такой набор (совокупность) значений переменных, который удовлетворяет ее уравнениям связи.

Модели, имеющие много решений, называются вариантными в отличие от безвариантных, имеющих одно решение. Среди допустимых решений вариантной модели, как правило, находится одно решение, при котором целевая функция, в зависимости от смысла модели, имеет наибольшее или наименьшее значение. Такое решение, как и соответствующее значение целевой функции, называется оптимальным.

В зависимости от степени формализованности связей между факторами различают аналитические и алгоритмические модели.

Аналитической называется модель в виде уравнений или неравенств, не имеющих разветвлений вычислительного процесса при определении значений любых переменных состояния модели, целевой функции и уравнений связи.

Если в математических моделях единственная целевая функция и ограничения заданы аналитически, то подобные модели относятся к классу моделей математического программирования.

Характер функциональных зависимостей может быть линейным и нелинейным. Соответственно этому математические модели делятся на *линейные и нелинейные*.

В сложной системе зачастую гораздо легче построить ее модель в виде *алгоритма*, показывающего отношения между элементами системы в процессе ее функционирования, задаваемые обычно в виде логических условий - разветвлений хода процесса.

К алгоритмическим моделям относятся и *имитационные модели* – моделирующие алгоритмы, имитирующие поведение элементов изучаемого объекта и взаимодействие между ними в процессе функционирования.

При имитационном моделировании процесс функционирования подсистем, выраженный в виде правил и уравнений, связывающих переменные, имитируется на компьютере. Для имитации используются специальные среды имитационного моделирования, позволяющие строить модели, имитирующие работу моделируемой системы, с любой степенью достоверности без проведения подробных аналитических преобразований.

В зависимости от того, содержит ли математическая модель случайные факторы, она может быть отнесена к классу стохастических или детерминированных.

В *детерминированных* моделях ни целевая функция, ни уравнения связи не содержат случайных факторов. Следовательно, для данного множества входных значений модели на выходе может быть получен только один единственный результат. Главная особенность детерминированной модели заключается в том, что любой прогноз (живая масса животного, урожайность культуры, количество осадков) она формирует в виде числа, а не в виде распределения вероятностей. Это в ряде случаев приемлемо, однако, когда приходится иметь дело с величинами, значение которых предсказать трудно (количество осадков), такой подход оказывается совершенно неудовлетворительным.

Стохастические математические модели имеют факторы с вероятностной природой и характеризуются какими-либо законами распределения. Значения выходных характеристик в таких моделях могут быть предсказаны только в вероятностном смысле. Это даёт возможность оценивать не только среднее значение прогнозируемого параметра, но и его дисперсию.

Следующим признаком, по которому можно различать математические модели, является связь с фактором времени.

Статическая модель — это математическая функция, в которую не включена переменная времени. Все особенности поведения системы, имеющие выраженную зависимость от времени, при этом игнорируют. А поскольку все в

мире быстро ли, медленно ли, но меняется, то любая статическая модель условна. Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи инерционностью и "памятью" реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

- система устойчива, т.е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают;

- входы меняются медленно;

- выходы изменяются редко.

Математическая модель системы называется динамической, если значение ее выхода $y(t)$ может зависеть от времени t протекания процесса, его прошлого s :

$$y(t) = F(\{u(s), s < t\}). \quad (1.1)$$

Динамические модели позволяют учесть наличие "памяти", инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы. Динамические модели, имеющие практическую ценность, обычно строятся на основе дифференциальных уравнений, не поддающихся прямому интегрированию, и решение их нельзя получить в виде простых аналитических выражений. В этом случае прибегают к численным методам решений на компьютере с помощью специального программного обеспечения.

Система может быть дискретной или непрерывной по входам, выходам и по времени. Под дискретным понимается конечное или счетное множество - один, два, три и т.д. Под непрерывным понимается множество - отрезок, луч или прямая линия, т.е. связное числовое множество, количество элементов которого стремится к бесконечности. Как правило, дискретность входа влечет за собой дискретность выхода объекта. Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временем.

Смешанные модели могут содержать как физические, так и символические элементы.

Эмпирические модели описывают связи между параметрами элементов одного уровня. Разработчик эмпирической модели всегда остается в пределах одного единственного уровня организационной иерархии, где он и строит уравнения, связывающие между собой параметры, свойственные подсистеме только данного уровня.

Функциональная модель объясняет связи между элементами как одного уровня иерархии, так и между различными уровнями. Разработчик функциональной модели стремится описать поведение системы с фундаментальных позиций, затрагивающих основу работы объекта, учитывающих наиболее общие закономерности его работы.

Всегда можно построить такую эмпирическую модель, которая была бы согласована с массивом опытных данных лучше, чем функциональная, т.к. эмпирическая модель практически свободна от ограничений, в то время как возможности функциональной модели ограничиваются положенными в ее основу допущениями, идеями и гипотезами.

ПОЛУЧЕНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

ЛЕКЦИЯ 3.

Получение данных

Исследование реального объекта и его математической модели связано с использованием исходной информации, получаемой в процессе непосредственного измерения на объекте. Получение данных осуществляют путем:

- всеобщего контроля;
- выборочного исследования;
- планирования эксперимента.

При всеобщем контроле осуществляют измерения со всех объектов, по всем параметрам на всех временных интервалах. Это предполагает большие материальные и временные затраты на осуществление исследования.

Выборочное исследование – это метод исследования, при котором параметры изучаемого явления, происходящего на объекте, устанавливаются по определенной части этого объекта на основе положений случайного отбора-выборки. Результаты исследования части объекта распространяются на весь объект - генеральную совокупность. В ряде исследований этот метод является единственно возможным, например при контроле качества продукции, проводимом путем уничтожения или разложения на составляющие изучаемого продукта, в государственной и ведомственной статистике, торговле.

Например, зерно, находящееся на хранении, должно проверяться на содержание клейковины. Выборочный метод исследования предполагает, что будет исследоваться не все зерно, а только его часть, например, масса в 1 кг с каждого элеватора, взятой из центральной части емкости в определенные сроки хранения.

Особенность выборочного исследования состоит в том, что выбор единиц для обследования происходит по принципу равных возможностей попадания в выборку каждой единицы исследуемого параметра- считается, что клейковина в массе зерна постоянна для всего элеватора- генеральной совокупности (для одной партии или потока). При распространении результатов выборки на всю генеральную совокупность возникают ошибки, зависящие от разных факторов: степени вариации изучаемого явления, численности выборки, методов отбора единиц для исследования, принятого уровня достоверности результатов. Для снижения ошибки применяют случайные (рандомизированные) выборки.

Рандомизация- это случайный выбор объекта исследования, его уровня или варианта.

Исходные экспериментальные данные с объекта, например для двух величин x и y , формируются в виде таблиц измерений зависимой (выходной) величины y от независимой (входной) величины x , таблица 2.1.

Исходные данные об объекте или его модели могут быть представлены в виде:

- отдельных чисел;
- векторов и матриц чисел;
- временного (динамического) ряда.

При дальнейшей обработке полученный массив данных удобнее представлять в виде матрицы:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где m- число строк матрицы (возможно интерпретировать как число повторностей эксперимента);

n- число столбцов матрицы (возможно интерпретировать как число факторов, переменных).

Аналогично в виде матрицы можно представить и выходные переменные Y. Если матрица имеет один столбец или одну строку, то ее рассматривают как вектор.

Экспертные оценки применяются, когда нет надлежащей теоретической или экспериментальной информации об объекте исследования. Исходя из полученной в результате анализа модели объекта исходной информации, определяются направления, специальности, по которым необходимо привлечь экспертов. В оценке эксперта будут интегрированы его знания, интуиция и опыт, относящиеся к конкретному явлению.

Таблица 2.1. Элементарная форма представления экспериментальных данных (i- номер эксперимента, n- количество экспериментов).

номер эксперимента, i	1	2	...	n
x	x1	x2	...	xn
y	y1	y2	...	yn

Один из методов экспертной оценки- метод Дельфи, состоит в последовательном анкетировании мнений экспертов различных направлений деятельности по интересующим вопросам, основанных на логическом анализе, интуиции и опыте. Метод предполагает использование серии анкет, в каждой из которых содержится информация и мнения, полученные из предыдущих анкет. Степень достоверности экспертизы устанавливается по погрешности, с которой оценка эксперта в итоге подтверждается последующими событиями.

Свертывание векторов (скаляризация). В случаях, когда выходная информация представлена в виде вектора, для упрощения анализа применяют его свертывание. Свертывание позволяет векторный критерий

$$Y[y_1 y_2 \dots y_n] \quad (2.2)$$

заменить на скалярный путем линейного преобразования

$$F_c(y) = \alpha_1*y_1 + \alpha_2*y_2 + \dots + \alpha_n*y_n \rightarrow \max, \quad (2.3)$$

где $\alpha_i > 0$; $\sum \alpha_i = 1$ - весовые коэффициенты, показатели относительной значимости параметров y .

Линейная свертка применяется в случае необходимости иметь один выходной параметр или в случае разных по своей физической природе частных параметров y , с разными шкалами и размерностями.

Планирование эксперимента – это метод исследования, при котором параметры изучаемого явления устанавливаются с помощью специальных планов.

Детерминированные и стохастические исходные данные

Детерминированные экспериментальные данные и построенные на их основе математические модели представляют собой достаточно простые системы уравнений, основанные на известных законах.

Например, расстояние, пройденное телом, движущееся с постоянной скоростью, равно его скорости, умноженное на время движения. В этой модели движения тела известны все условия (постоянная скорость и время), поэтому будет точно спрогнозировано и расстояние.

Детерминированные модели широко применяются для прогнозирования физических и экономических явлений. Для них всегда должны быть известны все входные параметры, неопределенность их идентификации и измерения должна быть сведена к минимуму. Одной ситуации в объекте всегда соответствует вполне определенные входные параметры и выходные величины. Между ними существуют всегда однозначные соотношения.

Детерминированные входные и выходные параметры систем при измерении, счете, считывании, преобразованиях в измерительных системах, подвергаются искажениям, что приводит к ошибкам. Поэтому при моделировании систем с детерминированными данными можно говорить только с учетом этих ошибок. Однако зачастую необходимо провести анализ системы, некоторые факторы которой неизвестны или определяются с большой погрешностью.

Стохастические исходные данные. При проектировании хлебоприемного пункта количество входных разгрузочных устройств зависит от числа поступивших на разгрузку автомобилей, их грузоподъемности, интервала их прихода, качества урожая и многих других факторов, количество которых заранее трудно знать.

При созревании урожая его количество и качество зависит от погодных условий, агротехники, питания растений, которые, каждый по-своему, вполне определенно влияют на результат. Однако существует еще множество не учитываемых факторов, неизвестных исследователю или недоступных ему для измерения и наблюдения, которые по-своему влияют и на качество, и на урожайность.

В этих двух вышеуказанных случаях из-за неопределенности некоторых входных параметров системы ее будущее поведение можно предугадать только

с некоторой вероятностью. На результаты экспериментов или реальных явлений оказывают влияние случайные воздействия, возникающие в процессе измерений, учета, наблюдений и обработки информации. Совокупность внешних возмущений также вызывает разброс результатов. Это усугубляется действием целого ряда

систематических причин - погрешностью приборов измерений или плохо спланированным экспериментом.

Помимо внешних случайных и систематических воздействий разброс измеряемых значений может быть обусловлен также статистической, вероятностной, природой самого наблюдаемого явления, не учётом неизвестных или неподдающихся измерению факторов.

При наблюдении явлений, в эксперименте, разброс значений часто интерпретируется как результат несовершенства методики наблюдений, а отклонение значений от некоего среднего - как погрешность, ошибка измерений. При этом различают случайные и систематические ошибки, связанные соответственно со случайными и систематическими причинами. Таким образом, анализ результатов наблюдений должен базироваться на вероятностных представлениях процесса.

Можно считать, что любая задача прогноза в биологических, технологических, организационных и социально-экономических системах ставится в условиях неопределенности.

При построении моделей реальных явлений необходимо выделить определяющие (главные) факторы. Остальные, незначительные, факторы считаются случайными воздействиями на исследуемое явление. Если такие случайные воздействия действуют на выход модели незначительно, то ими можно пренебречь, а такую модель можно считать детерминированной. Однако часто многочисленные незначительные факторы в совокупности играют заметную роль в явлении и их влиянием на характеристики системы пренебречь нельзя.

Учет влияния неопределенных факторов на характеристики модели возможен, если это влияние обладает устойчивостью, многократной воспроизводимостью, подчиняется вполне определенным закономерностям. Такие неопределенные, непредсказуемые характеристики системы, подчиняющиеся устойчивым закономерностям при многократном воспроизведении, называются случайными величинами. Эти закономерности изучает математическая статистика.

Обработка результатов измерений одной случайной величины

Если случайная величина X может принимать в результате повторяющихся экспериментов дискретные значения x_1, x_2, \dots, x_n , то отношение числа экспериментов m_i , в результате которых случайная величина X приняла значение x_i , к общему числу n произведенных опытов называется относительной частотой m_i/n появления события $X = x_i$. Относительная частота зависит от количества

произведенных опытов и при их увеличении она стремится к некоторой постоянной величине p_i , называемой вероятностью события $X = x_i$:

$$p_i = P(X = x_i) \approx m/n.$$

Если событие достоверно, т.е. обязательно должно произойти, то его вероятность равна единице. Вероятность невозможного события равна нулю. Поэтому вероятность случайного события находится в пределах $0 \leq P \leq 1$. В результате опыта случайная величина обязательно примет одно из своих значений, а общая сумма вероятностей для всего эксперимента

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Эта суммарная вероятность распределена некоторым образом между отдельными значениями x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} &x_1, x_2, \dots, x_n \\ &p_1, p_2, \dots, p_n. \end{aligned}$$

Соотношения, устанавливающие связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется законом распределения *вероятностей случайной величины*.

Распределение непрерывной случайной величины, принимающей любое значение внутри некоторого интервала, нельзя задать с помощью вероятностей отдельных значений. Поэтому для непрерывных случайных величин рассматривается вероятность того, что в результате опыта случайная величина принимает значения меньше некоторого заданного вещественного числа x . Эта вероятность является функцией от x :

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$$

и называется функцией распределения случайной величины.

Для непрерывной случайной величины вводится понятие функции плотности

распределения случайной величины $f(x)$ как производной от функции распределения

$$f(x) = F'(x).$$

Для дискретных случайных величин вводится функция распределения дискретной случайной величины, определяемой соотношением

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i=1}^n p(x_i), \text{ где } x_n < x.$$

Функция распределения в этом случае представляет собой разрывную ступен-чатую зависимость.

Случайные величины часто определяют с помощью следующих числовых характеристик, выражающих особенности случайных величин.

Математическое ожидание m_x случайной величины характеризует центр рассеяния случайной величины и определяется выражениями:

$$m_x = M[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n p^* x_i, & \text{если } X \text{ дискретна;} \\ \end{cases}$$

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) dx, \quad \text{если } X \text{ непрерывна,}$$

где M - символ математического ожидания случайной величины X .

Дисперсия $D_x = \sigma_x^2$ характеризует разброс значений случайной величины относительно ее центра (математического ожидания m_x)

$$D_x = \sigma_x^2 = M[(X - m_x)^2],$$

где M - символ математического ожидания случайной величины $(X - m_x)^2$.

Рассмотрим несколько функций распределения, имеющих важное практическое значение.

Равномерный непрерывный закон распределения на интервале $[a, b]$. В этом случае все значения непрерывной случайной величины равновероятны, функция плотностей вероятности которого равна, рис.2.1.

$$f(x) = 1/(a - b). \quad (2.4)$$

Это распределение широко применяют в теории надежности систем, теории массового обслуживания.

Распределение по закону арккосинуса – закон распределения мгновенных значений синусоиды со случайной фазой, рис.2.2.

$$f(x) = 1/(\pi \sqrt{a^2 - x^2}), \quad (-a < x < a), \quad (2.5)$$

где a - амплитуда гармонических колебаний.

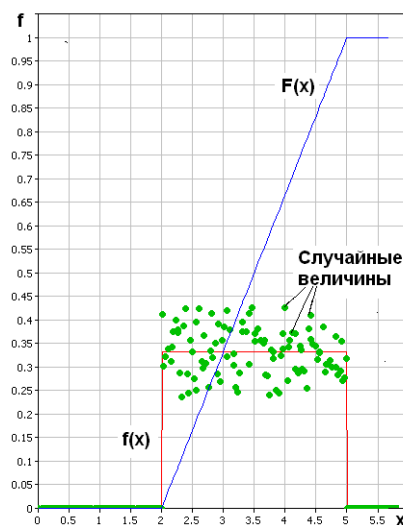


Рис.2.1. Равномерный непрерывный закон распределения случайной величины в интервале $[a, b]$ ($a = 2, b = 5$):
 $f(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины;
 $F(x)$ - функция распределения.

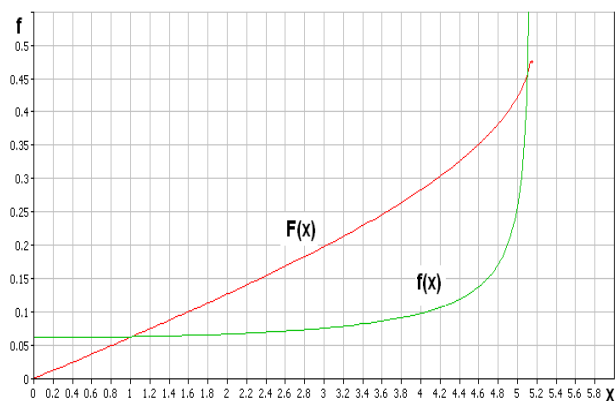


Рис.2.2. Распределение случайной величины по закону арккосинуса: $f(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины; $F(x)$ - функция распределения.

Этот закон может быть применен для случайных величин, изменяющихся по циклическим законам, например, изменение температуры по годам, солнечной радиации и т.д.

Экспоненциальное распределение - закон распределения, имеющий функцию плотности вероятностей, рис.2.3.

$$f(x) = \exp(-x/m)/m \quad (2.6)$$

где m - математическое ожидание случайной величины X .

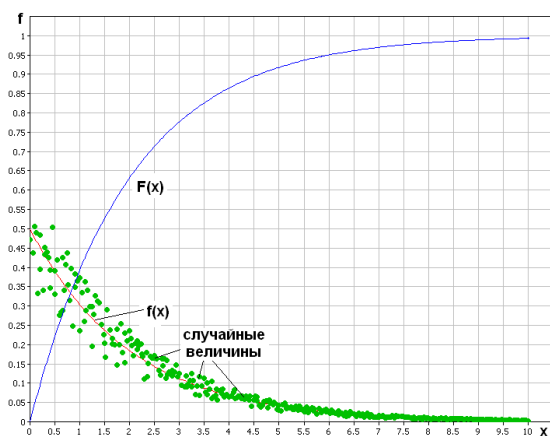


Рис.2.3. Экспоненциальный закон распределения: $f(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины; $F(x)$ - функция распределения.

Распределение Вейбулла – закон распределения, имеющий функцию плотности вероятностей

$$f(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta \cdot x^\alpha), \quad \alpha > 0, \beta > 0, (0 < x < \infty). \quad (2.7)$$

Этот закон используется для аппроксимации распределений случайных величин широкого класса задач, имеющих различные параметры α и β . Внешний вид некоторых распределений закона Вейбулла приведен на рис.2.4.

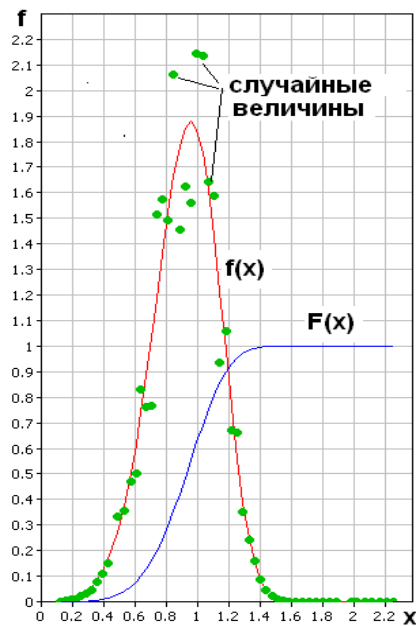


Рис.2.4. Закон распределения Вейбулла: $f(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины; $F(x)$ - функция распределения.

Распределение Гаусса или *нормальный закон* распределения случайной величины, характеризуется плотностью вероятностей, рис.2.5.,

$$f(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) * \exp[-(x-m_1)^2/2*\sigma^2], \quad (2.8)$$

где σ – среднееквадратическое отклонение случайной величины; m_1 – математическое ожидание случайной величины.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[a,b]$ определяется выражением

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) * \int_a^b \exp[-(x-m_1)^2/2*\sigma^2] dx = \\ = 1/2 [\Phi*(b - m_1)/ \sigma\sqrt{2} - \Phi*(a - m_1)/ \sigma\sqrt{2}], \quad (2.9)$$

где $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi}) * \int_0^x \exp[-t^2/2] dt$ - функция Лапласа или интеграл

вероятностей, значения которого протабулированы или имеются в программном обеспечении компьютера; t - табличная случайная величина, табулированная по нормальному закону.

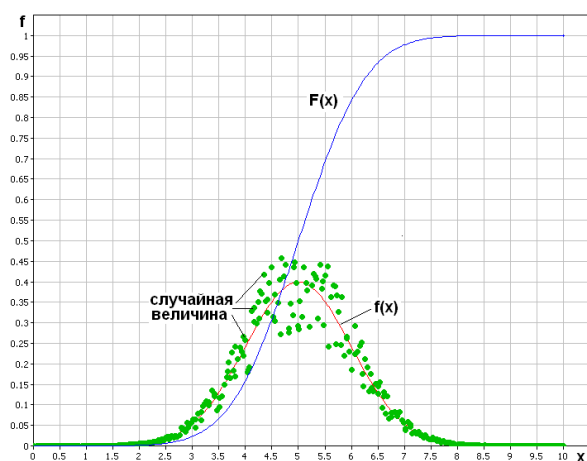


Рис.2.5. Нормальный закон распределения: $f(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины; $F(x)$ - функция распределения.

Распределение, близкое к нормальному, имеют много разных по своей природе случайных величин, например тепловые шумы, размеров и масс зерна, плодов, овощей. Как правило, это распределение является результатом действия на случайную величину множества других случайных величин. Нормальное распределение является следствием центральной предельной теоремы теории вероятностей - закон распределения суммы независимых случайных величин переменных (X_1, X_2, \dots, X_n) , имеющих одинаковые распределения, приближается к гауссовому при неограниченном увеличении числа слагаемых независимо от закона их распределения. Она широко используется для описания и понимания функционирования реальных систем. Для дискретных случайных величин применяют равномерный дискретный закон распределения, согласно которому все значения дискретной случайной величины равновероятны:

$$f(x = k) = 1/m, (1 \leq x \leq m). \quad (2.10)$$

Распределение Пуассона - закон распределения дискретных величин, рис.2.6., определяющий вероятность появления события k раз за время t , если считать, что вероятность наступления события на протяжении интервала Δt пропорциональна этому интервалу, а события в различные моменты времени независимы:

$$f(x = k) = \lambda^k * e^{-\lambda} / k!, 0 \leq x < \infty, \quad (2.11)$$

где $\lambda = n * P$; n - число опытов; P - вероятность появления события в каждом опыте. Закону Пуассона отвечают, например, распределение телефонных вызовов за время t .

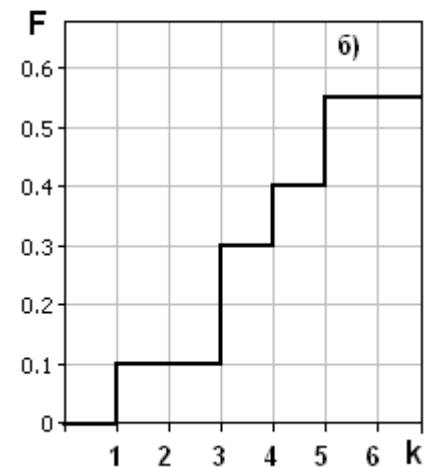
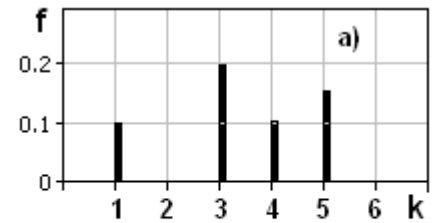
Проверка гипотез о законе распределения характеристик проводится аналогично как для входных случайных величин, так и для выходных. Для этого статистические данные группируются по интервалам таким образом, чтобы эти интервалы покрывали весь диапазон изменения исследуемого фактора y , длины интервалов были равны, а количество данных в каждом интервале - достаточно большим (во всяком случае, не менее пяти). Для каждого интервала $(y_j - y_{j-1})$ подсчитывается число m_j результатов измерений, попавших в этот интервал,

после чего переходят к вычислению относительных частот h_j попадания измеряемого параметра в интервал по формуле

$$h_j = m_j / m; \quad (2.12)$$

$$\text{где } m = \sum_{j=1} m_j .$$

Рис.2.6. Дискретный закон распределения случайной величины по закону Пуассона: а) - плотность распределения вероятностей $f(x)$; б)- функция распределения $F(x)$.



Сельскохозяйственные объекты имеют большую вариабельность параметров, поэтому количество необходимых измерений может быть большим- 30 и более.

Построение полученного экспериментального распределения относительных частот позволяет подобрать на компьютере с помощью пакета статистической обработки информации наиболее близкий к нему по форме теоретический закон распределения, после чего определяются числовые значения параметров аппроксимирующей функции - теоретического закона распределения.

Одновременно проверяется гипотеза о соответствии выбранного теоретического закона распределения и распределения в генеральной совокупности (эксперимент) с помощью критериев согласия, позволяющих на основании доверительных интервалов сделать вывод о ее опровержении или не опровержении.

Из всех критериев согласия наиболее часто применяется критерий χ^2 (критерий Пирсона):

$$\chi^2 = \left(\sum_{j=1}^J (h_j - h_{jp})^2 / h_j \right); \quad (2.13)$$

где h_{jp} — теоретическая частота попадания случайной величины в интервал $(h_j - h_{j-1})$; $j = 1, 2, \dots, J$ — число равных интервалов, на которые разбивается диапазон изменения исследуемой случайной величины.

По соответствующим математико-статистическим таблицам находят или это делает компьютер самостоятельно при данном числе степеней свободы k и доверительной вероятности p критическое значение критерия $\chi^2_{кр}$. Гипотеза о соответствии экспериментального закона распределения теоретическому считается непротиворечивой опыту при условии $\chi^2 < \chi^2_{кр}$.

При использовании критерия χ^2 необходимо, чтобы объем экспериментальных данных был больше 50, а количество их в каждом интервале — более 5. В ряде случаев используются и другие статистические критерии.

Для определения статистической зависимости между исследуемыми величинами и проверки полученной связи используют аппарат однофакторного и многофакторного регрессионного анализа.

В связи с тем, что при проведении экспериментов на компьютере неясно, какая из функций наилучшим образом описывает полученные данные, выбирают несколько таких функций, исходя из предположений о картине протекания исследуемого процесса:

$$\begin{aligned} y &= f_1(x, \check{a}_1), \\ y &= f_2(x, \check{a}_2), \\ &\dots\dots\dots \\ y &= f_S(x, \check{a}_S), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где y — некоторая выходная характеристика модели;

x — вектор входных параметров модели;

f_1, \dots, f_S — различные математические функции, описывающие взаимосвязь выхода y со входами x ;

$\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_S$ — векторы параметров для соответствующих функций.

После нахождения параметров $\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_S$ необходимо оценить качества модели путем получения доверительных оценок параметров и доверительной оценки отклонения теоретической зависимости от экспериментальных данных. Например, для линейной зависимости теоретическую прямую можно записать в виде

$$y = b + \beta^* y/x (x - a), \quad (2.15)$$

где $\beta^* y/x = r * D_y/D_x$; D_y, D_x — дисперсии по x и y ; r — эмпирический коэффициент корреляции.

Значимость эмпирического коэффициента корреляции r проверяется путем сравнения абсолютного значения коэффициента корреляции, умноженного на

$S \sqrt{(m-1)}$ с его критическими значениями $N_{кр}$ при заданной доверительной вероятности p . Если

$$|r| \sqrt{(m-1)} > N_{кр},$$

то случайные величины коррелированы между собой. Критические значения $N_{кр}$

для различного объема статистических измерений и различных доверительных

вероятностей p приведены в соответствующей литературе по математической

статистике.

Доверительными границами для b служат

$$\epsilon_b = \hat{y} \pm t * \sqrt{(m-1) / (m-2)} * \sqrt{(1-r^2)} * D_y / \sqrt{m};$$

а для $\beta^* y/x$:

$$\epsilon_\beta = \beta^* y/x \pm D_y * \sqrt{(1-r^2)} / D_x * \sqrt{(m-2)},$$

где \hat{y} - среднее арифметическое величины y ;

S_y, S_x - эмпирические стандартные отклонения величин y и x ;

$t = f(p, k)$ - значение критерии Стьюдента для заданной доверительной вероятности p и числа степеней свободы $k = m - 2$.

ЛЕКЦИЯ 4

Аппроксимация исходных данных

Аппроксимация исходных данных - способ представления данных в виде той или иной зависимости. Для более эффективного первоначального анализа экспериментальной информации сочетание двух величин представляют на графике в виде точек x_i, y_i (имеет место также и многомерная аппроксимация). Возможны следующие виды аппроксимации:

- *интерполяция*, когда аппроксимирующая функция должна пройти через все экспериментальные точки;
- *регрессия*, когда аппроксимирующая функция усредняет экспериментальные данные, проходит вблизи них;
- *сглаживание с фильтрацией*, когда функция не учитывает выбросы, шумы, случайные данные и артефакты.

При интерполяции через экспериментальные точки проводятся кривые разной степени гладкости, разной степени приближения к данным. При линейной интерполяции аппроксимирующая функция соединяет соседние экспериментальные точки отрезками прямых линий. Интерполяцию осуществляют в функции одной и более переменных.

Кубическая сплайн-интерполяция соединяет несколько соседних экспериментальных точек гладкой кривой, первая и вторая производные которой в каждой точке непрерывны.

Экстраполяция – это интерполяция за пределами заданного интервала экспериментальных точек, предсказание значений по имеющимся данным.

Представление данных в виде временных рядов. Временные ряды, ряды динамики, характеризуют изменение того или иного показателя во времени, временной функции. Временной ряд могут составлять как отдельные числа, так и вектора и матрицы.

В каждом ряду имеется два основных элемента: показатель времени t и соответствующий ему уровень развития изучаемого явления $Y=f(t)$. Основным показателем для получения правильных выводов при анализе рядов динамики является сопоставимость его элементов.

Ряды формируются при обработке результатов наблюдений (аргумент x в таблице 2.1. – время t). Значения одноименных показателей повторяющихся во времени располагаются в хронологической последовательности. Каждый ряд охватывает отдельные периоды времени, в которые могут происходить изменения, приводящие к несопоставимости с данными других периодов. Среди причин, приводящих к несопоставимости, можно назвать следующие:

- ошибки в показаниях интервалов времени;
- неоднородность изучаемого явления во времени, изменения в методиках учета;
- применение различных единиц измерения и т.д.

При изучении временных рядов используют понятие *тренда*.

Тренд - это тенденция изменения выходной величины во времени под действием входных факто-ров, ее усредненное состояние за определенный промежуток времени. Изучение тренда - важное направление в исследовании надежности технических и биологических, социально-экономических, демографических и экологических процессов, осуществляемое путем применения специальных методов анализа временных рядов. Постоянно действующие факторы имеют определяющее значение и формируют тренд. Периодически действующие факторы вызывают повторяющиеся колебания уровней рядов. Действие разовых факторов вызывает случайные изменения уровней рядов динамики.

Аппроксимация данных функциональными зависимостями

Две случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью, если существует такая числовая функция f , что $Y=f(X)$. Если X и Y независимы, то условные законы распределения случайной величины Y по отношению X не меняется в зависимости от X .

При статистической зависимости случайных величин изменение значения одной величины влечет за собой изменение распределения другой. Показателем степени статистической зависимости является корреляционное отношение

$$C_{x/y} = [D(Y/X) / D(Y)]^{0.5}, \quad (2.16)$$

где $D(Y/X)$ - дисперсия выходной величины Y при изменении регулируемой переменной X и постоянных нерегулируемых переменных, $D(Y)$ - полная дисперсия выходной величины Y .

Корреляционное отношение находится в пределах $0 \leq C_{x/y} \leq 1$. Для функциональной зависимости необходимо и достаточно, что бы $C_{x/y}=1$. Чем ближе корреляционное отношение к единице, тем ближе статистическая зависимость к функциональной зависимости и обратно.

Предположим, что в некоторое наблюдение

$$y = F(a_1, a_2, \dots, a_n, x) \quad (2.17.)$$

входят неизвестные параметры a_1, a_2, \dots, a_n . Проведен ряд экспериментов и получено n опытных данных (x_i, y_i) с целью установления значений параметров. Возникает вопрос, как выбрать параметры закона так, чтобы результаты эксперимента соответствовали ему наилучшим образом. Как правило, решение вопроса о подборе параметров основано на методе наименьших квадратов, который в данном случае состоит в нахождении минимума выражения

$$0.5 * \sum_{i=1}^n [F(a_1, a_2, \dots, a_n, x_i, y_i)]^2 \quad (2.18)$$

по всем возможным значениям a_1, a_2, \dots, a_n . Дополнительно могут быть поставлены ограничения на параметры, например на их величину или сочетания.

Более простым методом является метод выбранных точек. На координатную плоскость x y наносят экспериментальные данные и проводят

через них функцию аппроксимации. Далее определяют вид этой функции, например, в соответствии с таблицей элементарных эмпирических зависимостей, табл.2.2. После того как выбран вид функции аппроксимации, осуществляется переход к определению наилучших ее параметров. В данном методе по числу параметров выбранной функции выбирают n точек экспериментальных данных по возможности равномерно расположенные вокруг нее. Параметры a_1, a_2, \dots, a_n определяют из системы алгебраических уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} y_1 &= F(a_1, a_2, \dots, a_n, x_1) \\ y_2 &= F(a_1, a_2, \dots, a_n, x_2) \\ &\dots \dots \dots \quad (2.19) \\ y_n &= F(a_1, a_2, \dots, a_n, x_n). \end{aligned}$$

Рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения аппроксимации можно оценить с помощью остаточной дисперсии (дисперсии адекватности):

$$S_{ад}^2 = S_{ост}^2 = 1/(n - 1) * \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=0}^n a_j * x_i^j)^2, \quad (2.20)$$

где l - число параметров уравнения.

Степень адекватности полученной модели оценивается по критерию Фишера

$$F = S_y^2 / S_{ост}^2, \quad (2.21)$$

где $S_y^2 = 1/(n-1) * \sum_{i=1}^n (y_i - y_{cp})^2$ – дисперсия y относительно среднего значения y_{cp} .

Критерий F показывает, во сколько раз рассеяние y_i относительно среднего значения больше относительного рассеяния вокруг полученного уравнения аппроксимации. Чем больше значение критерия, тем полученное уравнение лучше описывает экспериментальные данные- степень адекватности выше.

Оценка достоверности полученной модели осуществляется сравнением рассчитанной величины критерия F с его табличным значением $F_{кр}$, определенным для заданного уровня значимости α и степеней свободы $\nu_1 = n-1$ и $\nu_2 = n-1$. Уровень значимости $\alpha = 0.88 \dots 0.88$ определяет вероятность, с которой можно считать достоверной принятую аппроксимирующую зависимость при имеющемся числе опытов n и параметров l .

При $F < F_{кр}$ результат аппроксимации считается значимым и найденные параметры принимаются. В противном случае результат не принимается, считается, что данное уравнение не адекватно описывает экспериментальные данные. В этом случае необходимо увеличивать число экспериментов, снижать уровень достоверности (если это возможно) или поменять вид аппроксимирующего уравнения.

Выбор аппроксимирующего уравнения должен производиться с учетом физических законов, определяющих течение процесса, т.е. всегда следует стремиться к функциональной модели. Если из физического смысла переменные связаны линейной зависимостью, то не следует производить аппроксимацию

полиномом второй степени - это приведет лишь к искажению модели, снижению ее адекватности. Следует избегать использования полиномов, зависимостей большого порядка (более 4), так как они описывают более высокие колебания, связанные с ошибками, артефактами или не учитываемыми шумами (неуправляемыми переменными).

Экспоненциальные полиномы. Уравнения этого класса записываются в виде

$$W = \exp(a_0 t^0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots), \quad (2.22)$$

где a_0, a_1, \dots — постоянные коэффициенты.

После логарифмирования выражение (2.22) принимает вид

$$\ln W = a_0 t^0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad (2.23)$$

После вычисления производной от последней функции зависимость (2.22) может быть представлена в виде

$$(1/W) * dW/dt = a_1 + 2a_2 t^1 + 3a_3 t^2 + \dots \quad (2.24)$$

Экспериментальные данные, аппроксимируемые экспоненциальным полиномом, можно обработать на компьютере статистическими методами. В результате будут рассчитаны коэффициенты a_i полиномиального уравнения. В практике обычно ограничиваются 2-ой или 3-ей степенями полинома.

Аллометрические зависимости. Предположим, что P и Q — некоторые свойства организма (наблюдаемые количественные характеристики): например, P и Q могут быть массами различных конечностей животного или P может задавать су-хую массу растения, а Q — площадь поверхности его листьев. Поскольку организм растет и развивается, то и P , и Q будут изменяться с течением времени, то есть

$$P = P(t) \text{ и } Q = Q(t). \quad (2.25)$$

Считается, что P и Q аллометрически зависимы, если они удовлетворяют аллометрическому уравнению

$$P = a * Q^b, \quad (2.26)$$

где a и b — постоянные коэффициенты.

P и Q изменяются во времени таким образом, что соотношение (2.26) сохраняет справедливость на всем интервале наблюдения.

ЛЕКЦИЯ 5

Функции роста

Другим видом функций, широко используемых в демографических, медицинских, агрономических и биологических исследованиях, связанных с ростом, динамикой развития растений, животных, человека и их популяций, являются «*функции роста*», обозначающие некоторую аналитическую функцию зависимости величины W от времени t : $W = f(t)$. Назначение функций роста — связать временные ряды данных, относящихся к росту организма или его части, в рамках единого математического выражения. Предпочтительно построить такую функцию, которая отличалась бы определенным биологическим, технологическим или физическим правдоподобием и интерпретируемостью параметров, то есть отображала бы лежащие в основе изучаемого процесса физиологические или биохимические механизмы и ограничения, т.е. была бы функциональной.

Обычно динамику процесса роста описывают дифференциальным уравнением

$$dW/dt = g(t), \text{ где } g(t) = df/dt \quad (2.27)$$

или, если исключить промежуточные переменные, в виде *темпа роста* - приращения, например, массы или объема в единицу времени

$$dW/dt = h(W), \quad (2.27a)$$

где h - некоторая функция.

Это уравнение есть зависимость темпа роста dW/dt от состояния объекта (растения, животного и т.д.), где в качестве переменной состояния выступает переменная W .

В некоторых случаях используют форму, где в качестве одного из параметров является время

$$dW/dt = u(W,t), \quad (2.28)$$

где u есть некоторая функция от W и t .

Для более полного описания динамики процесса используют относительный темп роста

$$(1/W)*dW/dt, \quad (2.29)$$

показывающий темп роста относительно изменяющейся величины W в данный момент времени.

Для аппроксимации временных рядов роста с целью более наглядного представления и математической обработки применяется полулогарифмическая шкала. В этом случае кривая сложной формы может преобразовать свой вид и утратить свою первоначальную специфику. Рассмотрим принципы создания математических моделей функций роста на нескольких примерах.

Пусть существует изолированная система с двумя компонентами - нет ни входов, ни выходов, рис.2.7.

Первый компонент - субстрат S является источником для второго компонента - сухого вещества W (сушка материала, рост растения) .

Предполагается, что в процессе преобразование первого компонента S в материал второго компонента W потерь нет.

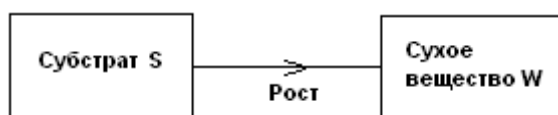


Рис.2.7. Замкнутая двухкомпонентная модель роста.

Различные предположения относительно зависимости скорости процесса (темпа роста) от W и S приводят к различным математическим моделям. Эти уравнения выводятся на основе анализа более простых моделей — обычно путем интегрирования дифференциального уравнения. Такой подход облегчает интерпретацию параметров зависимостей типа «сухая масса — время».

Если допустить, что на рассматриваемом отрезке времени система потерь не имеет- не получает из внешней среды и не теряет никакого материала, то справедливы следующие дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} dW/dt &= - dS/dt; \\ dW/dt + dS/dt &= d(W+S) = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

так что

$$W + S = \text{const} = W_0 + S_0 = W_f + S_f = C, \quad (2.31)$$

где W_0 и S_0 - исходные значения сухого вещества W и субстрата S в момент времени $t = 0$;

W_f и S_f - значения к которым приближаются эти параметры при $t \rightarrow \infty$, в допущении, что система со временем приходит в устойчивое состояние;

C - постоянная величина – это состояние которое приобретает система через определенный промежуток времени- количество субстрата S становится равным нулю и весь он преобразуется в сухое вещество W .

Первое из уравнений (2.60) показывает, что темп роста сухого вещества dW/dt

равен отрицательному темпу роста субстрата $- dS/dt$, а второе - общий темп роста системы равну нулю. В итоге после достаточного промежутка времени весь субст-рат перейдет в сухое вещество, а их суммарное количество не изменится и оста-нется первоначальным.

Темп роста можно представить в виде некоторой функции v , зависящей от текущих значений субстрата и сухого вещества, такой, что

$$dW/dt = v(W, S). \quad (2.32)$$

Из уравнения (2.31) следует, что $S = C - W$, тогда уравнение (2.32) можно записать в виде

$$dW/dt = v(W, C - W) = h(W), \quad (2.33)$$

где h – функция одной переменной W .

Таким образом математической моделью системы, изображенной на рис.2.7. является модель с одной переменной. Остается решить какую функцию v использовать в уравнении (2.63). Выводы по виду функции v будут зависеть от характера процесса, происходящего в системе.

Простой экспоненциальный рост. Для системы на рисунке 2.7. примем некоторые допущения (ограничения, условия):

- темп роста пропорционально количеству сухой массы W ;
- механизм роста «работает» с максимальным темпом на протяжении всего времени, пока существует питательная среда;
- процесс роста необратим и прекращается, как только истощается питательная среда.

Уравнение (2.33) приобретает вид

$$dW/dt = \mu * W, \quad (2.34)$$

где μ - параметр относительного темпа роста.

Параметр μ зависит, во-первых, от вида сухой массы W , соответствующей в заданной пропорции ресурсу питательной среды, и, во-вторых, от производительности или скорости с которой осуществляется процесс роста. Интегрирование уравнения (2.64) дает изменение массы во времени t :

$$W = W_0 * e^{\mu * t}, \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_f; \quad (2.35)$$

$$W = W_f, \quad \text{при } t > t_f.$$

Когда $W = W_f$, а $S = 0$, то из уравнения (2.31) следует

$$W_f = W_0 + S_0 \quad (2.36)$$

и рост внезапно прекращается, когда исчезнет ресурс питательной среды S

$$t_f = \{\ln[W_0 + S_0 / W_0]\} / \mu. \quad (2.37)$$

Простой экспоненциальный рост $W = W_0 * e^{\mu * t}$, без ограничений ресурсом питательной среды S , приведен на рис.2.8.- зависимость $WP=(t)$.

Уравнение роста Ричардса. Рассмотренная выше модель экспоненциального роста является наиболее простой в смысле математического описания процесса. В действительности происходят процессы, описываемые более сложными функциями. Одной из таких функций является функция Ричардса, рис.2.8.

$$dW/dt = k * W * (W_f^n - W^n) / n * W_f^n \quad (2.38)$$

или после интегрирования

$$W = [W_0 * W_f] / [W_0^n + (W_f^n - W_0^n) * e^{-kt}]^{1/n} \quad (2.39)$$

где k, n, W_f - постоянные величины; k, W_f - положительны, а $n \geq -1$.

При $n < -1$ уравнение теряет физический смысл, демонстрируя при $W \rightarrow \infty$

бесконечный рост. При определенных значениях дополнительного параметра n оно обращается в одно из наиболее известных уравнений роста, рис.2.8: $WM(t)$ - мономолекулярное ($n = -1$), $WL(t)$ - логистическое ($n = 1$) и $WG(t)$ - Гомпертца ($n = 0$).

Мономолекулярное уравнение. Это уравнение описывает, например, ход простой необратимой химической реакции первого порядка, рис.2.8..

Принятые допущения:

- количество энергии роста неизменно и не зависит от количества сухой массы W ;

- механизм роста «работает» со скоростью, пропорциональной ресурсу питательной среды S;

- рост необратим.

В данном случае вместо уравнений (2.38, 2.39) имеем

$$dW/dt = k * (W_f - W), \quad (2.40)$$

или после интегрирования

$$W = W_f - W_0 * e^{-k*t}. \quad (2.41)$$

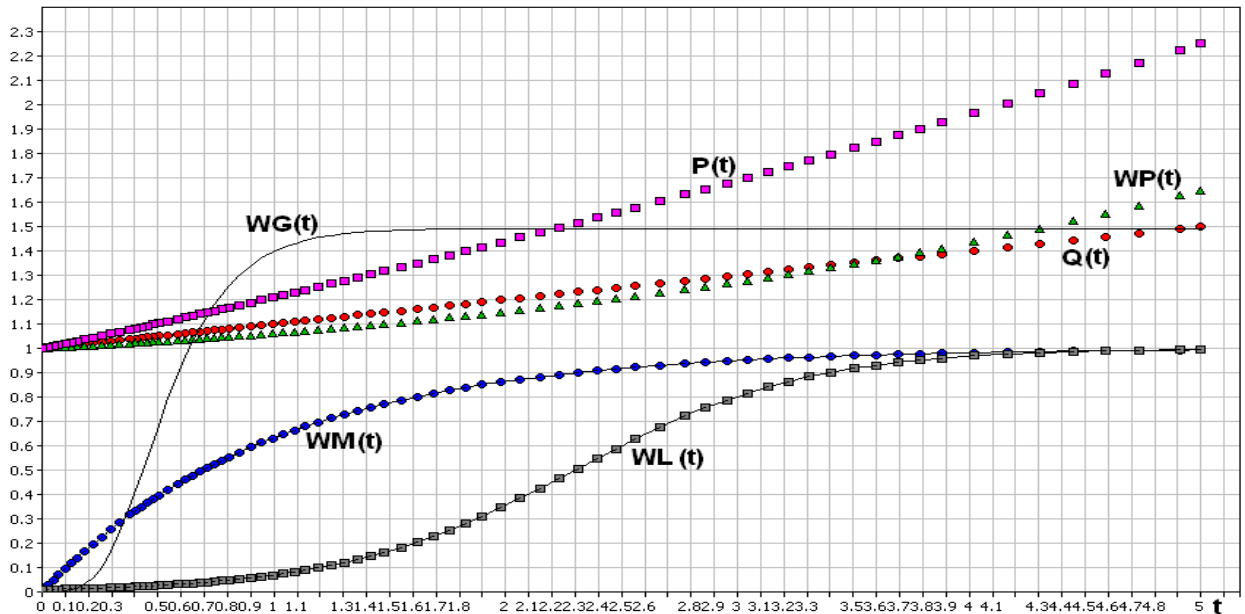


Рис.2.8. Функции роста:

1- WP- экспоненциальная; 2. WM- мономолекулярное (n = -1); 3. WL- логистическое (n = 1); 4. G- Гомпертца (n = 0); 5. Q- аллометрическая 1; 6. P- аллометрическая 2.

Темп роста непрерывно падает, кривая не имеет точки перегиба.

Уравнение логистического роста. При выводе уравнения логистического роста делается двойное допущение:

- энергия роста пропорциональна сухой массе W;

- механизм роста «работает» со скоростью, пропорциональной ресурсу питательной среды S;

- процесс роста необратим.

Уравнение логистического роста имеет вид, рис.2.8.

$$dW/dt = k*W*S, \quad (2.42)$$

или после интегрирования

$$W = [W_0 W_f] / [W_0 + (W_f - W_0) * e^{-k*t}]. \quad (2.43)$$

Анализ любого из двух последних выражений показывает, что при $W_0 \ll W_f$ для малых значений t (подстановка $W_0 = 0$ в знаменатель) справедливо приближенное равенство

$$W = W_0 * e^{-k*t}. \quad (2.44)$$

Функция роста Гомпертца. Уравнение Гомпертца выводят, исходя из следующих допущений, рис.2.8.:

- ресурс питательной среды не ограничен, так что с этой стороны энергия роста влияния не испытывает;

- энергия роста пропорциональна сухой массе W , причем коэффициент пропорциональности есть величина постоянная: эффективность энергии роста падает со временем, причем спад этот представляет собой динамику первого порядка и соответственно носит экспоненциальный характер. Причиной спада может служить деградация (в частности, расщепление ферментов), старение либо развитие и усложнение организма. К уравнению Гомпертца приводят различные комбинации допущений. Формализация перечисленных выше условий приводит к выражению

$$dW/dt = \mu * W, \quad (2.45)$$

где параметр μ , то есть удельный темп роста, уже не является постоянной величиной, а изменяется по закону

$$d\mu = -D * \mu, \quad (2.46)$$

где D — дополнительный параметр, характеризующий уменьшение μ .

Путем преобразований можно получить уравнение Гомпертца в его классической форме

$$dW/dt = \mu_0 * W [1 - D/\mu_0] * \ln[W/W_0], \quad (2.47)$$

где индекс 0 относится к величинам в момент времени $t = 0$.

Алгоритмические (логические) функции

Алгоритмические модели воспроизводят пошаговый процесс численного решения уравнений, представляющих математическую модель исследуемого объекта. Если алгоритмические модели реализуются на компьютерах, то они могут рассматриваться как структурные модели, работающие с цифровой информацией. В данном случае все преобразования информации выполняются одним и тем же структурным элементом – *процессором*. Последовательность решения задается программой, а алгоритмические модели часто называют цифровыми. Следует отметить, что применение компьютеров делает алгоритмические модели наиболее универсальными: например, с их помощью могут быть воспроизведены и модели-аналоги, и структурные математические модели.

Логическая функция – это функция, зависящая от некоторого количества элементов x_i , где каждый из них является двоичной переменной, связанные операторами булевой алгебры, а сама функция принимает двоичное значение. Комбинации значений двоичных переменных называют двоичными наборами. В зависимости от набора логическая функция принимает 0 или 1. При n переменных число двоичных наборов равно $d = 2^n$, а число логических функций равно 2^d . Любую логическую функцию можно представить суперпозицией ограниченного количества базисных логических функций, образующих функционально полную систему. Логические функции обеспечивают работу алгоритмических моделей.

Наиболее распространенными являются следующие элементарные логические функции.

Дизъюнкция (логическое сложение, ИЛИ):

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n, y = 1, \text{ если хотя бы одна из переменных равна } 1 \\ (\text{ИЛИ } x_1 \text{ ИЛИ } x_2 \dots \text{ ИЛИ } x_n, \text{ ИЛИ нескольких переменных}); \\ y = 0, \text{ если все переменные равны } 0. \quad (2.48)$$

Знак + означает операцию логического сложения.

Инверсия (отрицание, НЕ):

$$y = 1, \text{ если } x = 0; (\text{у есть не } x, \text{ инверсия}) \\ y = 0, \text{ если } x = 1. \quad (2.49)$$

Конъюнкция (логическое умножение, И)

$$y = x_1 * x_2 * \dots * x_n = 1, \text{ если все из переменных равны } 1 (\text{И } x_1 \text{ И } x_2 \dots \text{ И } x_n, \\ \text{И нескольких переменных}); \\ y = 0, \text{ если хотя бы одна переменная равна } 0. \quad (2.50)$$

Возможно сочетание элементарных логических функций: И-НЕ; ИЛИ-НЕ, являющиеся отрицанием элементарных логических функций И и ИЛИ. Для записи любой логической функции достаточно двух элементарных функций – инверсии и дизъюнкции или инверсии и конъюнкции, т.е. каждая из этих пар образует полную систему.

Логическая функция может быть задана в виде *таблицы истинности*. С ее помощью можно записать аналитическое выражение, описывающее данную логическую функцию. Такую запись выполняют в виде одной из двух тождественных форм: в *совершенной дизъюнктивной нормальной* форме или *совершенно конъюнктивно нормальной* форме.

В *совершенной дизъюнктивной нормальной* форме каждому набору переменных, при котором функция равна 1, соответствует конъюнкция (логическое умножение) всех переменных, причем все переменные, имеющие в этом наборе значение 0, входят в конъюнкции с отрицанием, а имеющие значение 1- без отрицания. Дизъюнкция указанных конъюнкций является аналитическим выражением, описывающим данную логическую функцию.

Для логической функции, представленной в таблице 2.2., ее выражение в совершенной дизъюнктивной нормальной форме имеет вид:

$$y(x_1, x_2, x_3) = x_1 * x_2 * x_3 + x_1 * x_2 * \bar{x}_3 + x_1 * \bar{x}_2 * x_3 + x_1 * \bar{x}_2 * \bar{x}_3. \quad (2.51)$$

Та же самая функция в совершенно конъюнктивной нормальной форме записывается как конъюнкция (логических сложений), соответствующих всем наборам, при которых логическая функция равна 0. При этом переменные, имеющие в данном наборе значение 1, входят в дизъюнкции с отрицанием, а имеющие значения 0 - без отрицания:

$$y(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) * (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) * (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) * (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3). \quad (2.52)$$

Таблица 2.2. Пример таблицы истинности логической функции у для трех переменных х.

Входные переменные			Функция
x ₁	x ₂	x ₃	у

0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

Набор логических функций может описать ветвления сколь угодно сложного процесса.

ЛЕКЦИЯ 6

Системы уравнений для описания моделей черного ящика

Помимо вышерассмотренных приемов математического представления моделей (функциональные и регрессионные зависимости) большое распространение имеют системы линейных и разностных уравнений.

Общей системой из m уравнений с n неизвестными называется *система алгебраических уравнений*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где a_{ij}, b_j - постоянные коэффициенты.

Систему называют *однородной*, если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. В противном случае систему называют *неоднородной*.

Система называется *совместной*, если существует хотя бы одно решение

$$x_1 = \alpha_1 \dots x_n = \alpha_n,$$

обращающее все уравнения системы в тождества, и *несовместной*, если ни одного такого решения не существует.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если решений - бесконечное множество. Система уравнений может быть представлена в виде матрицы

$$\mathbf{A} * \mathbf{X}' = \mathbf{B}, \quad (2.54)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}; \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \\ x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}; \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{B} = [a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}]. \quad (2.57)$$

Для нахождения коэффициентов системы линейных уравнений (2.54) – необходимо решить матричное уравнение

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \setminus \mathbf{X}'. \quad (2.58)$$

С помощью системы линейных уравнений можно описать некоторые производственные и экономические ситуации, например системы, описываемые в рамках методов линейного программирования- транспортные задачи, составление рационов питания, планирования работ, составления оптимального набора технических средств и т.п., которые будут рассмотрены ниже.

Разностные уравнения. Разностным уравнением называется уравнение, кото-рое связывает между собой значения x_n при различных значениях индекса

n. Если N_1 и N_2 представляют собой наибольший и наименьший из индексов n, встречающихся в записи уравнения, то порядок разностного уравнения есть

$$P = N_1 - N_2,$$

например, $(2x_{n+3})^2 + x_n = 5$ – уравнение третьего порядка.

Предположим, что имеется популяция живых организмов, растущая таким образом, что с увеличением ее численности скорость ее роста также увеличивается. Чтобы выразить это допущение в математической форме, обозначим через x_n размер популяции в конце n-го периода времени. Тогда величина $x_{n+1} - x_n$ выражает прирост за следующий период времени, т.е. скорость, темп, в единицу времени в (n+1)-ом интервале времени. Эта величина пропорциональна x_n . Если величину пропорциональности обозначить через a, то получим

$$x_{n+1} - x_n = a * x_n$$

или

$$x_{n+1} = (1+a) * x_n. \quad (2.59)$$

Чтобы решить это уравнение, мы должны знать начальный размер популяции x_0 . Тогда можно последовательно вычислить численность в разные моменты времени

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + a) * x_0, \\ x_2 &= (1 + a) * x_1 = (1 + a)^2 * x_0, \\ x_3 &= (1 + a) * x_2 = (1 + a)^3 * x_0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Если постоянная $a > 0$, то с ростом n численность популяции неограниченно растет, если $a < 0$, то падает. При $a = 0$ численность остается на постоянном уровне. При значении $a < -1$ численность становится отрицательной.

Общий вид линейного разностного уравнения второго порядка

$$a(n) * x_{n+2} + b(n) * x_{n+1} + c(n) * x_n = d(n), \quad (2.61)$$

где $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ - заданные по эксперименту или наблюдению функции.

Если $d(n) = 0$, то уравнение называют однородным. Если $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ постоянны для всех n, то уравнение (2.61) называют разностным уравнением с постоянными коэффициентами.

Если на процесс влияют какие-либо внешние факторы, например, конкуренция, противодействия, недостаток ресурсов и. д., то описать данную систему можно с помощью системы разностных уравнений первого порядка, имеющую вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{11} * x_n + a_{12} * y_n + f(n), \\ y_{n+1} &= a_{21} * x_n + a_{22} * y_n + g(n), \end{aligned} \quad (2.62)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} – постоянные коэффициенты; $f(n)$, $g(n)$ – заданные функции; x_n , y_n - искомые функции.

Систему (2.62) можно представить как модель взаимодействия двух агентов (видов, фирм, противников), конкурирующих за одни и те же ресурсы. Когда оба агента конкурируют за одни и те же ресурсы, это моделируется с помощью отрицательных коэффициентов $a_{11}a_{21}$. Если, например, коэффициент a_{11} отрицателен, то агент вида 1 будет убывать с ростом агента вида 2.

Для описания более сложных моделей, более сложных взаимодействий агентов друг с другом и внешней средой, применяют дифференциальные уравнения. Предположения, приводящие к этим уравнениям, состоят в том, что скорость роста агента на единицу численности агента $x(t)$ равна постоянной величине a

$$[1/x(t)] * dx(t)/dt = a. \quad (2.63)$$

Или в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$dx(t)/d(t) = a * x(t). \quad (2.64)$$

Скорость роста может быть непостоянной величиной. Тогда мы приходим к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$dx(t)/d(t) = g(x, t). \quad (2.65)$$

где $g(x, t)$ - заданная функция.

Интерпретация этого уравнения может быть следующей - скорость роста агента является некоторой функцией времени и его численности.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка описывают колебательные процессы, происходящие в системах

$$a(t) * x''(t) + b(t) * x'(t) + c(t) * x(t) = f(t), \quad (2.66)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ - заданные функции, причем $a(t)$ не обращается в нуль ни при каких значениях t .

Колебательные процессы характерны для многих процессов в биологии, экономики, техники, обусловленные суточными, месячными или годовыми циклами.

Системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} dy'_1/dt &= a_{m1}y_1(t) + a_{m2}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t), \\ dy'_2/dt &= a_{m1}y_1(t) + a_{m2}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t), \\ dy'_n/dt &= a_{m1}y_1(t) + a_{m2}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где a_{ij} - постоянные коэффициенты.

Решить систему (2.67) значит найти функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$, которые удовлетворяют всем ее уравнениям.

Аппроксимация данных регрессионными зависимостями

Стохастическая зависимость, при которой с изменением одной величины изменяется среднее значение другой, называется *корреляционной* и выражается *функцией регрессии*, устанавливающей связь между случайной переменной x и условной средней выхода объекта или модели $m_y = f(x)$. Регрессионная зависимость в отличие от функциональной имеет корреляционное отношение меньше 1. Для отсутствия регрессионной зависимости Y от X необходимо и достаточно, чтобы корреляционное отношение $C_{x/y} = 0$. Функции регрессии создают кривые или поверхности с минимальным отклонением от экспериментальных данных.

В зависимости от числа переменных x функция регрессии может быть *простой* (связь между двумя переменными) и *множественной* $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, *линейной и нелинейной*.

Построение функции регрессии начинается с выяснения основных контролируемых независимых переменных – факторов x_1, x_2, \dots, x_k , определяющих внешние воздействия на объект. Совокупность этих факторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ образует факторное пространство размерностью k . Задачей регрессионного анализа является установление связей между зависимой случайной величиной (откликом) y и переменными x .

В общем виде такую связь можно описать с помощью линейной комбинации некоторых линейно независимых базисных функций от факторов $\{X_j(x)_{j=0,1,2,\dots,m}\} = \{1, X_j(x)_{j=1,\dots,m}\}$ с неизвестными коэффициентами $\{\alpha_j\}$ - уравнением множественной регрессии:

$$Y(x, \alpha) = \sum_{j=0}^m \alpha_j X_j(x) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j X_j(x). \quad (2.68)$$

При этом заданные базисные функции

$$X_j(x) \equiv X_j(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (j=1, \dots, m)$$

могут рассматриваться как новые контролируемые (детерминированные) переменные. Эти функции образуют полный набор новых переменных, из которых формируется уравнение (модель) регрессии. Этот набор может включать в себя любые функции, такие как полиномы, парные произведения, логарифмы, обратную и степенную функцию, тригонометрические и т.п. В практической деятельности используют следующие обозначения линейной множественной (многофакторной) регрессии:

- линейная множественная регрессия

$$Y(x, \alpha) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j * X_j(x) \quad (2.69)$$

или в матричной форме

$$Y(\alpha) = X * \alpha; \quad (2.70)$$

- отклик y – зависимая случайная переменная (y_i – наблюдаемые значения), i - порядковый номер индивидуального наблюдения:

$$(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}), \quad i = 1, \dots, N,$$

N - число наблюдений, повторность опыта;

- контролируемые, детерминированные) переменные, факторы x_1, x_2, \dots, x_k .

- параметры $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$;

- базисные функции

$$X_j(x) \equiv X_j(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (j = 1, \dots, m).$$

Рассмотрим некоторые, наиболее часто встречающиеся, частные примеры линейной регрессии.

Линейные модели первого порядка:

1) Если $m = 1, k = 1, X_1(x) = x$, то получаем линейную модель первого порядка с одним фактором (одна входная переменная x в первой степени):

$$Y(\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 * x; \quad (2.71)$$

Пример регрессионной линейной модели первого порядка приведен на рис.2.9.

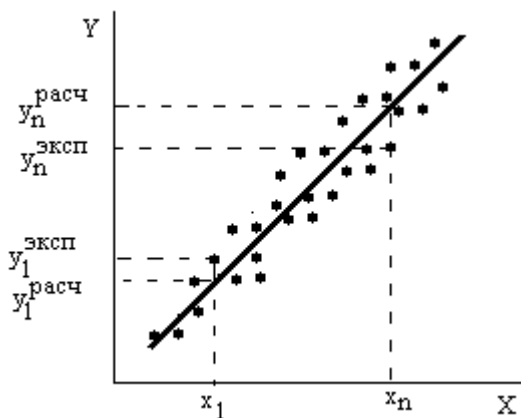


Рис.2.9. Регрессионная линейная модель первого порядка: α_0 – постоянный коэффициент; α_1 – коэффициент при переменной x ; x_1, x_n – входные экспериментальные переменные; $y_1^{\text{эксп}}, y_n^{\text{эксп}}$ – выходные экспериментальные данные; $y_1^{\text{расч}}, y_n^{\text{расч}}$ – выходные данные полученные по уравнению регрессии.

2) Если $m = k$, $X_j(x) = x_j$, то получаем линейную модель первого порядка с k входными переменными:

$$Y(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \alpha_0 + \alpha_1 * x_1 + \dots + \alpha_k * x_k; \quad (2.72)$$

Линейные модели второго порядка:

1) Если $m = 2$, $k = 1$, $X_1(x) = x$, $X_2(x) = x^2$, $\alpha_2 \equiv \alpha_{11}$, то имеем линейную модель второго порядка с одной входной переменной x :

$$Y(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \alpha_0 + \alpha_1 * x_1 + \dots + \alpha_{11} * x^2; \quad (2.73)$$

1) Если $m = 5$, $k = 2$, $X_1(x) = x$, $X_2(x) = x^2$, $X_3(x) = x_1^2$, $X_4(x) = x_2^2$, $X_5(x) = x_1 * x_2$, $\alpha_1 \equiv \alpha_{11}$, $\alpha_4 \equiv \alpha_{22}$, $\alpha_5 \equiv \alpha_{12}$, то получается линейная модель второго порядка с двумя входными переменными x_1 и x_2 :

$$Y(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \alpha_0 + \alpha_1 * x_1 + \alpha_2 * x_2 + \alpha_{11} * x_1^2 + \dots + \alpha_{22} * x_2^2 + \alpha_{12} * x_1 * x_2. \quad (2.74)$$

Регрессионные модели с большим количеством входных переменных и более высокого порядка имеют аналогичный вид. Регрессионные модели получают путем решения системы линейных уравнений на компьютере. При представлении линейной модели множественной регрессии в матричной форме необходимо составить:

1) Матрицу \mathbf{X} базисных функций $\{X_j(x)\}$ размером $(N \times m + 1)$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{m1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \dots & X_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{1N} & X_{2N} & \dots & X_{mN} \end{bmatrix} = [X_{ij}], \quad (2.75)$$

где $j = 0, 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, N$, при этом

$$X_{ji} = X_j(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}) \equiv X_j(x_i), \quad j = 1, \dots, m$$

соответствует i - ому наблюдению $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})$, $i = 1, \dots, N$ (N - полное число наблюдений, включая повторности);

2) Вектор \mathbf{a} параметров α_j ($j = 0, 1, \dots, m$) размерностью $(m + 1) \times 1$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}; \quad (2.76)$$

2) Вектор Y наблюдений $\{y_i\}$ $i = 1, \dots, N$ размерностью $(N \times 1)$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

причем данные индивидуальных наблюдений включают N результатов $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}) \equiv (y_i, x_i)$, ($i = 1, \dots, N$), часть из них - повторные, у которых должны совпадать все входные переменные (x_1, x_2, \dots, x_k) .

Для расчета уравнений регрессии необходимо иметь также матрицу дисперсий вектора Y и осуществить центрирование данных. Обычно эти операции заложены в программу расчета регрессии. Решение уравнения регрессии – это решение матричного уравнения типа

$$Y = \alpha * X; \quad (2.78)$$

относительно α

$$\alpha = Y \setminus X, \quad (2.79)$$

где “ \setminus ” - символ деления матриц.

Регрессионные модели не привязаны к физической сущности функционирования объекта исследования, а поэтому размерности могут учитываться только со стороны входа и выхода.

ЛЕКЦИЯ 7

Принципы выбора структуры модели

Первейшим из принципов выбора структуры модели является принцип простоты: из различных вариантов структуры модели сначала следует попробовать *простейший*. Например, если исследуется сложная динамическая (инерционная) система, то сначала нужно проверить, нельзя ли ограничиться статической моделью, не учитывающей динамику.

При уточнении структуры статической модели руководствуются тем же принципом простоты. Например, если зависимость выхода от входа монотонна, то сначала пробуют *линейную*. Если зависимость выхода от входа носит экстремальный характер, то берут *квадратичную* функцию, а если есть основания думать, что зависимость выхода от входа имеет *перегиб*, то начинают с *кубической* функции.

Если построение модели выполняется с целью *оптимизации*, то вдали от экстремума можно ограничиться *линейной моделью*, а при приближении к экстремуму переходить на квадратичную. В любом случае предпочтительнее модели, в которые постоянные коэффициенты входят линейно.

Если точность моделей с постоянными коэффициентами недостаточна, то в модель вводят зависимость коэффициентов от времени (дрейф). Дрейф может быть монотонным или периодическим, причем в большинстве случаев достаточно ограничиться простейшими моделями дрейфа - линейными или гармоническими.

Если возникает дилемма: выбрать модель детерминированную или стохастическую, то предпочтение следует отдать *детерминированной*. И только если не удастся обойтись без случайности, то вводят ее, причем сначала в наиболее простой форме.

В соответствии с принципом простоты при выборе модели следует начинать с наименьших значений порядка, учитывая, что многие классы динамических процессов описываются моделями первого-второго порядков.

Чем больше модель (размер ее определяется числом описываемых подсистем), тем пристрастнее к ней следует относиться. Модель, которая была бы просто большой и сложной, построить легче. Однако при весьма высокой стоимости ценность ее может оказаться сомнительной как для ученых (если не возникает новых углов зрения на проблему), так и для практиков (если не удастся получить точные прогнозы, используемые для принятия решений).

Перечисленные правила следует принимать не как законы, а как рекомендации. В мире моделей царствует плюрализм, и для достижения успеха нужно испытать несколько вариантов моделей. При этом самая полная модель не обязательно самая точная, а самая точная не обязательно самая хорошая.

Процедура построения математической модели и ее исследования

Процедуру построения модели можно представить состоящей из ряда этапов, хотя в конкретных случаях некоторые этапы могут опускаться, а ряд работ по построению модели вестись параллельно.

Этап 1. Разработка концептуальной модели, являющейся содержательной основой для построения математической модели объекта.

Под *концептуальной моделью объекта* понимается совокупность качественных зависимостей критериев оптимальности и различного рода ограничений от факторов, существенных для отражения функционирования объекта. Концептуальная модель отражает следующие основные моменты:

- условия функционирования объекта, определяемые характером взаимодействий между объектом и его окружением, между элементами объекта;
- цели исследования объекта и направления улучшения его функционирования;
- возможности управления объектом, определяющие состав управляемых переменных объекта.

Этап 2. Построение математической модели. Формируется на основе концептуальной модели. Главная проблема этого этапа - определение количественных, математических соотношений, формализующих качественные зависимости концептуальной модели.

Этап 3. Трансляция модели – это ее запись на языке программирования, как правило, на одном из языков высокого уровня, в наибольшей степени приспособленном для программирования моделирующих алгоритмов: Paskal, Java, Fortran и др.

Этап 4. Численное представление математической модели. Для реализации математической модели на компьютере она должна быть представлена численно, т.е. заданы числовые значения констант, диапазоны изменения неопределенных факторов и управляемых переменных, законы распределения случайных величин.

При этом зачастую возникают проблемы эффективного представления чисел, например сжатия табличной информации методами интерполяции, аппроксимации и экстраполяции, обработки статистических данных для получения формы и характеристик законов распределения случайных величин.

Этап 5. Оценка адекватности модели по отношению к концептуальной модели.

Этап 6. Оценка точности полученного на модели результата.

Этап 7. Исследование математической модели. Начинается с ее анализа и выбора соответствующего метода ее решения. Важным этапом исследования модели является *экспериментирование* - собственно процесс исследования модели по заданному плану. Ввод данных осуществляется или по определенному сценарию, осуществляемому планом эксперимента, или вручную после каждого частного эксперимента.

Этап 8. Интерпретация осуществляется после получения очередного прогона или полного окончания эксперимента. На этом этапе возвращаются к оценке адекватности модели и, в случае ее удовлетворительного решения, делают общие выводы по всему эксперименту. Интерпретация производится на языке, понятном специалисту, заказчику, в терминах, учитывающих специфику исследуемой проблемы.

Этап 9. Реализация предполагает практическое использование модели и (или) результатов моделирования для будущего исследования, управления объектом или его проектирования.

Документирование осуществляется в процессе всей разработки модели и ее использования. Для конечного пользователя необходимо предусмотреть удобные шаблоны для ввода и вывода информации в виде таблиц, графиков и рекомендаций по тем или иным ситуациям протекания процесса моделирования и интерпретации результатов моделирования. Для накопления данных и результатов моделирования следует предусмотреть архив по каждому эксперименту и его вариантам.

ЛЕКЦИЯ 8

Обследование объекта, построение сценария его функционирования и концептуальной модели

При формулировке концептуальной модели объекта следует:

- составить упрощенный и в то же время адекватно поставленной цели описания исследуемой ситуации - сценария функционирования объекта;
- сформулировать и уточнить цели, стоящие перед объектом при его функционировании;
- формализовать цели в критерии оптимальности;
- формализовать внешние и внутренние ограничения;
- выбрать факторы, описывающие объект и его окружение, которые учтены в исследовании и соответственно включены в математическую модель;
- классифицировать факторы и выделить из них в первую очередь управляемые переменные.

Заключительным шагом построения концептуальной модели является оценка ее адекватности исследуемой ситуации.

Обычно исследование объекта начинается с описания проблемной ситуации в весьма нечетких формулировках. Он описывается некоторыми характеристиками, ситуациями, поведением в виде перечня "симптомов", на основании которых исследователь должен поставить "диагноз" - определить задачу исследования.

Цель исследования определяет цель построения модели. Модели могут строиться для следующих целей:

1. *Выявление функциональных соотношений* — определение количественных зависимостей между входными факторами модели, выходными характеристиками исследуемого объекта. Подобного рода модели по своему характеру являются описательными. Задача выявления функциональных соотношений присутствует при построении математических моделей любых типов.

2. *Анализ чувствительности* - установление из большого числа факторов тех, которые в большей степени влияют на интересующие исследователя выходные характеристики. При анализе чувствительности должна обязательно предусматриваться возможность варьирования интересующие исследователя факторов:

- характеристиками внешней среды;
- начальных условий;
- переменных управления.

3. *Прогноз* — оценка поведения объекта при некотором предполагаемом сочетании внешних условий. Обычно задачи прогноза являются динамическими относительно входов, и в качестве независимой (неуправляемой) переменной в них выступает время. Модели прогноза являются описательными.

4. *Оценка* - определение, насколько хорошо исследуемый объект будет соответствовать некоторым критериям. Модели оценки включают расчеты

интересующих исследователя интегральных характеристик - критериев, формализующих цели исследования.

4. *Оптимизация* - точное определение такого сочетания переменных управления, при котором обеспечивается экстремальное (максимальное или минимальное, в зависимости от смысла критерия оптимальности) значение целевой функции. Для этого используют специальный блок оптимизации, позволяющий целенаправленно выбирать каждый из множества альтернативных вариантов.

Любое исследование должно начинаться с *плана*, показывающего как оно будет проводиться, какие методы и в какой последовательности будут выполняться работы. При этом обязательно выполнение двух этапов: выявления фактического положения и анализа.

Первый этап- выявление *фактического положения* тесно связан со сбором информации по определению природы и целевого назначения объекта.

Второй этап- *анализ* - связан с осмыслением совокупности факторов с целью выявления структуры объекта и взаимодействия его элементов в процессе функционирования. Именно в результате анализа строится сценарий функционирования объекта и определяется концепция будущей математической модели.

Исходная информация, вручаемая исследователю при получении задания, как правило, недостаточна для точной формулировки задачи и построения модели.

Источниками дополнительного получения информации являются:

- документы, в том числе управленческая, научная и техническая документация, должностные инструкции и положения, приказы и т.д.;
- управленческо-административный персонал, путем бесед и анкетирования, с которым устанавливаются и уточняются необходимые функции и организационные связи в системе;
- производственный персонал в цехах и подразделениях;
- непосредственные измерения и наблюдения за процессом функционирования и фиксация количественных характеристик при проведении натурного эксперимента на реально существующей аппаратуре и оборудовании.

В случае вновь проектируемых объектов для представления процесса их функционирования используют накопленный опыт и результаты наблюдения над процессами функционирования аналогичных систем с учетом особенностей объекта.

Результаты обследования объекта и окружения оформляются в виде описания процесса функционирования объекта - *сценария*. Содержательное описание в словесном выражении даёт картину функционирования объекта в целом и его отдельных частей во времени при различных воздействиях окружения, содержит исходную информацию для дальнейшей математической формализации задачи.

Рекомендуемые этапы построения сценария процесса функционирования объекта приведены ниже.

Этап 1.

При анализе собранной информации и построения сценария функционирования объекта в первую очередь строят его концептуальную модель. Для этого прежде всего выявляют границы между объектом и внешней средой и между внешней средой и окружением. Для исследуемой системы (процесса) окружение есть множество всех объектов вне системы, изменение характеристик которых влияет на систему или (и) характеристики которых изменяются вследствие поведения системы. Таким образом, окружение есть учитываемая при исследовании часть внешней среды. Объект взаимодействует с окружением посредством входов и выходов.

Как показано на рис 3.1, основными типами входов являются:

x_1 – информационный вход, управляющий работой объекта или подлежащий переработке объектом;

x_2 - энергетический вход, обеспечивающий развитие объекта или его поддержание на заданном уровне производительности;

x_3 - материальный вход, представляющий собой поток материальных средств, подлежащих переработке объектом либо потребляемых в процессе его функционирования;

x_4 - вход, обеспечивающий объект кадрами.

Возможны другие входы, определяемые объектом. Указанные входы представляют собой организованные входы, их наличие обеспечивается целеустремленной деятельностью людей. Помимо организованных входов есть неорганизованные, как правило затрудняющие деятельность системы входы - возмущения x_v , поступающие из окружения (срывы сроков поставки материалов, несоответствие марки материала и т.п.), которые также могут быть классифицированы по этим четырем типам.

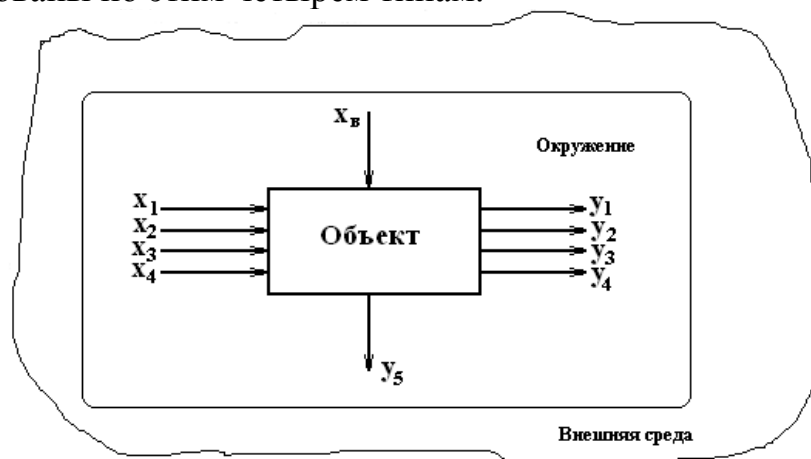


Рис 3.1. Концептуальная модель объекта исследования.

Таким образом, вход исследуемого объекта представляет собой вектор:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_v]. \quad (3.1)$$

Каждый вход может иметь несколько составляющих, так что

$$x_i = (x_{ij}), \quad i = 1, n, \quad j = 1, m, \quad x_{ij} = (x_{ijg}), \quad g = 1, k.;$$

где i — тип входа; j — номенклатура входа; g — источник входа.

Результат деятельности системы - вектор выхода y может быть охарактеризуем аналогичными составляющими:

$$y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_v]; \quad (3.2)$$

где:

y_1 - информационный выход, характеризующий результат информационной деятельности системы;

y_2 - энергетический выход, характеризующий передачу энергии от системы в окружающую среду;

y_3 - материальный выход, характеризующий материальный результат действия системы, а также отходы сырья и материалов;

y_4 - кадровый выход, характеризующий движение кадров;

y_v - возмущение, характеризующее побочные действия объекта на окружение (в свою очередь также может быть подразделен на информационный, энергетический, материальный и кадровый).

Как и для входов, составляющие вектора выхода могут быть представлены в виде:

$$y_i = (x_{ij}); \quad i = 1, h, \quad j = 1, r; \quad x_{ij} = (x_{ijg}); \quad g = 1, s; \quad (3.3)$$

где i — тип входа; j — номенклатура входа; g — источник входа.

Определение необходимого состава факторов, включаемых в исследование, подразумевает перечисление всех факторов, влияющих как положительно, так и отрицательно на результаты работы объекта.

Этап 2.

Одновременно с анализом входных и выходных факторов изучается внутренняя структура объекта, принимаются решения о включении тех или иных элементов изучаемого объекта в состав его будущей модели. При этом физически границы объекта вовсе не обязаны совпадать с границами модели объекта.

Этап 3.

На этом этапе проводится детализация выявленных в структуре модели связей. На основе решений о включении тех или иных элементов в состав модели объекта уточняются и конкретизируются назначение каждого элемента, функции, которые он выполняет в процессе работы всей системы, его входы и выходы - промежуточные параметры, переменные состояния объекта. При этом целесообразно повторить процесс построения концептуальных моделей для каждого из элементов модели внутренней структуры. Тем самым в модели внутренней структуры происходит как бы замещение элемента системы функциями, которые этот элемент выполняет, замещение связей между элементами связями между функциями, конкретизированными в виде переменных состояния. Затем требуется согласовать входы и выходы элементарных моделей между собой и со входами и выходами модели объекта в целом. Таким образом, этап 3 является повторением этапа 1 для каждого из

элементов модели внутренней структуры с обязательным согласованием всего полученного множества входов и выходов.

Этап 4.

Изучение места и роли каждого элемента модели внутренней структуры в процессе функционирования объекта позволяет определить перечень элементарных процессов, происходящих в исследуемом объекте, перечни функций как объекта в целом, так и каждого отдельного элемента.

При выполнении этого этапа пытаются ответить на следующие вопросы:

- для чего предназначен данный элемент, какие функции (элементарные процессы) он выполняет, какого рода потоки (информационные, материальные, и т.п.) он перерабатывает или преобразует?

- для какой функции элементов устанавливается, автономно или совместно с другими элементами реализуется данная функция, а если совместно, то каков порядок взаимодействия элементов?

- взаимосвязаны ли функции элементов между собой по получению того или иного выхода концептуальной модели?

- все ли выходы канонической модели обеспечиваются наборами взаимосвязанных функций?

- совпадают ли функции объекта, вытекающие из ранее построенной концептуальной модели, с функциями, вытекающими из модели внутренней структуры?

В процессе ответов на эти вопросы проводится уточнение и увязка функций элементов объекта.

Этап 5.

Элементарные процессы в единую модель функционирования могут быть увязаны с помощью различных приемов и вызывать необходимость построения системы вспомогательных моделей различного вида (функциональных, информационных, процедурных) и способа представления выходной информации (блок-схемы, диаграммы, временные графики, графы и т.д.). Описание объекта строится последовательно: сначала статическое, а затем, если это необходимо, динамическое представление его функционирования. При этом для компактного и наглядного представления информации чаще всего используются технологические карты и диаграммы.

Численное представление модели

Для подготовки модели к реализации на компьютере необходимо дать ее численное представление, т.е. подставить значения всех числовых констант (детерминированных факторов) модели, различных эмпирических и статистических коэффициентов.

Задание числовых констант при реализации модели на компьютере никаких принципиальных трудностей не представляет. Наибольшие осложнения встречаются при компактном представлении обширной статистической

информации или информации, получаемой в результате специально поставленных экспериментов при решении задачи идентификации.

В связи с этим зависимости, заданные графически или таблично, представляют в аналитической форме, т.е. в виде алгебраических уравнений. Например, вместо таблиц частот для значений случайных величин используются аналитические выражения функции плотности законов распределения. Многие таблицы и графики заменяются интерполяционными полиномами. Такие замены, не влияя существенно на точность математического описания, позволяют сделать математическую модель достаточно удобной для дальнейшего исследования. Основными методами преобразования табличных значений к аналитическому виду являются интерполяция, аппроксимация и экстраполяция.

ЛЕКЦИЯ 9

Проверка и оценивание моделей

Проверка модели. Это непрерывный процесс, который должен сопутствовать всем стадиям моделирования с момента разработки и до окончания эксплуатации модели. Проверка моделей — объективный процесс, результаты которого могут быть как положительными, так и отрицательными. Проверяются формулы, алгоритмы, структура и т.д.

Оценивание модели касается таких аспектов, как *соответствие* (поставленным целям), *правдоподобие*, *адекватность* (объекту), *эlegantность*, *экономичность*, *простота*, *полезность*.

Редкая модель способна объединить в себе все эти качества, к тому же разные специалисты обычно приписывают одному и тому же качеству разную значимость. Окончательная оценка модели может быть получена лишь после того, как выполнена проверка и есть уверенность в методологической корректности принятой формализации.

Проверку и оценивание следует выполнять на каждом из этапов моделирования, причем переход к следующему шагу допустим только в том случае, если результаты контроля можно считать удовлетворительными. Этапы часто перекрываются и бывают взаимозависимы. Разработчику иногда приходится возвращаться к первоосновам и пересматривать то, что прежде казалось ему очевидным.

Проверка структуры модели. Математическая модель способна лишь формализовать представления разработчика о существовании сельскохозяйственных (биологических), экономических, технических или иных процессов. Поэтому она всегда является упрощением действительности. И всегда можно рассматривать модель или как «слишком сложную», или как «слишком простую».

Степень упрощения, которая часто бывает навязана подходом (эмпирическим либо функциональным), должна соответствовать поставленной цели. При всем этом следует позаботиться, чтобы положенные в основу модели предположения были функционально (биологически, технологически, физически и т.д.) оправданы. Объективных методов оценки правдоподобия допущений не существует - все основано на догадке. В идеальном случае такая догадка опирается на глубокое знание предмета, однако чаще всего — на личный опыт и профессиональное мастерство и научную позицию конкретного исследователя.

Структуру модели проверить нельзя, ее можно только оценить (исключение составляет проверка на логическую непротиворечивость).

Главный принцип, которому надо следовать: ошибки неизбежны, поэтому в компьютерных программах моделирования необходимо предусматривать процедуры их обнаружения и исправления.

В любом руководстве по программированию можно встретить рекомендацию: составлять четкие самодокументирующие модульные

программы. Успех чаще всего сопутствует тому, чьи программы всегда понятны любому коллеге и могут быть без труда им использованы. Уместны также и другие правила: точно определять используемые в программе символы, достаточно часто давать необходимые пояснения и т. д.

Там, где это возможно, в программу целесообразно включать проверку логической непротиворечивости модели. Такой контроль способствует выявлению ошибок в программе и в математическом представлении модели. Во время первых прогонов программы имеет смысл выводить на печать все промежуточные результаты вычислений. Если при этом параллельно производить расчеты на калькуляторе (пользуясь исходными зависимостями, а не их программной версией), то путем сопоставления также можно выявить ряд ошибок.

Полезно, кроме того, принять меры, исключая возможность возникновения ошибок интегрирования, связанных с некорректным выбором численного метода либо с назначением слишком большого шага интегрирования. Следует стремиться к тому, чтобы результаты прогонов программы были в разумных пределах устойчивы к вариациям как методов, так и шагов интегрирования.

Очень важно сохранить точность при математическом представлении технических, экономических, сельскохозяйственных или биологических концепций. Это требует, с одной стороны, математической эрудиции, с другой — четкого понимания формализуемых идей. Чтобы избежать ошибки или в крайнем случае быстро ее обнаружить, следует руководствоваться некоторыми простыми правилами, реализуемыми на разных шагах.

Первый шаг — выбор символов. Важность его вытекает из того простого соображения, что формулы несравненно легче читать, понимать и контролировать.

Второй шаг — контроль размерности. Каждый член уравнения должен иметь те же единицы измерения, что и все прочие. Единая система единиц SI — наилучшая база для согласования размерностей всех элементов модели (даже если некоторые единицы измерения не являются традиционными). Такое согласование исключает необходимость в различных коэффициентах пересчета (граммов в килограммы, кубических метров в литры и др.), манипуляции с которыми легко приводят к ошибкам.

Третий шаг — проверка математической корректности и полноты. Число используемых зависимостей должно быть достаточным для описания проблемы, но не избыточным.

Четвертый шаг — проверка осмысленности и полноты на уровне системы в целом.

Если модель тщательно проверена и все математические, вычислительные и методические ошибки устранены, то получаемые прогнозы адекватно отражают всю совокупность допущений, положенных в ее основу. Теперь модель может быть использована в целях, для достижения которых она предназначена.

Обычно в первую очередь проверяют функционирование модели на «качественном» уровне. Если оно оказывается удовлетворительным и если доступны необходимые исходные данные, то можно переходить к процедуре подгонки- процессу оценивания параметров путем согласования их с массивом опытных данных (калибровка модели).

Анализ чувствительности, ранжировка параметров и упрощение модели

Рассмотрим модель с единственным выходным параметром P , который согласован с данными эксперимента путем минимизации суммы квадратов невязок R с ν степенями свободы. Под невязкой понимается разность между действительной величиной и рассчитанной по модели. Дисперсия $D(P)$ при этом определяется как

$$D(P) = R / (\nu * d^2 R / d P^2) \quad (3.4.)$$

Для сравнения влияния различных параметров на результаты моделирования необходима безразмерная величина, то есть величина, не зависящая от абсолютного значения параметра.

Этим требованиям отвечает коэффициент вариации:

$$CV(P) = | D(P) |^{1/2} / P. \quad (3.5)$$

Если модель содержит несколько выходных параметров, то для вычисления вариации любого из них следует воспользоваться уравнением:

$$CV(P_i) = | D(P_i) |^{1/2} / P_i, \quad (3.6)$$

где P_i – i -ый выходной параметр.

Коэффициенты вариации (3.6) можно использовать для ранжирования параметров, поскольку малое значение $CV(P_i)$ показывает, что параметр оказывает значительное влияние при подгонке модели к опытным данным, и наоборот.

Подгонка к различным массивам (данным эксперимента) может дать разные результаты. Коэффициент вариации для статистически значимых параметров биологических объектов лежит в диапазоне от 0,05 до 0,3. Если значение $CV(P_i)$ превышает 0,2, то это может означать, что часть модели, к которой относится параметр P_i , требует критического пересмотра.

Анализ чувствительности с ранжировкой параметров помогает отыскать пути упрощения модели. Один из таких путей заключается в полном исключении из модели параметра, имеющего очень *большое значение коэффициента вариации*. Возможны, однако, ситуации, когда даже при малом влиянии параметра на формируемые прогнозы имеются веские доводы в пользу его сохранения в модели. Поскольку результаты анализа зависят как от конкретных экспериментальных данных, так и от выбранного метода оценки невязок, интерпретировать их следует с известной осторожностью.

Другим направлением исключения неинформативных параметров модели является исключение *коррелирующих параметров*. Если два или более параметров имеют сильную корреляционную связь, то целесообразно часть из

этих факторов убрать и оставить один - наиболее значимый. Для определения значимого параметра используют выражение чувствительности:

$$S(Y, P_i) = (dY/d P_i) (P_i/Y) \approx (\Delta Y/Y) (P_i/\Delta P_i), \quad (3.7)$$

где: Y - выходная величина модели в некоторый момент времени;

ΔY - малое приращение Y вследствие изменения P_i ;

ΔP_i - малое приращение параметра ΔP_i .

Для вычисления $S(Y, P_i)$ обычно бывает достаточным увеличения P_i на 5%. Если $S(Y, P_i) = 1$, то это означает, что данное относительное изменение численного значения параметра P_i приводит к точно такому же относительному изменению численного значения показателя Y . Параметры, для которых $S\{Y, P_i\} > 1$, сильно влияют на выходной показатель, и наоборот.

ЛЕКЦИЯ 10

Принципы оценки адекватности и точности модели

Какой бы сложной и полной ни была модель, она тем не менее является приближенным отображением реального объекта и отражает его при определенных принятых допущениях. Однако до тех пор, пока не доказана адекватность модели реальной обстановке, нельзя с уверенностью утверждать, что с ее помощью получатся те результаты, которые действительно характеризуют функционирование исследуемого объекта. Любые исследования на неадекватной модели теряют смысл.

С ростом адекватности и точности модели возрастают как ее стоимость, так и ценность для исследования, в связи с чем приходится решать вопрос о компромиссе между ее стоимостью и последствиями ошибочных решений из-за ее неадекватности исследуемому процессу.

Поэтому на практике построение модели представляет собой итеративный процесс усовершенствования модели, а следовательно, и исследования объекта до тех пор, пока это считается разумным. Правильность построения модели может быть проверена только на практике за счет повторения цикла "построение модели – проверка модели".

Следует отметить, что понятие адекватности модели не имеет количественного измерения: модель либо адекватна явлению, либо не адекватна (естественно, с точки зрения выносящего суждение — заказчика).

Оценка адекватности модели предполагает проверку:

- полноты учета основных факторов и ограничений, влияющих на работу системы;
- соответствия исходных данных модели реальным (в частности, согласия используемых законов распределения с первичными данными);
- наличия в модели всех данных (таблиц, коэффициентов и т.д.), для работы уравнений, зависимостей и формул;
- правильности алгоритма моделирования, последовательности выполняемых действий;
- правильности преобразования исходных данных в конечные результаты;
- осмысленности результатов, их физическую интерпретации, понимаемости.

Модель является *достоверной*, если ее концептуальная модель адекватна исследуемому процессу, математическая модель адекватна концептуальной, а точность реализации математической модели на компьютере соответствует заданной, т.е. погрешности расчета не превышают допустимых.

После того как концептуальная модель определена и описана, необходимо проверить адекватность ее основных принципов, так как значительно легче вносить изменения на начальных этапах построения модели, чем попытаться изменить замысел на этапе реализации. Решить вопрос об адекватности концепций модели - значит согласиться с основными предпосылками и логикой, которой они связаны между собой.

Основные ошибки при формировании концептуальной модели следующие:

- неправильный выбор критериев или ограничений;
- введение в концептуальную модель несущественных факторов или отсутствие в ней ряда существенных факторов;
- не учет ряда условий функционирования объекта;
- неправильный выбор гипотез, положенных в основу структуры модели (например, по составу элементов объекта, связей между ними в процессе функционирования и т.п.).

Проверка адекватности концептуальной модели является достаточно сложной задачей, так как оценка принципов, положенных в основу модели, является субъективной.

Одним из методов проверки адекватности концептуальной модели является рассмотрение модели специалистами, не участвовавшими в ее разработке (экспертиза модели), так как они могут более объективно рассмотреть задачу и заметить слабые стороны модели, не замеченные авторами. Окончательное решение об адекватности концептуальной модели принимается только заказчиком, который при положительном отзыве концепции одобряет тем самым все положенные в основу модели допущения.

Основные принципиальные ошибки при переходе от концептуальной модели к математической следующие:

- структура математической модели не соответствует структуре концептуальной модели;
- модель включает неверные математические соотношения.

По окончании разработки математической модели до начала программирования необходимая проверка адекватности должна дать ответ на вопрос, насколько используемые уравнения или моделирующий алгоритм отражают концептуальную модель.

Если уравнения получены теоретическим путем, то могут быть проведены *вычисления в нескольких точках* с целью определения приемлемости результатов. Дополнительная проверка уравнений состоит в *анализе размерностей*. Необходимо убедиться, что все единицы измерения применены в соответствии с физическим смыслом, масштабирование и согласование размерностей в уравнениях проведено правильно. Кроме того, обязательными являются проверка преобразования информации от входа к выходу модели, смысловая проверка результатов в условиях, когда факторы модели принимают предельные значения.

Обычно точность реализации математической модели на компьютере рассматривают через совокупность различного рода погрешностей. Если классифицировать погрешности реализации "идеальной" модели на компьютере с точки зрения причин их возникновения, можно выделить четыре их вида, полученные в результате:

- незнания или неточного задания исходных данных;
- упрощения исходной математической модели;

- дискретной реализации математической модели на используемой цифровой вычислительной машине, в том числе ошибки округления;
- ограниченной статистики при выборочной обработке статистической информации или ограниченным числом случайных испытаний модели на компьютере.

Как правило, погрешности моделирования представляют собой сумму систематических (неслучайных) и случайных ошибок.

Суждение об адекватности моделей диктуется решаемой задачей. Очевидно, что "академически" проверить адекватность модели, на которой получен прогноз последствия сильных заморозков на урожай плодов, в деталях невозможно. Моделируемые процессы сложны и мало изучены, число "правдоподобно" оцениваемых параметров очень велико и т.д. Однако поставленной задаче - предупредить о характере и масштабах возможных неприятностях - модель вполне адекватна.

Интегрированная модель управления сложной системой (фирмой, предприятием или отраслью) адекватна своей цели только тогда, когда она позволяет руководству фирмы достигать поставленных целей. Если эта цель - максимизация прибыли, то "адекватное" модельное решение должно описывать текущее состояние системы, ее отношения с внешним миром и возможности получения прибыли.

ЛЕКЦИЯ 11

Планирование модельного эксперимента

Проведение всякого исследования связано с определенными затратами материальных ресурсов, денежных средств, времени. Поэтому возникает естественная задача такого планирования экспериментов, будь то на реальном объекте, экспериментальном стенде, опытной делянке в поле или компьютерной модели, чтобы получить в результате его проведения все необходимые данные при ограниченных или минимальных затратах.

Спланировать эксперимент – это означает дать ответы на вопросы, где, как и когда проводить измерения. На подобные вопросы исследователь часто отвечает руководствуясь своей интуицией и опытом. Однако, такое интуитивное планирование не может гарантировать от возможных ошибок.

Для того, чтобы спланировать эксперимент, имеющий целью изучение реального объекта или его модели, сначала необходимо достаточно четко и ясно сформулировать цель эксперимента, т.е. сформулировать какие именно параметры необходимо исследовать, наблюдать), какие выбрать значения независимых переменных (входных) и зависимых переменных (выходных).

В детерминированных моделях можно выделить определенные процессы, зависящие от небольшого числа переменных, поддающихся изучению. Результаты в этом случае можно представить в виде функциональных связей. В подобных моделях значения всех независимых переменных, кроме одной, можно поддерживать на определенном уровне, а одну переменную, каждую по очереди, варьировать с целью установления ее влияния на интересующую нас выходную величину.

Количество необходимых экспериментов растет с количеством факторов. Например, если каждый фактор варьировать на $m = 5$ уровнях, то для каждого однофакторного эксперимента ($n = 1$) потребуется $k = 5^1 = 5$ экспериментов, для двух факторов ($n = 2$) - $k = 5^2 = 25$ и т. д. Т.е. количество экспериментов равно $k = m^n$.

На реально действующих объектах, а часто и на компьютерных моделях, увеличение количества факторов приводит к большому количеству экспериментов, которое трудно осуществить.

Детерминированные системы в действительности встречаются очень редко. Чаще всего приходится иметь дело со стохастическими моделями систем, в которых действуют многие факторы, плохо поддающиеся полной стабилизации на каком-либо уровне. Как например стабилизировать такой фактор реального производства, как температуру или воздуха в поле? В дополнение еще действуют ошибки от погрешностей измерений, которые даже детерминированные факторы могут сделать случайными.

Поэтому детерминированные модели, как правило, не пригодны и приходится использовать статистические модели и методы исследования. В этом случае экспериментатор сознательно отказывается от детального изучения механизма всех процессов и явлений в объекте и переносит этот принцип на

модель. Суть этих методов сводится к тому, чтобы, изменяя возможно большее количество независимых переменных (факторов), найти оптимальные условия (оптимальное сочетание факторов) протекания изучаемого процесса.

Планирование эксперимента в задачах моделирования состоит в выборе логической структуры искусственного компьютерного эксперимента и позволяет обоснованно проводить выбор значений управляемых параметров для выполнения расчетов на модели.

В планировании экспериментов для описания результирующей характеристики (критерия оптимальности) используют полиномиальные модели регрессии:

$$e = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots \quad (3.5)$$

Пространство, в котором строится функция отклика называют *факторным пространством* (рис. 3.3).

Коэффициенты функции отклика b_0 , b_{ii} , b_{ij} и т.п. можно интерпретировать как значения частных производных в точке, вокруг которой осуществляется разложение в ряд неизвестной целевой функции.

Для поиска оптимума в области определения факторов x выбирают произвольную точку A_1 , (рис. 3.4). В окрестности точки A_1 выделяют малую подобласть, в которой возможно описать функцию отклика полиномом первой степени. В этой подобласти осуществляют небольшую серию экспериментов (точки I), необходимую для построения линейной модели:

$$e = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 \quad (3.6)$$

Коэффициенты регрессии b_i используются для определения направления градиента, следуя которому осуществляют дальнейшие опыты (точки III в окрестности точки A_3). Для каждой новой подобласти вновь определяют направление градиента, по которому следуют в дальнейших опытах до тех пор, пока не достигнут оптимума — области M .

Значения коэффициентов регрессии определяются по формуле

$$b_i = b_0 + \sum_{m=1}^N x_{mi} l_m / N \quad (3.7)$$

где x_{mi} - значение j -го фактора в m -м эксперименте; l_m - значение выходной характеристики в m -м эксперименте; N - общее число экспериментов в подобласти.

Информацию для проведения эксперимента записывают в матрице планирования эксперимента (табл. 3.1), называемой *планом эксперимента*.

Для получения коэффициентов регрессии b_i с высокой точностью и достоверностью к плану эксперимента предъявляется ряд требований, что приводит к формированию значений x_{mi} по специальным правилам. Процедура выбора подобласти проведения эксперимента состоит из двух этапов:

- выбор основного уровня x_{oi} ;
- выбор интервалов варьирования I_i .

Основной уровень — центр подобласти проведения эксперимента - для первого эксперимента осуществляется на базе анализа априорной информации. В дальнейшем его величина определяется направлением градиента и шагом эксперимента.

Интервалом варьирования I_i фактора x_i называется некоторое число, прибавление которого к основному уровню даёт верхний x_{2i} , а вычитание - нижний уровень фактора x_{1i} .

Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по кодированным осям и начало отсчета выбирают так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, а основной - 0. Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется *полным факторным экспериментом*. Так как число уровней каждого фактора равно двум, то в теории планирования экспериментов рассматривается полный факторный эксперимент 2^n . Для двух факторов план эксперимента и геометрическая интерпретация матрицы планирования 2^2 приведены на рис. 3.5.

Таблица 3.1. Матрица планирования эксперимента:

№ опыта	Значение фактора x_1	...	Значение фактора x_i	...	Значение фактора x_n	Значение результата e
1	x_{11}	...	x_{1i}	...	x_{1n}	e_{11}
...
m	x_{m1}		x_{mi}		x_{mn}	e_{lm}
...
N	x_{N1}		x_{Ni}		x_{Nn}	e_{lN}

$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ - входные переменные, факторы; $x_{11}, \dots, x_{mi}, \dots, x_{Nn}$ - уровни факторов; e - отклик модели; $e_{11}, \dots, e_{1m}, \dots, e_{1N}$ - результат моделирования m - го опыта.

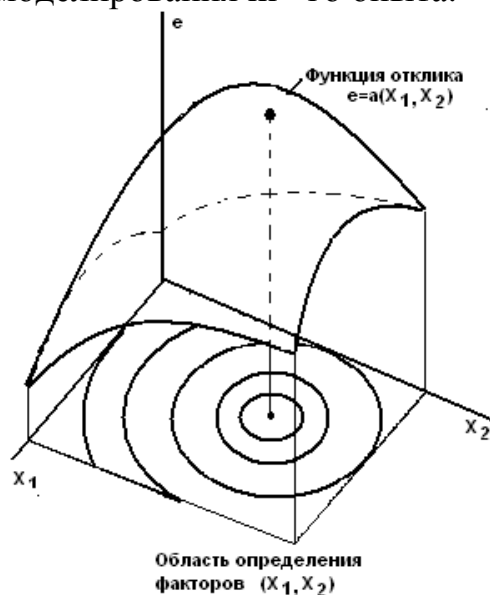


Рис.3.3. Функция отклика и факторное пространство модели.

Полный факторный эксперимент 2^3 будет иметь восемь опытов, а его геометрическая интерпретация представляет собой куб. Матрица полного

факторного эксперимента строится следующим образом: в первом столбце знаки меняются поочередно, во втором - через два, в третьем — через четыре и т.д. по степени 2.

Однако полный факторный эксперимент содержит избыточную информацию для определения коэффициентов регрессии b_i , для расчета которых достаточно провести только часть полного факторного эксперимента- *дробный факторный эксперимент*.

Реализуемая часть полного факторного эксперимента называется дробной репликой. Объем дробного факторного эксперимента определяется из следующих условий:

- число экспериментов должно быть не меньше числа неизвестных коэффициентов в уравнении регрессии;
- число экспериментов должно быть обязательно равно степени числа 3.

Как видно из табл. 3.2, применение дробного факторного эксперимента для случая 15 факторов уменьшает объем расчетов по определению направления градиента в 2048 раз по сравнению с полным факторным экспериментом. Увеличение числа факторов в еще большей степени способствует повышению вычислительной эффективности этого метода.

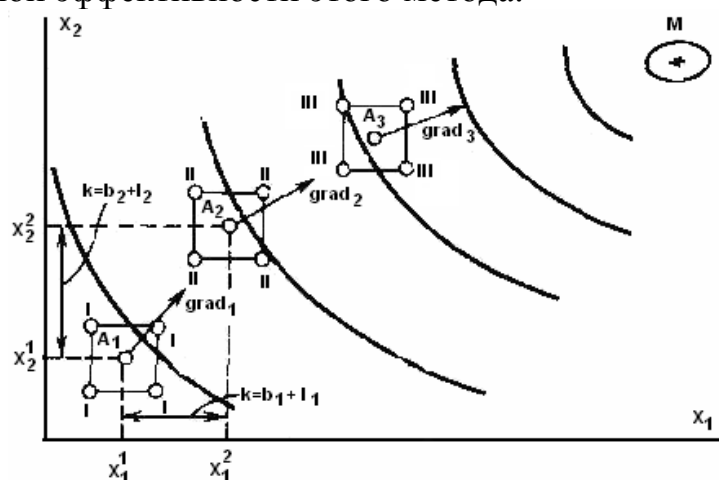


Рис. 3.4. Планирование имитационных экспериментов при оптимизации по градиенту.

Номер опыта	x_1	x_2	e
1	-1	-1	e_1
2	+1	-1	e_2
3	-1	+1	e_3
4	+1	+1	e_4

Рис. 3.5. План эксперимента 2^2 .

Естественно, что далеко не любые эксперименты из плана полного факторного эксперимента могут быть использованы при формировании плана

дробного факторного эксперимента. Совокупность экспериментов в дробной реплике должна удовлетворять следующим свойствам:

1. Симметричность относительно центра эксперимента — алгебраическая сумма экспериментов - столбцов каждого фактора должна быть равна нулю, кроме столбца, отвечающего свободному члену b_0 , т.е.

$$\sum_{m=1}^M x_{mi} = 0, \quad (3.8)$$

где m - номер точки опыта; i - номер фактора; M - число различных точек плана матрицы дробной реплики;

Таблица 3.2. Дробные реплики

Количество факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Количество опытов в с	Количество опытов полного
3	1/2 реплики от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2 реплики от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4 реплики от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 реплики от 2^6	2^{6-3}	3	64
6	1/16 реплики от 2^6	2^{6-4}	8	128
10	1/64 реплики от 2^{10}	2^{10-6}	16	1024
15	1/2048 реплики от 2^{15}	2^{15-11}	16	32668

2. Нормировка - сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу точек матрицы, т.е.

$$\sum_{m=1}^M x_{mi}^2 = M; \quad (3.9)$$

3. Ортогональность - сумма построчных произведений плана матрицы любых двух столбцов равна нулю, т.е.

$$\sum_{m=1}^M x_{im} x_{jm} = 0; \quad (3.10)$$

где j - комбинация факторов в m -ой точке ($i \neq j$).

Ортогональность матрицы позволяет оценить все коэффициенты регрессии независимо друг от друга, т.е. значение любого коэффициента не зависит от того, какие значения имеют другие коэффициенты.

Если план дробной реплики отвечает указанным свойствам, то математическая модель, полученная в результате эксперимента, способна предсказать значения искомого показателя с одинаковой точностью в любых

направлениях на равных расстояниях от центра эксперимента или плана матрицы.

Если значения коэффициентов регрессии b_i близки к нулю, то это означает, что недалеко находится область оптимума. Для отыскания оптимального решения в этом случае необходимо переходить на полиномиальные уравнения более высокого порядка, например, использовать неполный полином второй степени.

Обработка результатов спланированного эксперимента

Выходные данные спланированного эксперимента на модели анализируются для получения выводов о поведении объекта. Этот анализ основывается на доверительных интервалах и установлении зависимости между временем моделирования и точностью оценок.

Перед началом эксперимента трудно знать действительную величину параметра. Мы можем иметь только ее оценку - некоторую приближенную к ней величину. Пусть $a(N)$ будет статистическая оценка параметра a по данным N экспериментов. Наилучшими оценками параметра считаются оценки, удовлетворяющие требованиям *состоятельности, несмещенности и эффективности*.

Оценка называется *состоятельной*, если она при неограниченном увеличении числа опытов сходится по вероятности к искомому значению параметра.

Оценка является *несмещенной*, если ее математическое ожидание при любом конечном N равно истинному ее значению.

Эффективной является оценка с наименьшей дисперсией. Имея оценку и ее дисперсию можно построить *доверительный интервал*. Оценка характеризуется *точностью и надежностью*.

Под *точностью* понимается половина δ длины доверительного интервала, а под *надежностью* - вероятность того, что истинное значение параметра окажется принадлежащим упомянутому интервалу (доверительная вероятность). При прочих равных условиях увеличение требований к точности уменьшает доверительную вероятность, а увеличение доверительной вероятности снижает точность оценок. В практической деятельности моделирования ставится задача определения числа испытаний N , при которых будут обеспечены заданные δ и P .

Пусть необходимо определить среднее величина исследуемой величины \hat{w} при известной ее дисперсии равной σ_w^2 . Для числа наблюдений N разность $(\hat{w} - w)$ будет распределена нормально с дисперсией σ_w^2/N , при этом доверительная вероятность будет равна

$$P \{ |\hat{w} - w| \leq \delta \} = \Phi(\delta N^{0.5} / \sigma_w 2^{0.5}), \quad (3.11)$$

где $\Phi(\cdot)$ - функция Лапласа.

Откуда требуемое число наблюдений

$$N \geq 2 [\Phi^{-1}(P)]^2 (\sigma_w / \delta)^2 = k(P)(\sigma_w / \delta)^2. \quad (3.12)$$

Коэффициент $k(P)$ выбирается из таблицы 3.3. Число испытаний обратно пропорционально квадрату допустимой погрешности и резко возрастает с повышением доверительной вероятности. Доверительный интервал для w равен $\hat{w} \pm \delta$, рис.3.6. Фактический доверительный интервал определяется по заданной вероятности P по формуле:

$$\delta = k(P)^{0.5} \sigma_w / N^{0.5}. \quad (3.13)$$

Таблица 3.3. Коэффициенты $k(P)$ для расчета числа испытаний.

P	0.800	0.85	0.87	0.88	0.88	0.885	0.888
$k(P)$	2.68	3.84	4.71	5.43	6.66	7.80	8.82

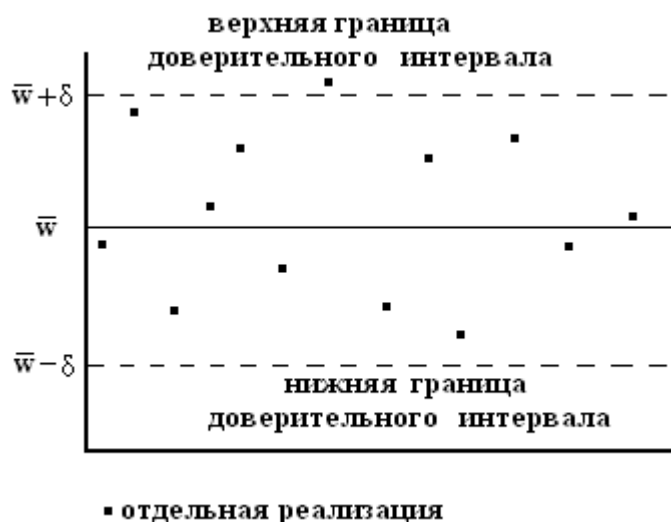


Рис.3.6. Доверительный интервал результатов эксперимента.

Вместо теоретического значения σ_w (он не известен) приходится пользоваться его статистической оценкой. Первоначально производят испытание определенное количество раз и делают оценку σ_w после чего рассчитывают необходимое количество испытаний по формуле 3.12. Вычтя из него количество уже проведенных испытаний, находят необходимое их дополнительное количество.

ЛЕКЦИЯ 12

Основные понятия линейного программирования

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов приходится отыскивать наилучшие – оптимальные, при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза различных ситуаций и систем специальные математические методы, позволяющие оптимизировать решения, принимаемые при управлении, прогнозировании, расчетах и т.д. Одним из таких методов является математическое программирование.

Математическое программирование — область математики, разрабатывающая методы решения многомерных задач на экстремум (минимум или максимум) функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Возможности формализуются в виде системы ограничений. Все это составляет математическую модель. Модель задачи математического программирования включает:

- совокупность неизвестных величин,
- целевую функцию;
- ограничения.

Совокупность неизвестных величин – это те величины, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют планом задачи (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.).

Целевая функция - это функция, экстремальное значение которой нужно найти в условиях технических, технологических или экономических возможностей. Ее называют также показателем эффективности, критерием оптимальности, функцией цели, функционалом задачи и др. Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение.

Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов оборудования, отходы производства и т. д.;

Ограничения - это условия, ограничивающие ресурсы, которыми располагает процесс в любой момент времени. Ограниченными могут быть материальные, финансовые, трудовые и другие ресурсы. Нередко потребности превышают возможности их удовлетворения.

Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует область допустимых решений (область технических, технологических, экономических и других возможностей).

План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется *допустимым*. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется *оптимальным*. Оптимальное решение может быть не

обязательно единственным, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесчисленное множество оптимальных решений.

Одним из разделов математического программирования является *линейное программирование*.

Линейное программирование - раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные.

По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи линейного программирования (ЗЛП).

Формы записи задачи линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования называют задачу нахождения максимума или минимума линейной функции:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m_1) \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=m_1+1, \dots, m_2) \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i=m_2+1, \dots, m) \quad (4.4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1, n_1}), \quad (4.5)$$

где:

x_i, x_j - искомые величины, оптимум которых необходимо найти,

c_j, a_{ij}, b_i - коэффициенты, заданные действительные числа, определяющие

условия использования искомым величин x ;

(4.1) – целевая функция;

(4.2) – (4.5) – ограничения;

i - порядковый номер ограничения; j - номер переменной; n - количество искомым переменных; m - количество ограничений;

$x = (x_1; \dots; x_n)$ - план задачи.

На практике система уравнений 4.1- 4.5 представляется в виде матриц A и векторов коэффициентов c и b , которые будут рассмотрены ниже. Чтобы задача

имела решение, система её ограничений (4.2 - 4.5) должна быть совместной. Это означает, что число уравнений этой системы m не должно быть больше числа неизвестных n . Случай $m > n$ вообще невозможен. При $m = n$ система имеет единственное решение, которое будет при $x_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$) оптимальным. В этом случае проблема выбора оптимального решения теряет смысл.

Если $m < n$, то в этом случае система векторов A_1, A_2, \dots, A_n содержит базис - максимальную линейно независимую подсистему векторов, через которую любой вектор системы может быть выражен как ее линейная комбинация. Каждый из них состоит точно из m векторов. Переменные, соответствующие m векторам базиса, называют базисными. Остальные $n - m$ переменных будут свободными. Базис составляют первые m векторов A_1, A_2, \dots, A_m . Этому базису соответствуют базисные переменные x_1, x_2, \dots, x_m , а свободными будут переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$.

Если свободные переменные приравнять нулю, а базисные переменные при этом примут неотрицательные значения, то полученное частное решение системы будет называться опорным решением (планом).

Нахождение оптимального значения линейной функции с ограничениями осуществляется с помощью симплекс-метода. Общая идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) для решения задачи линейного программирования состоит в:

- нахождении начального опорного плана;
- определении признака оптимальности опорного плана;
- переходе к не худшему опорному плану.

Решение подобной задачи можно осуществить с помощью специального пакета прикладных программ.

Динамическое программирование

Другим методом математического программирования является метод динамического программирования. Это математический метод решения сложных задач оптимизации, заключающийся в разделении исследуемого процесса на этапы (шаги). Этапы могут соответствовать, например, различным периодам времени функционирования системы, отдельным участкам или узлам объекта, различным стадиям технологического процесса и т.д. Для каждого этапа решается задача оптимизации. Таким образом, решение сложной задачи сводится к решению ряда более простых оптимизационных задач, взаимосвязанных друг с другом.

Рассмотрим пример такого процесса. Пусть планируется деятельность группы цехов по производству какой-либо продукции сельскохозяйственного предприятия на N лет. Здесь шагом является один год. В начале 1-го года на развитие цехов выделяются средства, которые должны быть как-то распределены между ними. В процессе их функционирования выделенные средства частично расходуются. Каждый цех за год приносит некоторый доход,

зависящий от вложенных средств. В начале года имеющиеся средства могут перераспределяться между цехами- каждому из них выделяется какая-то доля средств. Ставится вопрос: как в начале каждого года распределять имеющиеся средства между цехами, чтобы их суммарный доход за N лет был максимальным?

Перед нами типичная задача динамического программирования, в которой рассматривается управляемый процесс – функционирование группы цехов (участков, предприятий). Управление процессом состоит в распределении (и перераспределении) средств. Управляющим воздействием является выделение определенных средств каждому из цехов в начале года.

Управляющее воздействие на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Управляющее воздействие должно быть дальновидным, с учетом перспективы. Нет смысла выбирать на рассматриваемом шаге наилучшее управление, если в дальнейшем это помешает получить наилучшие результаты других шагов. Управляющее воздействие на каждом шаге надо выбирать “с заглядыванием в будущее”, иначе возможны серьезные ошибки.

Действительно, предположим, что в рассмотренной группе предприятий одни заняты производством зерна, а другие - мяса. Причем целью является получение за N лет максимального объема выпуска мяса за счет производства зерна, идущего на корм скоту.

Пусть планируются капиталовложения на первый год. Исходя из узких интересов данного шага (года), мы должны были бы все средства вложить в производство мяса и добиться к концу года максимального его объема производства. Но правильным ли будет такое решение в целом? Очевидно, нет. Имея в виду будущее, необходимо выделить какую-то долю дополнительных средств и на производство зерна. При этом объем мяса за первый год, естественно, снизится, зато будут созданы условия, позволяющие увеличивать его производство в последующие годы.

В формальной постановке задач методом динамического программирования примем следующие обозначения:

N – число шагов;

$\bar{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$ – вектор, описывающий состояние системы на k -м шаге;

\bar{x}_0 – начальное состояние, т. е. состояние на 1-м шаге;

\bar{x}_N – конечное состояние, т. е. состояние на последнем шаге;

X_k – область допустимых состояний на k -ом шаге

$\bar{u} = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{mk})$ – вектор управляющего воздействия на k -ом шаге,

обеспечивающий переход системы из состояния x_{k-1} в состояние x_k ;

U_k – область допустимых управляющих воздействий на k -ом шаге;

W_k – величина выигрыша, полученного в результате реализации k -го шага;

S – общий выигрыш за N шагов;

$\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \dots, \bar{u}_N^*)$ – вектор оптимальной стратегии управления или оптимальное управляющее воздействие за N шагов;

$$S = \sum_{k=1}^N W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k).$$

$S_{k+1}(\bar{x}_k)$ – максимальный выигрыш, получаемый при переходе из любого состояния \bar{x}_k в конечное состояние \bar{x}_0 при оптимальной стратегии управления начиная с (k+1)-го шага;

$S_1(\bar{x}_0)$ – максимальный выигрыш, получаемый за N шагов при переходе системы из начального состояния \bar{x}_0 в конечное \bar{x}_N при реализации оптимальной стратегии управления \bar{u}^* . Очевидно, что $S = S_1(\bar{x}_0)$, если \bar{x}_0 – фиксировано.

Метод динамического программирования опирается на условие отсутствия последствия и условие аддитивности целевой функции.

Условие отсутствия последствия. Состояние \bar{x}_k , в которое перешла система за один k -й шаг, зависит от состояния \bar{x}_{k-1} и выбранного УВ \bar{u}_k и не зависит от того, каким образом система пришла в состояние \bar{x}_{k-1} , то есть

$$\bar{x}_k = \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k).$$

Аналогично величина выигрыша W_k зависит от состояния \bar{x}_{k-1} и выбранного управляющего воздействия \bar{u}_k , то есть

$$W_k = W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k).$$

Оптимальной стратегией управления \bar{u}^* называется совокупность управляющих воздействий $\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \dots, \bar{u}_N^*$, то есть $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \dots, \bar{u}_N^*)$, в результате реализации которых система за N шагов переходит из начального состояния \bar{x}_0 в конечное \bar{x}_N и при этом общий выигрыш S принимает наибольшее значение.

Принцип оптимального управления гласит:

Каково бы ни было допустимое состояние системы $\bar{x}_{i-1} \in X_{i-1}$ перед очередным i -м шагом, надо выбрать допустимое управляющее воздействие $\bar{u}_i \in U_i$ на этом шаге так, чтобы выигрыш W_i на i -м шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.

В качестве примера постановки задачи оптимального управления продолжим рассмотрение задачи управления финансированием группы цехов предприятия. Пусть в начале i -го года группе цехов $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ выделяются соответственно средства: $u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{mi}$. Совокупность этих значений можно считать управлением на i -м шаге, то есть $\bar{u}_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{mi})$. Управление \bar{u} процессом в целом представляет собой совокупность всех шаговых управлений, то есть $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)$.

Управление может быть хорошим или плохим, эффективным или неэффективным. Эффективность управления \bar{u} оценивается показателем S . Возникает вопрос: как выбрать шаговые управления $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N$, чтобы величина S обратилась в максимум?

Оптимальное управление \bar{u}^* многошаговым процессом состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$$\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \dots, \bar{u}_N^*)$$

Таким образом, перед нами стоит задача: определить оптимальное управление на каждом шаге \bar{u}_i^* ($i=1,2,\dots,N$), а значит, и оптимальное управление всем процессом \bar{u}^* .

Планируя многошаговый процесс, необходимо выбирать управляющее воздействие на каждом шаге с учетом его будущих последствий на еще предстоящих шагах. Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться без "заглядывания в будущее". Это последний шаг - после него других шагов нет. Этот шаг, единственный из всех, можно планировать так, чтобы он как таковой принес наибольшую выгоду. Спланировав оптимально этот последний шаг, можно к нему пристраивать предпоследний, к предпоследнему - предпредпоследний и т.д.

Поэтому процесс динамического программирования на 1-м этапе разворачивается от конца к началу, то есть раньше всех планируется последний, N-й шаг.

Далее нужно сделать все возможные предположения о том, чем кончился предпоследний, (N - 1)- й шаг, и для каждого из них найти такое управление, при котором выигрыш (доход) на последнем шаге был бы максимален. Решив эту задачу, мы найдем условно оптимальное управление на N-м шаге, т.е. управление, которое надо применить, если (N - 1)- й шаг закончился определенным образом.

Предположим, что эта процедура выполнена, то есть для каждого исхода (N - 1)-го шага мы знаем условно оптимальное управление на N-м шаге и соответствующий ему условно оптимальный выигрыш. Теперь мы можем оптимизировать управление на предпоследнем, (N - 1)- м шаге. Сделаем все возможные предположения о том, чем кончился (N - 2)-й шаг, и для каждого из этих предположений найдем такое управление на (N - 1)-м шаге, чтобы выигрыш за последние два шага (из которых последний уже оптимизирован) был максимален. Далее оптимизируется управление на (N - 2)-м шаге и т.д.

Таким образом, на каждом шаге ищется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение процесса относительно достигнутого в данный момент состояния. Этот принцип выбора управления называется *принципом оптимальности*. Само управление, обеспечивающее оптимальное продолжение процесса относительно заданного состояния, называется условно оптимальное управление на данном шаге.

Теперь предположим, что условно оптимальное управление на каждом шаге нам известно: мы знаем, что делать дальше, в каком бы состоянии ни был процесс к началу каждого шага. Тогда мы можем найти уже не "условное", а действительно оптимальное управление на каждом шаге.

Действительно, пусть нам известно начальное состояние процесса. Теперь мы уже знаем, что делать на первом шаге: надо применить условно оптимальное управление, найденное для первого шага и начального состояния. В результате этого управления после первого шага система перейдет в другое состояние; но для этого состояния мы знаем условно оптимальное управление и т. д. Таким образом, мы найдем оптимальное управление процессом, приводящее к максимально возможному выигрышу.

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс "проходится" дважды:

- первый раз - от конца к началу, в результате чего находятся условно оптимальное управление на каждом шаге и оптимальный выигрыш (тоже условный) на всех шагах, начиная с данного и до конца процесса;

- второй раз - от начала к концу, в результате чего находятся оптимальные управления на всех шагах процесса.

Процедуру построения оптимального управления методом динамического программирования можно представить в две стадии: предварительную и окончательную.

На предварительной стадии для каждого шага определяется условно оптимальное управление, зависящее от состояния системы (достигнутого в результате предыдущих шагов), и условно оптимальный выигрыш на всех оставшихся шагах, начиная с данного, также зависящий от состояния.

На окончательной стадии определяется (безусловное) оптимальное управление для каждого шага.

Методами динамического программирования осуществляют оптимизацию планирования вложения средств в производство, выбор оптимальных маршрутов, задач оптимизации режимов работы машин и оборудования.

Сетевое представление процессов. Задача о кратчайшем пути

Постановка задачи. Пусть имеется некоторая система, которая может находиться в одном из конечных состояний. Переход из одного состояния в другое осуществляется по определенному правилу за определенное время. Требуется из заданного начального состояния перевести систему в желаемое состояние за минимальное время.

Для наглядности будем интерпретировать эту задачу как задачу нахождения кратчайшего пути в сети. Некоторые сведения о сетевом представлении процессов.

Ориентированная сеть состоит из непустого конечного множества вершин V и подмножества X множества $V * V$: $X \in V * V$. Элементы множества X представляют собой упорядоченные пары вершин и называются *дугами* сети. Вершины сети нумеруются числами натурального ряда $1, 2, \dots, N$. Наличие в множестве X упорядоченной пары (i, j) означает, что из вершины с номером i исходит дуга, которая входит в вершину с номером j .

Каждой дуге (i, j) поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число $t_{i,j}$, которое будем интерпретировать как *длину данной дуги*. Длина дуги может обозначать параметр какого-либо процесса, например скорость, интенсивность, расстояние, массу и т.д.

Путем называется конечная последовательность вершин, обозначаемая (i_1, i_2, \dots, i_n) и такая, что из вершины i_k исходит дуга, которая входит в вершину i_{k+1} , $k=1, 2, \dots, n-1$.

Длиной пути называется сумма длин входящих в него дуг. Путь, в котором начальная и конечная вершина совпадают, т.е. $i_k = i_n$ $n > 2$, называется *циклом*. Сеть, не содержащая циклов, называется *ациклической*. Вершины ациклической цепи нумеруют так, чтобы $i < j$.

Рассмотрим ациклическую сеть, рис.4.1., имеющую 10 вершин. Вершины изображены в виде кружков, а дуги обозначены стрелками. Возле каждой стрелки указывается длина данной дуги. Просматривая данную сеть, можно выделить кратчайший путь из вершины 1 в конечную вершину 8. Однако если бы сеть содержала достаточно большое количество вершин, то, используя метод просмотра, справиться с задачей было бы не просто. Рассмотрим на данном примере алгоритм решения задачи, основанный на идеях динамического программирования, и пригодной для сетей с большим числом вершин.

Начнем искать оптимальный путь с конца. Из вершин 8 и 9 движение в вершину 10 определено однозначно. Присвоим указанным вершинам числа, соответствующие длинам дуг, т.е. 13 и 18. Из вершины 7 исходят 2 дуги: в вершину 9 и вершину 10. Поскольку длина пути $t_{7,10} = 20$, присваиваем вершине 7 число 20. Из вершины 6 исходят 3 дуги, причем оптимальным перемещением из вершины 6 является перемещение по дуге $(6, 10)$, длина которой равна 15. Приписываем это число вершине 6. Продолжая аналогичным образом, приходим к вершине 1, которой будет приписано число 32 - длина искомого кратчайшего пути. Сам кратчайший путь идет по вершинам 1, 2, 4, 6, 8.

В общем виде алгоритм нахождения кратчайшего пути может быть сформулирован в следующем виде. Будем считать, что следует найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину N .

Шаг 1. Положить $\omega_i = 0$ и $i = N-1$, где N число вершин данной сети.

Шаг 2. Положить $\omega_i = \min(t_{i,j} + \omega_j)$, где минимум вычисляется для всех $i > j$, для которых существует дуга (i, j) . Запомнить путь, на котором реализуется указанный минимум. Если минимум достигается сразу на нескольких путях, то можно запомнить любой из них.

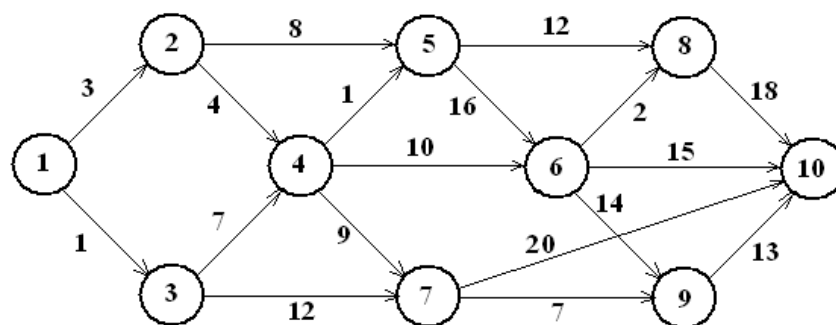


Рис.4.1. Ациклическая цепь процесса.

Шаг 3. если $i = 1$, то вычисления закончены. В противном случае уменьшить i на единицу и вернуться к шагу 2.

С помощью метода динамического программирования исследуют производственные процессы, развитие производств, старение техники и биологических объектов, т.е. те процессы, где во времени необходимо пройти ряд этапов развития и прийти к конечному результату.

ЛЕКЦИЯ 13

Имитационное моделирование и его этапы

Хотя классические аналитические методы и методы математического программирования являются мощным средством моделирования, число реальных задач, которые можно сформулировать так, чтобы не возникало противоречий предположениям, лежащим в основе этих методов, сравнительно невелико. Развитие вычислительной техники породило новое направление в исследовании сложных процессов - имитационное моделирование.

Имитационное моделирование – это разработка и выполнение на компьютере программной системы, отражающей структуру и функционирование моделируемого объекта или явления во времени.

Такую программную систему называют *имитационной моделью* объекта или явления. Имитационные модели, являющиеся особым классом математических моделей, принципиально отличаются от аналитических тем, что компьютер в их реализации играет главную роль. Можно считать имитационную модель упрощенным подобием реальной системы, либо существующей, либо той, которую предполагается создать. Имитационная модель обычно представляется компьютерной программой. Процесс выполнения программы- процесс имитации поведения исходной системы во времени.

Идея метода имитационного моделирования состоит в том, что вместо *аналитического описания взаимосвязей между входами, состояниями и выходами строят алгоритм, отображающий последовательность развития процессов внутри исследуемого объекта, а затем "проигрывают" поведение объекта на компьютере.*

Имитационная система - совокупность модели, имитирующей изучаемое явление, и систем внешнего и внутреннего обеспечения.

Имитационная модель - вычислительная процедура, формализовано описывающая изучаемый объект и имитирующая его поведение. Для имитационного моделирования характерна имитация элементарных явлений, составляющих исследуемый процесс, с сохранением их логической структуры, последовательности протекания во времени, характера и состава информации о состояниях процесса. Модель по своей форме является алгоритмической (логико-математической).

Порядок построения имитационной модели и ее исследования в целом соответствует схеме построения и исследования других моделей. Однако специфика имитационного моделирования может приводить к ряду особенностей выполнения тех или иных этапов.

Понятие моделирующего алгоритма процесса

Для имитационного моделирования процесса на ЭВМ необходимо преобразовать его математическую модель в специальный *моделирующий*

алгоритм, в соответствии с которым в компьютере будет вырабатываться информация, описывающая элементарные явления исследуемого процесса с учетом их связей и взаимных влияний (рис.5.1).

Центральным звеном моделирующего алгоритма является собственно имитационная модель — формализованная схема процесса. Она представляет собой формальное описание процедуры функционирования объекта в исследуемой операции и позволяет для любых задаваемых значений входных факторов модели (переменных — x , детерминированных — a , случайных — y) просчитать соответствующие им числовые значения выходных характеристик w . Остальные элементы модели (рис. 5.1) представляют собой внешнее математическое обеспечение процесса имитации.

Модели входов обеспечивают задание тех или иных значений входных факторов.

Статические модели детерминированных входов - это массивы значений констант, соответствующих определенным факторам модели.

Динамические модели входов обеспечивают изменение значений детерминированных факторов во времени по известному закону $a(t)$.

Модели случайных входов (генераторы случайных чисел) имитируют поступление на вход изучаемого объекта случайных воздействий с заданными законами распределения $p(y)$.

Динамические модели случайных входов учитывают, что законы распределения случайных величин являются функциями времени, т.е. для каждого периода времени либо форма, либо характеристика закона распределения (например, математическое ожидание, дисперсия и т.д.) будут своими.

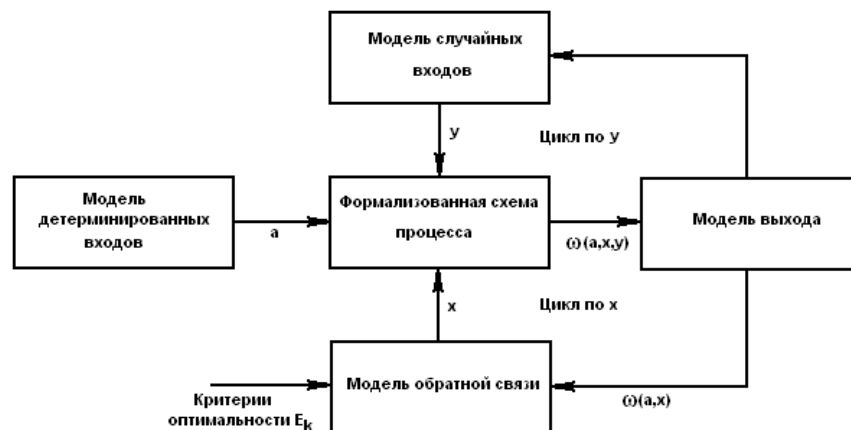


Рис. 5.1. Структура моделирующего алгоритма для оптимизационной модели со случайными факторами.

В связи с тем что результат, полученный при воспроизведении единственной реализации, из-за наличия случайных факторов не может характеризовать исследуемый процесс в целом, приходится анализировать большое число таких реализаций, так как только тогда по закону больших чисел получаемые оценки приобретают статистическую устойчивость и могут быть с определенной точностью приняты за оценки искомых величин.

Модель выхода обеспечивает накопление, обработку и анализ полученного множества случайных результатов. Для этого с ее помощью организуется многократный просчет значений выходных характеристик при постоянных значениях факторов a , x и различных значениях случайных факторов y (в соответствии с заданными законами распределения) - "цикл по y ". В связи с этим модель выхода включает программы тактического *планирования эксперимента* на компьютере – определение способа проведения каждой серий прогонов, соответствующей конкретным значениям a и x . Кроме того, модель решает задачу обработки случайных значений выходных характеристик, в результате которой они "очищаются" от влияния случайных факторов и поступают на вход модели обратной связи, т.е. модель выхода реализует сведение стохастической задачи к детерминированной методом "осреднения по результату".

Модель обратной связи позволяет на основе анализа получаемых результатов моделирования изменять значения переменных управления, реализуя функцию стратегического планирования имитационного эксперимента.

При использовании методов *теории оптимального планирования эксперимента* одной из функций модели обратной связи является представление результатов моделирования в аналитическом виде - определение уравнений функций отклика.

При оптимизации модель выхода вычисляет на основе значений выходных характеристик w значение целевой функций $E(w)$ и с помощью того или иного численного метода оптимизации изменяет значения переменных управления для выбора значений, наилучших с точки зрения целевой функции.

Имитационное моделирование имеет существенные преимущества перед аналитическим в тех случаях, когда:

- отношения переменных в модели нелинейны и поэтому аналитические модели невозможно или трудно построить;
- модель содержит стохастические элементы;
- для понимания поведения системы требуется визуализация динамики происходящих в них процессов;
- модель содержит много параллельно функционирующих взаимодействующих элементов.

ЛЕКЦИЯ 14

Элементы теории массового обслуживания

Во многих областях практической деятельности человека мы сталкиваемся с необходимостью пребывания в состоянии *ожидания*. Подобные ситуации возникают при ожидании: в очередях- в билетных кассах, на взлет или посадку-самолетов в аэропортах, на телефонных станциях - освобождения линии абонента, в ремонтных цехах- при сдаче в ремонт машин, станков и оборудования, на складах и элеваторах - при разгрузке или погрузке транспортных средств и т.д. Во всех перечисленных случаях имеем дело с массовостью и обслуживанием. Изучением таких ситуаций занимается *теория массового обслуживания*.

Теория массового обслуживания опирается на теорию вероятностей и математическую статистику. В основу теории массового обслуживания положены работы датского ученого А.К. Эрланга (1978-1928). Одним из основных ее понятий является *требование на обслуживание*. В общем случае под *требованием на обслуживание* обычно понимают *запрос на удовлетворение некоторой потребности*, например, разговор с абонентом по телефону, заказ автотранспорта для перевозки урожая с поля, покупка билета, получение материалов на складе.

Для удовлетворения требований необходима *система массового обслуживания (СМО)*. Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок, поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявок продолжается какое-то случайное время, после чего канал освобождается и СМО готова к приему следующей заявки.

Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО не обслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Средства, обслуживающие требования в СМО, называются *обслуживающими устройствами*, или *каналами обслуживания*. Например к ним относятся каналы телефонной связи, дороги, мастера-ремонтники, билетные кассиры, погрузочно-разгрузочные точки на базах и складах. Основными элементами СМО являются:

- *входящий поток требований*,
- *очередь требований*,
- *обслуживающие устройства (каналы)*;
- *выходящий поток требований*.

Система обслуживания считается заданной, если известны:

- поток требований (детали, поступающие на обработку, транспортные средства на разгрузку, автомобили на заправку и т.д.) и его характер распределения, интенсивность;

- множество обслуживающих единиц- приборов, оборудования (станки, разгрузочные устройства, автомобили, заправочные колонки и т.д.);

- дисциплина очереди.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).

Цель решения СМО – минимизация затрат, связанных с простоем системы, и затрат, связанных с ожиданием заявок в очереди. СМО решается определением оптимального количества каналов или характеристик потоков заявок.

В теории СМО рассматриваются такие случаи, когда поступление требований происходит через случайные промежутки времени, а продолжительность обслуживания требований носит случайный характер.

Основной задачей теории СМО является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания. СМО классифицируются на разные группы в зависимости от состава, времени пребывания в очереди до начала обслуживания и от дисциплины обслуживания требований.

По составу СМО бывают *одноканальные* (с одним обслуживающим устройством) и *многоканальные* (с большим числом параллельно работающих обслуживающих устройств). Многоканальные системы могут состоять из обслуживающих устройств как одинаковой, так и разной производительности.

Отношения требований, поступивших в очередь, подчиняются определенным правилам - *дисциплине обслуживания (очереди)*.

Различают 5 видов дисциплины очереди:

- *FIFO – первой поступила – первой обслужена;*
- *LIFO – последней поступила – первой обслужена;*
- *по срочности;*
- *по приоритетам;*
- *случайный выбор.*

По времени пребывания требований в очереди до начала обслуживания системы делятся на три группы:

- *с ожиданием;*
- *с отказами;*
- *смешанного типа.*

В СМО с ожиданием очередное требование, застав все каналы занятыми, становится в *очередь* и ожидает обслуживания до тех пор, пока один из каналов не освободится. Пример – очередь на разгрузку транспорта на элеваторе (продукцию в любом случае необходимо сдать). СМО с ожиданием широко распространены. Их можно разбить на две группы - *разомкнутые* и *замкнутые*.

К *замкнутым* относятся системы, в которых поступающий поток требований ограничен. Например, мастер, задачей которого является наладка станков в цехе, должен периодически их обслуживать. Каждый налаженный

станок становится в будущем потенциальным источником требований на подналадку. В подобных системах общее число циркулирующих требований конечно и постоянно.

Если источник обладает бесконечным числом требований, то системы называются *разомкнутыми*. Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов, станции железных дорог и др. Для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным.

В системах с *отказами* поступившее требование, застав все каналы занятыми, покидает систему. Классическим примером системы с отказами может служить работа автоматической телефонной станции или обнаружение покупателем нужного товара в магазине (на складе).

В системах *смешанного* типа поступившее требование, застав все каналы занятыми, становятся в очередь и ожидают обслуживания в течение ограниченного времени. Не дождавшись обслуживания в установленное время, требование покидает систему.

Характеристики СМО. Перечень характеристик систем массового обслуживания, используемых при их проектировании и анализе можно представить следующим образом:

- средние времена обслуживания, ожидания в очереди, простоя каналов и пребывания в СМО;
- число занятых и свободных каналов;
- средняя длина очереди и число заявок в СМО;
- количество каналов обслуживания;
- интенсивности входного потока заявок, обслуживания и нагрузки;
- коэффициенты нагрузки и загрузки каналов;
- абсолютная и относительная пропускная способность;
- доли времени простоя СМО, обслуженных заявок и потерянных заявок.

Входящий поток требований

Изучение СМО начинается с анализа входящего потока требований. Он представляет собой совокупность требований, которые поступают в систему и нуждаются в обслуживании. Входящий поток требований изучается с целью установления закономерностей этого потока и дальнейшего улучшения качества обслуживания. В большинстве случаев входящий поток неуправляем и зависит от ряда случайных факторов.

Случайным потоком называется *неубывающая последовательность неотрицательных случайных моментов времени, каждый из которых может быть представлен как момент поступления соответствующего требования.*

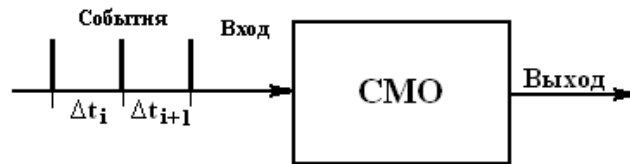


Рис.5.2. Входящий поток системы массового обслуживания: Δt_i – интервал времени между двумя требованиями.

Среднее число требований, поступающих в систему обслуживания за единицу времени, называется *интенсивностью поступления требований* и определяется следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{1}{T}, \quad (5.1.)$$

где $T = \sum_{k=1}^N \Delta t_k / N$ - среднее значение интервала между поступлением k-ого

и k+1 – ого соседних требований; N- количество требований на интервале исследования, рис.5.2.

Пусть t - момент прибытия заявки на обслуживание. Требование начинает не-медленно обслуживаться, если СМО не занята. Для описания распределения времени поступления заявок на обслуживание используют показательную (экспоненциальную) функцию плотности

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (5.2.)$$

с функцией распределения

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (5.3.)$$

и начальными моментами

$$f_k = k! / \lambda^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4).$$

Такой поток называется *простейшим*. Простейший поток обладает такими важными свойствами:

- стационарность;
- ординарность;
- отсутствие последствия.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или иного числа событий в интервале времени Δt_i зависит только от величины этого интервала и не зависит от того, где именно на оси времени расположен этот интервал.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал Δt_i двух или более событий пренебрежимо мала в сравнении с вероятностью попадания одного события. Ординарность означает, что поток прореженный, т.е. между любыми двумя событиями есть временной интервал.

Условная плотность распределения остатка времени обслуживания определяется по формуле

$$f(t/\tau) = f(t + \tau) / (1 - F(\tau)) = \lambda e^{-\lambda(t+\tau)} / \lambda e^{-\lambda\tau} = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (5.5)$$

где t - истекшее с момента поступления требования время.

Предположим, что поступающие требования обрабатываются без ожидания в обслуживающем устройстве. В правую часть уравнения (5.5) не входит время, истекшее после поступления требования t . Поэтому время обслуживания требований в случае показательного распределения длительности их поступления на малом интервале не зависит от уже прошедшего с момента времени их прихода (положения этого интервала на оси времени). Это *свойство отсутствия последствия* потока требований с показательным распределением.

В силу особенностей показательного распределения (простейший поток) длительность остающейся части обслуживания не зависит от того, как долго уже продолжалось обслуживание до момента t . Так как поток требований простейший, то прошлое не влияет на то, как много требований появится после момента t .

Наконец, длительность обслуживания требований, появившихся после t , никак не зависит от того, что и как обслуживалось до момента t .

Такие случайные процессы, для которых будущее развитие зависит только от достигнутого в данный момент состояния и не зависит от того, как происходило развитие в прошлом, называются *процессами Маркова*, или же *процессами без последствия*.

Отмеченные уникальные свойства показательного распределения делают его исключительно удобным в аналитических выкладках, связанных с описанием процессов обслуживания. Реально такому распределению подчиняется только длительность телефонных разговоров. С другой стороны, процессы поступления требований часто имеют близкое к показательному распределению интервалов между соседними поступлениями. В особенности это относится к потокам редких событий, число которых описывается распределением Пуассона: вероятность $P_k(t)$ того, что в обслуживающую систему за время t поступит k требований:

$$P_k(t) = e^{-\lambda \cdot t} (\lambda \cdot t)^k / k!. \quad (5.5)$$

Наличие пуассоновского потока требований можно определить статистической обработкой данных о поступлении требований на обслуживание. Одним из признаков закона распределения Пуассона является *равенство математического ожидания случайной величины и дисперсии этой же величины*.

На практике условия простейшего потока не всегда строго выполняются. Час-то имеет место нестационарность процесса (в различные часы дня и различные дни месяца поток требований может меняться, он может быть интенсивнее утром или в последние дни месяца). Существует также наличие последствия, когда количество требований на отпуск товаров в конце месяца зависит от их удовлетворения в начале месяца. Наблюдается и явление неоднородности, когда несколько клиентов одновременно пребывают на склад за материалами.

В действительности иногда имеют место распределения фазового типа, порождающиеся системой подлежащих прохождению фаз обслуживания с показательно распределенной длительностью в каждой.

Распределение Эрланга r -ого порядка с плотностью

$$f(t) = \lambda (\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t} / (r-1)!, \quad (5.6)$$

где r - количество фаз обслуживания (устройств), каждое из которых имеет показательно распределенную длительностью пребывания λ .

Это распределение порождается последовательным прохождением исходного показательного распределения через r устройств с таким же распределением длительности пребывания в каждом, рис.5.3., - искажение исходного показательного распределения другими показательными распределениями. Оно - двухпараметрическое, причем параметр r должен быть целым. Дисперсия распределения Эрланга $D=1/\lambda^2$.

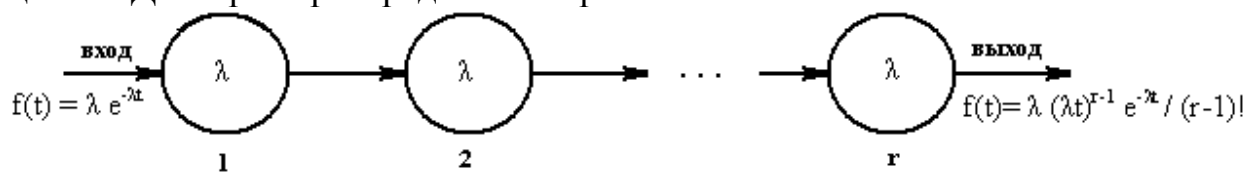


Рис. 5.3. Порождение распределения Эрланга.

Одной из важнейших характеристик обслуживающих устройств, которая определяет пропускную способность всей системы, является *время обслуживания*.

Время обслуживания одного требования ($t_{обс}$)- случайная величина, которая может изменяться в большом диапазоне. Она зависит как от стабильности работы самих обслуживающих устройств, так и от различных параметров, поступающих в систему, требований (к примеру, различной грузоподъемности транспортных средств, поступающих на погрузку или выгрузку) .

Случайная величина $t_{обс}$ полностью характеризуется законом распределения, который определяется на основе статистических испытаний.

На практике чаще всего принимают гипотезу о показательном законе распределения времени обслуживания $t_{обс}$. Показательный закон распределения времени обслуживания имеет место тогда, когда основная масса требований обслуживается быстро, а продолжительное обслуживание встречается редко. При показательном законе распределения времени обслуживания вероятность $P_{t_{обс}}$ того, что время обслуживания продлится не более чем t , равна:

$$P_{t_{обс}}(t) = 1 - e^{-\nu t}, \quad (5.7)$$

где ν - интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством, которая определяется из соотношения:

$$\nu = 1/\bar{t}_{обс}, \quad (5.8)$$

где $\bar{t}_{обс}$ - среднее время обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством.

Следует заметить, что если закон распределения времени обслуживания показательный, то при наличии нескольких параллельно работающих обслуживающих устройств одинаковой мощности закон распределения времени обслуживания несколькими устройствами будет также показательным:

$$P_{t_{обс}}(t) = 1 - e^{-n \cdot \nu \cdot t}, \quad (5.9)$$

где n - количество обслуживающих устройств.

Важным параметром СМО является коэффициент загрузки α , который определяется как отношение интенсивности поступления требований λ к интенсивности обслуживания ν .

$$\alpha = \lambda / \nu, \quad (5.10)$$

где α - коэффициент загрузки; λ - интенсивность поступления требований в систему; ν - интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством.

Если преобразовать зависимости (5.1) и (5.2), коэффициент загрузки примет вид

$$\alpha = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} \quad (5.11)$$

и покажет количество требований, поступающих в систему обслуживания за среднее время обслуживания одного требования одним устройством.

Для СМО с ожиданием количество обслуживаемых устройств n должно быть строго больше коэффициента загрузки (требование установившегося, или стационарного режима работы СМО):

$$n > \alpha. \quad (5.12)$$

В противном случае число поступающих требований станет больше суммарной производительности всех обслуживающих устройств и очередь будет неограниченно расти.

Для СМО с отказами и смешанного типа это условие может быть ослаблено, для эффективной работы этих типов СМО достаточно потребовать, чтобы минимальное количество обслуживаемых устройств n было не меньше коэффициента загрузки α : $n \geq \alpha$.

Методы теории цепей Маркова позволяют заключить, что при $\rho \geq m$ с течением времени очередь стремится к ∞ .

Поясним полученный результат на нескольких практических примерах, которые покажут, что обычные в практической деятельности подсчеты, основанные на чисто арифметических соображениях, при которых не учитывается специфика случайных колебаний в поступлении требований на обслуживание, приводят к серьезным просчетам.

Пусть служба диспетчера приемного пункта (весы, бухгалтерия, контроль качества, разгрузка) элеватора успевает обслужить автотранспорт с зерном в среднем за 30 минут. Планирующие органы из этого обычно делают вывод: за

восьмичасовой рабочий день диспетчер должен принимать 16 транспортных средств. Однако транспортные средства приходят в случайные моменты времени. В результате при таком подсчете пропускной способности приемного пункта к нему неизбежно скапливается очередь, так как при проведенном подсчете $\rho=1$.

Те же заключения относятся и к расчету числа коек в больницах, числа работающих касс в магазинах, числа официантов в ресторанах и т. д. К сожалению, некоторые проектировщики совершают такую же ошибку и при расчете погрузочных средств на складах, числа причалов в морских портах и т.п.

ЛЕКЦИЯ 15

Генерация случайных чисел

Практическое имитационное моделирование требует большого количества случайных чисел (интервалы между требованиями, длительность обслуживания, время ожидания, время отказа и т.д.).

Первичные данные для получения распределений входных переменных должны быть получены путем наблюдений за работой реальных объектов – при управлении с помощью модели или путем анализа собранной информации о процессах – при разработке нового объекта. В модели случайные числа могут использоваться или непосредственно с реального объекта, например поток автомобилей на входе элеватора, либо с помощью генераторов случайных чисел.

Применение случайных чисел с реального объекта обеспечивает наилучшее приближение к фактически наблюдаемому процессу, но при этом:

- не гарантируется типичность данных в данный период относительно других периодов времени;
- длительность моделируемого процесса ограничивается длительностью реального процесса;
- модель лишается прогностической силы, поскольку входные данные ограничены;
- исключаются методы оперативного анализа результатов и корректировки плана проведения эксперимента.

В практической деятельности непосредственное использование случайных чисел с объекта используется только для настройки модели. В основном для формирования нужного распределения применяются генераторы случайных чисел.

Применение случайных чисел с требуемым законом распределения обычно выполняется в два этапа:

1. Формирование физическим или программным методом случайного числа U_i , равномерно распределенного на интервале $[0, 1]$, $i = 1, 2, \dots$;
2. Программный переход от U_i к случайному числу X_i , имеющему требуемое распределение $F_X(x)$.

Генераторы оценивают по качеству формируемой последовательности, быстродействию, трудоемкости инициализации, машинной независимости, простоте и понятности для пользователя.

Физические и программные генераторы. Равномерное распределенное на $[0, 1]$ случайное число представляется в компьютере в двоичной форме в виде n -разрядной последовательности нулей и единиц, причем в каждом разряде нуль или единица должны наблюдаться с вероятностью 0.5.

Физические датчики равномерно распределенных на $[0, 1]$ чисел состоят из n идентичных по своим параметрам триггеров со счетным входом, каждый из которых регистрирует независимый поток импульсов от счетчика радиоактивных частиц или шумовые выбросы электронной лампы. Такой поток

можно считать простейшим, т.е. его распределение подчинено показательному закону.

Достоинством физических генераторов являются истинная случайность получаемых чисел и исключение затрат процессорного времени компьютера на генерацию случайных чисел. Кроме того, работа датчика нуждается в периодической аппаратурной проверке.

Программные генераторы генерируют псевдослучайные числа. Для этого разрабатывается специальная программа для компьютера, которая вырабатывает случайные числа на интервале $[0, 1]$. Программные генераторы имеют следующие преимущества:

- отсутствие дополнительного оборудования;
- возможность повторения прогона с той же последовательностью случайных чисел с целью контроля вычислений, уменьшения дисперсии или сравнительного анализа вариантов;
- отсутствие необходимости периодической проверки генератора.

В настоящее время почти всегда используются программные генераторы. Для генерирования случайного числа используют, например, функцию

$$U_{k+1} = (\mu U_k + c) \pmod{M}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.13)$$

где k - очередное число;

$M = 2^n$; n - разрядность генерируемого числа;

$U_{k=0}$ – произвольное начальное число, например 13852674;

μ - мультипликативная константа, рекомендуется:

$$\mu \pmod{8} = 5; \quad M/100 < \mu < M - M^{0.5}.$$

Метод обратной функции. Универсальным способом перехода к требуемому распределению $F(x)$ случайной величины является метод обратной функции. На рис.5.4. показана его графическая реализация.

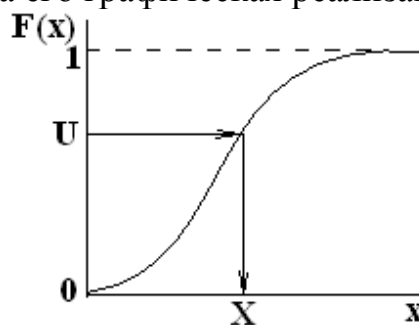


Рис.5.4. Метод обратной функции: U - случайное число, равномерно распределенное на интервале $[0, 1]$.

Реализуется случайное число U , равномерно распределенное на интервале $[0, 1)$. Оно подставляется в функцию распределения $F(x)$, которая описывает процесс. Из уравнения функции $F(x) = U$ определяется

$$X = F^{-1}(U) \quad (5.14)$$

и тем самым находится искомая величина случайной величины данного распределения.

Таким образом по методу обратной функции необходимо составить программу вычислений, которая генерирует случайное число (5.13), равномерно

распределенное на интервале $[0, 1)$ и вычисляет обратную функцию распределения (5.14). Функции распределения $F(x)$ рассчитываются методами, приведенными в главе 2.

Для некоторых распределений, имеющих удобный аналитический вид обратной функции заранее известен путь алгебраического решения уравнений (5.13) и (5.14). Например, для показательной функции распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

уравнение (5.14) для генератора будет иметь вид:

$$X = -\ln U / \lambda.$$

Некоторые типы подобных генераторов, аналитические функции (5.14) которых можно определить заранее, приведены в таблице 5.1.

Многие современные пакеты для решения статистических и математических задач предлагают как готовые аппроксимации функций распределения и им обратных, так и средства для их нахождения. Решение уравнения типа (5.14) требует большого машинного времени (это приходится делать сотни и тысячи раз за один прогон), особенно если нет аналитической формы. Поэтому широко применяются различные приближенные методы, использующие кусочно-линейные аппроксимации обратной функции.

Для дискретных распределений непрерывная функция случайных величин заменяется кумулятивной функцией. Наиболее употребительные дискретные распределения приведены в таблице 5.2.

Метод последовательных сравнений является дискретным аналогом метода обратной функции. Он заключается в переборе значений X , пока не окажется

$$F(X - 1) = \sum_{i < X} p_i < U \leq \sum_{i \leq X} p_i,$$

где $p_i = F(i) - F(i-1)$.

Например, Пуассоново распределение формируется по следующему алгоритму:

$$X=0; b = \exp(-\lambda); s=b.$$

Сформировать равномерное распределение U .

Пока $U > s$, выполнять

$$X = X + 1; b = b * b(\lambda/X); s = s + b.$$

Конец цикла.

Вернуть X . Конец расчета.

Таблица 5.1. Аналитические функции для генерирования случайных чисел.

Тип функции распределения	Функция распределения F(x)	Вид генератора X=F ⁻¹ (U)
Показательная	$1 - e^{-\lambda x}$	$-\ln U / \lambda$
Релея	$1 - e^{-x^2 / 2\sigma^2}$	$\sigma (-2 \ln U)^{0.5}$
Вейбулла	$1 - e^{-x^k / T}$	$\sigma (-T \ln(1 - U))^{1/k}$
Коши	$0.5 - 1/\pi \arctan(x - \lambda) / \sigma$	$\sigma \tan(\pi(U - 0.5)) + \lambda$
Логистическое	$1 / (1 + e^{-(x-a)/b})$	$a - b \ln(1/U - 1)$
Треугольное на [0, a]	$2(x - x^2 / 2a) / a$	$a(1 - (1 - U)^{0.5})$
Парето	$1 - (b/x)^\alpha$	$b / (1 - U)^{1/\alpha}$

Таблица 5.2. Дискретные распределения

Тип функции распределения	Параметры	Плотность распределения вероятности P(X=i)	Диапазон
Пуассоново (λ)	$\lambda > 0$	$\lambda^i e^{-\lambda} / i!$	$i \geq 0$
Биномиальное (n, p)		$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	$i = \overline{0, n}$
Отрицательное биномиальное (n, p)	$n \geq 1$	$\binom{n+i-1}{i} p^i (1-p)^{n+i}$	$i \geq 0$
Логарифмический ряд (λ)	$0 < \lambda < 1$	$-\lambda / i \ln(1 - \lambda)$	$i \geq 1$
Геометрическое (p)	$0 < \lambda < 1$	$p(1-p)^{i-1}$	$i \geq 1$

Элементы имитационной модели

Имитационная модель состоит из взаимодействующих элементов:

- состояний;
- событий;
- генераторов случайных чисел;
- таймеров;
- цепей событий;
- цели моделирования;
- счетчиков;

- блока инициализации;
- критерия остановки;
- методов обработки результатов.

Состояние системы (объекта, процесса, СМО) определяется со степенью детализации необходимой и достаточной для продолжения процесса моделирования: процесс должен быть сведен к *марковскому*. Состояние СМО задается текущим числом заявок в ней, фазами текущего обслуживания (прибытия) и моментами наступления ближайших событий каждого вида.

Под *событием* модели понимается скачкообразного состояния. События могут быть первичными (прибытие заявки, завершение обслуживания) и вторичными (по отношению к прибытию – прием заявки, продвижение очереди), которые наступают как следствие первичных.

С помощью *генераторов случайных чисел* в модели формируются ее очередные состояния (моменты наступления следующих первичных событий каждого вида). Случайные величины генерируются в соответствии с заданным распределениями.

Имитируемый процесс развивается в модельном (системном) времени.

Счетчик модельного времени называется *таймером*.

Наиболее сложные процессы моделируются упрощенно: с *постоянным шагом* по оси системного времени. Постоянный шаг используется также при решении дифференциальных уравнений.

Другим способом является *событийное задание времени*, когда оно меняется скачкообразно при наступлении событий. Функционирование любого процесса разбивается на этапы (активные фазы), каждый из которых соответствует некоторому событию и реализуется в один момент системного времени. Между смежными активными фазами находится пассивная, в которой с данным процессом ничего не происходит, но может произойти любое число событий других процессов. Событие может изменить значение текущих атрибутов, создать или уничтожить сущность, начать или прекратить активность. Моделирование требует программы, которая выстраивает последовательность событий в из взаимной зависимости.

Логика модели реализуется в процессе обработки *цепей событий*.

Цепи событий могут быть:

- *цепи текущих событий*;
- *цепи будущих событий*;
- *цепи задержанных событий*.

В *цепи текущих событий* находятся события, которые наступают в один момент модельного времени (уход из системы обслуживания, продвижение очереди и т.п.). Последовательность их обработки строго определена.

В *цепи будущих событий* находятся события, запланированные генератором случайных сигналом на последующие моменты времени (завершение обслуживания в других каналах, прибытие очередных заявок, уход из канала и т.п.).

В *цепи задержанных событий* находятся события, развитие которых заблокировано сложившимися в системе на данный момент модельного времени условиями (например, занятостью необходимых ресурсов). Могут использоваться и другие цепи событий, определяемые спецификой конкретной модели.

Под *инициализацией* понимается приведение модели до начала прогона в исходное (нулевое) состояние для обеспечения воспроизводимости результатов. Для этого обнуляют счетчики и генераторы случайных чисел.

Цель моделирования при построении модели трактуется в узком смысле – как определение показателей качества функционирования системы. Целью может быть, например, подсчет времени ожидания, подсчет производительности и т.п.). Выбор цели существенно влияет на структуру модели через счетчики, необходимые для накопления результатов моделирования.

Показатели качества функционирования модели зависят от ее выхода на стационарные характеристики работы (установившимися при устремлении к бесконечности системного времени). Результаты, накопленные за время переходного процесса будут вносить погрешности в конечный результат моделирования.

Критерий останова определяет момент прекращения прогона модели. В простейшем случае прогон прекращается по достижении заданного времени таймером, счетчика числа обслуженных заявок и т.п. Более правильным управлять прогоном по достижении заданной точности одного из показателей.

Обработка результатов моделирования состоит в сжатии получаемой информации, вычислении статистических оценок (математического ожидания, статистической значимости различия средних, построения гистограмм и статистических функций распределения). Дополнительно к этому необходимо вывести результаты на печать и в архив.

ЛЕКЦИЯ 16

Средства описания поведения объектов

Имитационная модель является, как правило, динамической моделью, отражающей последовательность протекания элементарных процессов и взаимодействие отдельных элементов по оси "модельного" времени t_M .

Процесс функционирования объекта в течение некоторого интервала времени T можно представить как случайную последовательность дискретных моментов времени t_{iM} . В каждый из этих моментов происходят изменения состояния элементов объекта, а в промежутке между ними никаких изменений состояния не происходит.

При построении формализованной схемы процесса должно выполняться следующее рекуррентное правило: *событие, происходящее в момент времени t_{iM} , может моделироваться только после того, как промоделированы все события, происшедшие в момент времени $t_{(i-1)M}$* . В противном случае результат моделирования может быть неверным. Реализация этого правила может проводиться различными способами.

1. *Повременное моделирование с детерминированным шагом Δt* . При по временном моделировании с детерминированным шагом алгоритм одновременно просматривает все элементы системы через достаточно малые промежутки времени Δt и анализирует все возможные взаимодействия между элементами. Способ моделирования с детерминированным шагом состоит из совокупности многократно повторяющихся действий:

- на i -ом шаге в момент t_i просматриваются все элементы объекта и определяется, какие из них изменяют свое состояние в этот момент;
- моделируются все изменения состояния, которые происходят в момент t_i ;
- производится переход к $(i + 1)$ -му шагу, который выполняется в момент $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

“Принцип Δt ” является наиболее универсальным принципом построения моделирующих алгоритмов, охватывающим весьма широкий класс реальных сложных объектов и их элементов дискретного и непрерывного характера.

Вместе с тем этот принцип весьма неэкономичен с точки зрения расхода времени работы ЭВМ - в течение длительного периода ни один из элементов системы может не изменить своего состояния и прогоны будут совершаться впустую.

2. *Повременное моделирование со случайным шагом* (моделирование по "особым" состояниям). При рассмотрении большинства сложных систем можно обнаружить два типа состояний системы:

- 1) обычные (не особые) состояния, в которых система находится большую часть времени,
- 2) особые состояния, характерные для системы в некоторые моменты времени, совпадающие с моментами поступления в систему воздействий из окружения, выхода одной из характеристик системы на границу области существования и т.д.

Например, станок работает — обычное состояние, станок сломан — особое состояние. Любое скачкообразное изменение состояния объекта может рассматриваться при моделировании как переход в новое "особое" состояние.

Длительность шага Δt — величина случайная. Этот способ отличается от "принципа Δt " тем, что включает процедуру определения момента времени, соответствующего ближайшему особому состоянию по известным характеристикам предыдущих состояний.

3. *Позаявочный способ.* При моделировании процессов обработки последовательно идущих заявок иногда удобно строить моделирующие алгоритмы позаявочным способом, при котором прослеживается прохождение каждой заявки (детали, носителя информации) от ее входа в систему и до выхода ее из системы.

После этого алгоритм предусматривает переход к рассмотрению следующей заявки. Такого рода моделирующие алгоритмы весьма экономны и не требуют специальных мер для учета особых состояний системы. Однако этот способ может использоваться только в простых моделях.

Основным средством спецификации поведения объектов могут быть:

- *переменные;*
- *таймеры;*
- *стейтчарты.*

Переменные- входные и внутренние параметры системы, отражают изменяющиеся характеристики объекта. Они являются переменными аналитических формул, алгебраических и дифференциальных уравнений и их систем. Некоторые переменные не изменяются в процессе моделирования, они задаются в виде табличных данных (параметров) перед проведением каждого эксперимента.

Таймер- блок моделирующей системы, определяющий интервал времени работы определенной ее части. Таймер можно определять (назначать) для неограниченного количества подсистем моделирующей системы на определенный интервал времени и по окончании этого интервала выполнять заданное действие – переход, расчет, визуализация результата и т.д.

Стейтчарт – блок моделирующей системы позволяет осуществлять переходы объекта из предыдущего состояния в новое состояние под воздействием событий и условий. Любая сложная логика поведения объекта во времени под воздействием событий и условий может быть выражена с помощью комбинации стейтчартов, дифференциальных, алгебраических уравнений, переменных, таймеров и программного кода.

Алгебраические и дифференциальные уравнения, как и логические уравнения, записываются в модели аналитически и выполняются с помощью одного из современных объектно-ориентированных языков программирования. В действительности разработчик модели не создает полные программы на определенном языке, а лишь вставляет фрагменты кода (формулы, уравнения, переменные) и т.д. в специально предусмотренные для этого поля. Эти фрагменты выражают логику работы конкретных шагов или действий в модели.

Но в любом случае включаемые в модель фрагменты должны быть синтаксически правильной конструкцией конкретного языка, поэтому разработчик (не пользователь) модели должен иметь представление об этом языке.

Особенностью имитирующих моделей является имитация нескольких параллельно протекающих процессов (как в действительности). При этом время протекания для параллельных процессов единое для всей системы. Это должно быть организовано так, чтобы никаких дополнительных усилий для этого от разработчика не требовалось.

Модельное, физическое и виртуальное время. *Модельное(системное) время*- это условное логическое время, в единицах которого определено поведение всех объектов модели. Модельное время может изменяться непрерывно, если поведение объекта описывается дифференциальными уравнениями, или дискретно, если в модели присутствуют только дискретные события – от момента наступления одного события до момента наступления другого события. Единица модельного времени интерпретируется как любой отрезок времени: секунда, минута, час, год. При интерпретации модельное время может быть умножено на любой коэффициент.

Физическое время- это время, затрачиваемое компьютером на имитацию действий, которые должны быть выполнены в модели в течение одной единицы модельного времени. Оно зависит от многих факторов, в частности от количества параллельно осуществляемых процессов, быстродействия компьютера, совершенства программы. Между модельным и физическим временем для данной модели существует определенное соотношение.

Виртуальное время. В режиме виртуального времени компьютер работает с максимальной скоростью без привязки к физическому времени.

Средства анимации позволяют пользователю создать виртуальный мир (совокупность графических образов, живую мнемосхему и т.д.), управляемый динамическими параметрами модели, по законам, определенным пользователем с помощью уравнений и логики моделируемых объектов. Визуальное представление объектов помогает пользователю проникнуть в суть процессов, происходящих в системе.

Имитационное моделирование стохастических объектов методом Монте-Карло

Метод Монте-Карло - это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Само название «Монте-Карло» происходит от города в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом.

Идея метода состоит в следующем. Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата (дифференциальных или алгебраических уравнений), производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат. В действительности конкретное осуществление

случайного процесса складывается каждый раз по-иному; так же и в результате статистического моделирования мы получаем каждый раз новую, отличную от других реализацию исследуемого процесса.

Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки могут быть получены любые интересующие нас характеристики: вероятности событий, математические ожидания и дисперсии случайных величин и т. д.

Алгоритм исполнения метода Монте-Карло.

1. Подготовка данных для модели- получение теоретических распределений входных параметров объекта;
2. Ввод теоретических распределений параметров объекта в программу;
3. Задание критерия останова работы программы моделирования;
4. Генерация случайного числа для каждого входного параметра объекта в соответствии с их теоретическими распределениями, см. раздел 5.5.;
5. Прогон модели по каждой генерации случайных чисел;
6. Сбор статистического материала по результатам моделирования- функции цели и промежуточных параметров модели по каждой генерации;
7. Если критерий останова достигнут, то необходимо расчеты прекратить (стоп), в противном случае продолжить, вернуться к п.4.
8. Расчет статистических характеристик: математического ожидания, средних значений и моментов для функции цели и промежуточных параметров модели;
9. Конец расчета.

Критерием останова могут быть:

- количество случайных чисел по каждому входному параметру;
- время расчета;
- абсолютное значение функции;
- скорость изменения целевой функции.

При моделировании случайных явлений методом Монте-Карло мы пользуемся самой случайностью как аппаратом исследования, заставляем ее «работать на нас».

Нередко такой прием оказывается проще, чем попытки построить аналитическую модель. Для сложных операций, в которых участвует большое число элементов (машин, людей, организаций, подсобных средств), а случайные факторы сложно переплетены, где процесс - явно не марковский, метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического (а нередко бывает и единственно возможным).

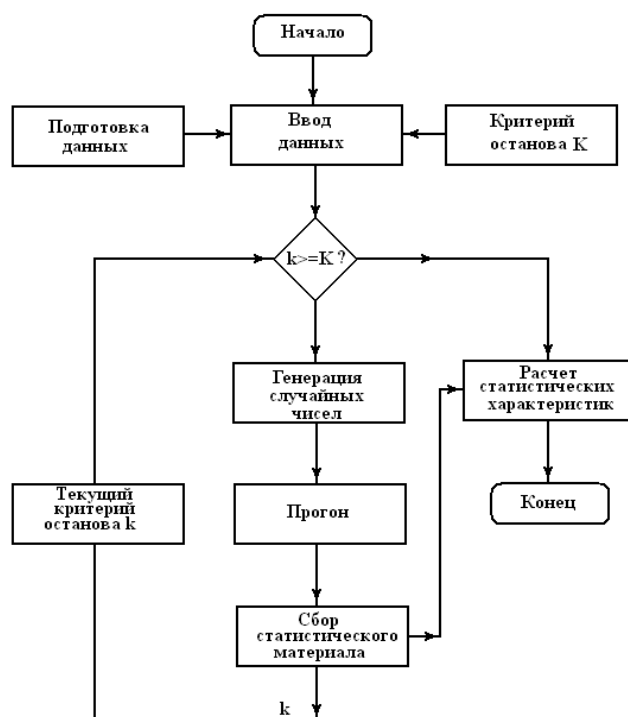


Рис.5.5. Алгоритм моделирования методом Монте- Карло.

Первая особенность метода - простая структура вычислительного алгоритма, вторая - погрешность вычислений, как правило, пропорциональна D/N^2 , где D - некоторая постоянная, N - число испытаний. Отсюда видно, что для того чтобы уменьшить погрешность в 10 раз нужно увеличить N (т. е. объем работы) в 100 раз. Ясно, что добиться высокой точности таким путем невозможно. Поэтому обычно говорят, что метод Монте - Карло особенно эффективен при решении тех задач, в которых результат нужен с небольшой точностью (5-10%).

В задачах исследования операций метод Монте-Карло применяется в трех основных случаях:

- при моделировании сложных, комплексных операций, где присутствует много взаимодействующих случайных факторов;
- при проверке применимости более простых, аналитических методов и выяснении условий их применимости;
- в целях выработки поправок к аналитическим формулам типа «эмпирических формул» в технике.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Гордеев, А.С. Моделирование в агроинженерии : Учеб. пособие / А.С Гордеев. – М. : Мичуринский государственный аграрный университет, 2007. – 222 с.
2. Гультияев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB. Учебный курс. Питер. 2000.-432 с.
3. Гультияев А.К. Матлаб 5.2. Имитационное моделирование в среде Windows: Практическое пособие. – Спб.: КОРОНА принт, 1988. – 288с.
4. Герман-Галкина С.Г. Кардонов Г.А. "Электрические машины. Лабораторные работы на ПК". – Спб.: КОРОНА принт, 2003. - 256 с. ил.
5. Карпов Ю. Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. – Спб.: БВХ- Петербург, 2006. – 400с.: ил.
6. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Нейронные сети. Матлаб 6. Под общей редакцией к.т.н. В.Г. Потемкина. Москва, Диалог – Мифи, 2002, – 486с.
7. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технология.- Спб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс – А, 2004. – 384 с., ил.
8. Черных И.В. "SimPowerSystems: Моделирование электротехнических устройств и систем в Simulink". Сайт
9. Черных И.В. SIMULINK: среда создания инженерных приложений / Под общей ред. к.т.н. В.Г. Потемкина. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 486 с.
10. Франс Дж., Торнли Дж.Х.М. Математические модели в сельском хозяйстве / Пер. с англ. А.С.Каменского; под ред.Ф.И.Ерешко. Предисл.Ф.И.Нрешко и А.С. Каменского. – М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.

Учебное издание

Огняник Александр Васильевич
Трубилин Евгений Иванович

МОДЕЛИРОВАНИЕ В АГРОИНЖЕНЕРИИ

Курс лекций

В авторской редакции

Подписано в печать 20.12.2019. Формат 60 × 84 ¹/₈.
Усл. печ. л. – 5,7. Уч.-изд. л. – 4,5.

Кубанский государственный аграрный университет.
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13