

А. Г. Бурда, Г. П. Бурда

# МОДЕЛИРОВАНИЕ В УПРАВЛЕНИИ

Учебное пособие (курс лекций)

Краснодар  
2015

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Бурда, Г. П. Бурда

# МОДЕЛИРОВАНИЕ В УПРАВЛЕНИИ

Учебное пособие (курс лекций)

Краснодар  
КубГАУ  
2015

**УДК 330.46:005.12**  
**ББК 65.050.9(2)**  
**Б91**

Рецензент:

**М. В. Зелинская** – доктор экономических наук, профессор кафедры менеджмента ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный аграрный университет»

**Бурда А. Г.**

**Б91** Моделирование в управлении : учеб. пособие (курс лекций) / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда; Кубан. гос. аграр. ун-т. – Краснодар, 2015. – 250 с.

Учебное пособие отвечает требованиям современных федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования для уровня подготовки кадров высшей квалификации.

В книге на основе кибернетического подход к моделированию и управлению сложными динамическими системами и математической теории оптимального управления рассмотрены основы моделирования управленческих решений, моделирование макро- и микро- экономических процессов и систем, сравнительный анализ непрерывных и дискретных процессов и математических моделей управления ими, математическое моделирование назначений в управлении, теория хаоса и модели хаотической динамики.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 38.06.01 «Экономика» (уровень подготовки кадров высшей квалификации).

**УДК 330.46:005.12**  
**ББК 65.050.9(2)**

© Бурда А. Г., Бурда Г. П., 2015

© ФГБОУ ВПО «Кубанский  
государственный аграрный  
университет», 2015

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначена обучающимся по направлению подготовки 38.06.01 «Экономика» (уровень подготовки кадров высшей квалификации).

Издание ориентировано на достижение цели дисциплины – изучение математических моделей оптимального управления для непрерывных и дискретных процессов, практических примеров применения на макро- и микроуровне и принятия управленческих решений, динамических оптимизационных моделей.

Задачами дисциплины являются создание и закрепление у обучающихся знаний, умений и навыков, а также формирование и развитие компетенций, закрепленных федеральным образовательным стандартом высшего образования и образовательной программой. При изучении дисциплины решаются следующие задачи:

овладеть методами математического моделирования в управлении;

научиться отражению в моделях основных количественных характеристик систем управления;

усвоить особенности применения разных классов математических моделей в управлении (математического программирования, динамического программирования и оптимального управления, векторной оптимизации, теории графов и сетевого планирования, теории игр, системы массового обслуживания);

научиться формулировать постановки конкретных задач управления;

научиться осуществлять формализацию задач управления;

научиться разрабатывать символьные математические модели в управлении;

приобрести навыки постановки конкретных задач и разработки их числовых моделей в управлении;

научиться использовать ЭВМ для решения задач и применению моделирования для повышения эффективности управления;

приобрести навыки использования современных информационных технологий для моделирования прикладных информационных задач.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

основы моделирования управленческих решений;

математические модели оптимального управления для непрерывных и дискретных процессов, их сравнительный анализ;

динамические оптимизационные модели;

Уметь:

разрабатывать математические модели для непрерывных и дискретных процессов в управлении;

проводить сравнительный анализ непрерывных и дискретных процессов и математических моделей управления ими;

Владеть:

методами оптимального управления непрерывными и дискретными процессами для оптимизации прикладных и информационных процессов.

навыками построения математических моделей и проведения численных компьютерных экспериментов в сфере управления;

Иметь представление о:

сферах применения дискретных моделей оптимального управления;

сферах применения непрерывных моделей оптимального управления;

кибернетическом подходе к моделированию и управлению сложными динамическими системами;  
моделях хаотической динамики.

Виды и задачи профессиональной деятельности по дисциплине:

научно-исследовательская деятельность в области экономики:

разработка теоретических и методологических принципов, методов и способов управления социальными и экономическими системами;

анализ современных тенденций и прогнозов развития экономики, определение научно обоснованных организационно-экономических форм деятельности;

совершенствование методов управления и государственного регулирования.

Для успешного освоения дисциплины необходимы знания по следующим дисциплинам:

Основы научно-исследовательской деятельности;

Современные информационно-коммуникационные технологии в научно-исследовательской деятельности и образовании.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

а) универсальные (УК):

способностью проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);

готовностью участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);

способностью следовать этическим нормам в профессиональной деятельности (УК-5);

способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития (УК-6);

б) общепрофессиональные (ОПК):

способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

готовностью организовать работу исследовательского коллектива в научной отрасли, соответствующей направлению подготовки (ОПК-2);

в) профессиональные компетенции (ПК):

готовность использовать современные методы управления социальными и экономическими системами (ПК-3);

способен применять аппарат математического моделирования для исследования управленческих отношений в экономических системах (ПК-5);

способен анализировать данные с использованием математических методов, инструментальных средств и методов компьютерного моделирования (ПК-6).

При подготовке учебного пособия учтены замечания и пожелания рецензентов, которым мы искренне благодарны.

# **ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ. КИБЕРНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ И УПРАВЛЕНИЮ СЛОЖНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.**

## **Вопросы**

1. Управление как функция сложной системы.
2. Теория автоматического управления, фундаментальные принципы управления.
3. Процессы управления в социально-экономических и технических системах.
4. Модель и моделирование в управлении.

## **1.1 Управление как функция сложной системы**

**Основные отличительные признаки сложных систем** (по Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М. Наука, 1978г., с.25):

Наличие большого количества взаимно связанных и взаимодействующих между собой элементов.

Сложность функции, выполняемой системой и направленной на достижение заданной цели функционирования.

Возможность разбиения системы на подсистемы, цели, функционирования которых подчинены общей цели функционирования всей системы.

Наличие взаимодействия с внешней средой и функционирование в условиях воздействия случайных факторов.

Наличие управления (часто имеющего иерархическую структуру), разветвленной информационной сети и интенсивных потоков информации.



Управление – в широком смысле функция системы, ориентированная либо на сохранение основного качества, т.е. совокупности свойств, утрата которых ведет к разрушению системы в условиях изменения *среды*, либо на выполнение некоторой программы, обеспечивающей *устойчивость* функционирования, *гомеостаз*, достижение определенной *цели*.

Понятие *управление* не формализовано настолько, чтобы можно было дать его точное и при этом достаточно полное формальное описание.

Систему, в которой реализуется функция управления, называется, системой управления и выделяют в ней две подсистемы: управляющую (осуществляющую функцию управления) и управляемую (объект управления).

Однако разделение системы на управляющую и управляемую не всегда можно осуществить однозначно. В сложных развивающихся системах эти блоки могут быть совмещены. Такой режим называют *саморегулированием*.

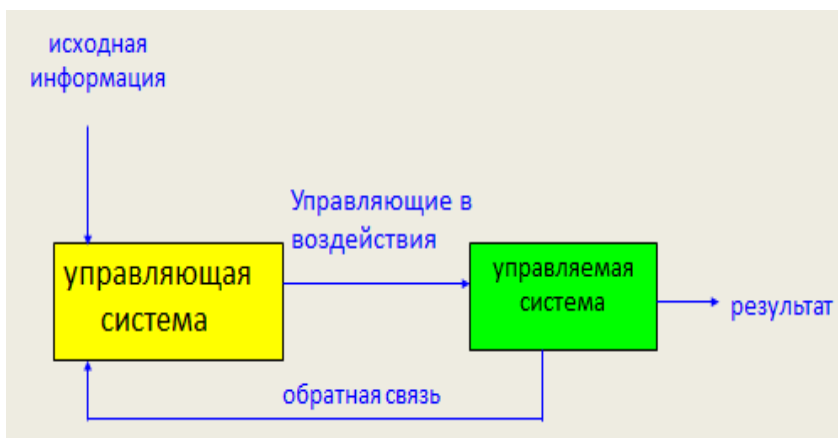
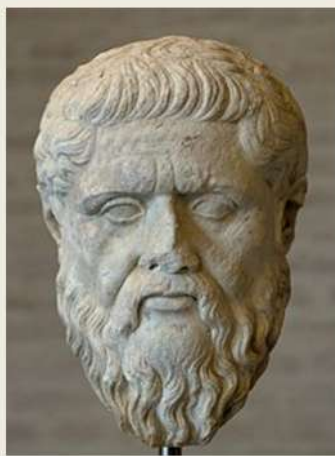


Рисунок 1 – Кибернетическая система

## Из истории

Платон (427-347 гг. до н.э.) термином «кибернетика» обозначал правила управления обществом.



### Платон

Дата рождения:	<u>428 или 427 до н. э.</u>
Место рождения:	<u>Афины</u>
Дата смерти:	<u>348 или 347 до н.э.</u>
Место смерти:	<u>Афины</u>
Гражданство:	<u>Афины</u>
Основные интересы:	<u>Метафизика, эпистемология, этика, эстетика, политика, образование, философия математики</u>
Оказавшие влияние:	<u>Сократ, Архит, Демокрит, Парменид, Пифагор, Гераклит</u>
Испытавшие влияние:	<u>Аристотель, практически все европейские и ближневосточные философы</u>

В 1834г. Андре Мари Ампер в кн. «Опыт философии наук» кибернетикой называл науку о способах управления обществом.

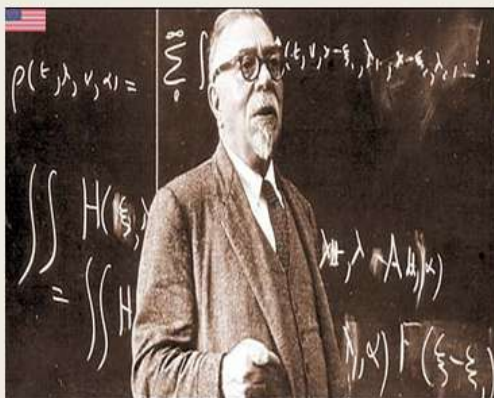


**Андре-Мари Ампер** - знаменитый французский физик, математик и естествоиспытатель, член Парижской Академии наук (1814). Член многих академий наук, в частности иностранный почетный член Петербургской Академии наук (1830). Джеймс Максвелл назвал Ампера «Ньютоном электричества».

Дата рождения:	<u>20 января 1775</u>
Место рождения:	<u>Лион</u>
Дата смерти:	<u>10 июня 1836 (61 год)</u>
Место смерти:	<u>Марсель</u>
Страна:	<u>Франция</u>
Научная сфера:	<u>физика, математика, химия</u>
Место работы:	<u>Политехническая школа Коллеж де Франс</u>
Известен как:	<u>один из основателей электродинамики</u>

В 1948 г. Норберт Винер опубликовал книгу «Кибернетика или управление и связи в животном и машине» - изложено поведение и воспроизведение сложных управляющих и информационных систем в технике, живой природе и обществе.

## Норберт Винер



<u>Дата рождения:</u>	<u>26 ноября 1894</u>
<u>Место рождения:</u>	<u>Колумбия, Миссури, США</u>
<u>Дата смерти:</u>	<u>18 марта 1964 (69 лет)</u>
<u>Место смерти:</u>	<u>Стокгольм, Швеция</u>
<u>Страна:</u>	<u>США</u>
<u>Научная сфера:</u>	<u>Математика Кибернетика</u>
<u>Место работы:</u>	<u>Массачусетский технологический институт</u>
<u>Учёная степень:</u>	<u>доктор философии</u>
<u>Учёное звание:</u>	<u>профессор</u>
<u>Альма-матер:</u>	<u>Колледж Тафтс 1909 Гарвардский университет 1912</u>
<u>Известен как:</u>	<u>основоположник кибернетики</u>

Кибернетика показывает сходство управления в различных системах, основанное на том, что информационные процессы подчиняются общим количественным закономерностям независимо от природы носителей информации.

Кибернетика – наука об управлении, связях и информации.

Цель кибернетики - способствовать максимальной автоматизации процессов управления, повышению производительности управленческого труда

Объект кибернетики – сложные динамические системы

Предмет кибернетики – информационные процессы, описывающие поведение сложных динамических систем

Сложные системы – системы с большим количеством элементов, с разветвленной структурой, в которой можно выделить иерархические уровни.

Динамическая система – система, которая:

- переходит из одного состояния в другое,
- этот переход совершается медленно, а не мгновенно, скачкообразно.

Состояние системы – точно определенное условие или свойство, которое может быть опознано, если повторится снова

$$V = n(n - 1)$$

$V$ - количество связей между элементами системы

$n$  - количество элементов системы

$$H = 2^{n(n-1)}$$

$H$ - максимальное число возможных состояний системы

Предметом экономической кибернетики являются процессы управления и связанные с ним процессы передачи и обработки информации в экономических системах.

Экономическая кибернетика включает:

- системный анализ
- теорию экономической информации
- теорию управляющих систем в экономике
- экономико-математическое моделирование

Многие авторы экономическую кибернетику понимают как экономико-математические методы.

Термин экономико-математические методы ввел в науку акад. Василий Сергеевич Немчинов, который определял экономико-математическую модель как концентрированное выражение общих взаимосвязей и закономерностей экономического явления в математической форме.

В сложных системах важную роль играют вопросы управления.

Управление представляет собой процесс сбора, передачи и переработки информации, осуществляемый специальными средствами. От элементов системы к управляющим устройствам поступает осведомительная информация, характеризующая состояние элементов системы. В сложных системах обычно выделяются специфические контуры управления, вдоль которых циркулируют *потоки информации* (осведомительной – от элементов системы к управляющим устройствам, и управляющей – от управляющих устройств к элементам системы). Часто контуры управления являются замкнутыми и носят характер *обратной связи*: фактическое значение регулируемого параметра сравнивается со значением этого параметра, требуемым программой управления; наличие отклонения от программы служит основанием для выработки корректирующих сигналов – управляющей информации. Применение принципа обратной связи позволяет избежать грубых ошибок, если только средства управления работают исправно.

В связи с развитием электроники и вычислительной техники, в качестве средств управления часто используются цифровые вычислительные машины, выполняющие функции обработки информации, планирования и оперативного управления процессами в сложных системах. Выполняя последовательность арифметических и логических операций в соответствии с заданной программой, ЭВМ обеспечивает реализацию специального *алгоритма* переработки информации, который называется *управляющим алгоритмом*.

Если управление сложной системой сосредоточено в едином центре, оно называется *централизованным*. На практике встречаются различные степени *децентрализации* управления, когда функция управления распределена между

главным и периферийными центрами управления, а также свойственна в определенной мере и элементам системы.

Пример: возможные варианты структуры управления (диспетчеризации) таксомоторным хозяйством крупного города. Децентрализация управления позволяет сократить объем передаваемой и перерабатываемой информации, однако в ряде случаев это приводит к снижению качества управления.

Отмеченные трудности в значительно меньшей степени проявляются при использовании систем управления с *иерархической* структурой – наличие нескольких уровней управления.

Существенной особенностью управления иерархической структуры является то обстоятельство, что основная масса информации перерабатывается в соответствующих контурах низшего уровня, а не высшие уровни поступают лишь обобщенные данные, характеризующие не отдельные элементы, а целые подсистемы сложной системы.

Многим сложным системам свойственны в той или другой степени черты *самоорганизации*. Система называется самоорганизующейся, если она способна на основании оценки воздействий внешней среды, путем последовательного изменения своих свойств прийти к некоторому устойчивому состоянию, когда воздействия внешней среды окажутся в допустимых пределах. Многочисленные примеры самоорганизующихся систем можно наблюдать в живой природе.

Реальные сложные системы функционируют в условиях действия большого количества случайных факторов. Источниками случайных факторов являются воздействие внешней среды, а также ошибки, шумы и отклонения различных величин, возникающие внутри системы.

## 1.2 Теория автоматического управления, фундаментальные принципы управления

Для исследования процессов управления в технических системах разработана теория автоматического управления. В этой теории термин управления используется в более узком смысле – как краткое название целенаправленного управляющего воздействия.

Большим движением теории автоматического управления являются общие принципы управления, разработанные в этой теории, которые названы фундаментальными и являются достаточно общими. Их пытаются применить и для управления в социально-экономических системах.

Основные фундаментальные принципы управления:

1. Принцип разомкнутого или программного управления.

Сущность принципа состоит в том, что управление осуществляется с помощью заданного алгоритма или программы.

В некоторых случаях блок выработки закона управления и управляющее устройство совмещены.

Схема имеет вид разомкнутой цепи, в которой основное воздействие передается от входа к выходу, выполняя заданную программу (закон функционирования), что и дало название принципу.

Обозначения:

$x(t)$  - устройство, вырабатывающее программу или закон функционирования устройство управления (которое принято обозначать специальным знаком – кругом, разделенным на сектора), вырабатывающее

$u(t)$  - совокупность управляющих воздействий, объект управления,

$Z_j$  - помехи,  
 $Y_{вых}$  - выходной результат

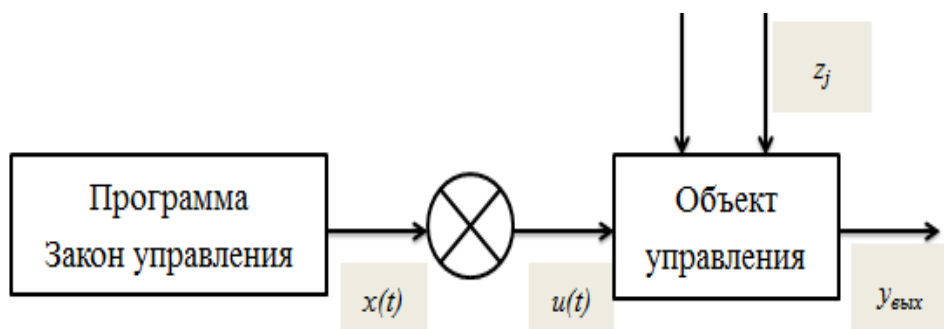


Рисунок 2 - Принцип разомкнутого или программного управления.

При таком принципе управления помехи  $z_j$  могут исказить желаемое  $y_{вых}$ . Тем не менее, благодаря простоте этот принцип широко используется.

По разомкнутому принципу построены устройства пуска музыкальной шкатулки, магнитофона и др. аудиоустройств, станки с программным управлением, управление конвейером.

Подобием этого принципа можно считать управление работой раба в рабовладельческом обществе на начальной ступени его развития при жестоких рабовладельцах, не учитывающих потребностей раба как человека, подавляющего его человеческое достоинство и принуждающего четко выполнять предписанную программу.

2. Принцип компенсации или управления по возмущениям (или принцип управления с упреждением).

При таком принципе используется устройство, измеряющее помехи и вырабатывающее компенсирующие воз-



действия, которые корректируют закон управления (рисунок 3).

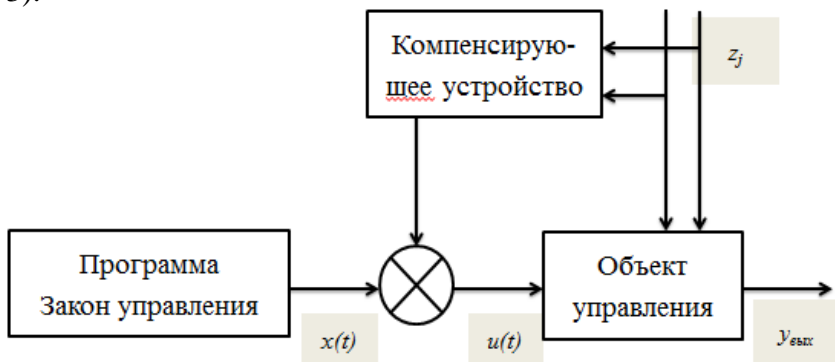


Рисунок 3 – Принцип управления с упреждением

Устройство такого рода называют компенсирующим устройством.

Простейшим примером такого принципа являются устройства, обеспечивающие стабилизацию напряжения при колебаниях постоянного тока. К настоящему времени в теории автоматического управления разработано много различных компенсационных механизмов, в соответствующие подклассы устройств и даже детализируют принцип компенсационного управления в соответствии с этими видами устройств.

Этот принцип используется при планировании на предприятиях: при разработке планов учитывается, что производительность труда зависит от износа оборудования, от квалификации рабочих, смены и т.п., и при расчете времени на выполнение плановых заданий вводятся соответствующие корректировки в форме коэффициентов износа оборудования, коэффициентов сменности и т.п.

3. Принцип обратной связи или управление по отклонению.

Принцип иллюстрируется . Получаемые значения  $y_{\text{вых}}$  корректируются на основе измерения отклонений  $\Delta u$  от требуемого результата  $u_{\text{треб}}$ , называемого в теории автоматического управления «уставкой».

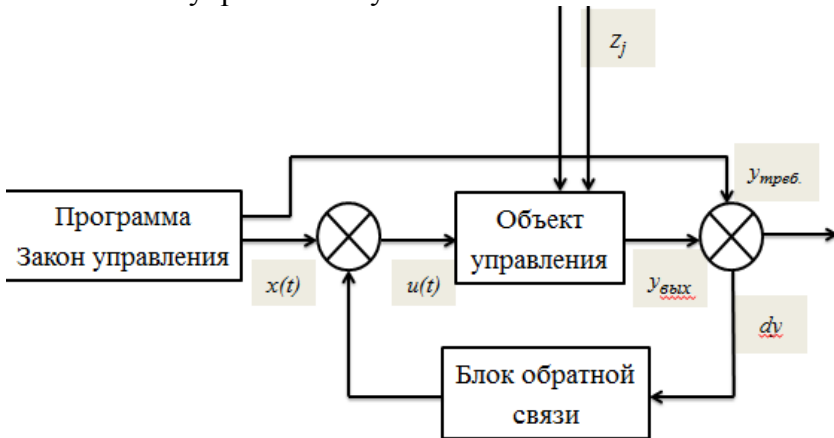


Рисунок 4 – Управление по отклонению

Понятие обратной связи легко иллюстрируется на примерах технических и электронных устройств. Однако при использовании этого понятия применительно к социально-экономическим системам это понятие не всегда верно интерпретируется.

Часто ограничиваются только фиксацией рассогласования  $\Delta u$  между требуемым  $u_{\text{треб}}$  и фактическим  $u_{\text{вых}}$  значением регулируемого параметра, а необходимо учитывать и реализовать все элементы, не забывая замкнуть контур обратной связи, вырабатывая в блоке обратной связи соответствующие управляющие воздействия, которые скорректируют закон управления  $x(t)$ .

Обратная связь может быть:

Отрицательной – противодействующей тенденциям изменения выходного параметра, т.е. направленной на сохранение, стабилизацию требуемого значения параметра (например, стабилизацию выходного напряжения, или в системах организационного управления – количества выпускаемой продукции и т.п.);

Положительной, сохраняющей тенденции происходящих в системе изменений того или иного выходного параметра (что используется при разработке генераторов разного рода, при моделировании развивающихся систем).

Совмещение принципов обратной связи и управления с упреждением.

Для совершенствования управления используют различные способы совмещения принципов управления (рисунок 5). Такая модель является основой адаптации.

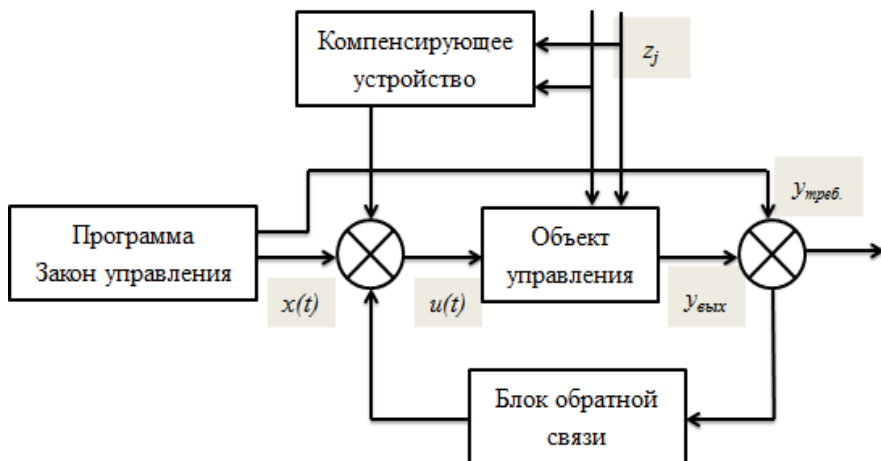


Рисунок 5 – Совмещение принципов управления

Совмещение принципов используют и в социально-экономических системах. Поскольку реализация принципа

обратной связи связана с безработицей и социальными проблемами, при развитии капиталистического строя используются компенсационные механизмы в форме социальных программ (пособие по безработице и т.п.), уменьшающих возможность кризисов.

По принципу обратной связи функционируют основные регуляторы организма человека (при прикосновении к горячему утюгу человек автоматически отдергивает руку и т.п.), такой эффект подобен работе термостата. В последующем, обжегшись или оступившись несколько раз, ребенок приобретает условный рефлекс, оберегающий его от боли, и регуляторы человека начинают работать по принципу, называемому гомеостазом, упрощенной моделью которого может быть сочетание принципов управления, приведенное на рисунке 5.

### **1.3 Процессы управления в социально-экономических и технических системах**

Рассмотренные фундаментальные принципы управления в той или иной форме используются в различных областях управления – от регулирования в технических системах (в английском языке используются термины control, pilot и т.п.) до управления коллективами людей (здесь обобщающий широкий термин управление даже в нашей стране стал заменяться термином менеджмент от английского manage).

В технических системах управляющую подсистему часто называют системой регулирования. Применительно к социально-экономическим системам используют термины система организационного управления и система, реализующая основную деятельность.

Если управление осуществляется сознательно, то управляющая система создается субъектом управления (ис-

пользуется также термин наблюдатель), который формирует цель (цели) управления. Иногда субъект управления отождествляется с управляющей системой, а в качестве цели принимается выполнение программы управления.

Это особенно характерно для социально-экономических систем. Но возможно и в технических (например, в системах телеуправления размещение на объекте управления устройства приема и передачи информации можно относить как к объекту, так и к управляющей системе).

Способы реализации этих принципов наиболее исследованы для управления в технических системах, не включающих социальные или экономические аспекты. А для социально-экономических систем эти принципы в большей мере используются как объяснительные, поскольку практически невозможно в управлении государством исследовать и учесть все многообразные механизмы регулирования – экономические, финансовые, социальные и т.д.

Поэтому в науках об управлении социальными коллективами и сообществами выделяют сферы управления (государством, предприятием, научным или учебным коллективом и т.п.) и для этих сфер разрабатывают более конкретные принципы управления, формы и методы их реализации.

В то же время есть в управлении сложными открытыми системами с активными элементами, и в частности, социально-экономическими системами, некоторые общие принципы и способы управления, которые имеет смысл кратко рассмотреть.

Способы управления государством, предприятием.

Еще в период становления городов-государств Древней Греции возникло два способа управления коллективны-

ми работами и сообществами людей, которые существуют и по сей день:

– «правовое государство» - путем введения правил взаимоотношений между людьми (правил этики, морали, заповедей, законов религии, в последующем – светских законов и правовых норм);

– «тоталитарное государство» с помощью чиновничества (т.е. административного аппарата управления комплексом работ, общиной, городом, районом, государством).

При выборе первого способа управления говорят о «правовом государстве», управляемой системой законов («Власть – закону»), при выборе второго способа – о «тоталитарном государстве», управляемом единоличным диктатором или чиновничьим аппаратом («Власть – монарху» или «Власть – чиновникам»).

В современных условиях существуют, как правило, промежуточные формы, которые и являются предметом дискуссий политических партий, придерживающихся разных принципов по поводу форм и методов управления страной.

Управление с помощью целеобразования основано на закономерности самоорганизации, в соответствии с которой активные элементы, входящие в систему, всегда являются носителями негэнтропийных тенденций. (Энтропия – хаос, неопределенность, негэнтропия – отрицательная энтропия).

На уровне человека и социальных коллективов эта закономерность реализуется с помощью целеобразования.

Если человек ставит цель, чего-то хочет сам, то он непременно стремится это реализовать. Если использовать эту особенность человека как активного элемента социально-экономической системы, его стремление к реализации себя, к самостоятельной постановке своих целей (т.е. к целеобразованию, целеполаганию), то можно говорить о спо-

собе управления, использующем активность личности и ее стремление к целеобразованию.

Способ самоорганизации, самоуправления характерен для творческих профессий. Такой способ управления часто проявляется во время войн. В мирное время труднее использовать этот способ управления.

Термин «управление» в социально-экономических системах трактуется как – планирование, организация, регулирование и т.д. Для реализации этих функций разрабатывают специальные методы и модели. Для обеспечения управления такими системами полезно учитывать «закон необходимого разнообразия» У.Р. Эшби и другие закономерности систем.

Закон «необходимого разнообразия» У.Р. Эшби.

Когда исследователь (лицо, принимающее решение, наблюдатель)  $N$  сталкивается с проблемой  $D$ , решение которой для него неочевидно, то имеет место некоторое разнообразие возможных решений  $V_D$ . Этому разнообразию противостоит разнообразие мыслей исследователя (наблюдателя)  $V_N$ . Задача исследователя заключается в том, чтобы свести разнообразие  $V_D - V_N$  к минимуму, в идеале

$$(V_D - V_N) \rightarrow 0.$$

Эшби доказал теорему, на основе которой формулируется следующий вывод: *«Если  $V_D$  дано постоянное значение, то  $V_D - V_N$  может быть уменьшено лишь за счет соответствующего роста  $V_N$ ... Говоря более образно, только разнообразие в  $N$  может уменьшить разнообразие, создаваемое в  $D$ ; только разнообразие может уничтожить разнообразие».*

Способ управления, основанный на участии в целеобразовании активных элементов (человека, предприятия, региона и т.п.), является перспективным. Но этот способ – самый сложный. Не все люди способны к целеобразованию и стремятся участвовать в формулировании целей. Зарубежные исследователи утверждают, что активных личностей в стране около 10%, а большинство населения готово выполнять цели, поставленные руководством.

Первые два из рассмотренных способов управления основаны на принуждении: административное принуждение и принуждение с помощью установленных законов (второе – более демократичное, но все-таки принуждение).

Основа третьего способа – способность человека, предприятия, региона и т.п. к самоорганизации.

В каждой конкретной ситуации нужно выбирать разумное сочетание этих принципов с учетом необходимости и возможности их реализации.

Сказанное означает, что, создавая систему, способную справиться с решением проблемы, обладающей определенным, известным разнообразием (сложностью), нужно обеспечить, чтобы система имела еще большее разнообразие (знания методов решения), чем разнообразие решаемой проблемы, или была способна создать в себе это разнообразие (владела бы методологией, могла разработать методику, предложить новые методы решения проблемы).

Применительно к системам управления закон «необходимого разнообразия» может быть сформулирован следующим образом: разнообразие управляющей системы (системы управления)  $V_{su}$  должно быть больше (или по крайней мере равно) разнообразию управляемого объекта  $V_{ou}$ :

$$V_{su} > V_{ou} \quad (1)$$



Использование этого закона при разработке и совершенствовании систем управления предприятиями и организациями помогает увидеть причины проявляющихся в них недостатков и найти пути повышения эффективности управления.

Пути совершенствования управления при усложнении производственных процессов

(В.И. Терещенко):

– *увеличение разнообразия системы управления*  $V_{su}$ , что может быть достигнуто путем роста численности аппарата управления, повышения его квалификации, механизации и автоматизации управленческих работ;

– *уменьшение разнообразия управляемого объекта*  $V_{ou}$  за счет установления более четких и определенных правил поведения компонентов системы: унификация, стандартизация, типизация, введение поточного производства, сокращение номенклатуры деталей, узлов, технологической оснастки и т.п.;

– *снижение уровня требований к управлению*, т.е. сокращение числа постоянно контролируемых и регулируемых параметров управляемой системы,

– *самоорганизация объектов управления* путем ограничения контролируемых параметров с помощью создания саморегулирующихся подразделений.

К середине 70-х гг. XX в. первые три пути были исчерпаны, и основное развитие получил четвертый путь на основе более широкой его трактовки – внедрение хозрасчета, самофинансирования, самокупаемости и т.п. В последующем принципы самоорганизации были положены в основу концепции перестройки, перехода к рыночным механизмам саморегулирования экономики.

## 1.4 Модель и моделирование в управлении

Модель (в науке) — это объект-заместитель объекта-оригинала, инструмент для познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает некоторые свойства оригинала.

В качестве модели выступает другой материальный или мысленно представляемый объект, замещающий в процессе исследования объект-оригинал. Соответствие свойств модели исходному объекту характеризуется адекватностью.

Процесс построения и исследования модели называется моделированием.

В современной науке распространены модели в форме описания объекта (предмета, процесса или явления) на каком-либо формализованном языке, составленного с целью изучения его свойств. Такое описание особенно полезно в случаях, когда исследование самого объекта затруднено или физически невозможно.

### Типы моделей

– Предметные модели - обычно являются уменьшенной копией оригинала.

Примеры:

- Глобус как модель Земли;
- Игрушечный автомобиль как модель настоящего.

– Информационные модели - являются описанием объекта естественным языком (вербальная или словесная модель) и формальными системами представления информации (математические, программные и др. модели)

## Виды моделей

– Статические - модели, описывающие состояние системы в определенный момент времени (единовременный срез информации по данному объекту). Примеры моделей: классификация животных, строение молекул, список посаженных деревьев, отчет об обследовании состояния зубов в школе и т.д.

– Динамические - модели, описывающие процессы изменения и развития системы (изменения объекта во времени). Примеры: описание движения тел, развития организмов, процесс химических реакций.

– Функциональные

– Концептуальные

– Топологические отражают взаимные связи между объектами, не зависящие от геометрических свойств объектов.

– Логико-лингвистические

– Семантические

– Теоретико-множественные

– Физические представляют собой аналоговую, в которой между параметрами объекта и модели одинаковой физической природы существует однозначное соответствие. В этом случае элементом системы ставятся в соответствие физические эквиваленты, воспроизводящие структуру, основные свойства и соотношения изучаемого объекта. При физическом моделировании, основой которого является теория подобия, сохраняются особенности проведения эксперимента в природе с соблюдением оптимального диапазона изменения соответствующих физических параметров. Простейшей физической моделью в классической механике является материальная точка.

– Экономические — это формализованное описание экономического процесса или явления, структура которого определяется как его Объективными свойствами, так и субъективным целевым характером исследования.

Структура модели зависит от того, каковы особенности объекта изучения и цели субъекта исследования. Модель всегда балансирует на грани между точностью (приближенностью к реальности) и сложностью построения: Простота-Модель-Реальность.

Математическая модель — это математическое представление реальности.

Математическое моделирование — процесс построения и изучения математических моделей.

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют реальный объект его математической моделью и затем изучают последнюю.

### Определения моделирования

Никакое определение не может в полном объёме охватить реально существующую деятельность по математическому моделированию. Несмотря на это, определения полезны тем, что в них делается попытка выделить наиболее существенные черты.

Определение модели по А.А.Ляпунову (см. Новик И. Б., О философских вопросах кибернетического моделирования. М., Знание, 1964.): моделирование — это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель): находящаяся в некото-

ром объективном соответствии с познаваемым объектом; способная замещать его в определенных отношениях; дающая при её исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте.

По Советову и Яковлеву (Моделирование систем: Учеб. для вузов — 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 2001.— 343 с.): «модель (лат. *modulus*— мера)— это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.» «Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием».

«Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи».

По Самарскому и Михайлову (Самарский А.А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр.. — М.: Физматлит, 2001.), математическая модель — это «„эквивалент“ объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д.» Существует в триадах «модель-алгоритм-программа». «Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах. После того, как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту установлена, с

моделью проводятся разнообразные и подробные „опыты“, дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта.» (с.7-8)

По Севостьянову (Моделирование технологических процессов: учебник / А.Г. Севостьянов, П.А. Севостьянов. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. — 344 с.): «Математической моделью называется совокупность математических соотношений, уравнений, неравенств и т.п., описывающих основные закономерности, присущие изучаемому процессу, объекту или системе.»

Наиболее лаконичное определение математической модели: «Уравнение, выражающее идею», очевидно, является и наименее точным, хотя бы потому, что модель может быть представлена и неравенствами.

## Классификация моделей

### *Формальная классификация моделей*

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств. Часто строится в форме дихотомий, дихотомического или двоичного поиска. Например, один из популярных наборов дихотомий:

- Линейные или нелинейные модели;
- Сосредоточенные или распределённые системы;
- Детерминированные или стохастические;
- Статические или динамические;
- Дискретные или непрерывные.

«В зависимости от характера изучаемых процессов в системе  $S$  все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные. Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, то есть процессы, в ко-

торых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события. ... Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а динамическое моделирование отражает поведение объекта во времени. Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а дискретно-непрерывное моделирование используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.»( Советов Б. Я., Яковлев С. А., Моделирование систем: Учеб. для вузов — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 2001. — 343 с.)и так далее. Каждая построенная модель является линейной или нелинейной, детерминированной или стохастической, ... Естественно, что возможны и смешанные типы: в одном отношении сосредоточенные (по части параметров), в другом — распределённые модели и т.д.

*Классификация по способу представления объекта*

Наряду с формальной классификацией, модели различаются по способу представления объекта:

– Структурные модели представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования.

– Функциональные модели не используют таких представлений и отражают только внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта. В их предельном выражении они называются также моделями «черного ящика». Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика».

*Содержательные и формальные модели*

Практически все авторы, описывающие процесс математического моделирования, указывают, что сначала

строится особая идеальная конструкция, содержательная модель. Устоявшейся терминологии здесь нет, и другие авторы называют этот идеальный объект концептуальная модель, умозрительная модель или предмодель. При этом финальная математическая конструкция называется формальной моделью или просто математической моделью, полученной в результате формализации данной содержательной модели (предмодели).

Построение содержательной модели может производиться с помощью набора готовых идеализаций, как в механике, где идеальные пружины, твёрдые тела, идеальные маятники, упругие среды и т. п. дают готовые структурные элементы для содержательного моделирования. Однако в областях знания, где не существует полностью завершённых формализованных теорий (передний край физики, биологии, экономики, социологии, психологии, и большинства других областей), создание содержательных моделей резко усложняется.

#### *Содержательная классификация моделей*

В работе Р. Пайерлса (англ. R. Peierls) дана классификация математических моделей, используемых в физике и, шире, в естественных науках. В книге А. Н. Горбана и Р. Г. Хлебопраса эта классификация проанализирована и расширена. Эта классификация сфокусирована, в первую очередь, на этапе построения содержательной модели. В основе содержательной классификации — этапы, предшествующие математическому анализу и вычислениям.

Восемь типов моделей по Р. Пайерлсу суть восемь типов исследовательских позиций при моделировании

1. Гипотеза (такое могло бы быть)
2. Феноменологическая модель (ведем себя так, как если бы...)
3. Приближение (что-то считаем очень большим или очень малым)



4. Упрощение (опустим для ясности некоторые детали)
5. Эвристическая модель (количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела)
6. Аналогия (учтём только некоторые особенности)
7. Мысленный эксперимент (главное состоит в опровержении возможности)
8. Демонстрация возможности (главное — показать внутреннюю непротиворечивость возможности)

Тип 1: Гипотеза (такое могло бы быть)

Эти модели «представляют собой пробное описание явления, причем автор либо верит в его возможность, либо считает даже его истинным». По Р. Пайерлсу это, например, модель Солнечной системы по Птолемею и модель Коперника (усовершенствованная Кеплером), модель атома Резерфорда и модель Большого взрыва.

Никакая гипотеза в науке не бывает доказана раз и навсегда. Очень чётко это сформулировал Ричард Фейнман: «У нас всегда есть возможность опровергнуть теорию, но, обратите внимание, мы никогда не можем доказать, что она правильна. Предположим, что вы выдвинули удачную гипотезу, рассчитали, к чему это ведет, и выяснили, что все ее следствия подтверждаются экспериментально. Значит ли это, что ваша теория правильна? Нет, просто-напросто это значит, что вам не удалось ее опровергнуть.»

Если модель первого типа построена, то это означает что она временно признаётся за истину и можно сконцентрироваться на других проблемах. Однако это не может быть точкой в исследованиях, но только временной паузой: статус модели первого типа может быть только временным.

Тип 2: Феноменологическая модель (*ведем себя так, как если бы...*)

Феноменологическая модель содержит механизм для описания явления. Однако этот механизм недостаточно убедителен, не может быть достаточно подтвержден имеющимися данными или плохо согласуется с имеющимися теориями и накопленным знанием об объекте. Поэтому феноменологические модели имеют статус временных решений. Считается, что ответ всё ещё неизвестен и необходимо продолжить поиск «истинных механизмов». Ко второму типу Пайерлс относит, например, модели теплорода и кварковую модель элементарных частиц.

Роль модели в исследовании может меняться со временем, может случиться так, что новые данные и теории подтвердят феноменологические модели и те будут повышены до статуса гипотезы. Аналогично, новое знание может постепенно прийти в противоречие с моделями-гипотезами первого типа и те могут быть переведены во второй. Так, кварковая модель постепенно переходит в разряд гипотез; атомизм в физике возник как временное решение, но с ходом истории перешёл в первый тип. А вот модели эфира, проделали путь от типа 1 к типу 2, а сейчас находятся вне науки.

Идея упрощения очень популярна при построении моделей. Но упрощение бывает разным. Пайерлс выделяет три типа упрощений в моделировании – см. тип 3, 4, 5.

Тип 3: Приближение (*что-то считаем очень большим или очень малым*)

Если можно построить уравнения, описывающие исследуемую систему, то это не значит, что их можно решить даже с помощью компьютера. Общепринятый прием в этом случае — использование приближений (моделей типа 3). Среди них модели линейного отклика. Уравнения заменяются линейными. Стандартный пример — закон Ома.

Если мы используем модель идеального газа для описания достаточно разреженных газов, то это — модель типа 3 (приближение). При более высоких плотностях газа тоже полезно представлять себе более простую ситуацию с идеальным газом для качественного понимания и оценок, но тогда это уже тип 4.

Тип 4: Упрощение (*опустим для ясности некоторые детали*)

В модели отбрасываются детали, которые могут заметно и не всегда контролируемо повлиять на результат. Одни и те же уравнения могут служить моделью типа 3 или 4 — это зависит от явления, для изучения которого используется модель. Так, если модели линейного отклика применяются при отсутствии более сложных моделей (то есть не производится линеаризация нелинейных уравнений, а просто ищутся линейные уравнения, описывающие объект), то это уже феноменологические линейные модели, и относятся они к следующему типу 4 (все нелинейные детали «для ясности» опускаем).

Примеры: применение модели идеального газа к неидеальному, уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, большинство моделей физики твердого тела, жидкостей и ядерной физики. Путь от микроописания к свойствам тел (или сред), состоящих из большого числа частиц, очень длинен. Приходится отбрасывать многие детали. Это приводит к моделям 4-го типа.

Тип 5: Эвристическая модель (*количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела*)

Эвристическая модель сохраняет лишь качественное подобие реальности и даёт предсказания только «по порядку величины». Типичный пример — приближение средней длины свободного пробега в кинетической теории. Оно даёт

простые формулы для коэффициентов вязкости, диффузии, теплопроводности, согласующиеся с реальностью по порядку величины.

Но далеко не сразу получается модель, дающая хотя бы качественное описание объекта — модель пятого типа. В этом случае часто используют модель по аналогии, отражающую действительность хоть в какой-нибудь черте.

Тип 6: Аналогия (*учтём только некоторые особенности*)

Р. Пайерлс приводит историю использования аналогий в первой статье В. Гейзенберга о природе ядерных сил. «Это произошло после открытия нейтрона, и хотя сам В. Гейзенберг понимал, что можно описывать ядра состоящими из нейтронов и протонов, он не мог все же избавиться от мысли, что нейтрон должен в конечном счете состоять из протона и электрона. При этом возникала аналогия между взаимодействием в системе нейтрон — протон и взаимодействием атома водорода и протоном. Эта-то аналогия и привела его к заключению, что должны существовать обменные силы взаимодействия между нейтроном и протоном, которые аналогичны обменным силам в системе  $H - H^+$ , обусловленным переходом электрона между двумя протонами. Позднее было все-таки доказано существование обменных сил взаимодействия между нейтроном и протоном, хотя ими не исчерпывалось полностью взаимодействие между двумя частицами. Но, следуя все той же аналогии, В. Гейзенберг пришёл к заключению об отсутствии ядерных сил взаимодействия между двумя протонами и к постулированию отталкивания между двумя нейтронами. Оба последних вывода находятся в противоречии с данными более поздних исследований».

Тип 7: Мысленный эксперимент (*главное состоит в опровержении возможности*)

А. Эйнштейн был одним из великих мастеров мысленного эксперимента, один из которых был придуман в юности и, в конце концов, привел к построению специальной теории относительности.

Тип 8: Демонстрация возможности (*главное — показать внутреннюю непротиворечивость возможности*)

Это тоже мысленные эксперименты с воображаемыми сущностями, демонстрирующие, что предполагаемое явление согласуется с базовыми принципам и внутренне непротиворечиво. В этом основное отличие от моделей типа 7, которые вскрывают скрытые противоречия. Один из самых знаменитых таких экспериментов — геометрия Лобачевского (Лобачевский называл её «воображаемой геометрией»).

При уточнении модели сложность её математического исследования может существенно возрасти и сделать модель фактически бесполезной. Зачастую более простая модель позволяет лучше и глубже исследовать реальную систему, чем более сложная (и, формально, «более правильная»).

### **Прямая и обратная задачи математического моделирования**

Прямая задача: структура модели и все её параметры считаются известными, главная задача — провести исследование модели для извлечения полезного знания об объекте. Какую статическую нагрузку выдержит мост? Как он будет реагировать на динамическую нагрузку (например, на марш роты солдат, или на прохождение поезда на различной скорости), как самолёт преодолеет звуковой барьер, не развалится ли он. Постановка правильной прямой задачи (задание правильного вопроса) требует специального мастерства. Если не заданы правильные вопросы, то мост может обрушиться, даже если была построена хорошая модель для его поведения. Так, в 1879 г. в Великобритании обрушился металлический Мост через реку Тей, конструкторы которого

построили модель моста, рассчитали его на 20-кратный запас прочности на действие полезной нагрузки, но забыли о постоянно дующих в тех местах ветрах. И через полтора года он рухнул.

Обратная задача: известно множество возможных моделей, надо выбрать конкретную модель на основании дополнительных данных об объекте. Чаще всего, структура модели известна, и необходимо определить некоторые неизвестные параметры. Дополнительная информация может состоять в дополнительных эмпирических данных, или в требованиях к объекту (*задача проектирования*). Дополнительные данные могут поступать независимо от процесса решения обратной задачи (*пассивное наблюдение*) или быть результатом специально планируемого в ходе решения эксперимента (*активное наблюдение*).

Одним из первых примеров виртуозного решения обратной задачи с максимально полным использованием доступных данных был построенный И Ньютоном метод восстановления сил трения по наблюдаемым затухающим колебаниям.

Для поддержки математического моделирования разработаны системы компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB, VisSim и др. Они позволяют создавать формальные и блочные модели как простых, так и сложных процессов и устройств и легко менять параметры моделей в ходе моделирования. Блочные модели представлены блоками (чаще всего графическими), набор и соединение которых задаются диаграммой модели.

## **ТЕМА 2. МОДЕЛИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Вопросы

1. Элементы и условия процесса управления
2. Основные типы задач управления
3. Математическая теория оптимальных процессов, оптимальное управление
4. Принцип максимума Л.С. Понтрягина
5. Техническая реализация оптимального управления

### **2.1 Элементы и условия процесса управления**

Управление является одной из важнейших проблем жизни и развития человеческого общества. При этом следует прямо сказать, что это одна из трудоёмких и сложных областей человеческой деятельности. Не совершенствовать управление человечество не может, ибо, как показывают расчеты академика В.М. Глушкова, это приведёт к тому, что просто не хватит людей для решения задач управления. За последние 100 лет производительность труда в промышленности возросла в 15 раз, а в сфере управления только в 2 раза. Если не механизировать обработку информации, то на этих работах придется занять всё взрослое население страны.

Виктор Михайлович Глушков (1923 – 1982гг.) математик, академик АН СССР (1964г.) и АН УССР (1961г.). Организатор и первый директор Института кибернетики АН УССР (с 1962 г.). Основные труды по теоретической и прикладной кибернетике: теория цифровых автоматов, автоматизация проектирования ЭВМ, применение методов кибернетики в народном хозяйстве. Среди последних – дистанционное компьютерное управление конвертерным цехом металлургического завода и химическим производством, оп-

тимальный раскрой стальных листов на судостроительных верфях и т.д. Автор идеи однократного ввода данных в системы обработки информации, лежащей в основе его же «бесбумажной технологии учета». Ленинская премия в 1964 г., Государственная премия СССР в 1968 г. и 1977 г. Герой Соц. Труда, 1969 г. Депутат Верховного Совета СССР с 1970 г.

Управление представляет собой такую организацию того или иного процесса, которая обеспечивает достижение определенных целей.

Это лишь общее приближение к определению понятия управления, само определение уточним несколько позже. Чтобы понять основные принципы управления, рассмотрим, например, процесс управления автомобилем. Сидя за рулём, водитель видит перед собой дорогу и находящиеся на ней предметы, наблюдает, куда идёт машина, и на основании этого принимает решение, надо ли менять направление машины и если надо, то куда и на сколько следует повернуть руль. Анализируя этот процесс управления, выделим основные следующие элементы:

– Во-первых, получение информации о направлении, в котором должна идти машина, т.е. о задаче управления.

– Во-вторых, получение информации о результатах управления. Водителю не достаточно видеть перед собой дорогу, он должен видеть, куда идёт машина. Эту информацию он получит с помощью зрения.

– В-третьих, анализ полученной информации и принятие на основе этого анализа решения о необходимых управляющих действиях.

– В-четвёртых, исполнение этого решения.

Эти четыре элемента составляют основу всякого управления. Если исключить хотя бы одну из них, то управление станет невозможным.

Элементы процесса управления:



- получение информации о задачах управления;
- получение информации о результатах управления (о поведении объекта управления);
- анализ полученной информации и выработка решения;
- исполнение решения (осуществление управляющих воздействий).

В соответствии с этими четырьмя элементами для организации процесса управления необходимо иметь:

- источники информации о задачах управления;
- источники информации о результатах управления;
- устройство для анализа получаемой информации и выработки решений;
- исполнительное устройство осуществляющее управление объектом.

### Условия управления

- наличие причинно-следственных связей между элементами системы;
- динамичность системы - управляемый объект должен переходить из одного состояния в другое. Там где нет выбора, нет, и не может быть управления.
- наличие параметра, при воздействии на который, изменяется ход преобразований управляемого объекта (нельзя было бы управлять производством молока, если бы затраты кормов, труда и т.д. не изменяли продуктивности коровы).
- отзывчивость на сигналы управления – способность управляемого объекта претерпевать значительные энергетические или пространственно-временные изменения под воздействием малых управляющих воздействий. Объект должен быть способен отзываться на сигнал, иначе управление невозможно.

Теперь уточним определение понятия управления.

«Управление - это целенаправленное, принудительное воздействие на объект, из множества возможных воздействий на основе информации о состоянии внешней среды, объекта и программы управления, осуществляемое в целях обеспечения необходимого его функционирования и развития». В кибернетике принято, что управление состоит в постоянном воздействии на динамическую систему, вызывающем целенаправленные преобразования. Всякий процесс управления подразумевает наличие объекта управления и управляющего устройства.

Совокупность объекта управления и управляющего устройства образует собой систему управления.

Для того чтобы управлять каким-либо объектом, необходимо определенным образом изменять управляющие воздействия на этот объект. Такое изменение управляющих воздействий может осуществляться при помощи сигналов управления, несущих сообщения о требуемых значениях управляющих воздействий.

Совокупность элементов системы, вырабатывающая сигналы управления называется управляющим устройством.

Если требуемое поведение, условия работы объекта, а также его свойства заранее известны, то в управляющее устройство может быть заранее введена информация о последовательности управляющих воздействий в виде программы управления.

В других случаях, когда заранее неизвестны все данные, необходимые для составления программы управления, формирование управляющих воздействий может быть организовано в управляющем устройстве на основе информации об обстановке, складывающейся в процессе функционирования системы.

Такой информацией могут служить данные о состоянии управляемой системы, о требуемом ее состоянии, о

возмущающих воздействиях, о характеристиках управляемой системы.

Переработка этой информации в управляющем устройстве по определенным правилам может служить для формирования управляющих воздействий.

Совокупность правил, по которым информация, поступающая в управляющее устройство, перерабатывается в сигналы управления, называется *алгоритмом управления*.

Процесс управления можно представить так. На основе информации о фактическом и требуемом состоянии системы орган управления, по определенным правилам выработывает результативную информацию, которая содержит распоряжения, команды, сигналы о необходимых воздействиях на вход, с тем, чтобы вывести выход системы в заданное состояние.

Управляющее воздействие оказывается с помощью управляющей величины, т.е. всего того, что вызывает в системе положительные изменения, соответствующие цели управления. *Управляемой величиной* называют такую величину, для поддержания которой на заданном уровне или для изменения которой во времени, по определенному закону действует система управления.

В сельском хозяйстве, например, управляемыми величинами являются показатели реализации продукции, себестоимость продукции, прибыль предприятия, фонд оплаты труда и т.д. Однако не все величины, воздействующие на систему, являются управляемыми. Неуправляемыми величинами являются такие, использование которых не может быть осуществлено управляющей системой. К неуправляемым величинам относятся пока погодные условия (ураган, землетрясения, извержение вулкана, грозы, ливни), движение небесных тел, процессы, происходящие на солнце и т.д.

Необходимость управления обуславливается возмущающими воздействиями, которые выводят систему из заданного состояния.

Рассмотрим принципиальную модель системы управления (рисунок 6)

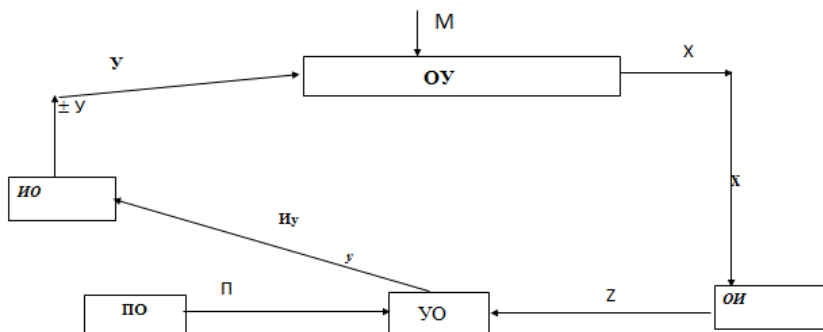


Рисунок 6 – Модель системы управления

Условные обозначения:

- Z – полученная информация о состоянии выхода,
- ОУ – объект управления (управляемый объект)
- УО – управляющий орган
- У – вход системы
- X – выход системы
- ОИ – орган измерения информации о состоянии вы-  
хода
- ИО – исполнительный орган
- Иу – сигнал управления или управляющее воздейст-  
вие
- ПО – программный орган
- M – возмущающие воздействия внешней среды
- П – программная информация
- $\pm y$  – воздействие на вход,
- $\pm x$  – отклонение выхода.

## 2.2 Основные типы задач управления

В системах управления решаются четыре основных типа задач управления:

1. Задачи стабилизации системы.
2. Задачи выполнения программы.
3. Задачи слежения.
4. Задачи оптимизации.

### Основные типы задач управления

- Задачи стабилизации системы;
- Задачи выполнения программы;
- Задачи слежения;
- Задачи оптимизации.

К задачам стабилизации системы относятся задачи поддержания выхода вблизи некоторого заданного значения, несмотря на воздействие возмущений.

Так для нормальной жизнедеятельности организма теплокровного животного должны быть стабилизированы такие величины, как температура тела, состав крови, давление крови, несмотря на изменения внешней среды. В системах энергоснабжения должны быть стабилизированы напряжения и частота тока в сети вне зависимости от изменения потребления электроэнергии.

Вы можете легко привести примеры с газопроводом или же водопроводом, с системой отопления или охлаждения жилых и производственных помещений и т.д.

Задачи выполнения программы возникают, когда значения управляемых величин изменяются во времени заранее известным образом. Например, при управлении баллистической ракетой ее вывод на заданную траекторию

должен происходить по заранее известной программе изменения ее положения в пространстве и скорости. Аналогичная задача возникает в производстве при выполнении работ по заранее намеченному графику.

В биологии ярким примером действий типа "выполнение программы" является развитие организма из яйцеклетки.

Вы легко можете привести примеры задач типа выполнения программы, расчлняя любой производственный процесс на технологические операции или сравнения запланированные или достигнутые показатели.

Например, откорм скота - к каждому времени вес животного должен быть не менее определенной заданной величины и т.д.

Часто встречаются задачи, когда изменения заданных значений управляемых величин заранее неизвестно, то есть эти величины должны изменяться в зависимости от значения других величин. В этих случаях возникает задача слежения, то есть задача как можно более точного соблюдения соответствия между текущим состоянием данной системы и состоянием другой системы.

Например, антенна радиолокатора должна следить за непредвиденными движениями маневрирующего самолета; тракторист, ведущий посевной агрегат должен следовать точно по следу маркера. К задачам слежения относятся задачи управления производством товаров в условиях непредвиденного спроса. Например, производство и снабжение сельскохозяйственной техники запасными частями и т.д. Даже ритм и глубина дыхания должны следовать за изменениями физической нагрузки на организм.

Вполне определенный интерес представляют задачи оптимизации управления.

В общем случае в системах оптимального управления требуется наилучшим образом выполнить поставленную за-

дачу при заданных реальных условиях и ограничениях. Здесь понятие оптимальности должно быть конкретизировано для каждого отдельного случая. Если от системы требуется быстрое действие, оптимальной системой будет такая, в которой при заданных условиях и ограничениях процесс управления протекает наиболее быстро. К задачам оптимизации относятся задачи: оптимального распределения производственных ресурсов, транспортных средств, оптимизации производственных программ, технологических процессов, максимизации прибыли.

### **2.3 Математическая теория оптимальных процессов, оптимальное управление**

Математическая теория оптимальных процессов возникла на базе научных разработок коллектива ученых, возглавляемого академиком Л.С. Понтрягиным, выполненных в период 1956-1961 гг.

Лев Семенович Понтрягин (1908 – 1988 гг.) математик, академик АН СССР (1958). С 1939 г. заведующий отделом Математического института им. Стеклова и одновременно профессор Московского государственного университета. Почетный член многих зарубежных академий и научных обществ. Государственная премия СССР (1941), Ленинская премия (1966). Известен, как создатель математической теории оптимальных процессов, в основе которой лежит так называемый принцип максимума Понтрягина.

Основным понятием математической теории оптимальных процессов является оптимальное управление. Сама теория стимулировалась необходимостью решения задач, возникших в автоматическом регулировании.

Первоначально задачи оптимального управления ставились, решались для систем управления движущимися объектами. Рассмотрим, например, задачу управления само-

летом. Предположим, ставится задача за минимально возможное время попасть из одного города в другой самолетом. Положение самолета в каждый момент времени определяется координатами трехмерного фазового пространства: долготой –  $x_1$ , широтой –  $x_2$ , высотой –  $x_3$ . Управление самолетом, пусть, определяется параметрами: скорость –  $u_1$ , угол рулей высоты –  $u_2$ , положение рулей поворота –  $u_3$ . Это управляющие параметры. Множество значений, которые могут принимать управляющие параметры, называется областью управления  $U$ .

Если известны значения параметров в течение времени  $t_0 \leq t \leq t_1$ , то можно считать заданными функции времени  $U_1(t), U_2(t), \dots, U_r(t)$ .

Векторная функция  $U(t) \{U_1(t), U_2(t), U_3(t)\}$  называется управлением. Зная законы движения самолета, управление  $U(t)$  в заданном интервале времени и начальное положение самолета  $x_0 = \{ \quad \}$  можно рассчитать фазовую траекторию, характеризующую перемещение самолета в пространстве  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ . Задавая различные управления  $U(t)$ , будем получать различные траектории  $x(t)$ , исходящие из точки  $X_0$ . За критерий оптимальности в нашем примере принято минимальное время полета из начального пункта в конечный. Оптимальным управлением будет такое значение  $U(t)$  при котором величина  $t_1 - t_0$  будет минимальной.

Оптимальным управлением называют выбор таких управляющих параметров, которые обеспечивают наилучшее с точки зрения заданного критерия протекания процесса (другими словами – наилучшее поведение системы).

Для управления самолетом у пилота имеются технические средства – рули, кнопки, позволяющие ему, изменяя силу тяги двигателя увеличивать или уменьшать скорость самолета, а положением рулей высоты и поворота изменять положение самолета в пространстве. При решении задач



управления экономическими системами роль рычагов выполняют управляющие параметры, выражающие материальное снабжение, финансирование, информационные потоки, цели, процентные ставки.

Однако, независимо от конкретного содержания и природы управляемой системы, они поддаются математическому описанию.

## 2.4 Принцип максимума Л.С. Понтрягина

Доказано, что оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория в каждый момент времени должны обеспечивать максимум некоторой функции нескольких переменных. Таким образом, поиск оптимального управления сводится к задаче нахождения максимума функции нескольких переменных. Этот критерий оптимальности получил название принципа максимума.

Дадим математическое описание задачи оптимального управления.

Состояние управляемого объекта описывается в  $n$ -мерном пространстве вектором фазовых координат:

$$x=(x_1,x_2 \dots, x_n) \quad (1)$$

Точка  $x$  с фазовыми координатами называется фазовой точкой. Под движением объекта понимается его переход из одного состояния в другое. Линия в фазовом пространстве, которую за некоторое время описывает фазовая точка  $x(t)=\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ , называется фазовой траекторией. Объект является управляемым, если можно влиять на его движение. Воздействие на изменяемые параметры называют управлениями  $U(t)$ , а  $U \subseteq E_2$  область управления.

Пусть изменение фазовых координат объекта описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_n, U_1, \dots, U, t),$$

-----

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, U_1, \dots, U, t). \quad (2)$$

Значение критерия оптимальности управления процессом перехода оценивается функционалом

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), U(t), t) dt. \quad (3)$$

Задача об оптимальном управлении:

В фазовом пространстве  $E_n$  даны две точки  $x^0$  и  $x^1$ . Среди всех допустимых управлений  $U(t)$ , переводящих фазовую точку  $x$  по траектории  $x(t)$ , являющейся решением системы (2), из положения  $x^0$  в положение  $x^1$ , найти такое, для которого функционал принимает экстремальное значение.

Пара векторных функций

$$(\hat{x}(t), \hat{U}(t)),$$

дающих решение задачи, называется оптимальным процессом.

На функции  $f^0(x, U, t), f^1(x, U, t) \dots f_n(x, U, t)$  накладываются условия, обеспечивающие существование решения системы (2) и экстремума функционала на множестве этих решений. Будем предполагать эти функции

непрерывными и имеющими непрерывные частные производные по всем переменным  $x, \dots, x_n, U, \dots, U, t$ .

При этих предположениях справедлива теорема 1 (принцип максимума).

Пусть  $(\hat{x}(t), \hat{U}(t))$ , - оптимальный процесс, тогда существует ненулевая вектор-функция  $\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$  и постоянная  $\psi_0 \leq 0$  такие, что:

1.  $\psi_1(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$  есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\Psi'_1 = - \sum_{i=0}^n f_{x_i}(\hat{x}(t), \hat{U}(t), t) \Psi_2(t),$$

---


$$\Psi'_n = - \sum_{i=0}^n f_{x_n}(\hat{x}(t), \hat{U}(t), t) \Psi_2(t), \tag{4}$$

2. при любом  $t_0 \leq t \leq t_1$  функция

$$H(U) = H(\hat{x}(t), U, \Psi(t), \Psi_0(t) = \Psi_0 f^0(\hat{x}(t), U, t) + \\ + \Psi_1(t) f^1(\hat{x}(t), U, t) + \dots + \Psi_n(t) f^n(\hat{x}(t), U, t)$$

переменных  $u_1, \dots, u_2$  достигает на множестве  $U$  своего максимума при  $U = \hat{U}(t)$ .

$$H(\hat{U}(t)) = \max_{u \in U} H(U)$$

Функция  $H$  называют функцией Гамильтона-Понтрягина. Она является аналогом функции Лагранжа, а  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_n$  - аналогом множителей Лагранжа в теории экстремальных задач.

В теореме 1 моменты  $t_0$  и  $t_1$  предполагаются заданными, то есть время  $t_1 - t_0$  зафиксировано и теорема 1 дает необходимые условия оптимальности для задач с зафиксированным временем.

Время  $t_1 - t_0$  может быть и не задано. Задача о минимизации такого функционала называется задачей об оптимальном быстродействии. Для получения необходимых условий оптимальности для задачи с незакрепленным временем к условиям 1, 2 теоремы 1 надо еще добавить условие

$$H(\hat{x}(t_1), U(t_1), \Psi(t_1) \hat{\Psi}_0, t_1) = 0 \quad (6)$$

Если в задаче точки  $x^0$  и  $x^1$  фиксированы - имеем задачу с зафиксированными концами, а если управление переводит фазовую точку из некоторого заранее не заданного положения  $x_0 \in S_0$  в некоторое положение  $x_1 \in S_1$  и при этом придается наименьшее значение функционалу - задачу называют задачей с подвижными концами. Принцип максимума (теорема 1) остается в силе для задачи с подвижными концами. Однако добавляется еще одно условие, получившее название трансверсальности.

Иногда задача усложняется эффектом запаздывания. Запаздывающий аргумент содержится в фазовых координатах и отсутствует в управлении. Сформулирована и доказана теорема 2 (принцип максимума) которая аналогична теореме 1, но включает все указанные дополнительные условия. Задача может быть усложнена также наличием параметра, ограничениями на фазовые координаты, другим заданием критерия качества функционала и т. д. Постановку более сложных задач и доказательства для них принципа максимума можно найти в специальных работах.

Отметим, что принцип максимума является необходимым условием оптимальности, он помогает сузить класс

управлений, среди которых следует искать оптимальные управления, он выделяет изолированные траектории, удовлетворяющие необходимым условиям. Это значительно облегчает задачу. Имеются и другие достоинства - он применим для любой области допустимых значений, в частности для замкнутого множества управлений. В случае открытых множеств допустимых значений из принципа максимума следуют все известные необходимые условия оптимальности теории вариационного исчисления.

Принцип максимума, точнее, его главный результат можно сформулировать так: для многих управляемых систем может быть построен такой процесс регулирования, при котором само состояние системы в каждый данный момент показывает наилучший, с точки зрения всего процесса, способ действия.

Основная ценность принципа максимума Понтрягина состоит в определении математических условий, необходимых для оптимального управления, причем без предварительного определения оптимальной траектории, а путем последовательного регулирования данного процесса.

Предпринимаются попытки применения принципа максимума для решения экономических задач. Задачи экономики намного сложнее технических задач, так как экономические процессы характеризуются огромным числом фазовых координат, многими управляющими параметрами и т.д.

## 2.5 Техническая реализация оптимального управления

Используя математическую теорию оптимальных процессов, удалось создать ряд устройств для автоматизации управления техническими объектами на оптимальном уровне, что значительно улучшило их технические и экономические показатели.

Различные системы оптимального управления применяются в промышленности, на транспорте, в энергетике, в военной технике.

Можно выделить два варианта реализации управляющего устройства для оптимизации процесса.

Наиболее простой вариант используется в системах, работающих в режиме фиксированных переходов. В таких системах точка, отображающая состояние системы, может находиться в заранее фиксированном начальном и конечном положении, их координаты известны, – имеем задачу с закрепленными концами.

В данном случае программа оптимального управления может быть разработана заранее, записана в памяти управляющего устройства. Процесс управления в таких устройствах сводится к последовательной реализации управляющих воздействий по программе. Понятно, что и здесь могут включаться и другие параметры управления, например, обратная связь о состоянии и т.д. Подобные системы применяются для управления лифтами, подъемниками, эскалаторами, электроприводами станков, экскаваторами, управление разгоном и торможением электровозов и т.п.

Второй вариант устройства управления более сложными системами управления, когда последовательность переходов заранее неизвестна. Такая система управления требует выработки режима своего функционирования с учетом критерия оптимальности и заданных условий, самонастрой-

ку в процессе осуществления управления, а более сложные, более совершенные системы должны обеспечивать адаптацию, самообучение и самоорганизацию системы.

При управлении производственными процессами широко используется экстремальное регулирование. Это один из видов автоматического оптимального управления. Суть его состоит в установлении такого режима объекта, при котором контролируемый параметр имеет максимальное или минимальное значение.

При экстремальном регулировании автоматически решается движение критерия оптимальности к экстремуму и осуществления координации регулируемых координат. В качестве целевой функции обычно принимают такие параметры, как коэффициент полезного действия, производительность устройства или объекта, себестоимость продукции, энергозатраты и т. п.

Контролируемые параметры могут измеряться постоянно и непосредственно, а могут и вычисляться по другим измеряемым параметрам, при этом система может иметь свое вычислительное устройство.

Математическая теория оптимальных процессов – это дисциплина, рассматривающая математические задачи автоматического регулирования, прежде всего, в технических системах (таких как ракета, самолет и т.д.). Но, как отмечает Л.И. Лопатников, экономистами делаются попытки применять некоторые понятия этой теории и к управлению экономическими процессами, в частности, при теоретическом анализе процессов перспективного развития и планирования, при построении и решении задач динамического программирования.

При оптимизации функционирования экономических систем основная идея оптимального автоматического регулирования оказалась приемлемой, так как оно обеспечивает

не только компенсацию возмущений, воздействующих на объект управления, но и обеспечивает поиск оптимальной траектории движения.

Принцип максимума Л.С. Понтрягина, утверждающий, что для многих управляемых систем может быть построен такой процесс регулирования, при котором само состояние системы в каждый данный момент показывает наилучший с точки зрения всего процесса способ действий, находит свое подтверждение при управлении производственными, экономическими и социально-экономическими системами.

Принцип максимума определяет математические условия, необходимые для того, чтобы управление оказалось оптимальным. Задачи экономики намного сложнее технических задач, они характеризуются огромным числом координат, громадным набором параметров, подвержены случайным воздействиям, однако, во многих исследованиях удается оптимизировать управление путем последовательного регулирования процесса.

В экономико-математической модели иногда выделяют управляющие переменные и управляющие параметры.

Под управляющими параметрами понимают те экономические параметры, с помощью сознательного изменения которых удастся менять ход и направление экономических процессов. Управляющие параметры в экономике называют параметрами экономического воздействия или ключевыми стратегическими параметрами, иногда – инструментальными переменными, контролирующими операторами. Обычно управляющие параметры делят на три группы: стабилизаторы, стимуляторы, регуляторы. В литературе термины «параметр модели» и «переменная модели» часто не различают и употребляют под названием «управляющий параметр».



## Управляющие параметры:

- стабилизаторы;
- стимуляторы;
- регуляторы.

С помощью стабилизаторов в модели ограничивают конъюнктурные колебания, чтобы избежать кризисов.

Стимуляторы используют для поддержания темпов развития экономики на заданном уровне или же для повышения темпов экономического роста.

Регуляторы обеспечивают сбалансированность экономики, поддерживают необходимые пропорции.

И управляющие переменные, и управляющие параметры в экономико-математических моделях способны оказывать управляющие воздействия на всю экономическую систему. Управляющее воздействие – это сознательное целенаправленное воздействие, его можно понимать как единичный акт управления. В процессе решения оптимизационной задачи значения управляющих переменных подвергаются изменениям. Найти решение – означает отыскать вектор значений управляющих переменных, при которых будет достигнуто максимальное или минимальное значение целевой функции. Допустимые управления обеспечивают и выполнимость всех ограничений, т.е. всех условий, выдвинутых при постановке задачи.

В отдельных случаях под флагом экономико-математических исследований выполняются схоластические работы математического жанра, абстрагированные от реальной практики, не имеющие приложений, представляющие, по сути, бесплодную игру в математические символы. Вычурные и впечатляющие по форме, они лишены реального содержания. По поводу таких исследований много лет

тому назад высказал свое суждение академик Л.С.Понтрягин, написавший в одной из своих статей: *«Я имею в виду математическую мистификацию практических задач, от которой не бывает пользы ни уму, ни сердцу. В последнее время можно встретить, например, так называемые экономико-математические работы, насыщенные сложной математической символикой, но не содержащие ни одного конкретного численного примера, - непонятные, недоступные и фактически ненужные экономистам, а с точки зрения математиков - представляющие ничтожную ценность, либо вообще не обладающие ею».*

## **ТЕМА 3. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ**

### **Вопросы**

1. Особенности моделирования процессов управления
  2. Основы теории принятия решений и типичные классы задач исследования операций
  3. Роль моделирования в процессе подготовки и принятия управленческих решений
- Математико-компьютерная поддержка и современные методы принятия решений

### **3.1 Особенности моделирования процессов управления**

Математическое моделирование и оптимизация процессов управления - область научно-практической деятельности, получившая мощный стимул к развитию вовремя и сразу после второй мировой войны. Эта тематика развивалась в рамках интеллектуального движения, связанного с терминами «кибернетика», «исследование операций», а позже – «системный анализ», «информатика».

Имелась и вполне практическая задача - контроль качества боеприпасов, вышедшая на первый план именно в годы второй мировой войны. Методы статистического контроля качества приносят наибольший экономический эффект среди всех экономико-математических методов управления. Только дополнительный доход от их применения в промышленности США оценивается как 0,8 % валового национального продукта США, т.е. 24 миллиардов долларов (в ценах 2003 г.)

Математические методы управления можно разделить на несколько групп:

- методы оптимизации;

- методы, учитывающие неопределенность, прежде всего вероятностно-статистические;
- методы построения и анализа имитационных моделей;
- методы анализа конфликтных ситуаций (теории игр).

### Математические методы управления

- методы оптимизации
- методы, учитывающие неопределенность (вероятностно-статистические)
- методы построения и анализа имитационных моделей
- методы анализа конфликтных ситуаций
- (теории игр)

Во всех этих группах можно выделить статическую и динамическую постановки. При наличии фактора времени используют дифференциальные уравнения и разностные методы.

Моделирование процессов управления предполагает последовательное осуществление трех этапов исследования. Первый - от исходной практической проблемы до теоретической чисто математической задачи. Второй – внутриматематическое изучение и решение этой задачи. Третий – переход от математических выводов обратно к практической проблеме.

В области моделирования процессов управления, целесообразно выделять четверки составляющих:

**ЗАДАЧА – МОДЕЛЬ - МЕТОД - УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ.**

Задача, как правило, порождена потребностями той или иной прикладной области. Вполне понятно, что при этом происходит одна из возможных математических формализаций реальной ситуации. Например, при изучении предпочтений потребителей у экономистов - маркетологов

возникает вопрос: различаются ли мнения двух групп потребителей. При математической формализации мнения потребителей в каждой группе обычно моделируются как независимые случайные выборки, т.е. как совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин, а вопрос маркетологов переформулируется в рамках этой модели как вопрос о проверке той или иной статистической гипотезы однородности. Речь может идти об однородности характеристик, например, о проверке равенства математических ожиданий, или о полной (абсолютной однородности), т.е. о совпадении функций распределения, соответствующих двух совокупностям (Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. - М., 2002. – С.132.)

Задача может быть порождена также обобщением потребностей ряда прикладных областей. Одна и та же математическая модель может применяться для решения самых разных по своей прикладной сущности задач.

Важно подчеркнуть, что выделение перечня задач находится вне математики. Выражаясь инженерным языком, этот перечень является сутью технического задания, которое специалисты различных областей деятельности дают специалистам по математическому моделированию.

Метод, используемый в рамках определенной математической модели - это уже во многом, если не в основном, дело математиков. В эконометрических моделях речь идет, например, о методе оценивания, о методе проверки гипотезы, о методе доказательства той или иной теоремы, и т.д. В первых двух случаях алгоритмы разрабатываются и исследуются математиками, но используются прикладниками, в то время как метод доказательства касается лишь самих математиков.

Ясно, что для решения той или иной задачи в рамках одной и той же принятой исследователем модели может быть предложено много методов.

## **3.2 Основы теории принятия решений и типичные классы задач исследования операций**

### Элементы процесса принятия решений

- Цель;
- ЛПП – лицо, принимающее решение;
- Альтернативные решения;
- Измеряемые исходы решений;
- Правила выбора решений.

Любой процесс принятия решений включает следующие элементы:

**Цель.** Необходимость принятия решений определяется целью или несколькими целями. Нет цели – не нужно и решение.

**Лицо, принимающее решение (ЛПП),** должно нести ответственность за последствия этих решений.

**Альтернативные решения.** Для достижения цели должна быть альтернатива решений, различные варианты достижения целей. Нет альтернативы – нет места и для решения, так как нет выбора.

Исходы решений поддаются измерению.

**Правила выбора решений. (Решающие правила).** Эти правила позволяют определить наиболее предпочтительное решение с точки выбранного критерия. Решающее правило отражает информированность лица, принимающего решение, о возможных исходах выбранных решений, а так же предпочтительность тех или иных исходов. Как видим, основой для принятия решений служит информация.

Решением называют выбор возможных управляемых действий. В редких случаях может быть выбрано одно наилучшее решение, которое называют оптимальным. Обычно же речь идет о выделении области разумных, хороших, правильных, добротных решений, из которых делается окончательный выбор наилучшего решения. Бывают случаи, когда оптимальное решение найти не удастся или оно невозможно. Решения состоят из элементов, часть из которых численно фиксированы и изменению не подлежат, другими мы можем распоряжаться по своей воле в каких-то пределах. Решения можно сравнивать по их полезности, эффективности.

Теория принятия решений использует различные процедуры для формализации предпочтения, то есть выражение их в единой количественной мере. Основой таких процедур является теория полезности, разработанная Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном. Ее математическая основа – система аксиом, в которых утверждается, что существует мера ценностей, позволяющая упорядочить результаты решений.

Джон фон Нейман (John von Neumann)

Дата рождения:	28.12.1903
Место рождения:	Будапешт
Дата смерти:	08.02.1957 (53 года)
Место смерти:	Вашингтон

## Задачи принятия решений

В зависимости от условий внешней среды и системы информированности лица существует следующая классификация задач принятия решений:

- в условиях определенности,
- в условиях риска,
- в условиях неопределенности,
- в условиях конфликтных ситуаций или противодействия (активного противника).

Принятие решений в условиях определенности характеризуется однозначной детерминированной связью между принятым решением и его исходом. Основная трудность – наличие нескольких критериев.

Принятие решения в условиях риска возникает в том случае, когда с каждой принимаемой стратегией связано множество возможных результатов с известными вероятностями.

Принятие решений в условиях неопределенности обуславливается тем, что лицу, принимающему решение неизвестно состояние, в котором находится внешняя среда или природа воздействующая на исход.

Существует несколько критериев выбора оптимальной стратегии:

- Критерий Вальда;
- Критерий Гурвица;
- Критерий Лапласа;
- Критерий Сэвиджа.

Критерий Вальда – (максиминный критерий) - критерий осторожного наблюдателя. Критерий крайнего пессимизма. Предложен Абрахамом Вальдом в 1955г. Этот критерий оптимизирует полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном для наблюдателя состоянии. По критерию Вальда выбирают стратегию, которая



дает гарантированный выигрыш при наихудшем состоянии среды.

### Абрахам Вальд

Абрахам Вальд — венгерский математик и статистик. Получил домашнее образование под руководством родителей. Продолжил образование в Венском университете, в 1931 г. стал доктором философии по математике. Эмигрировал в США. В годы Второй мировой войны использовал статистические методы для решения проблемы уменьшения потерь американской боевой авиатехники. В 1950 г. по приглашению индийского правительства читал лекции, погиб в результате авиационной катастрофы в горном массиве Нилгири. Основатель статистического последовательного анализа, в сферу его научных интересов входили теория принятия решений, эконометрика, геометрия, математическая статистика и теория вероятностей. Его имя носят распределение Вальда, тест Вальда, тождество Вальда и другие термины.

Дата рождения:	31.10.1902
Место рождения:	Австро-Венгрия
Дата смерти:	13.12.1950 (48 лет)
Место смерти:	Индия
Научная сфера:	Математика, статистика, экономика

Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью 1 и в самом выгодном — с вероятностью  $1 - \alpha$ , где  $\alpha$  - коэффициент доверия.

Если  $\alpha = 0$  — получаем критерий Вальда.

Если  $\alpha = 1$ , то переходим к стратегии здорового оптимиста (стратегия максимакса), который верит в удачу.

Т.е. по данному критерию выбирается наилучшая стратегия при наихудшем варианте состояния внешней среды с определенным коэффициентом надежды на благоприятный исход событий

## Леонид Гурвич

Нобелевская премия (вместе с Эрик Маскиным и Роджером Маерсоном) - за разработку теории механизмов распределения, которая углубила понимание того, как необходимо формировать оптимальные механизмы с учетом индивидуальной заинтересованности и частной информации. С помощью этой теории можно отделять ситуации, где работают рыночные механизмы, от тех, где эти механизмы не действуют.

Леонид (Леон) Гурвич (Гурвиц) родился в Москве в 1917 г. в семье выходцев из Польши. В 1919 г. семья вернулась в Польшу, где в 1939 Гурвич окончил Варшавский университет. Затем он продолжил обучение в Лондонской школе экономики. Вторая мировая война застала его в Швейцарии, что спасло ему жизнь. Вся семья Гурвича погибла в Освенциме. Позже он перебрался в Португалию, а затем в США. Преподавать в университете Миннесоты он начал в 1951 г., и в 1959 г. занялся научной деятельностью. Ректор университета Роберт Брунинкс сказал о Гурвице так: "Он был неординарным во всем. Не только в своих экономических теориях. Он был ученым эпохи Возрождения, с обширными знаниями во многих дисциплинах, с собственным мнением по любому вопросу, с невероятным остроумием. Он был благороден и тактичен, эти качества притягивали к нему многих людей". Старейший в мире лауреат Нобелевской премии Леонид Гурвиц, умер в возрасте 90 лет. Именем учёного назван предложенный им для теории принятия решений коэффициент оптимизма-пессимизма (в литературе

на русском языке обычно именуется коэффициентом Гурвица, через букву «ц»).

Дата рождения:	21 августа 1917
Место рождения:	Москва, Российская республика
Дата смерти:	24 июня 2008 (90 лет)
Место смерти:	Миннеаполис, Миннесота, США
Страна:	США
Научная сфера:	Экономика
Место работы:	Университет Миннесоты
Альма-матер:	Варшавский университет
Известен как:	Один из основателей теории оптимальных механизмов
Награды и премии	Национальная научная медаль США (1990) Нобелевская премия по экономике (2007)

## Оценка информационной эффективности

Формальную оценку присущих любой конкретной системе требований к передаваемой информации будем производить путем сравнения объемов передаваемых сообщений, как это делалось в предыдущем разделе. Но поскольку необходимо сравнить не только различные типы процедуры итеративного планирования процесса производства, то нам придется несколько изменить использовавшийся ранее подход.

**Критерий Гурвица.** Одним из наиболее распространенных подходов к сравнению требований, предъявляемых к информационному обеспечению в различных системах, был разработан Леонидом Гурвицем. Суть его идеи состоит в сопоставлении количества информации, необходимых для выяснения, является ли эффективным какой-либо конкретный план. Далее, предполагается, что основу системы планирования составляет передача производителям и потребителям расширенных планов. Расширенный план включает в себя собственно план, в котором указаны объемы исходных ресурсов и конечной продукции для всех производителей каждого товара, а также количества каждого из благ, получаемые или поставляемые всеми потребителями. Кроме того, он содержит и некоторую дополнительную информацию, требуемую для проверки эффективности плана. Говоря о передаче, или «трансляции», планов, мы подразумеваем, что любая передаваемая информация становится общедоступной. Приняв транслированный план, каждый отдельный производитель или потребитель оценивает его, используя имеющуюся у него информацию, а затем передает ответное сообщение, содержание которого можно свести к «да» или «нет». Применительно к рассмотренным ранее процедурам согласования это означало бы, что центр объявляет и плановые цены, и плановые объемы производства, а фирмы-производители отвечают «да» в том случае, если их предельные издержки при объявленном объеме производства равны объявленной цене. Вся система должна быть построена таким образом, что получение ответов «да» от всех производителей означает, что данный вариант плана является эффективным.

При таком подходе применим *критерий Гурвица*, согласно которому одна система требует для своего функционирования меньших объемов передачи информации, чем другая, в том случае, если первая система транслирует меньшее число дополнительных переменных (помимо самого плана). Любая система является *информационно-эффективной* в том случае, если ни одна из остальных систем не предусматривает передачи меньшего по сравнению с этой системой количества информации для проверки эффективности некоторого заданного плана.

Этот критерий не является совершенным мерилем количества информации, используемой системой. Самый значительный его недостаток заклю-

чается в том, что он не учитывает как скорость нахождения эффективного распределения ресурсов в различных системах, так и количество информации, передаваемой в ходе этого процесса. В расчет принимается только количество информации, используемой для проверки эффективности уже предложенного распределения ресурсов. Однако на данный момент критерий Гурвица остается единственным средством измерения информационных требований различных систем, эффективность которого была подтверждена детальным анализом.

**Информационная эффективность ценовой системы.** Несмотря на свои недостатки, критерий Гурвица все же позволяет нам прояснить один из аспектов утверждения о том, что ценовая система отличается особенно невысокими требованиями в отношении передачи информации. Приводимая ниже теорема, сформулированная Гурицем, определяет минимальное количество информации, которое должно быть передано при любых условиях в дополнение к плану с тем, чтобы сделать возможной проверку эффективности этого плана. Именно это количество информации и передается в ценовой системе.

*Теорема информационной эффективности.* Предположим, что не существует никакой априорной информации относительно оптимального распределения ресурсов, и с точки зрения любого отдельного производителя или потребителя любое распределение ограниченных ресурсов общества может оказаться эффективным. Предположим также, что каждый производитель лучше, чем кто-либо другой, осведомлен о своем производственном потенциале и что предпочтения каждого потребителя и количества имеющихся у него изначально различных благ известны только ему самому; соответственно ни один отдельно взятый агент не обладает информацией, необходимой для вычисления эффективного распределения ресурсов. При таких условиях любая система, способная обеспечить эффективное распределение ресурсов с использованием расширенных планов, должна передавать помимо плана по меньшей мере по одной дополнительной переменной на каждый отдельный товар и ресурс, за исключением одного.

В частности, в точке состояния конкурентного равновесия ценовая система, в которой передается именно одна дополнительная переменная (цена) на каждый товар или ресурс, следующий за первым,<sup>6</sup> обеспечивает достижение экономической эффективности при минимальном количестве передаваемой информации. Согласно критерию Гурвица, это означает, что ценовая система является информационно-эффективной.

**Интуитивные доводы в поддержку теоремы информационной эффективности.** Чтобы понять, почему этот вывод является справедливым, рассмотрим проблему проверки эффективности распределения ресурсов отдельного плана производителя. На основании имеющихся у него сведений и предложенного плана производитель не может судить об эффективности относящейся к нему части плана, поскольку ему неизвестно, какую ценность могли бы иметь данные ресурсы для других пользователей. Поскольку производитель лучше, чем кто-либо другой, осведомлен о своем производственном потенциале, никто другой не может судить хотя бы о технологической осуществимости плана, не гово-

---

<sup>6</sup> Первый товар считается *всеобщим эквивалентом*. Наличие всеобщего эквивалента позволяет выражать цены всех остальных товаров в единицах этого первого товара. Исторически в роли всеобщего эквивалента часто выступали золото или серебро.

Критерий Лапласа – если неизвестны состояния среды, то все состояния считаются равновероятными.

Пьер-Симон Лаплас (Pierre-Simon Laplace)  
(1749-1827)

Выдающийся французский математик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и особенно в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все отделы этих наук.

Сэвидж, Леонард Джимми  
(Savage, Leonard Jimmie; урожденный Огашевич —  
Ogashevitz)

Американский экономист и статистик. В 1946—50 гг. работал в Чикагском университете, впоследствии профессор в Мичиганском и Йельском университетах. Основное направление научных исследований — математический анализ поведения. В течение Второй мировой войны Сэвидж был ассистентом по статистике Джона фон Неймана.

В 1951 году предложил минимаксный критерий в теории принятия решений — критерий Сэвиджа. Закон 0-1 Хьюита-Сэвиджа в теории вероятностей также носит его имя. Самый известный труд Сэвиджа «Основания статистики» (1954), в котором он предложил теорию субъективной ожидаемой полезности, используемую в байесовской статистике и приложениях теории игр.

Критерий Сэвиджа – критерий минимизации сожалений. Можно по поговорке «пан или пропал».

Сожаление – это величина, равная изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно наилучшего возможного состояния.

Выбор критерия принятия решений является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций. При этом даже если минимальный риск недопустим, то следует принять критерий Вальда. Если наоборот, определенный риск вполне приемлем, и заказчик готов рисковать по максимуму – то выбирают критерий Сэвиджа.

Выбор критерия принятия решений пока формализовать не удается, и принимать решение может только человек. Это относится и к окончательному принятию решения даже в автоматизированных системах. Теория принятия решения является фундаментом науки исследования операций.

Исследование операций – это комплекс научных методов для решения задач управления организационными системами.

Как самостоятельное научное направление исследование операций оформилось в сороковые годы двадцатого столетия. Первые публикации относятся к 1939-1940 гг., в которые методы исследования операций применены для анализа и исследования боевых операций, отсюда возникло и название дисциплины.

Приоритет здесь имеют английская, американская и российская школы.

Большой вклад в их развитие внесли: А. Акоф, Р. Беллман, Д. Данциг, Т. Кун, Р. Черчмен, Дж. фон Нейман, Т. Саати (США), Р. Фор (Франция), Л. В. Канторович, Н. П. Бусленко, Б. В. Гнеденко, Д. Б. Юдин, Н. П. Федоренко, В. М. Глушков.

Исследование операций это новая развивающаяся наука, очертим определившиеся ее грани.

Исследование операций – это наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления организационными системами. Организационные системы это совокупности элементов предназначенные для достижения определенных целей.

Системы организационного управления или по-другому организации, состоят из подразделений, причем взаимодействующие подразделения могут иметь как согласованные, так и противоположные интересы.

Цель исследования операций – количественное обоснование принимаемых решений по управлению организациями. Решение, которое оказывается наиболее выгодным для всей организации, называется оптимальным, а решение, наиболее выгодное одному или нескольким подразделениям – будет субоптимальным.

Операцией называют сложный процесс с ярко выраженной целью или, по-другому, совокупность действий, направленных на достижение некоторой цели.

Из определения вытекает, что операцией можно назвать любую совокупность действий, направленную на достижение цели. Здесь важно, что действия совершаются по замыслу, то есть они управляемые, а значит, имеется много возможных способов достижения цели. Собственно имеется не просто совокупность случайных событий, а совокупность управляемых действий для достижения цели.

### Особенности исследования операций

Характерной особенностью методов исследования операций является системный подход к анализу решаемой проблемы. Любая задача, какой частной она бы не казалась на первый взгляд, рассматривается с точки зрения ее влияния на критерий функционирования всей системы.



Исследование операций часто состоит в расчленении проблемы на цепочку взаимосвязанных задач, решаемых одна за другой.

Одна из существенных особенностей исследовании операций состоит в стремлении найти оптимальное решение. Однако часто оно оказывается неразрешимым из-за широкого спектра противоречивых ограничений. Тогда приходится ограничиваться «достаточно хорошим решением», мы его назвали субоптимальным. Поэтому исследование операций один из его создателей – Т. Саати – определил, как «искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими методами».

Особенность исследования операций состоит и в том, что они проводятся комплексно, по многим направлениям. Для этой работы создается операционная группа из специалистов разных областей знаний: обычно это экономисты, математики, инженеры, социологи, психологи, юристы, кибернетики – системщики.

### **Этапы операционного исследования**

- постановка задачи;
- построение математической модели;
- анализ решения и корректировка модели;
- реализация решения на практике.

### **Задачи исследования операций**

- распределения ресурсов;
- управления запасами;
- ремонта и замены оборудования;
- массового обслуживания;

- календарного планирования;
- сетевого планирования и управления;
- выбора маршрута;
- задачи поиска;
- конкурентные;
- комбинированные.

**Задачи распределения ресурсов** возникают при организации любого производства. Возможны следующие случаи:

1. Заданы и работы, и ресурсы. Работы здесь трактуются широко – продукты, виды деятельности. Требуется распределить ресурсы между работами так, чтобы минимизировать издержки производства и максимизировать экономический эффект;

2. Заданы только наличные ресурсы. Определить какой состав работ можно выполнить, чтобы получить максимальный эффект;

3. Заданы только работы. Определить, какие ресурсы необходимы для того, чтобы минимизировать издержки производства.

**Задачи управления запасами** состоят в том, что с увеличением объемов запасов сырья, ресурсов возрастают затраты на их хранение, но уменьшаются потери из-за нехватки. Задача управления – определить уровень запасов, минимизирующий затраты на их хранение и потери из-за дефицита. В результате решения задачи получают оптимальный размер заказываемой партии, емкость складских помещений, график заказов. Это самый распространенный и достаточно изученный класс задач.

**Задачи ремонта и замена оборудования** появляется в тех случаях, когда работающее оборудование изнашивается, устаревает и подлежит замене. Здесь, прежде всего выбор – отремонтировать или заменить, когда заменить.

**Задачи массового обслуживания** рассматривают вопросы образования и функционирования очередей. Это и задачи организации конвейера обработки деталей на заводе, и очереди в прямом смысле - очередность обслуживания и многое, многое другое.

**Задачи календарного планирования, составления расписания, задачи упорядочения.** Это отличный и достаточно сложный класс задач. Критерии оптимальности в этих задачах – минимизация затрат времени на выполнение всех работ, минимизация общего запаздывания, выполнение работ против норматива, минимизация потерь от запаздывания и т.п.

**Задачи сетевого планирования и управления (СПУ).** Они актуальны для сложных и дорогостоящих проектов. В основе модели используется граф и его теория, события, работы. Критический путь, резервы времени – основные элементы этой системы.

**Задачи выбора маршрута или сетевые задачи** чаще всего встречаются на транспорте и в системе связи. Кольцевой завоз. По сути, транспортная задача в сетевой постановке.

**Комбинированные задачи** включают в себя несколько типовых моделей одновременно.

Большинство задач организации и управления аграрным производством это комбинированные задачи. Так, в задаче оптимизации кормовой базы оптимизируется и годовой рацион животных, и структура посевных площадей, и зеленый конвейер, и производство кормов, и покупка добавок, и финансовый план, и план производства, и реализации продукции животноводства.

**Задачи поиска – это задачи контроля качества продукции путем выборки,** задачи разведки полезных ископаемых, задачи систем ревизии, библиографии и т.п. Суть задачи в поиске такой информации, которая однозначно оп-

ределила бы решение. Критерием в задаче является  $\min$  затрат на информацию или  $\min$  цены ошибки. В первом случае речь идет о стоимости выборки, во втором – о цене ошибки выборки. При выборке ошибки бывают двух видов – или обнаружат то, что в действительности отсутствует или пропустят то, что есть.

**Задачи поведения людей.** Сущность задачи заключается в определении индивидуальной и коллективной реакции на то или иное воздействие, исходящее из окружающей среды.

Это особый класс задач. Человек является активным и во многом самостоятельным элементом системы. Он обладает сознанием, памятью, волей, он имеет свою цель и способен к сознательному ее изменению.

Различают количественные и качественные модели поведения человека. В свою очередь выделяют: анатомические, сенсорные, психологические модели и математические модели реакции на стимулы.

**Конкурентные или состязательные задачи** это тоже задачи поведения. Они возникают, когда эффективность решения одного лица (или группы лиц) зависит от решения другого лица или группы лиц, или от поведения управляемой системы.

Цель состоит в управлении поведением позволяющего максимизировать выигрыш или минимизировать проигрыш. **Конфликтные ситуации предполагают** наличие, по крайней мере, двух противоположных, противодействующих сторон с разными интересами. Эти задачи составляют проблематику теории игр, а математическая модель конфликтной ситуации представляет собой игру.

### 3.3 Роль моделирования в процессе подготовки и принятия управленческих решений

Процесс подготовки и принятия решений включает три главные стадии:

- концепции,
- проектирования,
- выбора.

Завершает процесс выполнение решения.

Обобщенная схема процесса принятия решений состоит из непрерывного потока действий от концептуальной стадии до проектирования и выбора, но возможны возвраты на предыдущую стадию (обратная связь).

Моделирование является основной частью этого процесса.

Процесс принятия решений начинается на **концептуальной стадии**, где проверяется проблемная область, идентифицируется и определяется задача.

На **стадии проектирования** строится модель, которая представляет и описывает систему. Это делается путем допущений, которые упрощают действительность путем описания отношений между всеми переменными. Затем проверяется адекватность модели и устанавливаются критерии для оценки альтернативных направлений.

На **стадии выбора** осуществляется верификация (от лат. *verus* – истинный и *facio* – делаю, т.е. проверка, эмпирическое подтверждение теоретических положений науки путем сопоставления их с наблюдаемыми объектами, чувственными данными, экспериментом; проверка для получения гарантий соответствия системы своему назначению и точности) и испытание предложенного решения. Если предложенное решение окажется приемлемым, то оно готово для завершающей стадии: **выполнение решения**. Успешный

результат завершает решение исходной задачи. Неудачный ведет к ранним стадиям процесса.

Рассмотрим более детально процесс принятия решений.

**Концептуальная стадия** начинается с определения организационных целей. Задачи возникают, из неудовлетворенности существующим состоянием дел или их развитием. На этой стадии пытаются определить, существует ли проблема, идентифицировать ее признаки, определить ее значимость и в итоге окончательно определить задачу. Часто то, что описывается как проблема, может быть только признаком проблемы. Так как проблемы реального мира обычно усложняются многими взаимосвязанными факторами. Поэтому иногда бывает трудно различать между признаками и действительной проблемой. Действия по классификации задачи представляют собой концептуализацию задачи путем ее классификации и отнесения к определенной категории. Важным признаком классификации является степень очевидной структурированности задачи. Различают две крайние ситуации относительно структурированности задачи принятия решения. На одном конце спектра находится хорошо структурированные задачи, которые являются повторяющимися и рутинными. Для их решения строятся стандартные модели. Их можно назвать программируемыми задачами. На другом конце находятся слабо структурированные или непрограммируемые задачи, которые являются новыми, неповторяющимися и нестандартными. Кроме того существуют частично структурированные задачи между этими двумя крайними позициями спектра.

Многие сложные задачи могут быть разделены на подзадачи в процессе декомпозиции. Решение более простых подзадач может помочь в решении сложной задачи. Кроме того, некоторые слабо структурированные задачи мо-

гут иметь некоторое количество высоко структурированных подзадач.

**Стадия проектирования** влечет порождение, развитие и анализ возможных направлений действия. На этой стадии также строится, испытывается и проверяется модель ситуационной задачи. Моделирование включает концептуализацию задачи и ее абстрагирование в количественной и/или качественной формах. Для математической модели идентифицируются переменные и устанавливаются уравнения, описывающие их отношения. Если необходимо, производятся упрощения путем принятия набора определенных допущений. Однако должно учитываться и соблюдаться правильное равновесие между степенью упрощения модели и ее адекватностью представления действительности.

Задача моделирования представляет собой сочетание искусства и науки. Особенно это относится к имитационным моделям.

Основными вопросами и понятиями, относящимися к количественным моделям (математическим, финансовым и др.) являются:

- компоненты модели;
- структура модели;
- определение принципов выбора (критерии для оценки);
- генерация и развитие альтернатив;
- предсказываемые результаты;
- сценарии.

Граница между стадиями проектирования и выбора часто неразличима, т.к. некоторые действия могут быть совершены как при проектировании, так и на стадии выбора. Кроме того, возможны частые возвраты со стадии выбора на стадию проектирования. **Стадия выбора** включает поиск, оценку и выработку рекомендации по приемлемому реше-

нию на модели. Решение на основе модели - это набор значений переменных для выбранной альтернативы.

Решение на модели это не одно и то же, что решение задачи, которую эта модель представляет. Решение на модели дает рекомендуемое решение задачи. Только если это рекомендуемое решение успешно выполняется, задача может считаться решенной.

Существует несколько основных подходов к реализации поиска на стадии выбора решения, зависящих от критерия выбора. Это оптимизационные методы, слепой поиск и эвристический поиск.

Для аналитических моделей могут использоваться как оптимизационные методы, так и методы полного перебора (сравнение всех альтернатив друг с другом). Для описательных моделей может использоваться метод сравнения ограниченного количества альтернатив, слепой поиск или эвристики.

Здесь необходимо напомнить, что к оптимизационным моделям относятся модели линейного, динамического, нелинейного программирования, сетевые модели планирования и составления расписаний и другие. К описательным моделям относятся анализ информационных потоков, сценарный анализ, финансовое планирование, Марковский анализ, различные типы имитационных моделей, технологическое прогнозирование, модели управления очередями, эвристические модели и др.

Процесс поиска связан с оценкой. *Оценка* является конечным шагом, который ведет к рекомендуемому решению. Основными подходами к оценке альтернатив являются: многоцелевая (или многокритериальная) оценка, анализ чувствительности, что если (what - if) анализ и анализ от цели.

Современные системы управления становятся все более сложными, и одна функциональная цель, например, мак-



симизация прибыли, встречается редко. Менеджеры хотят достигать одновременно нескольких целей, некоторые из которых конфликтуют друг с другом. Поэтому, часто необходимо анализировать каждую альтернативу в свете ее потенциального влияния на несколько целей.

Могут использоваться различные методы и подходы при многокритериальной оценке. Это теория полезности, целевое программирование, выражение целей через ограничения (используя линейное программирование) и др.

Разработчик модели делает предсказания и предположения относительно входных данных, многие из которых имеют дело с оценкой неопределенного будущего. Когда модель реализована и получены решения на модели, то результаты зависят от этих данных. **Анализ чувствительности** осуществляет проверку влияния изменений входных данных или параметров на предполагаемое решение, т.е. результирующую переменную. Анализ чувствительности важен, т.к. он дает возможность гибкости и адаптации и к изменениям условий и к требованиям различных ситуаций принятия решений. Он обеспечивает лучшее понимание модели и ситуации для принятия решения.

**Анализ что - если** можно представить следующим образом: Что случится, произойдет с решением, если входные переменные, допущения или значения параметров изменятся? При допущении приемлемого пользовательского интерфейса, ЛПР легко может задать компьютерной модели вопросы такого типа и получить быстрые ответы. Более того, он может повторить вопрос и изменить процентные соотношения или изменить какие - либо другие данные в вопросе, если пожелает. Все это выполняется напрямую, без помощи программиста.

**Анализ от цели** позволяет вычислять количество входов, необходимых для достижения желаемого уровня выхода, т.е. цели.

Он представляет собой подход 'обратное решение'. Во многих ИСПР бывает трудно проводить анализ чувствительности, т.к. предварительно установленный порядок обычно представляет ограниченные возможности только для постановки вопросов что-если. Поэтому в ИСПР можно легко осуществлять выбор на основе анализа что-если и анализа и поиска решения от цели.

Завершает процесс подготовки и принятия решения стадия выполнения решения.

### **3.4 Математико-компьютерная поддержка и современные методы принятия решения**

В настоящее время менеджер может использовать при принятии решения различные **компьютерные и математические средства**. В памяти компьютеров держат массу информации, организованную с помощью баз данных и других программных продуктов, позволяющих оперативно ею пользоваться. Экономико-математические и эконометрические модели позволяют просчитывать последствия тех или иных решений, прогнозировать развитие событий. Методы экспертных оценок также весьма математизированы и используют компьютеры. Наиболее часто используются оптимизационные модели принятия решений.

Теория принятия решений – быстро развивающаяся наука. Задачи, которыми она занимается, порождены практикой управленческих решений на различных уровнях – от отдельного подразделения или малого предприятия до государств и международных организаций. Рассмотрим только несколько проблем, активно обсуждающихся на современном этапе развития теории принятия решений.

## **Системный подход при принятии решений.**

При обсуждении проблем принятия решений часто говорят о системном подходе, системе, системном анализе. Речь идет о том, что надо рассматривать проблему в целом, а не "выдергивать" для обсуждения какую-нибудь одну черту, хотя и важную. Так, при массовом жилищном строительстве можно "выдернуть" черту - стоимость квадратного метра в доме. Тогда наиболее дешевые дома - пятиэтажки. Если же взглянуть системно, учесть стоимость транспортных и инженерных коммуникаций (подводящих электроэнергию, воду, тепло и др.), то оптимальное решение уже другое - девятиэтажные дома.

Различных определений понятия «система» - десятки. Общим в них является то, что о системе говорят как о множестве, между элементами которого имеются связи. Целостность системы и ее "отделенность" от окружающего мира обеспечиваются тем, что взаимосвязи внутри системы существенно сильнее, чем связь какого-либо ее элемента с любым элементом, лежащим вне системы. По определению действительного члена Российской академии наук Н.Н.Моисеева: "Системный анализ - это дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации различной физической природы".

## **Современные методы принятия решений.**

Кроме упомянутых или кратко рассмотренных выше методов, прежде всего экспертных, при принятии решений применяют весь арсенал методов современной прикладной математики. Они используются для оценки ситуации и прогнозирования при выборе целей, для генерирования множества возможных вариантов решений и выбора из них наилучшего.

Прежде всего, надо назвать всевозможные методы оптимизации (математического программирования). Для борьбы с многокритериальностью используют различные методы свертки критериев, а также интерактивные компьютерные системы, позволяющие вырабатывать решение в процессе диалога человека и ЭВМ. Применяют имитационное моделирование, базирующееся на компьютерных системах, отвечающих на вопрос: "Что будет, если...?", метод статистических испытаний (Монте-Карло), модели надежности и массового обслуживания. Часто необходимы статистические (эконометрические) методы, в частности, методы выборочных обследований. При принятии решений применяют как вероятностно-статистические модели, так и методы анализа данных.

Особого внимания заслуживают проблемы неопределенности и риска, связанных как с природой, так и с поведением людей. Разработаны различные способы описания неопределенностей: вероятностные модели, теория нечеткости, интервальная математика. Для описания конфликтов (конкуренции) полезна теория игр. Для структуризации рисков используют деревья причин и последствий (диаграммы типа "рыбий скелет"). Менеджеру важно учитывать постоянные и аварийные экологические риски. Плата за риск и различные формы страхования также постоянно должны быть в его поле зрения.

### **Проблема горизонта планирования.**

Во многих ситуациях продолжительность проекта не определена либо горизонт планирования инвестора не охватывает всю продолжительность реализации проекта до этапа утилизации. В таких случаях важно изучить влияние горизонта планирования на принимаемые решения.

Рассмотрим условный пример. Предположим, я являюсь владельцем завода. Если горизонт моего планирования - 1 месяц, то наибольший денежный доход я получу, продав предприятие. Если же планирую на год, то я сначала понесу затраты, закупив сырье и оплатив труд рабочих, и только затем, продав продукцию, получу прибыль. Если я планирую на 10 лет, то пойду на крупные затраты, закупив лицензии и новое оборудование, с целью увеличения дохода в дальнейшие годы. При планировании на 30 лет имеет смысл вложить средства в создание и развитие собственного научно-исследовательского центра, и т.д.

Таким образом, популярное утверждение "фирма работает ради максимизации прибыли" не имеет точного смысла. За какой период максимизировать прибыль - за месяц, год, 10 или 30 лет? От горизонта планирования зависят принимаемые решения. Понимая это, ряд западных экономистов отказываются рассматривать фирмы как инструменты для извлечения прибыли, предпочитают смотреть на них как на живые существа, старающиеся обеспечить свое существование и развитие.

Как уже отмечалось, в последние годы все большую популярность получает т.н. **контроллинг** - современная концепция системного управления организацией, в основе которой лежит стремление обеспечить ее долгосрочное эффективное существование. В конкретных прикладных работах успех достигается при комбинированном применении различных методов. Для подготовки решений создаются аналитические центры и "ситуационные комнаты", позволяющие соединять человеческую интуицию и компьютерные расчеты. Все шире используются информационные технологии поддержки принятия решений, прежде всего в контроллинге.

## **ТЕМА 4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ИМИ**

### **Вопросы**

1. Дискретность и непрерывность в теории и практике применения математических моделей
2. Дискретное программирование и символьная модель дискретной задачи
3. Методы решения задач непрерывного и дискретного моделирования

### **4.1 Дискретность и непрерывность в теории и практике применения математических моделей**

Изменение моделируемых величин может рассматриваться с позиций непрерывности и дискретности.

**Дискретность** буквально означает прерывность. Противоположное слово смыслу – **непрерывность**. Например, число студентов в аудитории и во время перерыва, и во время чтения лекции всегда дискретно, хотя во время перерыва одни студенты выходят из аудитории, другие заходят в нее. Здесь изменение численности происходит скачками. А вот температура воздуха в этой же аудитории изменяется плавно и непрерывно. В зависимости от точности прибора температуру можно измерять в любое время и с любой точностью.

**Дискретная система** – это кибернетическая система, все элементы которой, а также связи между ними, т.е. обращающаяся в системе информация, имеют дискретный характер.

Деление систем на непрерывные и дискретные зависит от цели и глубины исследований. При моделировании непрерывных систем их иногда приводят к дискретным.

Процесс в кибернетике — последовательная смена состояний, стадий изменения (развития) системы или иного объекта.

Различают:

- вещественные процессы (например, преобразование сырья в готовый продукт в производстве) и информационные процессы (например, преобразование бухгалтерской информации в связи с указанным производственным процессами);

- управляемые (регулируемые) и неуправляемые процессы;

- детерминированные и случайные (стохастические) процессы;

- дискретные и непрерывные процессы.

Дискретные процессы в математических моделях описываются разностными уравнениями, непрерывные — дифференциальными уравнениями.

**Дифференциальные уравнения** [differential equations] — уравнения, связывающие искомую функцию, ее производные (или дифференциалы), и независимые переменные. Они предназначены для выражения соотношений не только между отдельно взятыми величинами, но и между их изменениями. Это уравнения, в той или иной форме связывающие независимые переменные, искомые функции и их производные.

Уместно вспомнить, что **производной функции**  $y=f(x)$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta y = y_1 - y_0$  к приращению аргумента  $\Delta x = x_1 - x_0$  при приращении аргумента, стремящемся к нулю  $\Delta x \rightarrow 0$  (если этот предел существует).

Производная обозначается  $f'(x)$  или  $y'$ ; таким образом  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**Дифференциалом функции**  $y=f(x)$  называется выражение  $dy = y' dx$ , где  $dx = \Delta x$  – приращение аргумента. Очевидно, что  $y' = \frac{dy}{dx}$ , поэтому данное отношение часто употребляют как знак производной. Вычисление производных и дифференциалов называют **дифференцированием**. Если производная имеет, в свою очередь, производную, то ее называют второй производной.

**Решением или интегралом** дифференциального уравнения называется функция, при подстановке которой в дифференциальное уравнение последнее обращается в тождество. Процесс решения дифференциального уравнения называют его **интегрированием**. Интегрирование (нахождение интеграла) – действие обратное дифференцированию: по данной непрерывной функции ищется первообразная функция, для которой  $f(x)$  является производной.

Интегрирование в систематической форме было предложено в 17 в. Ньютоном и Лейбницем.



## Исаак Ньютон

Английский физик, математик и астроном. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

Дата рождения:	25 декабря 1642 (4 января 1643)
Место рождения:	Вулсторп, Линкольншир, Королевство Англия
Дата смерти:	20 марта 1727 (31 марта 1727) (84 года)
Место смерти:	Кенсингтон, Мидлсекс, Англия, Королевство Великобритания
Страна:	Королевство Англия Королевство Великобритания
Научная сфера:	физика, математика, астрономия
Альма-матер:	Кембриджский университет (Тринити-колледж)

## Готфрид Вильгельм Лейбниц

Немецкий философ, логик, математик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Важнейшие научные достижения: независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисление, создал комбинаторику как науку; только он во всей истории математики одинаково свободно работал как с непрерывным, так и с дискретным, заложил основы математической логики, ввёл понятие кинетической энергии и сформулировал закон сохранения энергии. Выдвинул в психологии развил учение о бессознательной психической жизни, создал философскую систему монадология, развил учение об анализе и синтезе , описал двоичную систему счисления, ввёл термин «модель» , писал о возможности машинного моделирования функций человеческого мозга.

Дата рождения:	1 июля 1646
Место рождения:	Лейпциг, Саксония, Германия, Священная Римская империя
Дата смерти:	14 ноября 1716 (70 лет)
Место смерти:	Ганновер, Брауншвейг-Люнебург, Германия,
Научная сфера:	философия, логика, математика, физика, история, лингвистика

Общее выражение первообразных непрерывной функции называется **неопределенным интегралом**, он обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Сам знак интеграла возник из первой буквы *S* латинского слова *Summa*, что связано с понятием определенного интеграла. Определенным интегралом непрерывной функции  $f(x)$  на отрезке, разделенном точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  называется предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

при условии, что наибольшая разность  $\Delta x_i \rightarrow 0$  и число точек деления неограниченно увеличивается; его

обозначают  $\int_a^b f(x)dx$

Например, решением дифференциального уравнения  $dy=2x dx$  является всякая функция вида  $x^2+C$ , где  $C$  — любая постоянная.

Решение (интегрирование) дифференциальных уравнений заключается в отыскании функции, которая удовлетворяет этому уравнению для всех значений независимой переменной (или переменных) в определенном конечном или бесконечном интервале. Такое решение может быть проверено подстановкой.

Если неизвестная функция зависит от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**; если рассматривается функция многих переменных и в уравнении содержатся частные производные — уравнением в частных производных (с частными производными). Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков производных или дифференциалов, входящих в уравнение.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Общий вид решения обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка можно записать так:

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Здесь  $c_1, c_2$  и т.д. — произвольные постоянные (постоянные интегрирования), каждый частный набор которых дает частное решение.

Обычно в результате интегрирования получают не одно решение, а семейство решений (семейство интегральных кривых), зависящее от произвольной постоянной, его называют **общим решением** или **общим интегралом**. Количество произвольных постоянных совпадает с порядком дифференциального уравнения. Решение, содержащееся в формуле общего решения и получающееся из нее при конкретном (допустимом) значении произвольной постоянной, является **частным решением**.

**Линейным** называется дифференциальное уравнение, содержащее искомую функцию и ее производные только в первой степени в виде линейной комбинации этих величин. Уравнения, не приводящиеся к такому виду, называются **нелинейными**.

Примеры линейных уравнений	Примеры нелинейных уравнений
$y' + y = 0$	$y' + y = ty^2$
$y'' + 9y = t^2 e^{it}$	$y'' + 9y^2 = t^2 e^{it}$

**Линейные** дифференциальные уравнения хорошо изучены, для их решения имеется обширный **аналитический аппарат**. **Нелинейные** дифференциальные уравнения допускают аналитическое решение только в некоторых частных случаях, в подавляющем большинстве они решаются **численно**.

Таким образом, дифференциальные уравнения сами по себе, без наложенных дополнительных ограничений описывают целые классы функций. Если речь идет об обыкновенном уравнении  $n$ -го порядка (т.е. об уравнении, содержащем производную  $n$ -го порядка), то решение содержит ровно  $n$  произвольных постоянных. Для того чтобы выделить из этого класса единственное решение, обычно необходимо задать  $n$  дополнительных ограничений на функцию.

Задача об отыскании частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным данным, называется **задачей Коши**.

### **Огюстен Луи Коши**

Великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего  $n$  граничным условиям, заданным в граничных точках  $a$  и  $b$ , называется **краевой задачей**.

Например, дифференциальные уравнения позволяют определять поведение решения всюду, где оно существует, если заданы начальные условия, т. е. значения функции и ее производных в начальной точке. В огромном числе случаев законы природы и общества, управляющие теми или иными процессами, могут быть выражены в форме дифференциальных уравнений, а расчет течения этих процессов сводится к решению таких уравнений.

**Разностные уравнения** [difference equations] — уравнения, содержащие конечные разности искомой функции. Другие названия разностных уравнений — алгебраические уравнения, уравнения в конечных разностях, возвратные последовательности.

Конечная разность определяется как соотношение, связывающее дискретный набор значений функции  $y = f(x)$ , соответствующих дискретной последовательности аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

В экономических исследованиях значения величин часто берутся в определенные дискретные моменты времени. Например, о выполнении плана судят по показателям на конец планируемого периода. Поэтому вместо скорости изменения какой-либо величины  $df/dt$  приходится брать среднюю скорость за определенный конечный интервал времени  $\Delta f/\Delta t$ . Если выбрать масштаб времени так, что длина рассматриваемого периода равна 1, то скорость изменения величины можно представить как разность

$$y = y(t+1) - y(t),$$

которую часто называют **первой разностью**.

При этом различают правую и левую разности, в частности

$y = y(t) - y(t-1)$  — левая, а приведенная выше — правая.

Можно определить **вторую разность**:

$\Delta(\Delta y) = \Delta y(t + 1) - \Delta y(t) = y(t + 2) - 2y(t + 1) + y(t)$  и **разности высших порядков  $\Delta^n$** .

Теперь можно определить разностное уравнение как уравнение, связывающее между собой конечные разности в выбранной точке:

$$f[y(t), \Delta y(t), \dots, \Delta^n y(t)] = 0.$$

Разностные уравнения всегда можно рассматривать как соотношение, связывающее значения функции в ряде соседних точек

$$y(t), y(t+1), \dots, y(t+n).$$

При этом разность между последним и первым моментами времени называется **порядком уравнения**.

Как и дифференциальные, разностные уравнения подразделяются на линейные и нелинейные, на однородные и неоднородные, на уравнения с постоянными и переменными коэффициентами

Отличие разностных уравнений от дифференциальных состоит в том, что дифференциальные уравнения связывают значение функции и производных от нее в один и тот же момент времени, а разностные уравнения - значения функции в различные моменты времени.

Принято выделять **непрерывные и дискретные математические модели**. Такую классификацию строят по виду исходной информации и характеру возможных изменений переменных величин модели.

Если информация и параметры являются непрерывными, а математические связи устойчивы, то модель - **непрерывная**. И наоборот, если информация и параметры - дискретны, а связи неустойчивы, то и **математическая модель - дискретная**.

**Дискретная математическая модель** – это модель, все переменные и параметры которой являются дискретными величинами.

В непрерывных моделях величины представляют собой непрерывные функции времени, а в дискретных моделях любые изменения происходят мгновенно, скачкообразно, и между моментами изменений состояний элементов остаются постоянными.

Реальные системы не бывают **непрерывными** или **дискретными**. Просто для одних систем удобнее применять **непрерывные** модели, для других – **дискретные**. Представления о дискретности и непрерывности выработаны в рамках математики. Значит, когда мы говорим, что некоторая модель является **дискретной**, то тем самым уже имеем в виду не реальную систему, существующую в физическом мире, а некую математическую модель. Но в то же время любой физический объект или процесс мы можем описывать и моделировать как непрерывный или как дискретный. И какой вариант мы бы ни избрали, мы можем достичь любой точности описания. Например, речь человека можно описать в виде текста, то есть дискретной моделью. Можно записать речь как непрерывную звуковую волну, то есть как непрерывную функцию времени. Затем можно эту же звуковую волну оцифровать, то есть вновь представить дискретной моделью, и такая модель будет не менее точной, чем непрерывная.

Для экономико-математического большое значение имеют различия в степени инерционности экономических процессов, т. е. в скорости изменения их параметров (характеристик) под влиянием тех или иных воздействий.

В литературе встречаются и крайние точки зрения. Так, Сапцин В.М. считает, что понятие непрерывной величины любой природы есть в действительности абстракция. Наблюдаемые величины либо дискретны по своей сути, но



приближенно представляются как непрерывные, если величина «кванта» исследуемой величины относительно мала (например, численность населения большого города, состоящего из конкретных граждан, масса тела, реально состоящего из большого числа дискретных атомов и т.д.), либо предположение о непрерывности данной величины является физической гипотезой, достаточной или полезной для решения тех или иных задач.

Типичными примерами таких гипотез о непрерывности, не вызывающих сомнений в бытовом сознании (и как гипотез даже не воспринимающихся), являются представления о непрерывном пространстве (расстоянии) и времени – понятиях, которые одновременно относятся и к фундаментальным физическим понятиям.

Однако, если задуматься, то это не совсем так. Минимальное расстояние («квант» расстояния), которое можно себе представить, используя достижения современной экспериментальной и теоретической физики – это величина, по порядку величины равная классическому диаметру минимальной из известных элементарных частиц, например электрона. Является ли расстояние непрерывной величиной или нет за указанным пределом, и вообще можно ли ввести понятие меньшего расстояния – вопрос открытый, и он может быть решен только в результате соответствующих экспериментов, для проведения которых требуются слишком большие и пока недоступные энергии.

Отметим, что нам не важны абсолютные цифры и те действительные границы пространственно-временных представлений, до которых добралась современная теоретическая и экспериментальная физика – важен факт их существования.

Таким образом, для любой измеряемой величины, как физической, так и любой другой природы, представление ее

в качестве непрерывной является, в силу тех или иных причин, **приближением**.

Сапицын В.В. делает следующие выводы:

1. Как непрерывное, так и дискретное представление реальных величин является **приближением**.

2. Непрерывные модели хороши, если получаемые из них **решения** являются **непрерывными функциями**.

3. Дискретные модели, если степень дискретизации достаточно велика и согласована с исходной экономической моделью, **адекватны непрерывным моделям и не хуже их**.

4. Если решения, получаемые из непрерывных моделей, не являются непрерывными или гладкими функциями, то необходима **осторожность в интерпретации полученных результатов**. В этом случае требуется более тщательный анализ исходной модели, и может оказаться, что более адекватна решаемой задаче подходящая дискретизация исследуемых величин, а также учет реальной динамики системы.

5. Реальный интерес, проведенный выше анализ, может представлять только для **существенно нелинейных систем**, в динамике которых наблюдаются синергетические явления.

## **4.2 Дискретное программирование и символьная модель дискретной задачи**

**Дискретное программирование** – это раздел оптимального программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие дискретности, а область допустимых решений конечна.

Собственно, в дискретном программировании используется модель общей задачи математического программирования с дополнительным ограничением: **переменные – дискретные величины**.

Огромное количество задач носит **дискретный характер**, например, в экономике. Изменение экономических показателей во времени всегда имеет прерывный характер, так как происходит скачками от одной даты к другой, скажем, от одного квартала к другому, или от одного года к другому. В экономике дискретность связана с **физической неделимостью многих факторов**: нельзя построить 2,8 завода, купить 0,5 трактора или 2,3 автомобиля. Все отраслевые задачи учитывают определенное количество предприятий, их деятельность характеризуется годовыми, квартальными, месячными или суточными периодами – это отдельные дискретные периоды, у каждого есть свое начало и свой конец.

Дискретными являются широко известные задачи: о назначениях, о коммивояжере, теория расписаний, о структуре стада животных, о комплектовании технических средств предприятия и многие другие.

Рассмотрим задачу:

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1)$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = B_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = B_2$$

-----

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = B_i \quad (2)$$

-----

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = B_m$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \quad (3)$$

где  $D$  - некоторое множество  $R^{(n)}$ .

Если  $D$  является конечным или счетным, то условие (3) будет условием дискретности, и данная задача является задачей дискретного программирования.

Запишем задачу в краткой форме:

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (5)$$

$$x_j \in D_j \quad (j=1,2,\dots,n), \quad D_j - \text{конечное или счетное множество.} \quad (6)$$

Если вводится ограничение, переменные  $x_j$  – целые числа ( $j=1,2,\dots,n$ ), то будем иметь задачу целочисленного программирования.

Иногда дискретное программирование называют целочисленным.

Для этого есть определенные основания, но необходимо четко представлять, что дискретное, это необязательно целочисленное, точнее считать целочисленное программирование частным случаем дискретного.

### 4.3 Методы решения задач непрерывного и дискретного моделирования

Из обширного множества обыкновенных дифференциальных уравнений лишь сравнительно узкий класс уравнений допускает решение в аналитическом виде (в квадратурах). К этому классу в основном относятся линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Для решения остальных используются различные численные методы.

При численном решении дифференциальных уравнений их часто заменяют разностными. Это возможно, если решение разностных уравнений стремится к решению соответствующего дифференциального уравнения, когда интервал  $\Delta t$  стремится к нулю.

Универсальным численным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является **метод конечных разностей**. Суть метода заключается в ап-

проксимации ОДУ разностными (алгебраическими) уравнениями и численном решении их системы. Для получения разностных уравнений необходимо:

1. Область непрерывного изменения аргумента заменить сеткой – дискретным множеством точек;
2. Функции непрерывного аргумента заменить сеточными функциями, т.е. функциями дискретного аргумента;
3. Дифференциальный оператор заменить разностным, действующим в пространстве сеточных функций.

Все приближенные методы решения ОДУ различаются между собой способами построения разностных схем.

**Разностная схема** — это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и дополнительные условия (например, краевые условия и/или начальное распределение). Таким образом, разностные схемы применяются для сведения дифференциальной задачи, имеющей континуальный характер, к конечной системе уравнений, численное решение которых принципиально возможно на вычислительных машинах. Алгебраические уравнения, поставленные в соответствие дифференциальному уравнению, получаются применением разностного метода, что отличает теорию разностных схем от других численных методов решения дифференциальных задач (например, проекционных методов, таких как метод Галёркина).

Решение разностной схемы называется **приближенным решением дифференциальной задачи**.

Хотя формальное определение не накладывает существенных ограничений на вид алгебраических уравнений, но на практике имеет смысл рассматривать только те схемы, которые каким-либо образом отвечают дифференциальной

задаче. Важными понятиями теории разностных схем являются понятия **сходимости, аппроксимации, устойчивости, консервативности.**

Наиболее часто встречающиеся методы решения: метод рядов Тейлора, Методы Эйлера (явный метод Эйлера и неявные методы Эйлера: чисто неявная схема Эйлера, модифицированная схема Эйлера с центральной точкой, симметричная схема Эйлера-Коши), схемы Рунге-Кутты).

(Подробнее см. Мажукин В.И., Королева О.Н. Математическое моделирование в экономике Часть I. Численные методы и вычислительные алгоритмы. Часть II. Лабораторный практикум по численным методам и вычислительным алгоритмам: Уч. пособие – М.: Флинта: Московский гуманитарный университет, 2004. – 232 с., с. 86-99.)

### **Методы решения дискретных задач**

Выделяют две основные группы методов решения дискретных задач, отличающиеся принципами, на которых строятся методы решения.

**Первая группа объединяет методы отсечения.** Это методы для задач линейного программирования с целочисленными переменными. Суть решения состоит в том, что множество допустимых решений первоначально расширяется таким образом, чтобы упростить решение за счет снятия условия целочисленности, а затем при получении окончательного оптимального решения множество переменных сокращается за счет сохранения только целочисленных переменных в оптимальном плане. К этой группе относится **метод Р. Гомори** для решения целочисленных задач линейного программирования и его модификации.

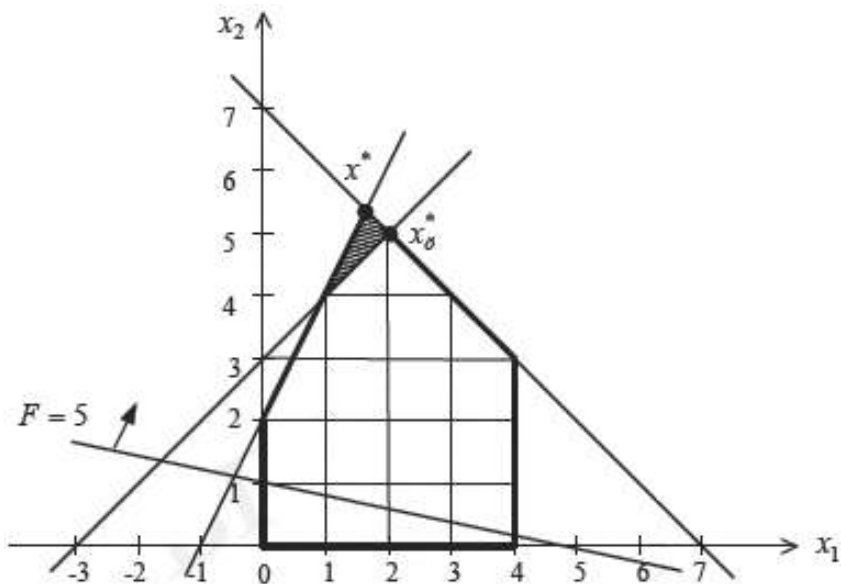
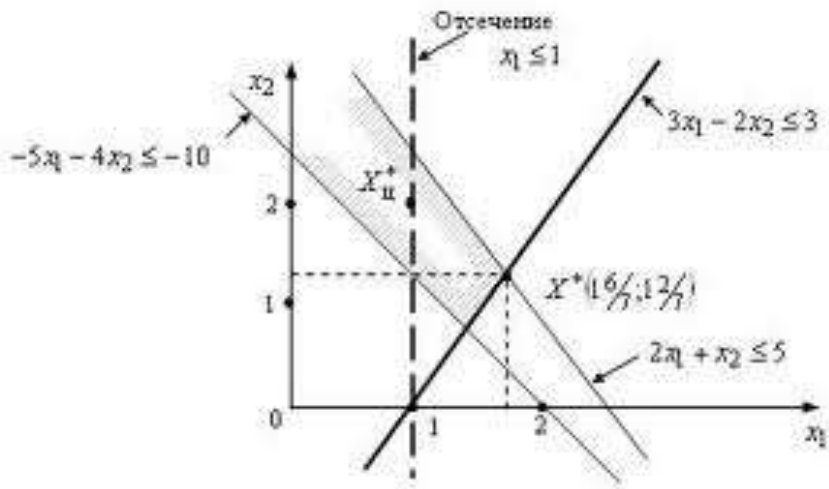


Рисунок - Графическая интерпретация примера для алгоритма Гомори

**Другая группа методов** решения дискретных задач связана с усовершенствованием перебора вариантов. Это, прежде всего, **метод ветвей и границ**.

Отметим – такое название получил один из общих подходов к решению дискретных задач оптимального программирования, для которых еще не выработаны специальные алгоритмы решения. Специфические подходы характеризуются частичным целенаправленным перебором возможных вариантов. При этом решаемая задача последовательно «ветвится», заменяясь более простыми, и путем анализа с помощью графа «дерево задачи» отбрасываются заведомо непригодные варианты, чем облегчается дальнейший перебор. Собственно, суть решения состоит в том, что удастся оценить снизу значение минимизируемой функции на целых классах допустимых решений и затем удалять из рассмотрения те классы решений, для которых эта оценка оказалась слишком высокой, что сокращает перебор и позволяет получить оптимальное решение.

Названные два метода используются для решения практически во всех задачах дискретного программирования.

**Пример 1.** (<http://matesha.ru/book/lp11.php> )

Методом ветвей и границ найти максимальное значение функции  $F(x) = 2x_1 + 3x_2$  при ограничениях;

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 22$$

$$x_{1,2} \geq 0 \text{ – целые}$$



### 1-й шаг метода ветвей и границ

Решается задача линейного программирования с отброшенными условиями целочисленности с помощью симплекс-метода, получаем оптимальное нецелое решение:

$$x_1 = 2 \frac{4}{7}; x_2 = 2 \frac{4}{7}; F_{\max} = 16 \frac{6}{7}$$

Таблица 1 - Симплекс-таблица для задачи ЛП

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		$x_1$	$x_2$
$x_3$	24	3	4
$x_4$	22	2	5
F	0	-2	-3

Таблица 2 - Симплекс-таблица для задачи ЛП

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		$x_1$	$x_3$
$x_3$	$32/5$	$7/5$	$-4/5$
$x_2$	$22/5$	$2/5$	$1/5$
F	$66/5$	$-4/5$	$3/5$

Таблица 3 - Симплекс-таблица для задачи ЛП

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		$x_3$	$x_4$
$x_1$	$32/7$	$5/7$	$-4/7$
$x_2$	$18/7$	$-2/5$	$3/7$
F	$118/7$	$4/7$	$1/7$

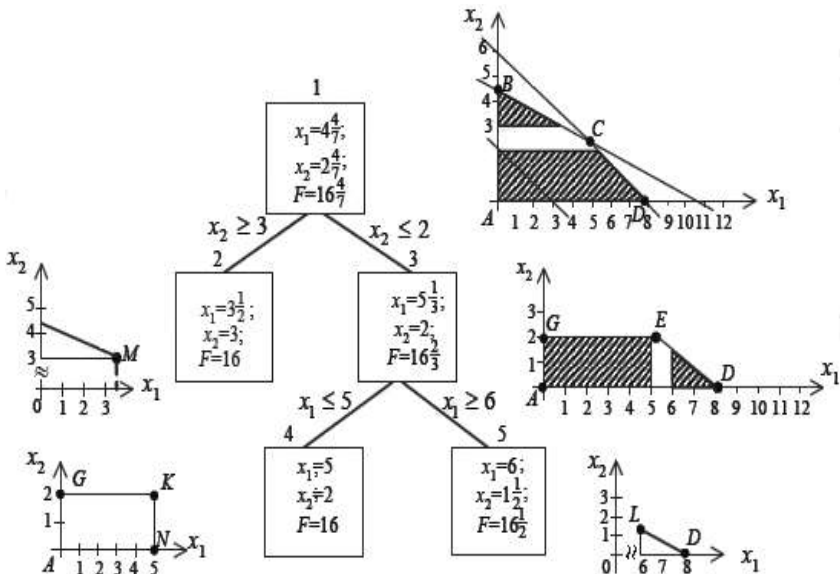


Рисунок - Графическая интерпретация решения примера методом ветвей и границ

Графическая интерпретация задачи приведена на рисунке. Здесь ОДЗП (область допустимых значений переменных) представлена четырехугольником ABCD, а координаты вершины C совпадают с  $x_1$  и  $x_2$ . Обе переменные в оптимальном решении являются нецелыми, поэтому любая из них может быть выбрана в качестве переменной, инициирующей процесс ветвления.

Пусть это будет  $x_2$ . Выбор  $x_2$  порождает две подзадачи (2 и 3), одна из них получается путем добавления ограничения  $x_2 \geq 3$  к исходной задаче, а другая – путем добавления ограничения  $x_2 \leq 2$ . При этом ОДЗП разбивается на две заштрихованные области, а полоса значений  $2 < x_2 < 3$  исключается из рассмотрения. Однако множество допустимых целочисленных решений сохраняется, порожденные подзадачи содержат все целочисленные решения исходной задачи.

## 2-й шаг метода ветвей и границ

Осуществляется выбор одной из обозначенных ранее подзадач. Не существует точных методов определения, какой из подзадач отдать предпочтение. Случайный выбор приводит к разным последовательностям подзадач и, следовательно, к различным количествам итераций, обеспечивающих получение оптимального решения.

Пусть вначале решается подзадача 3 с дополнительным ограничением  $x_2 \leq 2$  или  $x_2 + x_5 = 2$ . Из табл. 3 для переменной  $x_2$  справедливо следующее выражение -  $2/7x_3 + 3/7x_4 + x_2 = 18/7$  или  $x_2 = 18/7 - 2/7x_3 - 3/7x_4$ , тогда

$2/7x_3 - 3/7x_4 + x_5 = -4/7$ . Включаем ограничение в табл. 3, при этом получим новую таблицу (табл. 4).

Таблица 4 - симплекс-таблица для задачи ЛП

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		$x_3$	$x_4$
$x_1$	32/7	5/7	-4/7
$x_2$	18/7	-2/5	3/7
$x_5$	-4/7	2/7	-3/7
F	118/7	4/7	1/7

Осуществляя оптимизацию, переходим к таблице 5:

Таблица 5 - симплекс-таблица для задачи ЛП

базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		$x_3$	$x_5$
$x_1$	16/3	1/3	-4/3
$x_2$	2	0	1
$x_4$	4/3	-2/3	-7/3
F	50/3	2/3	1/3

$$x_1=5 \frac{1}{3} ; x_2=2 ; F_{\max}=16 \frac{2}{3}$$

Переменная  $x_1$  нецелая, поэтому ветвление необходимо продолжить; при этом возникают подзадачи 4 и 5 с ограничениями  $x_1 \leq 5$  и  $x_1 \geq 6$  соответственно. Полоса значений  $5 < x_1 < 6$  исключается из рассмотрения.

### **3-й шаг метода ветвей и границ**

Решаются подзадачи 4 и 5. На рис. видно, что оптимальное целочисленное решение подзадачи 4 достигается в вершине К с координатами  $x_1=5$ ,  $x_2=2$ , однако это не означает, что найден оптимум исходной задачи. Причиной такого вывода являются еще не решенные подзадачи 3 и 5, которые также могут дать целочисленные решения. Найденное целочисленное решение  $F = 16$  определяет нижнюю границу значений целевой функции, т.е. меньше этого значения оно быть не должно.

Подзадача 5 предполагает введение дополнительного ограничения  $x_1 \geq 6$  в подзадачу 3. Графическое решение на рис. определяет вершину L с координатами  $x_1=6$ ,  $x_2=3/2$ , в которой достигается оптимальное решение подзадачи 5:  $F_{\max} = 16.5$ . Дальнейшее ветвление в этом направлении осуществлять нецелесообразно, так как большего, чем 16, целого значения функции цели получить невозможно. Ветвление подзадачи 5 в лучшем случае приведёт к другому целочисленному решению, в котором  $F = 16$ .

### **4-й шаг метода ветвей и границ**

Исследуется подзадача 2 с ограничением  $x_2 \geq 3$ , находится её оптимальное решение, которое соответствует вершине М (см. рис.) с координатами  $x_1=3.5$ ,  $x_2=3$ .

Значение функции цели при этом  $F_{\max} = 16$ , которое не превышает найденного ранее решения. Таким образом, поиск вдоль ветви  $x_2 \geq 3$  следует прекратить.

Алгоритм метода ветвей и границ является наиболее надёжным средством решения целочисленных задач, он положен в основу большинства прикладных программ для ПЭВМ, используемых для этих целей.

Для решения задач линейного программирования имеется широкий набор разнообразных машинных программ, которые избавляют от трудоёмкого процесса вычислений вручную. Однако интерпретация информации, выведенной на печать, невозможна без чёткого представления о том, почему и как работает симплекс-метод.

Имеются и другие методы сокращения перебора, например, **метод последовательного анализа вариантов**, разработанный Михалевичем В.С. Идея этого метода близка к методу динамического программирования – образуемые при ветвлении группы вариантов сравниваются между собой и отбрасываются группы, для которых найдутся мажорирующие их варианты, обеспечивающие такие же результаты с меньшими значениями целевой функции.

#### **Владимир Сергеевич Михалевич**

Дата рождения:	10 марта 1930
Место рождения:	Чернигов
Дата смерти:	16 декабря 1994 (64 года)
Место смерти:	Киев
Научная сфера:	математика, кибернетика
Место работы:	Институт кибернетики АН УССР
Учёная степень:	Доктор физико-математических наук (1968)
Учёное звание:	академик АН СССР (1984) академик РАН (1991)
Альма-матер:	Киевский университет
Известен как:	основатель украинской школы методов оптимизации

## **ТЕМА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ**

### **Вопросы**

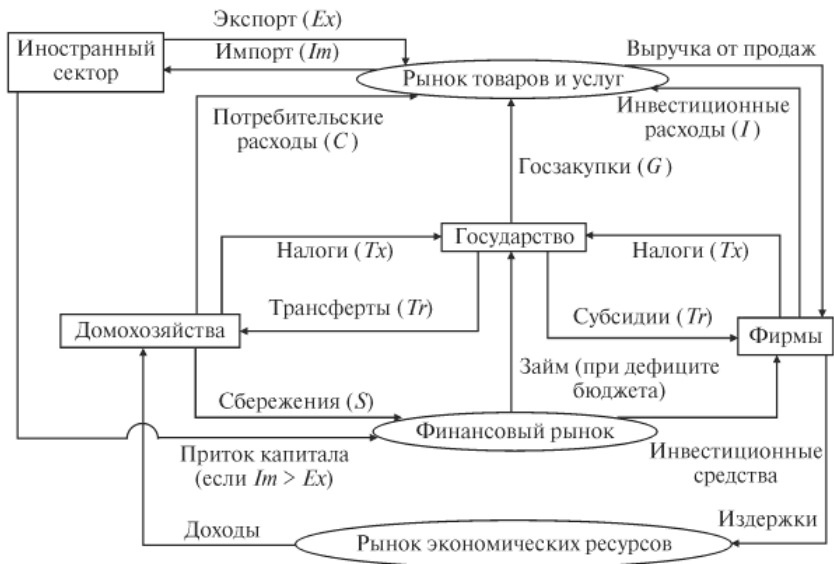
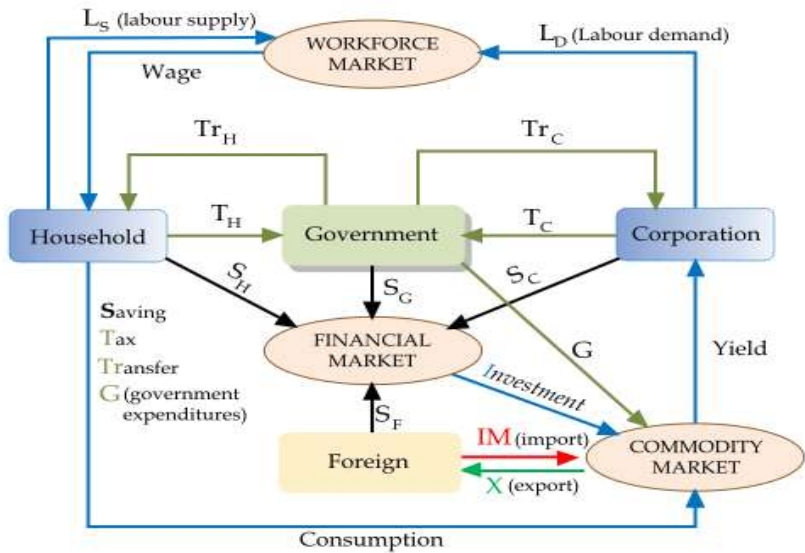
1. Понятие, особенности, основные назначения и виды макроэкономических моделей.
2. Модели экономического роста и расширяющейся экономики.
3. Модель общего экономического равновесия.
4. Моделирование межотраслевых связей на макроуровне. Динамическая модель межотраслевого баланса.
5. Модели хаотической динамики

### **5.1 Понятие, особенности, основные назначения и виды макро-экономических моделей**

Макроэкономика изучает функционирование экономической системы как единого целого, с точки зрения макроподхода.

При макроподходе объект (будь это такая сложная система как народное хозяйство, или его составные части: промышленность, сельское хозяйство, транспорт и т.д.) рассматриваются как единое целое и как бы снаружи, со стороны.

Circulation in Macroeconomics



**Макроэкономическая модель** представляет собой математически формализованную концепцию функционирования народного хозяйства как единого целого. Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития национальной экономики, прогнозирования народнохозяйственных процессов.

Для этого используют производственные функции, модели оптимизации соотношения нормы накопления и нормы потребления, оптимизации национального дохода, валовых капиталовложений и др.

#### **Основные назначения макромоделей:**

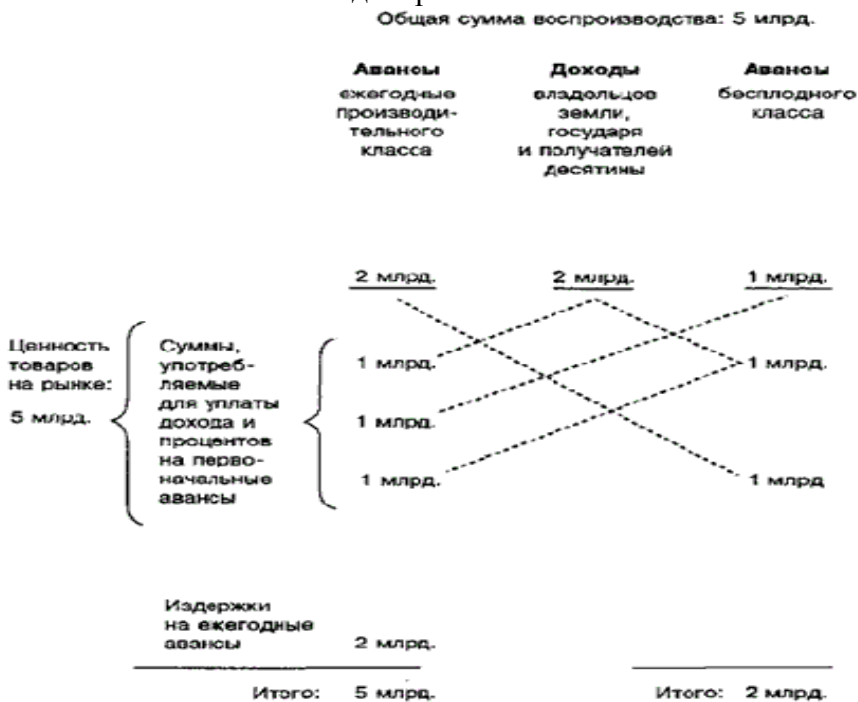
- анализ структуры и динамики народного хозяйства;
- прогноз развития народного хозяйства;
- исследование экономических циклов;
- повышение эффективности государственного регулирования экономики;
- формирование основы для разработки оптимальных планов развития экономических систем.

Историческим предшественником современных макроэкономических моделей считают экономические таблицы французского экономиста – физиократа **Франсуа Кенэ (1694-1774)**. Лейб-медик Людовика XV, он лишь в возрасте около 60 лет начал заниматься политической экономией и создал количественную модель национальной экономики, ввел понятие совокупного общественного продукта общества, движение которого рассматривал с макроэкономической точки зрения.

Как и все физиократы, Кенэ считал единственной производительной деятельностью сельское хозяйство. Он вводит понятие «экономического излишка», считая его даром природы, по таблицам его присваивали собственники



земли, король и церковь, эта идея была развита К. Марксом в известные теории прибавочной стоимости. Кенэ впервые рассматривает жизнь стран как единый процесс производства и потребления продуктов обществом, подчиняющийся определенным количественным закономерностям. Таблицы Ф. Кенэ можно считать первым опытом научного макроэкономического анализа и моделирования.



В XX веке, особенно в 50-60 годы в связи с двухсотлетием экономических таблиц Кенэ, был предпринят ряд попыток математической формализации современными научными методами, в частности: балансовая интерпретация акад. В.С. Немчинова по межотраслевой схеме, через системы линейных уравнений А. Филлипсом, графическая интерпретация Ж. Бенара, И. Хишияма, было показано, что в

таблицах Кенэ содержатся зачатки будущих теорий – теории рынка, теории экономической динамики, модель мультипликатора. И. Хишияма ввел в экономические таблицы Кенэ элементы динамики.

В 1863 г. Карл Маркс создал первый вариант схемы простого воспроизводства и сформулировал три закона простого воспроизводства:

1. Закон простого воспроизводства общественного капитала (закон движения общественного капитала при простом воспроизводстве, первый закон воспроизводства и обращения общественного капитала: простое производство может осуществиться, если  $(v + m) I$  подразделения равняются с  $II$  подразделения)

$$I(v+m) = IIc$$

2. Второй закон воспроизводства и обращения общественного капитала:

$$I(v+m) + II(v+m) = IIW$$

3. Третий закон воспроизводства и обращения общественного капитала:

$$Ic + IIc = IW$$

В схемах Маркса условие расширенного воспроизводства выражается формулой:

$$I(v+m) > IIc$$

В § 3 гл.21 «Капитала» — «Схематическое изображение накопления» — Маркс исследует, кроме того и возможность расширенного воспроизводства при  $I(v+m) = IIc$ .

В.И. Ленин дал расширенный вариант этих схем.

Эти схемы можно трактовать как **макромодели**.

Идеи простого и расширенного воспроизводства, их макромодели были использованы для разработки народно-хозяйственного баланса СССР 1923-1924 гг.

ТАБЛИЦА 2

Схема расширенного воспроизводства Маркса							
	C	V	M				W
			$\Delta C$	$\Delta V$	$I = M - (\Delta C + \Delta V)$		
I.	4000	1000	400	100	500	6000	
II.	1500	750	100	50	600	<b>3000</b>	
Всего:	5500	1750	500	150	1100	9000	
W II		1750		150	1100	<b>3000</b>	
2010 год							
	$C_{2009} + \Delta C_{2009}$	$V_{2009} + \Delta V_{2009}$	$\Delta C_{2010}$	$\Delta V_{2010}$	$I_{2010}$	$W_{2010}$	
I.	4000	1000	440	110	550	6600	
II.	1500	750	50	80	560	<b>3200</b>	
Всего:	5500	1750	150	600	190	9800	
W II		1750	150	190	1110	<b>3200</b>	
2011 год							
	$C_{2010} + \Delta C_{2010}$	$V_{2010} + \Delta V_{2010}$	$\Delta C_{2011}$	$\Delta V_{2011}$	$I_{2011}$	$W_{2011}$	
I.	4400	1100	110	484	121	7260	
II.	1500	800	80	175	88	<b>3520</b>	
Всего:	6000	1900	190	660	209	10780	
W II		1900	190	209	1221	<b>3520</b>	
2012 год							
	$C_{2011} + \Delta C_{2011}$	$V_{2011} + \Delta V_{2011}$	$\Delta C_{2012}$	$\Delta V_{2012}$	$I_{2012}$	$W_{2012}$	
I.	4840	1210	121	532,4	133,1	7985	
II.	1760	880	88	193,6	96,8	<b>3872</b>	
Всего:	6600	2090	209	725	229,9	11858	
W II		2090	209	229,9	1343,1	<b>3872</b>	

Первая математически формализованная макроэкономическая модель централизованно – планируемой экономики была построена Г.А. Фельдманом и опубликована в 1928-1929годах.

**Фельдман Григорий Александрович (1884-1958)** - русский, советский экономист, исследователь проблем экономического роста. Основные идеи Фельдмана по проблемам экономического роста изложены в статьях: «К теории темпов роста народного дохода» (1928), в которой содержится двухсекторная модель экономического роста, и «Аналитический метод построения перспективных планов» (1929), где предложены принципы разработки долгосрочного плана. В этих работах рассмотрены закономерности темпов роста всей экономики, ее отдельных секторов, а также динамика потребления. Фельдман рассматривал взаимосвязь темпа роста народного дохода, фондоотдачи, производительности труда и структуры использования народного до-

хода. Сделал выводы: высокие темпы требуют, чтобы большая часть капитала направлялась в производство средств производства; в условиях устойчивого экономического роста структура инвестиций отражает структуру капитала. Исследования Фельдмана стали пионерными в области теории экономического роста, в докладе, в связи с подготовкой первого пятилетнего плана развития страны предвосхитил многие положения современной теории экономического роста, намного опередив аналогичные западные исследования (в частности, Е. Домара).

Учился в Германии, затем в Москве окончил Высшее техническое училище. Работал в плановых органах, преподавал в Плановой академии. Был репрессирован, его работы были забыты и переоткрыты в 50-е годы на западе, где в это время возрос интерес к моделям экономического роста.

Принципиальное значение имеют макроэкономические модели академика В.С. Немчинова (1963 г.), которые представляют собой схемы общественного производства при централизованной плановой экономике. В этих моделях национальный доход рассматривается одновременно в трех аспектах: материальном, отраслевом, стоимостном. Критерием оптимальности принят максимум конечной продукции, идущей на потребление, чистые капиталовложения, экспорт и общегосударственные нужды. В.С. Немчинов создал ряд новых моделей межотраслевого баланса, в том числе модель экономического района.

В основе макроэкономической модели для двух основных подразделений общественного производства лежат три уравнения:

$$\begin{aligned}
 Y &= \theta_1 Z_1 + (1+\theta_2) \cdot Z_2, & (1) \\
 Z_1 &= \theta_2 Z_2 + \lambda Y, \\
 Z_2 &= (1-\theta_2) Z_1 + (1 - \lambda) Y,
 \end{aligned}$$

Где:

- $Y$ - конечный общественный продукт;
- $\theta_1$ - соотношение условно-чистого дохода и внеотраслевого товарного продукта 1 подразделения;
- $\theta_2$ - объем внеотраслевых поставок первых подразделений во вторые, измеренный в долях внеотраслевого товарного продукта второго подразделения;
- $Z_1$  и  $Z_2$  – объем внеотраслевых поставок отраслей;
- $\lambda$  – доля первого подразделения в конечном продукте.

Рассматривая  $Y$  и  $\lambda$  как заданные величины, получаем решения системы уравнений относительно  $Z_1, Z_2$ :

$$Z_1 = \frac{\theta_1 (1-\lambda) + \lambda}{1 - \theta_2 (1 - \theta_1)} \cdot Y; \quad (2)$$

$$Z_2 = \frac{1 + \theta_1 \lambda}{1 - \theta_2 (1 - \theta_1)}.$$

Объем внеотраслевых поставок  $Z_1$  и  $Z_2$  есть функции от конечного общественного продукта ( $Y$ ) и двух параметров, определяющих его вещественный ( $\lambda$ ) и стоимостной ( $\theta$ ) состав. Функции  $Z_1$  и  $Z_2$  достигают своих экстремальных значений, когда параметры уравнений приближаются к своим крайним значениям.

В. С. Немчинов исследовал сбалансированность экономики, потенциал расширенного воспроизводства, принципы рационального ценообразования. Особый интерес представляют предложенные им продуктовые модели, которые содержат постановку задач моделирования разделения труда.

Комплекс включает **пять моделей**:

- опорная балансовая продуктивно-трудовая модель
- модель общественно-необходимых затрат труда
- модель общего отраслевого и территориального разделения труда
- модель внутриотраслевой дифференциации продукции
- модель внутриотраслевого разделения труда между предприятиями

Комплекс охватывает макро и микроэкономические аспекты. Следует отметить, что отдельные детали моделей остались неоконченными – это была последняя работа ученого.

## 5.2 Модели экономического роста и расширяющейся экономики

Рассмотрим типичную «неоклассическую» модель экономического роста Солоу-Свэна.

Солоу Роберт Мертон (родился 1924г.), американский экономист. Окончил Гарвардский университет. Преподавал в Кэмбриджском университете. Член Национальной АН США. Основные труды – по макроэкономике. Нобелевская премия по экономике в 1987 г. за труды в области теории экономического роста.

### Солоу Роберт Мертон

Дата рождения:	23 августа 1924 (87 лет)
Место рождения:	Бруклин, Нью-Йорк, США
Страна:	США
Научная сфера:	Экономика
Место работы:	Президент Международной экономической ассоциации (1999—2002). Президент Эконометрического общества (1964). Президент Американской экономической ассоциации в 1979 г.
Научный руководитель:	Василий Леонтьев
Известен как:	Автор макроэкономической модели «модель Солоу»
Награды и премии	Медаль Джона Бейтса Кларка (1961) Нобелевская премия по экономике (1987) Национальная научная медаль США (1999)

В этой модели при некоторых упрощающих условиях формулируются уравнения, задающие равновесную траекторию роста при полной занятости населения трудоспособного возраста. Потенциальная возможность достижения равновесного устойчивого темпа роста экономики, по мнению авторов модели, обеспечивается существованием множества альтернативных технологий, описываемых производственной функцией с нейтральным техническим прогрессом. В любой момент можно наращивать производственные фонды до полного вовлечения в процесс производства весь прирост населения трудоспособного возраста.

Модель представляет систему из четырех уравнений.

1. Уравнение производственной функции может быть представлено в общем виде:

$$L = e^{-pt} G(Y, F)$$

или в виде производственной функции Кобба-Дугласа:

$$L = \gamma e^{-pt} Y \frac{1}{\beta} F^{1-\frac{1}{\beta}}$$

где  $\beta = \frac{\partial Y}{\partial L} \div \frac{Y}{L}$  - эластичность дохода по труду;

$\frac{1}{\beta}$  - обозначим через  $\mu$ .

Данное уравнение позволяет определить потребность в рабочей силе для выпуска конечного объема продукции при фиксированной величине основного капитала.



## 2. Уравнение сбережений

Простейшая функция сбережений определяет спрос на предметы потребления пропорционально располагаемому доходу. Склонность к сбережениям моделируется через постоянный параметр  $S$ , который означает норму производственного накопления в принятой у нас терминологии.

$$\Pi = (1-S)Y \quad (5)$$

$$Y = dF + \Pi, \quad (6)$$

где  $dF = K$  – прирост основных производственных фондов.

## 3. Уравнения занятости населения

Предполагается, что в модели естественный темп роста населения задан и пропорциональный темп роста трудовых ресурсов определяется:

$$\frac{dl}{dt} : L = C$$

Предложение труда характеризуется экспоненциальной функцией времени:

$$L_t = L_0 e^{ct} \quad (8)$$

Спрос на труд и его предложение балансируется равенством:

$$L_S = L \quad (9)$$

Это равенство может быть объединено с уравнением производственной функции Кобба-Дугласа (5 или 6).

$$L_0 e^{ct} = \gamma e^{-pt} Y^\mu F^{1-\mu} \quad (10)$$

или

$$\gamma Y^\mu F^{1-\mu} = L_0 e^{(a+p)t} \quad (11)$$

#### 4. Равенство темпов роста конечного выпуска и основного капитала.

Динамика основного капитала может быть получена из уравнения

$$\frac{dF}{dt} = SY \quad (12)$$

При заданной норме сбережений прирост основного капитала прямо пропорционален объему конечного выпуска.

Частное решение системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \gamma Y^\mu F^{-\mu} = L_0 e^{(c+p)t} \\ \frac{dF}{dt} = SY \end{cases} \quad (13)$$

может быть представлено в виде экспоненты:

$$\begin{aligned} Y &= Y e^{qt}, \\ F &= E e^{qt} \end{aligned} \quad (14)$$

В модели технический прогресс учитывается через простое увеличение числа занятых (нейтральный технический прогресс по классификации Хикса). Равновесная траектория динамики конечного продукта и основного капитала характеризуется постоянным темпом роста, равным сумме темпов роста численности населения и технического прогресса ( $a$  и  $p$ ). Пусть  $Y^*$  и  $K^*$  – неизвестные, пока равновесные значения соответствующих переменных. Из системы уравнений 13 и 14 можно получить эквивалентную систему с  $Y^*$  и  $K^*$ :

$$\gamma(Y^*)^\mu (F^*)^{1-\mu} = L_0 \quad (15)$$

$$(c+p)F^* = SY^* \quad (16)$$

откуда

$$Y^* = \frac{L_0}{\gamma} \left( \frac{S}{c+p} \right)^{\mu-1}, \text{ а } F^* = \frac{L_0}{\gamma} \left( \frac{S}{c+p} \right)^\mu \quad (17)$$

Окончательно траекторию динамики национального дохода (или конечного продукта) и основного капитала описывают уравнения:

$$Y = \frac{L_0}{\gamma} \left( \frac{S}{c+p} \right)^{\mu-1} e^{(c+p)t}, \quad (18)$$

$$F = \frac{L_0}{\gamma} \left( \frac{S}{c+p} \right)^{\mu} e^{(c+p)t}. \quad (19)$$

Использованные обозначения:

$Y$  – национальный доход, конечный выпуск;

$K$  – чистые капиталовложения;

$F$  – капитал, количество продукта, постоянно используемого в производстве, сумма основных производственных фондов;

$S$  – сбережения ( $S=K$ );

$s$  – норма сбережения национального дохода

$$\left( s = \frac{S}{V} = \frac{K}{V} \right);$$

$L$  – объем трудовых ресурсов.

Необходимо четко представлять, что в модели Солоу-Свэна рассматриваются только макротехнологические пропорции воспроизводственного процесса.

Авторы пришли к выводу: при существовании частичной взаимозаменяемости между капиталом и рабочей силой можно однозначно определить потребность в наращивании капитальных ресурсов при заданном темпе прироста конечного продукта, который в свою очередь, зависит от динамики численности трудовых ресурсов.

Авторы обнаружили, что сами по себе сбережения и инвестиции не играют решающей роли в определении темпов роста: по данным США оказалось, что почти четыре пятых роста объясняется фактором технического прогресса.

Модель характеризует такие траектории роста экономики, при которых они не выходят из равновесных траекторий.

Модель не может рассматриваться как рекомендации государственным органам или предпринимателям и их объединениям, она носит информационный характер о глобальных пропорциях на макроуровне и равновесной траектории.

Модель Солоу-Свэна неоднократно усложнялась: Е. Фелпс и Д. Робинсон модифицировали модель через максимизацию уровня фондовооруженности труда, при которой фонд потребления будет достигать максимальной величины. Они в неявном виде вносят в модель регулирование экономики, через количество основного капитала, приходящегося на единицу добавленного труда. Интересные дальнейшие усложнения выполнены в модели К. Шелла. В качестве критерия оптимальности К. Шелл использует интегральную величину, являющуюся функцией накопленного объема предметов потребления за конечный интервал времени. К. Шелл использует метод оптимизации, разработанный в 1956-1958 гг. Л.С. Понтрягиным, Р.В. Гамкрелидзе, В.Г. Болтянским, получивший название – принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Экономика интерпретируется как многошаговый по времени управляемый процесс. За управляемый параметр принята норма накопления национального дохода. Модуль К. Шелла при использовании принципа максимума Понтрягина позволяет найти для каждого временного периода такое соотношение между капиталовооруженностью, темпом роста трудоспособного населения и постоянными коэффициентами амортизации, которое обеспечивает максимум фонда потребления в составе конечного продукта. Речь идет об отыскании магистральной траектории роста экономики. Магистраль - это научная абстракция, удобная для изучения и прогнозирования закономерностей экономической динамики. Доказываются теоремы о близости магистралей и траекторий оптимального экономического роста. Понятие магистралей введено Дж. фон Нейманом.

## Модель расширяющейся экономики

Исторически это одна из первых моделей экономической динамики. Модель построена и исследована выдающимся математиком Джоном фон Нейманом. Впервые модель была доложена в 1932 году на математическом семинаре в Принстоне (США), опубликована на немецком языке в 1937 году, английский перевод опубликован в 1945-1946 гг., а затем и в 1963 г. в фундаментальной работе "Модель общего экономического равновесия".

Модель включает  $n$  продуктов и  $m$  способов их производства. В каждом способе производства в единичном интервале времени, при единичной интенсивности производится набор продуктов  $b_j=(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$ . При этом затрачивается набор ресурсов  $a_j=(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ ,  $j=1 \dots m$ .

Предполагается, что все способы могут применяться с любыми интенсивностями, затраты и выпуск пропорциональны интенсивностям.

Из  $n$  - мерных вектор столбцов  $a_j$  и  $b_j$  составляются матрицы затрат  $A=(a_{ij})$  и выпуска  $B=(b_{ij})$ .

**Допустимой траекторией (планом)** называется последовательность  $m$  - мерных векторов интенсивностей  $\{Z_t\}$   $t=1$ , удовлетворяющих балансовым соотношениям

$$AZ_{t+1} \leq BZ_t, Z_t \geq 0. \quad (20)$$

**Стационарной траекторией** называется траектория пропорционального (сбалансированного) роста модели. Стационарную траекторию  $Z(t)$  можно представить как последовательность  $Z_t = \alpha^t Z$ . На этой траектории пропорции использования способов неизменны, экономика растет с постоянным коэффициентом роста (темп  $= 100(\alpha - 1)$ ).

Из (20) следует, что темп  $\alpha$  и пропорции  $Z$  должны удовлетворять условиям:

$$\alpha AZ \leq BZ, Z \geq 0 \quad (21)$$

Если за функционал принять  $\alpha \rightarrow \max$ , а за систему ограничения (21) - получим задачу математического программирования, позволяющую найти **максимальный темп технологического роста**. Вектор интенсивностей  $Z$ , на котором достигается максимум, называется **неймановским**.

Системе (20) можно записать двойственную систему ценностных соотношений

$$p_t A \geq p_{t+1} B, p_t \geq 0 \quad (22)$$

показывающую, что ценность выпуска не превосходит ценности затрат. Стационарной траекторией цен называется такая последовательность цен  $p_t$ , что  $p_t = \beta^{-t} p$ . Из условий (22) следует, что

$$\beta p A \geq p B \quad (23)$$

Интерес представляет стационарная траектория цен, для которой значение  $\beta$  минимально. Соответствующие цены  $\bar{p}$  называются **неймановскими**.

Здесь показаны отдельные фрагменты модели Дж. Неймана.

В работе Дж. Неймана можно выделить то, что им сделано впервые:

- экономика представлена в виде конечной совокупности производственных процессов единичной продолжительности, которые затрагивают и производят конечное число продуктов и могут применяться с различными интенсивностями;
- из всех допустимых траекторий интенсивностей и цен выбраны только стационарные траектории и определено положение равновесия с помощью "Лучших" стационарных траекторий;
- показано, что доказательство существования и исследование равновесия основывается на математическом ана-

лизе системы  $m+n$  неравенств с  $n+m+2$  неотрицательными неизвестными:

$$\begin{aligned} \alpha A_Z &\leq B_Z \\ \beta p A &\geq p B, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - неотрицательные числа,  $Z=(Z_1, \dots, Z_n)$   $p=(p_1, \dots, p_m)$  - неотрицательные векторы;  $A$  и  $B$  - неотрицательные матрицы размером  $m \times n$ ;

- доказано, что система ограничений (24) имеет решение, и, следовательно, существует равновесие, а систему неравенств (24) часто стали называть моделью общего экономического равновесия;

- доказано, что траектория равновесия есть траектория максимального пропорционального роста, чем была решена задача о максимальном росте экономики.

Данная модель является теоретической, но включает в себя многие прикладные модели, например, динамическую модель межотраслевого баланса. Модель содержит много основополагающих идей, которые находят продолжение в большом количестве работ и развиваются в разных направлениях.

### 5.3 Модель общего экономического равновесия

Понятие «равновесие» используется многими науками для обозначения такого состояния системы или ситуации, когда без внешних воздействий система и ситуация остаются в данном состоянии сколь угодно долго. Равновесие может поддерживаться разнонаправленными силами, взаимодействие которых взаимно погашается, нейтрализуются и не изменяет наблюдаемые свойства системы и ситуации.

Под экономическим равновесием обычно понимают равновесие экономической системы.

Можно выделить два момента в определениях понятие равновесия экономической системы – рассмотрение свойств системы и рассмотрение взаимодействующих на нее сил. Дадим определение равновесия систем с учетом этих двух моментов.

Под равновесием экономической системы понимают такое ее состояние, которое характеризуется равенством спроса и предложения всех ресурсов.

Здесь на первый план выдвигается сбалансированность экономической системы. Равновесие и сбалансированность можно рассматривать как синонимы. Это равновесие лежит в основе балансового метода, суть которого в использовании балансов для сопоставления наличия и потребности в материальных, трудовых, финансовых ресурсах.

Под экономическим равновесием можно понимать такое ее состояние системы, когда ни один из элементов – участников системы не заинтересован в изменении этого состояния с помощью доступных ему средств, так как он не может иметь выгоды от нарушения состояния равновесия, а потерять может.

Это определение перекликается по содержанию с известным **принципом оптимальности по Парето**. Суть принципа оптимальности В. Парето состоит в том, что его



критерии допускают улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшались.

Примером равновесия можно рассматривать любую платежную матрицу экономической задачи с теории игр с седловой точкой, в которой как раз и достигается экономическое равновесие, устраивающее всех участников игры. Решение задачи указывает, возможно, ли найти компромиссное решение, если возможно, то при каких условиях.

Подчеркнем, что приведенные определения экономического равновесия непротиворечивы, а лишь методически выделяют ту или иную сторону многогранного, реально существующего явления.

В экономических системах равновесие устанавливается под действием определенного социально-экономического механизма. Равновесие зависит от совокупности цен, экономических нормативов, выступающих в роли управляющих параметров, от принципов распределения благ и доходов.

Экономическое равновесие бывает **статическое и динамическое**. Статическое равновесие связывают обычно с точкой равновесия. **Точка равновесия** это такая точка в пространстве координат системы, которая характеризует ее **состояние равновесия в данный момент**. Под точкой равновесия можно понимать одну из **стационарных точек функции**, описывающих поведение системы. Математически все производные функции в точке равновесия обращаются в нуль.

В теории экономического равновесия **точкой равновесия** экономической системы называют набор цен, которые обеспечивают равенство спроса и предложения ресурсов в системе.

**Динамическое равновесие** – это сбалансированный процесс развития, уравновешенный рост. Это уже понятие теории экономического роста.

Экономическое равновесие тесно связано с **устойчивостью системы**. Устойчивое состояние равновесия открытой системы в ее взаимодействии со средой в биологии называют **гомеостазом**. Например, поддержание постоянной температуры тела независимо от окружающей среды, постоянного уровня кровяного давления и т.д. Гомеостаз, как понятие устойчивости используется в теории систем, кибернетике, экономике и т.д.

В экономической литературе гомеостазом считают **неизменность существенных параметров системы** независимо от влияния внешней среды. Иногда подчеркивается, что суть в неизменности соотношений экономической системы со средой. Собственно, устойчивая экономическая система должна обладать способностью, быстро реагировать на изменение спроса и других параметров экономической конъюнктуры, своевременно изменять свою структуру, состав существенных параметров и таким образом поддерживать равновесие.

Если под действием внешней среды экономическая система не меняет свои равновесные свойства, говорят об устойчивом равновесии, в обратном случае – о неустойчивом равновесии.

Под **денежным равновесием** понимают состояние экономики, когда предложение денег равно спросу на них. Баланс достигается установлением равновесного уровня цен. Цены реагируют на изменение объема денег с некоторым запозданием, обычно это несколько месяцев. О приведении экономики в состояние с денежным равновесием можно судить по уровню месячной инфляции и по изменению денежной массы.

**Рыночное равновесие** называется локально устойчивым, если оно достигается, начиная с цен близких к точке равновесия, и **глобально устойчивым**, – если оно достигается независимо от начальной точки.

## Модель равновесия Л.Вальраса

В экономико-математическое исследование экономического равновесия большой вклад внесли представители математической школы политической экономии О.Курно, Л.Вальрас, В.Парето, А.Вальд, а затем и К.Эрроу, Ж.Дебре и Дж. фон Нейман, Д.Гейл.

Исследуя рыночную экономику, они разработали методические подходы и обоснования ряда понятий теории экономического равновесия для условий конкурентной экономики.

Отечественные ученые В.К. Дмитриев, Г.А. Фельдман, Н.К. Кондратьев, В.С. Немчинов, А.Н. Ефимов, Н.П. Федоренко и др. исследовали рыночную и централизованно – планируемую экономику, создали целостную методiku межотраслевого баланса и теорию оптимального функционирования экономики, основанную не на рыночном механизме установления равновесных цен, а на планово – устанавливаемых ценах для основных видов продукции и регулировании общего и рыночного равновесия.

Спрос, предложение по каждому товару зависят от совокупности цен, спроса и предложения по всем товарам. Общее равновесие, следовательно, может существовать только тогда, когда оно оказывается структурным равновесием. Модель установления равновесных цен в рыночной экономике получила название **паутинообразной модели**. Экономическое равновесие усиленно исследуется многими учеными, имеются существенные результаты.

Но первой, а точнее одной из первых, экономико-математических моделей экономического равновесия считают модель швейцарского экономиста Л. Вальраса.

**Вальрас, Вальра Леон** (полное имя Мари Эспри Леон), (1834 -1910гг), один из основателей математической

школы в политической экономии. Родился во Франции, с 1870г по 1892 г. возглавлял кафедру политической экономии в Лозанском университете. Основной труд – «Элементы чистой политической экономии». (1847-77гг.)

Дата рождения:	16 декабря 1834
Место рождения:	Эврё, Франция
Дата смерти:	5 января 1910 (75 лет)
Место смерти:	Монтрё, Швейцария
Страна:	Франция
Научная сфера:	Экономика
Место работы:	Лозаннский университет
Известен как:	Лидер лозаннской школы маржинализма

Л. Вальрас уже в первом издании своего основного научного труда предпринял попытку разработать обобщенную модель капиталистической экономики. **Модель Вальраса** включала обмен, производство, образование капиталов и денежное обращение. Над этой моделью Л.Вальрас затем работал почти всю свою оставшуюся жизнь – совершенствовал, уточнял, углублял и в конечном итоге пришел к **теории общего равновесия**.

Вальрас пытается сформулировать процесс автоматического стремления рыночной экономики к **стабильному равновесию**, показывает взаимную обусловленность всех цен и объемов ресурсов и товаров, обращающихся в рыноч-

ной экономике. Это общее равновесие, частное равновесие относится к отдельным товарам.

Для каждого отдельного производителя и потребителя Вальрас условие равновесия описывает в виде линейных уравнений. Переменными в этих уравнениях выступают цены и объемы ресурсов и товаров, балансирующих **спрос и предложение**.

Основное равенство, получившее название **закона Вальраса**, сводится к тому, что общая величина спроса должна быть равна общей величине предложения, при соответствующей системе цен. Равенство спроса и предложения лежит и в основе доказательства того, что число уравнений системы не равно общему числу рассматриваемых товаров и ресурсов, а всегда на единицу меньше, так как последнее уравнение вытекает из совокупности уже рассмотренных.

В теории равновесия Вальраса рынки всех товаров рассматриваются во взаимной связи, как один общий рынок, совокупность всех ресурсов экономики и объемы выпуска всех товаров представляются как одно производство, все цены благ одновременно согласовываются. Все это отражает **функционирование экономики**, все участники которой стремятся максимизировать полезность.

Система Вальраса совершенствовалась многими его последователями и была развита средствами линейной алгебры и линейного программирования в экстремальную задачу.

Ответы на три вопроса могут выразить существо системы Вальраса. Вот эти вопросы.

Основное равенство, получившее название **закона Вальраса**, сводится к тому, что общая величина спроса должна быть равна общей величине предложения, при соответствующей системе цен. Равенство спроса и предложения лежит и в основе доказательства того, что число уравнений системы не равно общему числу рассматриваемых товаров и

ресурсов, а всегда на единицу меньше, так как последнее уравнение вытекает из совокупности уже рассмотренных.

В теории равновесия Вальраса рынки всех товаров рассматриваются во взаимной связи, как один общий рынок, совокупность всех ресурсов экономики и объемы выпуска всех товаров представляются как одно производство, все цены благ одновременно согласовываются. Все это отражает **функционирование экономики**, все участники которой стремятся максимизировать полезность.

Система Вальраса совершенствовалась многими его последователями и была развита средствами линейной алгебры и линейного программирования в экстремальную задачу.

Ответы на три вопроса могут выразить существо системы Вальраса. Вот эти вопросы.

**Суть первого вопроса** заключается в том, возможна ли система цен, набор объемов ресурсов и товаров, совместных друг с другом, то есть, существует ли реально решение данной системы уравнений.

**Суть второго вопроса** состоит в том, существует много или единственное сочетание значений переменных для каждой переменной, или по-другому: единственно ли это решение, что для каждой переменной существует только одно значение, совместное с общим решением.

**Суть третьего вопроса** состоит в том, способна ли система возвращаться к равновесию при его нарушении.

Система Вальраса оказала определенное влияние на становление общих принципов построения моделей экономического взаимодействия, ее математические аспекты оказали большое воздействие на развитие математической экономики.

### **Модели равновесия Эрроу**

В экономической литературе обычно упоминают две экономико-математические модели американского экономи-

ста К. Эрроу – это, прежде всего, модель общего равновесия рынка и упрощенная модель рыночного равновесия по Вальду.

**Эрроу Кеннет** (р. 1921) лауреат Нобелевской премии по экономике (1972 г.), образование получил в Колумбийском университете (математический, а затем экономический факультеты), 1943-1946 гг. – служил в армии, профессор Стэндфордского, Гарвардского университетов, член Национальной академии наук, почетный доктор ряда университетов США и Европы. Нобелевскую премию получил за работы в области экономического равновесия. Основные научные работы в области теории равновесных систем, теории социального выбора («Парадокс Эрроу»), теории экономического роста.

Дата рождения:	23 августа 1921 (90 лет)
Место рождения:	Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США
Страна:	США
Научная сфера:	Экономика
Альма-матер:	Колумбийский университет
Награды и премии	Медаль Джона Бейтса Кларка (1957) Нобелевская премия по экономике (1972) Национальная научная медаль США (2004)

**Модель общего равновесия рынка** – это одна из основных экономико-математических моделей математической экономики. Ее авторы – лауреаты Нобелевской премии К. Эрроу и Ж. Дебре, - опубликовали сначала результаты

своих исследований независимо друг от друга, а затем и в совместной публикации.

Модель включает несколько участников производителей и потребителей и их блоков, и групп. Каждой фирме соответствует определенное множество технологически допустимых векторов затрат – выпуска. Предполагается, что при любом фиксированном векторе цен производитель выбирает допустимый вектор затрат – выпуска так, чтобы максимизировать прибыль. Каждый потребитель характеризуется своей целевой функцией, обладает строго определенными предпочтениями, причем в зависимости от внешних условий допускается изменение этих предпочтений. Кроме этого потребитель может иметь право на определенную долю дохода производителя – то есть дохода той или иной фирмы. Потребитель стремится выбрать допустимый ему вектор потребления так, чтобы максимизировать свою целевую функцию в рамках бюджетного ограничения, согласно которому его затраты, исчисленные в заданных ценах, не должны превосходить дохода.

Доход складывается из двух частей – из выручки от продажи товаров, а также заработной платы плюс причитающаяся доля доходов производственных блоков. При произвольных ценах решения различных участников могут оказаться несогласованными: некоторые товары будут производиться в избытке, спрос на другие может превысить предложение. В равновесных системах этого не происходит – система находится в состоянии экономического равновесия.

Экономическим равновесием в модели Эрроу-Дебре называется совокупность векторов цен, векторов затрат – выпуска, векторов потребления, оптимальных при этих ценах для соответствующих участников, и таких, что суммарный спрос по каждому виду продукта не превосходит суммарного предложения и может быть строго меньше лишь



для продуктов, имеющих нулевую цену. Доказано, что при довольно общих предположениях равновесие в модели Эрроу-Дебре существует. Однако единственность состояния равновесия не гарантируется.

Модель использует математический аппарат теории выпуклости и неподвижной точки, описывает с его помощью конкурентную экономику и определение ею экономического равновесия. Оно иногда в литературе называется **равновесием Эрроу-Дебре**.

Согласно модели Эрроу-Дебре производитель и потребитель каждый в отдельности не влияет на цены товаров, что позволяет многим авторам относить их к моделям совершенной конкуренции. Однако в литературе имеется и другая интерпретация, согласно которой цены назначаются в централизованном порядке и модель, разработанная для конкурентной экономики, становится применимой для управления при плановой экономике. Модель обладает многими интересными свойствами, в частности равновесие по Эрроу-Дебре оптимально по Парето. Это можно понимать так, что любая попытка улучшить положение потребителя по сравнению с равновесным уровнем неизбежно ухудшит состояние какого-то другого потребителя, так как равновесные векторы потребления и производства максимизируют взвешенную сумму целевых функций потребителей только при материальном балансе и выполнении технологических ограничений. Это определенно выдвигает на передний план методологическое значение равновесного подхода как одного из принципов разрешения рассогласованности интересов и согласования противоречивых экономических интересов.

Если предположить, что в модели один единственный потребитель, допустим это общество в целом, то решив задачу на максимум целевой функции, мы можем получить равновесные цены, которые одновременно будут оптимальными оценками продуктов общества, так как натуральные

компоненты равновесия будут характеризовать производство и потребление в оптимальном варианте.

В теории равновесия рассматриваются также процессы регулирования цен, в зависимости от знака разности между совокупным спросом и предложением цены могут увеличиваться или уменьшаться. Таким образом, моделируют динамику рыночных цен при конкурентной экономике. При централизованно – плановой экономике регулирование цен можно рассматривать как схемы управления ценами с единого центра.

Представляет интерес и **модель Эрроу-Гурвица** – это экономико-математическая модель экономического равновесия. Как всякая модель, модель Эрроу-Гурвица упрощенно описывает процесс нахождения рыночного равновесия по Вальрасу путем итеративного диалога между спросом, предложением, их разницей, определяется функция полезности. Естественно, речь идет об обмене информацией между участниками процесса установления равновесия, выделенных сервис программой в виде участников имитационного диалога.

На каждой итерации имитационного процесса модель позволяет получать очередное значение размера спроса на ресурс, объема предложения продуктов, совокупные размеры избыточного спроса. Под избыточным спросом понимается неудовлетворенный спрос, он находится путем определения разницы спроса и предложения. После каждой итерации выдаются новые цены. Если предложения повышают спрос – цены снижаются, если спрос превышает предложения – цены растут.

После серии таких итераций можно «нащупать» необходимое значение параметров, приблизив цены к равновесному уровню.

«Нащупать» – в данном случае это термин Л. Вальраса. Свою модель общего равновесия он назвал мо-

делью «нащупывания». В модели Эрроу-Гурвица процесс нащупывания математически формализован, а сервисные программы «оживили» этот процесс.

Однако, узким местом модели Эрроу-Гурвица считается медленная скорость сходимости. Скорость сходимости алгоритма – это один из важных показателей качества экономико-математических моделей, предназначенных для решения задач на ЭВМ. Обычно сходимость оценивается количеством итераций, необходимых для получения искомого решения. В данной модели «нащупывать» равновесие приходится долго.

## **5.4 Моделирование межотраслевых связей на макроуровне. Динамическая модель межотраслевого баланса**

### **Схема экономико-математической модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции**

Межотраслевые связи на уровне народного хозяйства обычно исследуют балансовым методом. Межотраслевой баланс – это каркасная модель экономики в которой отражаются межотраслевые связи. Межотраслевые балансы бывают стоимостные и натуральные, статические и динамические.

Основы межотраслевого баланса были заложены в процессе разработки первого баланса межотраслевых связей народного хозяйства СССР за 1923-1924 гг.

Модель межотраслевого баланса постоянно совершенствуется и сейчас известно много межотраслевых моделей.

Балансовый метод лежит в основе методологии планирования хозяйства на макроуровне. За последние три десятка лет правительство СССР ежегодно утверждало более 150 балансов. Госплан СССР и республик – свыше 1600 материальных балансов, органы материально – технического снабжения – 10500 балансов материальных ценностей.

Рассмотрим межотраслевой баланс производства и распределения продукции. Именно в этом балансе четко прослеживаются экономические связи, а его разработка дает богатый материал для экономических расчетов.

Капиталистическая, рыночная экономика также использует балансовый метод.

Известный во всем мире метод экономического анализа «затраты – выпуск» разработанный В.В. Леонтьевым в своей основе имеет балансовый метод.

**Леонтьев Василий Васильевич** (р. 1906 г.) американский экономист, родился в С.–Петербурге. Окончил Ленинградский университет в 1925 г. Работал в Кильском университете, проф. Гарвардского университета (1931-1975 гг.) Нью – Йоркского университета с 1975 г. Автор метода «затраты – выпуска», за который в 1973 г. удостоен лауреата Нобелевской премии.

Дата рождения:	5 августа 1905
Место рождения:	Мюнхен, Германская империя
Дата смерти:	5 февраля 1999 (93 года)
Место смерти:	Нью-Йорк, США
Страна:	СССР до 1933 года США с 1933 года
Научная сфера:	Экономика
Место работы:	Гарвардский университет, Правительство США, Нью-Йоркский университет
Альма-матер:	Петроградский университет, Берлинский университет
Известные ученики:	Пол Самуэльсон Роберт Солоу
Известен как:	Автор метода «затраты— выпуск»

Рассмотрим математическую модель межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве.

Таблица 1 - Математическая модель межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3	...	n		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	...	$x_{1n}$	$y_1$	$X_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	...	$x_{2n}$	$y_2$	$X_2$
3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	...	$x_{3n}$	$y_3$	$X_3$
-	-	-	1	...	-	$\Pi$	-
n	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$x_{n3}$	...	$x_{nn}$	$y_n$	$X_n$
Оплата труда	$V_1$	$V_2$	$V_3$	...	$V_n$	$V_{кон}$	-
Чистый доход	$m_1$	$m_2$	$m_3$	...	$m_n$	$m_{кон}$	-
Валовая продукция	$X_1$	$X_2$	$X_3$	...	$X_n$	-	$X$

Основу баланса составляет совокупность всех отраслей материального производства, на схеме их число равно  $n$ . Каждая отрасль дважды фигурирует в балансе – как производящая и как потребляющая. Отрасли как производителю соответствует определенная строка, а как потребителю – отдельный столбец.

Если номер любой производящей отрасли обозначить через  $i$ , а номер потребляющей отрасли через  $j$ , то находящийся на пересечении строк и столбцов величины  $x_{ij}$  нужно понимать как стоимость средств производства, произведенных в  $i$ ой отрасли и потребленных в качестве материальных затрат в  $j$ -ой отрасли. Допустим, что в нашей схеме первая отрасль – это производство электроэнергии,

вторая – угольная промышленность, а третья отрасль – сельское хозяйство.

Тогда величина

$x_{11}$  - показывает стоимость электроэнергии, израсходованной внутри отрасли на собственные нужды;

$x_{22}$  – стоимость угля, израсходованного в угольной промышленности;

$x_{33}$  – стоимость продукции сельского хозяйства, израсходованной на собственные нужды (семена, корма, продовольствие, потребленное работниками сельского хозяйства и т.д.)

$x_{13}$  – затраты электроэнергии в сельском хозяйстве.

$x_{23}$  – затраты угля в сельском хозяйстве и т.д.

В целом же столбец  $x_{13}, x_{23}, x_{33} \dots x_{n3}$  – характеризует структуру материальных затрат сельского хозяйства в разрезе отраслей поставщиков.

В балансе отражены не только материальные затраты, но и чистая продукция отраслей, или вновь созданная стоимость, валовой доход. Так чистая продукция для 3отрасли характеризуется суммой оплаты труда  $V_3$  и чистого дохода  $m_3$ . Сумма материальных затрат и чистой продукции отрасли равна валовой продукции отрасли. Математически это можно записать так:

$$X_3 = x_{13} + x_{23} + x_{33} + \dots + x_{n3} + v_3 + m_3 = \sum x_{i3} + v_3 + m_3$$

или для любой потребляющей отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + v_j + m_j \quad (1)$$

Формула (1) охватывает систему из  $n$  уравнений, отражающих стоимостной состав продукции всех отраслей материальной сферы. Структура уравнений стоимостного

состава вполне соответствует известной вам из экономической теории формуле разложения стоимости К. Маркса

$$P = c + v + m.$$

Если под величиной  $C$  понимать перенесенную на продукт стоимость прошлого труда, а под  $V+m$  вновь созданную стоимость, распределяющуюся на стоимость необходимого и прибавочного продукта.

Таким образом, в модели по столбцам отражается стоимостной состав продукции всех отраслей материального производства.

Рассмотрим экономическое содержание строк модели. В строках межотраслевого баланса содержатся данные о распределении годового объема продукции каждой отрасли материального производства.

Так, в нашем примере, в строке 3 (сельское хозяйство) величина

$x_{31}$  – будет характеризовать расход продукции сельского хозяйства для производства электроэнергии,

$x_{32}$  – расход продукции сельского хозяйства в угольной промышленности и

$x_{33}$  – расход продукции сельского хозяйства на собственные нужды.

$y_3$  – продукция сельского хозяйства, потребленная вне сферы материального производства.

Суммирование всех величин по любой строке должно привести к тому же итогу, что и суммирование по соответствующему столбцу, так как в любом случае речь идет об одной и той же величине – стоимости валовой продукции отрасли.

Для любой производящей отрасли можно записать:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad (2)$$



Очевидно, таких уравнений имеется  $n$ , они называются уравнениями распределения или использования продукции отраслей материального производства.

Таким образом, в модели по строкам показано распределение или использование продукции отраслей материального производства.

В целом модель межотраслевого баланса отражает стоимостную структуру годовой продукции и распределение этой продукции по направлениям использования.

### Характеристика квадрантов межотраслевого баланса

Рассмотрим теперь модель баланса в разрезе его крупных составных частей. По экономическому содержанию выделяют четыре части баланса. Они называются квадрантами баланса. На схеме баланса каждый квадрант обозначен римской цифрой (I, II, III, IV).

**В 1 квадранте** отображаются производственные связи между отраслями. По форме он представляет квадратную матрицу, сумма всех элементов которой и по строкам и по столбцам равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере. По данным этого квадранта исчисляют коэффициенты прямых и полных затрат на производство продукции, так как здесь содержатся межотраслевые потоки средств производства.

**Во втором квадранте** представлена конечная продукция всех отраслей материального производства. Под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования на потребление и накопление.

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (y'_i + y''_i) \quad (3)$$

Где  $y'_i$  - потребление,  $y''_i$  - накопление.

Потребление делится на личное и общественное (в жилищно-коммунальном хозяйстве, органах управления, просвещения, здравоохранения, науки, транспорта и связи, обслуживающих непроизводственную сферу и т.д.).

Накопление делится на производственные основные фонды, непроизводственные основные фонды, прирост оборотных фондов, увеличение запасов и резервов. Кроме этого во втором квадранте показывают возмещение выбывших основных фондов и капитальный ремонт, возмещение потерь, экспорт, прочие расходы. Применительно к сельскохозяйственному предприятию конечная продукция состоит из товарной продукции, непроизводственного потребления и прироста запасов. При отражении в первом квадранте стоимости износа средств производства конечная продукция (2 квадрант) не отличается от национального дохода. Второй квадрант характеризует вещественную структуру (состав) вновь созданного чистого продукта или национального дохода. Вместе с тем во втором квадранте отражается целевое назначение или использование национального дохода.

В целом данные второго квадранта характеризуют отраслевую материальную структуру национального дохода, его состав, показывают распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, а также структуру потребления и накопления по отраслям производства и потребителям.

**Третий квадрант** также характеризует национальный доход, но со стороны стоимостного состава, как сумму оплаты труда и чистого дохода всех отраслей. Этот квадрант содержит различные виды доходов работников материального производства и различные виды чистого дохода (прибыль государственных предприятий, колхозов, налог с оборота, налог на добавленную стоимость и т. д.).

В теоретическом плане здесь показаны составные части формирования чистого продукта (продукт на себя и продукт на общество) и его отраслевой состав. Если мы сравним по отдельной отрасли чистую и конечную продукцию, то они будут не равны, то есть:

$$y_i' + y_i'' \neq v_j + m_j \quad (4)$$

потребление
накопление

Но в целом по всем отраслям:

$$\sum_{i=1}^n (y_i' + y_i'') = \sum_j^n (v_j + m_j) \quad (5)$$

Данные третьего квадранта необходимы для анализа соотношений между вновь созданной стоимостью и перенесенной стоимостью, между величиной необходимого и прибавочного продукта в целом по материальному производству и в отраслевом разрезе.

**Четвертый квадрант** находится на пересечении столбцов конечной продукции и строк доходов, он отражает конечное распределение и использование национального дохода. Здесь отражается перераспределение чистого дохода в пользу непроизводственной сферы, а также перераспределение чистого продукта и характер потребления этой части продукта (личное и общественное непроизводственное потребление, личное и общественное непроизводственное накопление).

В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства.

Их величиной определяется доля участия населения, предприятий, колхозов, учреждений в накоплении и потреб-

лении всей массы конечной продукции, всего национального дохода.

Очевидно, что данные второй, третьей и четвертой квадрантов по итогу должны быть равны, так как речь идет об одной и той же вновь созданной стоимости – национальном доходе.

Таким образом, в целом межотраслевой баланс в рамках единой экономико-математической модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс всего общественного продукта, балансы национального дохода, финансовый баланс доходов и расходов населения.

Мы рассмотрели модель баланса в стоимостном выражении.

Наряду со стоимостными балансами разрабатываются межпродуктовые натуральные балансы. Натуральные балансы содержат перечень не отраслей, а самих продуктов материального производства – уголь, сталь, нефть, зерно, мясо и т.д. В качестве единиц измерения выступают специфические для каждого продукта количественные характеристики – вес, объем, площадь, длина и т.д.

В натуральном балансе первые и вторые квадранты по содержанию аналогичны стоимостным. Каждая строка в сути представляет собой материальный баланс отдельного продукта.

В третьем квадранте отражаются в натуральном измерении, в человеко-часах затраты труда на производство каждого вида продукции. Суммирование по столбцам в натуральном балансе не производится, и стоимостная структура не выявляется. Основное значение межпродуктового баланса заключается в комплексном, математически взаимосвязанном рассмотрении материальных балансов важнейших видов продукции.

## Коэффициенты прямых, косвенных и полных затрат

Технологические связи между отраслями измеряются с помощью коэффициентов прямых материальных затрат.

Впервые расчет коэффициентов для измерения технологических связей предложен В.К. Дмитриевым.

**Дмитриев Владимир Карпович** (1868-1913 г.), русский экономист – математик и статистик, один из первооткрывателей метода межотраслевого баланса. Основная работа: «Экономические очерки. Опыт органического синтеза трудовой теории ценности и теории предельной полезности» (1904 г.). В ней предложено уравнение цены и система уравнений в которой применены технологические коэффициенты, сведенные к затратам труда как первичного фактора

По данным модели баланса коэффициента прямых затрат можно рассчитать путем деления величины межотраслевых потоков на валовую продукцию потребляющих отраслей.

Для любой пары отраслей коэффициенты прямых затрат  $a_{ij}$  находятся:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \quad (6)$$

**Определение:** Коэффициент прямых затрат показывает, сколько единиц продукции  $i$  отрасли непосредственно затрачивается в качестве средств производства на единицу продукции  $j$  отрасли.

Если  $i=j$  имеем коэффициент затрат собственной продукции на единицу ее выпуска.

Коэффициенты прямых затрат образуют квадратную матрицу. Коэффициенты прямых затрат начисляются как в стоимостном, так и в натуральном выражении.

Кроме прямых различают косвенные и полные затраты. Рассмотрим пример: пусть дана матрица затрат, необходимых при производстве одежды.

Таблица 2 - Затраты на производство одежды

Виды затрат и стадии производства	Хлопок	Пряжа	Ткань	Одежда
Хлопок	-1	1,2		
Пряжа		-1	1,1	0,1
Ткань			-1	4,0
Одежда				-1
Труд	0,5	0,2	0,3	0,4

В этой таблице, затраты показаны как положительные числа, а элементы выпуска – как отрицательные.

Для производства единицы одежды требуется 4 единицы ткани, 0,1 пряжи, 0,4 единицы труда. Для производства единицы ткани требуется 1,1 единицы пряжи и 0,3 единицы труда, а для производства единицы пряжи требуется 1,2 единицы хлопка и 0,2 единицы труда. На единицу хлопка – сырца при производстве затрачивается 0,5 единиц труда.

Предположим, что выпускается одна единица одежды, а все остальные товары являются лишь промежуточными продуктами и полностью расходуются на производство единицы одежды. Построим таблицу полных затрат:

Таблица 3 - Коэффициенты полных затрат

Виды затрат и стадии производства	Хлопок	Пряжа	Ткань	Одежда	Чистый продукт
Хлопок	-5,4 (5,4×1)	5,4 (4,5×1,2)			0
Пряжа		-4,5 (4,4+0,1)	4,4 (4×1,1)	0,1	0
Ткань			-4 (4×1)	4,0	0
Одежда				-1	1
Труд	2,7 (5,4×0,5)	0,9 (0,2×4,5)	1,2 (0,3×4)	0,4	5,2

Поставим в таблицу сначала коэффициент затрат на единицу одежды пряжи 0,1, ткани – 4, труда 0,4. Это коэффициенты **прямых затрат на единицу одежды**.

Рассчитаем коэффициенты косвенных затрат пряжи, хлопка и труда на единицу одежды. Пряжи потребуется  $4 \times 1,1 = 4,4$  единиц для изготовления 4 единиц ткани и 0,1 единица для того чтобы сшить одежду. Итого  $4,4$  единицы +  $0,1 = 4,5$  единицы пряжи. Чтобы изготовить 4,5 единицы пряжи потребуется  $4,5 \times 1,2 = 5,4$  единицы хлопка.

Теперь рассчитаем затраты труда. На производство:

- Хлопка:  $5,4 \times 0,5 = 2,7$
- Пряжи:  $4,5 \times 0,2 = 0,9$
- Ткани:  $4,0 \times 0,3 = 1,2$
- Изготовление одежды:  $1,0 \times 0,4 = 0,4$

Итого на производство одежды - **5,2**

Следовательно, на каждую единицу одежды необходимо производить:

- 5,4 ед. хлопка
- 4,5 ед. пряжи

4,0 ед. ткани

И расходовать 5,2 ед. труда.

Это полные затраты труда. Они состоят из прямых затрат на изготовление одежды (0,4 ед.) и косвенных затрат труда (на изготовление ткани – 1,2 единицы, пряжи – 0,9, производства хлопка – 2,7 единиц).

Чтобы найти коэффициенты полных затрат необходимо сложить коэффициенты прямых и косвенных затрат всех порядков.

В данном примере мы сделали допущение, которое в реальной действительности невозможно.

В данном примере выпуск продукции на более поздних стадиях не используется в виде производственных затрат на более ранних стадиях производства. Мы допустили, что хлопок выращивают люди без одежды, пряжу и ткань производят тоже нагие ткачи и ткачихи. Все коэффициенты материальных затрат расположены сверху и справа от главной диагонали. Мы не учитывали обратные связи и это позволило нам рассчитать коэффициент полных затрат путем простых арифметических действий. В реальной действительности очень часто продукция последующих стадий используется в качестве элементов производственных затрат на предыдущих стадиях производства. Кроме этого любой промежуточный продукт может быть частично и конечным продуктом. Так возникают обратные связи и технологические отношения приобретают более сложный экономический характер.



### Рассмотрим пример.

Таблица 4 - Коэффициенты затрат на производство машин

Виды затрат и стадии производства	Уголь x	Сталь y	Машины z
Уголь	-1	2	0,2
Сталь	0,1	-1	0,5
Машины	0,1	0,3	-1
Труд	0,5	0,3	1

В данном случае имеется обратная связь, например, машины используются при производстве угля и стали, а уголь и сталь для производства машин.

В этом случае полные затраты можно подсчитать только решая систему уравнений:

$$\begin{aligned}x - 2y - 0,2z &= 0 && \text{по выпуску угля} \\y - 0,1x - 0,5z &= 0 && \text{по выпуску стали} \\z - 0,1x - 0,3y &= 1 && \text{по выпуску машин}\end{aligned}$$

Выпуск угля и стали рассматривается как производство промежуточных продуктов (конечного продукта – 0), а машин, как выпуск конечного продукта.

После решения этих уравнений получим следующие данные.

Таблица 5 - Косвенные и полные затраты при производстве машин

Виды затрат и стадии производства	Уголь	Сталь	Машины	Выпуск конечной продукции
Уголь	-2,31	2	0,31	0
Сталь	0,23	-1	0,77	0
Машины	0,23	0,3	-1,53	1
Труд	1,15	0,3	1,53	-2,98

Данные о затратах труда в **таблице 5** получены путем умножения главной диагонали таблицы 5, определяющей полные затраты каждого вида продукции на последнюю строку таблицы 4, которая определяет прямые затраты труда.

Выпуск одной единицы машин в виде конечного продукта в силу обратной связи предъявляет требования:

- во - первых, на производство 1,53 единиц машин, в том числе 0,23 для добычи угля, 0,3 для производства стали.

- во - вторых, на производство 2,31 единицы угля в том числе для выплавки стали 2 единицы и непосредственно для производства машин 0,31 единицы.

- в-третьих, на производство 1 единицы стали, в том числе для производства самих машин - 0,77 и 0,23 единицы для добычи угля.

На производство одной машины требуется 2,98 единицы труда из них 1,15 для добычи угля, 0,3 на производство стали и 1,53 на изготовление самих машин.

Аналогичным образом можно было бы определить полные суммы затрат заработной платы на единицу конечного продукта. Для этого следовало бы только данные главной диагонали таблицы 5 умножить на удельные нормы выплаты заработной платы. По аналогии можно рассчитать полные затраты капиталовложений, энергии, топлива и т.д.

Материальные затраты промежуточных продуктов также могут быть выражены как в натуральных единицах, так и в стоимостном выражении.

При расчетах полных затрат при решении уравнений обычно используют метод итераций или метод обращения матрицы.

### **Основное математическое соотношение межотраслевого баланса и его использование в плановых расчетах**

Мы уже отмечали, что для любой пары отраслей коэффициент прямых затрат составляет:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (7)$$

отсюда следует, что  $x_{ij} = a_{ij}X_j$ .

Если это значение подставить в формулу:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad (2)$$

То получим:

$$\sum a_{ij}X_j + y_i \quad (8)$$

Формула (8) является основным математическим соотношением как стоимостных, так и натуральных балансов. Это математическое соотношение служит исходным пунктом расчетов при разработке балансов на плановый период.

Предположим, что на плановый период технологические коэффициенты  $a_{ij}$  – известны.

Исходя из экономического смысла соотношения (8) можно говорить о трех вариантах расчета:

– В модели заданы валовые уровни производства всех отраслей (величины  $X_i$  они же  $X_j$ ), конечная продукция (величины  $y_i$ ) определяются в результате расчета.

– Заданы плановые уровни конечной продукции всех отраслей, а решение системы уравнений даст объемы валовой продукции.

– По отдельным отраслям в модели задаются (планируются) уровни валовой продукции, по другим отраслям планируются уровни конечной продукции. Решение системы даст значения остальных параметров.

Первый вариант напоминает практику планирования, когда на основе изучения резервов развития отраслей намечают задания по валовому выпуску продукции, а величина и структура конечной продукции и национального дохода являются в значительной мере производными величинами. Проще говоря, какими получатся в зависимости от вала.

Такой метод прост, позволяет точнее учесть возможности капиталовложений в те или иные отрасли, их производственные ресурсы. Но этот метод страдает и принципиальными недостатками. Известно, что рост удовлетворения материальных потребностей членов общества осуществляется за счет роста национального дохода. Поэтому экономически более оправданным представляет принцип планирования от национального дохода, когда на основе изучения потребностей намечается величина конечной продукции и ее материально вещественная структура, а в качестве производного показателя выступает валовая продукция (то есть какая получится). При планировании от валовой продукции вполне реальной является опасность получения нерациональной структуры национального дохода. Может иметь

место неоправданный рост промежуточной продукции без соответствующего увеличения конечного продукта. Это позволяет говорить о неприемлемости первого варианта.

Второй вариант вполне обоснован теоретически, но его практическое применение сталкивается с известными трудностями. Когда по заданному объему и структуре национального дохода будут рассчитаны уровни валовой продукции, они могут оказаться для отдельных отраслей чрезмерно высокими, необеспеченными ресурсами. В отдельных отраслях могут оказаться неиспользованными уже действующие мощности. Это требует пересмотра плана. На этот вариант можно перейти постепенно, поэтапно.

Третий вариант расчетов, когда по некоторым отраслям задаются уровни выпуска валовой, по другим конечной продукции, хотя теоретически менее строг, но представляется удобным в практическом отношении.

Валовой выпуск целесообразно задавать по отраслям, составляющим фундамент производства – энергетической, топливной, металлургической и т.д. По отраслям, удовлетворяющим непосредственные потребности населения, – намечается уровень конечной продукции. Решение системы уравнений межотраслевого баланса даст сбалансированный план производства валовой продукции и национального дохода.

**Динамические межотраслевые модели** характеризуют развитие народного хозяйства по годам. В отличие от статических моделей они отражают не состояние, а процесс развития экономики. Статические модели не отражают распределение и использование капитальных вложений, так как в них капиталовложения вынесены из сферы производства в сферу конечного использования вместе с предметами потребления и непроизводственными расходами.

В динамических межотраслевых моделях капиталовложения в производство выделены из состава конечной

продукции и рассматриваются как межотраслевые производственные потоки, обеспечивающие прирост фондов.

Модели, в которых явно учитываются прямые и обратные связи показателей объемов производства и основных производственных фондов внутри рассматриваемого периода; при этом величины новых реконструированных основных фондов исчисляются как результат капиталовложений, планируемых за счет продукции данного года и предшествующих лет, а возможности развития производства в данном году обуславливаются наличным объемом основных производственных фондов, часть которого образована фондами, введенными в предшествующие годы. Модели, учитывающие такие взаимосвязи, и являются собственно динамическими моделями межотраслевого баланса

По характеру отражения процесса формирования капитальных вложений выделяют модели с учетом лага и модели без учета временного лага, Лаг - это промежуток времени, отделяющий эффект от предшествующего стимула.

Динамические модели являются дальнейшим развитием статических моделей, последовательно усложняясь и совершенствовавшись в адекватном отражении действительности. новых мощностей обычно имеют длительность больше года, однако для простоты полагают продолжительность строительства равной году.

Принципиальная схема первых двух квадратов динамической модели межотраслевого баланса может быть представлена таблицей.

### **Схема динамической модели межотраслевого баланса**

Модель включает  $n$  продуктов и  $n$  производственных отраслей. Каждая отрасль производит один продукт. Все процессы производства данного продукта агрегированы в один способ производства. Интенсивность использования

данного способа измеряется объемом выпуска соответствующего продукта. Годовой выпуск продукта ограничен имеющимися производственными мощностями отрасли. За единицу измерения принимается мощность, необходимая для выпуска единицы продукта.

Время в модели дискретно, моделируемый промежуток это один год. Продолжительность производственного цикла в промышленности обычно короче года, однако затраты и объемы выпуска относят к одному году. Процессы создания.

Таблица - Схема динамической модели межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Межотраслевые потоки текущих затрат					Межотраслевые потоки капиталовложений (прирост фондов)					Конечный продукт	Вся продукция
	1	2	3	...	n	1	2	3	...	n		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	...	$x_{1n}$	$\Delta\phi_{11}$	$\Delta\phi_{12}$	$\Delta\phi_{13}$	...	$\Delta\phi_{1n}$	$Z_1$	$X_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	...	$x_{2n}$	$\Delta\phi_{21}$	$\Delta\phi_{22}$	$\Delta\phi_{23}$	...	$\Delta\phi_{2n}$	$Z_2$	$X_2$
3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	...	$x_{3n}$	$\Delta\phi_{31}$	$\Delta\phi_{32}$	$\Delta\phi_{33}$	...	$\Delta\phi_{3n}$	$Z_3$	$X_3$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$x_{n3}$	...	$x_{nn}$	$\Delta\phi_{n1}$	$\Delta\phi_{n2}$	$\Delta\phi_{n3}$	...	$\Delta\phi_{nn}$	$Z_n$	$X_n$

Из схемы видно, что модель содержит **две квадратные матрицы межотраслевых потоков**. Матрица текущих затрат совпадает с первым квадрантом статической модели. И там, и здесь годовые межотраслевые потоки средств производства образуют квадратную матрицу. Ее содержание мы детально рассматривали. Вторая матрица образована из

межотраслевых потоков прироста фондов - то есть потоков капиталовложений в производство.

Элементы данной матрицы показывают количество продукции отрасли поставщика (строка баланса) направленную отрасли потребителю (столбец баланса) в качестве производственных вложений в ее основные фонды. Эти капиталовложения имеют материальное выражение в виде дополнительного производственного оборудования, производственных площадей, транспортных линий и т. п.

В статическом балансе потоки капиталовложений по потребителям не показываются, а отражаются в составе конечной продукции.

В динамической модели конечный продукт  $Z_i$  включает продукцию  $i$ -й отрасли, идущую в личное и общественное потребление, накопление непродуцированной сферы, в приросте оборотных фондов, незавершенного строительства, на экспорт.

Для любой строки справедливо

$$\sum_{j=1}^n \Delta\phi_{ij} + Z_i = y_i \quad (1)$$

Сумма потоков капитальных вложений и конечного продукта динамической модели равна конечной продукции статического баланса.

А формулу строки баланса можно записать так -

$$X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} + \sum_{j=1}^n \Delta\phi_{ij} + Z_i \quad (2)$$

Как и в статической модели, межотраслевой поток можно выразить через валовую продукцию и коэффициенты прямых затрат:

$$X_{ij} = a_{ij} X_j \quad (3)$$



Потоки текущих затрат связаны с величиной выпуска продукции, а потоки капиталовложений обуславливают прирост продукции за период  $t$  по сравнению с предшествующим периодом  $t-1$ . Прирост продукции  $\Delta X_j$  равен разности абсолютных уровней производства за эти периоды.

$$\Delta X_j = X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)} \quad (4)$$

Если прирост продукции пропорционален приросту фондов, то можно записать:

$$\Delta \phi_{ij} = b_{ij} \Delta X_j, \quad (5)$$

где  $b_{ij}$  - коэффициенты пропорциональности

$$b_{ij} = \frac{\Delta \phi_{ij}}{\Delta X_j} \quad (6)$$

**Коэффициенты  $b_{ij}$  показывают сколько продукции  $i$  - й отрасли должно быть вложено в  $j$  - ю отрасль для увеличения ее производственной мощности на единицу годовой продукции.**

**Коэффициенты  $b_{ij}$  получили название коэффициентов вложений или приростной фондоемкости.**

С их помощью строку баланса можно записать так:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta X_j + Z_i \quad (7)$$

Если объемы производства и конечная продукция относятся к периоду  $t$ , а прирост продукции определен в сравнении с периодом  $(t-1)$ , то можно записать:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(t)} + \sum_{j=1}^n b_{ij} (X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)}) + Z_i^{(t)} \quad (8)$$

Отсюда

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) X_j^{(t)} - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_j^{(t-1)} + Z_i^{(t)} \quad (9)$$

Если известны уровни производства всех отраслей в предыдущем периоде (величины  $X_j^{(t-1)}$ ) и конечный продукт  $t$  – го периода, то выражение (9) представляет систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, которые представляют собой уровни производства  $t$  – го периода.

Решение системы уравнений динамической модели позволяет определить выпуск продукции в последующем периоде в зависимости от уровня, достигнутого в предыдущем периоде. **Связь между периодами, собственно динамика, устанавливается через коэффициенты вложений, характеризующие фондоемкость единицы прироста продукции.**

Нельзя забывать, что в I квадранте статической модели отражены только текущие затраты средств производства. Эти данные не дают представления об объеме занятых в отраслях всех производственных фондов и о фондоемкости выпускаемой продукции. Поэтому статическую модель иногда усложняют, вводя дополнительной строкой объемы производственных фондов в денежном выражении по каждой потребляющей отрасли. На основании этих данных и объемов продукции отраслей определяются **коэффициенты прямой фондоемкости** продукции  $j$  – й отрасли:

$$f_j = \frac{\phi_j}{X_j} \quad (11)$$

**Коэффициенты прямой фондоемкости** показывают величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве данной отрасли в расчете на единицу ее годовой продукции, выраженной в натуральных или денежных измерителях. Они также образуют матрицу  $n \times n$ .

Представляет определенный интерес и **показатели полной фондоемкости**. Они отражают объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции данной отрасли.

Для каждого столбца должно соблюдаться равенство

$$F_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} F_i + f_j \quad (12)$$

где  $F$  - полная фондоемкость,  $f_j$  - коэффициенты прямой фондоемкости.

Используя матрицу коэффициентов полных затрат  $A_{ij}$ , можно записать

$$F_j = \sum_{i=1}^n f_i A_{ij} \quad (13)$$

Дальнейшим усложнением можно разграничить фонды по видам и группам, например, основные и оборотные фонды. Для каждой группы коэффициенты прямой фондоемкости также образуют матрицу, элементы которой равны:

$$f_{kj} = \frac{\phi_{kj}}{X_j} \quad (15)$$

Для каждой отрасли можно вычислить коэффициенты полной фондоемкости  $F_{kj}$ , отражающие полную потребность в фондах  $K$ -ой группы для выпуска единицы конечной продукции этой отрасли.

$$F_{kj} = \sum a_{ij} \cdot F_{ki} + f_{kj} \quad (16)$$

или по-другому:

$$F_{kj} = \sum_{i=1}^n f_{ki} A_{ij} \quad (17)$$

Коэффициенты вложений ( $b_{ij}$ ) связаны с коэффициентами фондоемкости продукции ( $f_{kj}$ ). Коэффициенты ( $f_{kj}$ ) показывают, сколько всего фондов данного вида приходится на единицу валового выпуска продукции, а коэффициенты ( $b_{ij}$ ) отражают прирост фондов на единицу прироста продукции. Если бы производственные фонды не совершенствовались в следствие научного и технического прогресса, то на каждую единицу прироста продукции требовалось бы столько же и таких же фондов, сколько их занято на единицу уже выпускаемой продукции. Тогда коэффициенты  $b_{ij}$  и  $f_{kj}$  были бы равны для соответствующей группы.

Практически они различаются по величине за счет того, что прирост фондов, новые капиталовложения всегда осуществляются на более высоком уровне научно-технического прогресса, а это новые материалы, новые технологии и т.д. Коэффициенты  $b_{ij}$  отражают существующую структуру фондов, а она складывается обычно десятилетиями, включает и устаревшую технику.

## 5.5 Модели хаотической динамики

### Литература по вопросу

- 1 Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г.Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.
- 2 Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. 3-е изд. М.: УРСС, 2001.
- 3 Малинецкий Г.Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: УРСС, 2006.

### 5.5.1 Основные понятия и история теории хаоса, признаки хаотической системы. «Эффект бабочки»

**Теория хаоса** — математический аппарат, описывающий поведение некоторых нелинейных динамических систем, подверженных при определённых условиях явлению, известному как **хаос**. Поведение такой системы кажется случайным, даже если модель, описывающая систему, является детерминированной.

Примерами подобных систем являются атмосфера, турбулентные потоки, биологические популяции, общество как система коммуникаций и его подсистемы: экономические, политические и другие социальные системы. Их изучение, наряду с аналитическим исследованием имеющихся рекуррентных соотношений, обычно сопровождается математическим моделированием.

Теория хаоса — область исследований, связывающая математику, физику и философию.

Турбулентные потоки воздуха от крыла самолета, образующиеся во время его посадки. Изучение критической

точки, после которой система создает турбулентность, были важны для развития теории Хаоса. Например, советский физик Лев Ландау разработал Ландау-Хопф теорию турбулентности.

Пионерами теории хаоса считаются французский физик и философ Анри Пуанкаре (доказал теорему о возвращении), советские математики А.Н. Колмогоров В.И. Арнольд, Мозер, построившие теорию хаоса, называемую КАМ (теория Колмогорова-Арнольда-Мозера). Теория вводит понятие аттракторов (в том числе, странных аттракторов как притягивающих канторовых структур), устойчивых орбит системы (т. н. КАМ-торов).

Первым исследователем хаоса был **Жюль Анри Пуанкаре**.

В 1880-х, при изучении поведения системы с тремя телами, взаимодействующими гравитационно, он заметил, что могут быть непериодические орбиты, которые постоянны и не удаляются и не приближаются к конкретной точке. В 1903г. Он сказал: «Если бы мы точно знали законы природы и положение Вселенной в начальный момент, мы могли бы точно предсказать положение той же Вселенной в последующий момент. Но даже если бы законы природы открыли нам все свои тайны, мы и тогда могли бы знать начальное положение только приближенно. Если бы это позволило нам предсказать последующее положение с тем же приближением, это было бы все, что нам требуется, и мы могли бы сказать, что явление было предсказано, что оно управляется законами. Но это не всегда так; может случиться, что малые различия в начальных условиях вызовут очень большие различия в конечном явлении. Малая ошибка в первых породит огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, и мы имеем дело с явлением, которое развивается по воле случая». В этих словах Пуанка-

ре мы находим постулат теории хаоса о зависимости от начальных условий.

### **Жюль Анри Пуанкаре**

Дата рождения:	29 апреля 1854
Место рождения:	Нанси, Франция
Дата смерти:	17 июля 1912 (58 лет)
Место смерти:	Париж, Франция
Страна:	Франция
Научная сфера:	Математика, физика, философия
Место работы:	Горная школа, Парижский университет, Политехническая школа
Альма-матер:	Лицей Нанси, Политехническая школа, Горная школа
Научный руководитель:	Шарль Эрмит
Известен как:	Один из создателей топологии, теории относительности

В 1898 Жак Адамар издал влиятельную работу о хаотическом движении свободной частицы, скользящей без трения по поверхности постоянной отрицательной кривизны. В своей работе «Бильярд Адамара» он доказал, что все траектории непостоянны и частицы в них отклоняются друг от друга с положительной экспонентой Ляпунова.

Почти вся более ранняя теория, под названием эргодическая теория, была разработана только математиками. Позже нелинейные дифференциальные уравнения изучали Г.Биргхоф, А. Колмогоров, М. Каретник, Й.Литлвуд и Стивен Смэйл. Кроме С. Смэйла, на изучение хаоса всех их

вдохновила физика: поведение трех тел в случае с Г. Биргхофом, турбулентия и астрономические исследования в случае с А. Колмогоровым, радиотехника в случае с М. Каретником и Й. Литлвудом. Хотя хаотическое планетарное движение не изучалось, экспериментаторы столкнулись с турбулентией в жидкости и непериодическими колебаниями в радиосхемах, не имея достаточной теории чтобы это объяснить.

Несмотря на попытки понять хаос в первой половине двадцатого столетия, теория хаоса как таковая начала формироваться только с середины 20-го столетия. Тогда для некоторых ученых стало очевидно, что преобладающая в то время линейная теория просто не может объяснить некоторые наблюдаемые эксперименты подобно логистическому отображению. Чтобы заранее исключить неточности при изучении — простые "помехи" в теории хаоса считали полноценной составляющей изучаемой системы.

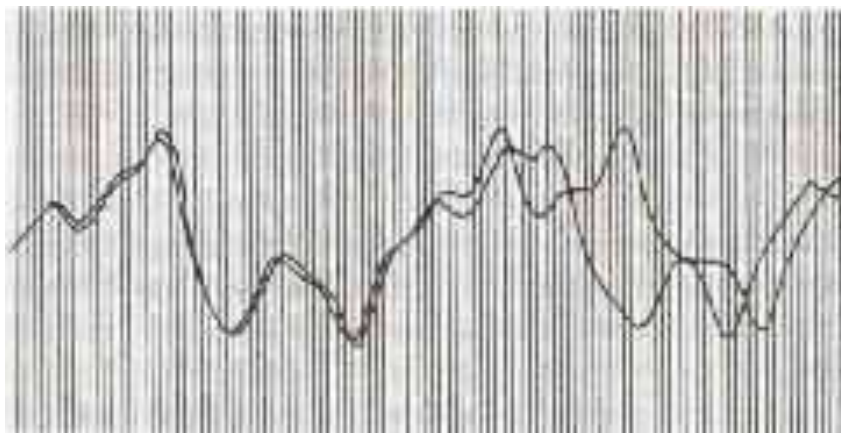
Основным катализатором для развития теории хаоса стала электронно-вычислительная машина. Большая часть математики в теории хаоса выполняет повторную итерацию простых математических формул, которые делать вручную непрактично. Электронно-вычислительные машины делали такие повторные вычисления достаточно быстро, тогда как рисунки и изображения позволяли визуализировать эти системы.

Одним из первых пионеров в теории хаоса был Эдвард Лоренц, интерес которого к хаосу появился случайно, когда он работал над предсказанием погоды в 1961 году.

Погодное моделирование Лоренц выполнял на простом цифровом компьютере McVee LGP-30. Когда он захотел увидеть всю последовательность данных, тогда, чтобы сэкономить время, он запустил моделирование с середины процесса. Хотя это можно было сделать введя данные с распечатки, которые он вычислил в прошлый раз. К его удив-



лению погода, которую машина начала предсказывать, полностью отличалась от погоды, рассчитанной прежде. Лоренц обратился к компьютерной распечатке. Компьютер работал с точностью до 6 цифр, но распечатка округлила переменные до 3 цифр, например значение 0.506127 было напечатано как 0.506. Это несущественное отличие не должно было иметь фактически никакого эффекта. Однако Лоренц обнаружил, что малейшие изменения в первоначальных условиях вызывают большие изменения в результате. Открытию дали имя Лоренца и оно доказало, что метеорология не может точно предсказать погоду на период более недели.



Расхождение двух графиков погоды, берущих начало из одной точки. Распечатка Лоренца 1961 года, воспроизведенная в книге Джеймса Глейка "Хаос: Создание новой науки" (СПб., "Амфора", 2001).

## Эдвард Нортон Лоренц

Дата рождения:	23 мая 1917
Место рождения:	Вест-Хартфорд, Коннектикут, США
Дата смерти:	16 апреля 2008 (90 лет)
Место смерти:	Кембридж, Массачусетс, США
Страна:	США
Научная сфера:	Математика и метеорология
Место работы:	Массачусетский технологический институт
Альма-матер:	Дартмутский колледж, Гарвардский Университет, Массачусетский технологический институт
Известен как:	Один из основоположников Теории Хаоса
Награды и премии	Премия Киото (1991) Премия Крауфорда (1983) - году Шведская королевская академия наук присудила ему совместно с бывшим профессором Массачусетского технологического института Генри Стоммелом премию Крауфорда, учрежденную для областей, в которых не присуждается Нобелевская премия.

Годом ранее **Бенуа Мандельброт** нашел повторяющиеся образцы в каждой группе данных о ценах на хлопок. Он изучал теорию информации и заключил, что структура помех подобна набору Регента: в любом масштабе пропорция периодов с помехами к периодам без них была константа — значит ошибки неизбежны и должны быть запланированы.

Мандельброт описал два явления:

– "эффект Ноя", который возникает, когда происходят внезапные прерывистые изменения, например, изменение цен после плохих новостей;

– "эффект Иосифа" в котором значения постоянны некоторое время, но все же внезапно изменяются впоследствии.

В 1967г. он издал работу "Какой длины побережье Великобритании? Статистические данные подобностей и различий в измерениях" доказывая, что данные о длине береговой линии изменяются в зависимости от масштаба измерительного прибора. Он утверждал, что клубок бечевки кажется точкой, если его рассматривать издали (0-мерное пространство), он же будет клубком или шаром, если его рассматривать достаточно близко (3-мерное пространство) или может выглядеть замкнутой кривой линией сверху (1-мерное пространство). Он доказал, что данные измерения объекта всегда относительны и зависят от точки наблюдения. Объект, изображения которого являются постоянными в различных масштабах ("самоподобие") является фракталом (например кривая Коха или "снежинка").

В 1975 г. Мандельброт опубликовал работу «Фрактальная геометрия природы», которая стала классической теорией хаоса. Некоторые биологические системы, такие как система кровообращения и бронхиальная система, подходят под описание фрактальной модели.

## Бенуа Мандельброт

Дата рождения:	20 ноября 1924
Место рождения:	Варшава, Польша
Дата смерти:	14 октября 2010 (85 лет)
Место смерти:	Кембридж, Массачусетс, США
Страна:	Польша, Франция, США
Научная сфера:	Фрактальная геометрия
Место работы:	Йельский университет IBM Тихоокеанская северо-западная национальная лаборатория
Альма-матер:	Политехническая школа Калифорнийский технологический институт Сорбонна
Известен как:	Автор множества Мандельброта
Награды и премии	Премия Вольфа (физика, 1993), Премия Японии (2003)

Работая в IBM, Мандельброт ушел далеко в сторону от чисто прикладных проблем компании. Он работал в области лингвистики, теории игр, экономики, авиации, географии, физиологии, астрономии, физики. Ему нравилось переключаться с одной темы на другую, изучать различные направления.

Исследуя экономику, Мандельброт обнаружил, что произвольные внешне колебания цены могут следовать скрытому математическому порядку во времени, который не описывается стандартными кривыми. Бенуа Мандельброт занялся изучением статистики цен на хлопок за большой период времени (более ста лет). Колебания цен в течение дня казались случайными, но Мандельброт смог выяснить тенденцию их изменения. Он проследил симметрию в длительных колебаниях цены и колебаниях кратковременных. Это открытие оказалось неожиданностью для экономистов.

По сути, Бенуа Мандельброт применил для решения этой проблемы зачатки своего рекурсивного (фрактального) метода.

Явления хаоса наблюдали многие экспериментаторы еще до того, как его начали исследовать. Например, в 1927 г. Ван дер Поль, а в 1958 г. П. Ивес. В 1961г. Й. Уэда, аспирант лаборатории Киотского университета, заметил некую закономерность и назвал её "случайные явления превращений", когда экспериментировал с аналоговыми вычислительными машинами. Его руководитель не согласился тогда с его выводами и не позволил ему представить их общественности до 1970 г. В декабре 1977 г. Нью-Йоркская академия наук организовала первый симпозиум о теории хаоса, который посетили Дэвид Руелл, Роберт Мей, Джеймс А. Йорк, Роберт Шоу, Й. Даян Фермер, Норман Пакард и метеоролог Эдвард Лоренц.

В 1978г. **Митчелл Феидженбом** издал статью "Количественная универсальность для нелинейных преобразований", где описал логистические отображения, применил рекурсивную геометрию к изучению естественных форм, таких как береговые линии. Особенность его работы в том, что он установил универсальность в хаосе и применял теорию хаоса ко многим явлениям.

В 1979г. Альберт Дж. **Либчейбр** на симпозиуме в Осине, представил свои экспериментальные наблюдения каскада раздвоения, который ведет к хаосу. Его наградили премией Вольфа в физике вместе с Митчеллом Дж. Фейгенбаумом в 1986г. "за блестящую экспериментальную демонстрацию переходов к хаосу в динамических системах". Тогда же в 1986 г. Нью-Йоркская Академия Наук вместе с национальным Институтом Мозга и центром Военно-морских исследований организовали первую важную конференцию по хаосу в биологии и медицине. Там, Бернардо Уберман продемонстрировал математическую модель глаза и нарушений его подвижности среди шизофреников. Это привело к широкому применению теории хаоса в физиологии в 1980-х, например в изучении патологии сердечных циклов.

В 1987 г. Джеймс Глейк издал работу **«Хаос: создание новой науки»**, которая стала бестселлером и представила широкой публике общие принципы теории хаоса и ее хронологию.

Теория хаоса прогрессивно развивалась как межпредметная и университетская дисциплина, главным образом под названием анализ нелинейных систем. «Ученые-хаотики» - так сами называли себя некоторые авторы. Доступность более дешевых, более мощных компьютеров расширяет возможности применения теории хаоса, в эту сферу вовлекаются многие дисциплины (математика, топология, физика, биология, метеорология, астрофизика, теория информации, и т.д.).

Теория хаоса гласит, что сложные системы чрезвычайно зависимы от первоначальных условий и небольшие изменения в окружающей среде ведут к непредсказуемым последствиям.

Математические системы с хаотическим поведением являются детерминированными, то есть подчиняются некоторому строгому закону и, в каком-то смысле, являются

упорядоченными. Такое использование слова «хаос» отличается от его обычного значения.

В бытовом контексте слово «хаос» означает «быть в состоянии беспорядка».

В теории хаоса прилагательное хаотический определено более точно.

Общепринятого универсального математического определения хаоса нет, но обычно говорят, что динамическая система, которая классифицируется как хаотическая, должна иметь следующие **свойства**:

- она должна быть чувствительна к начальным условиям,
- она должна иметь свойство топологического смешивания,
- ее периодические орбиты должны быть всюду плотными.

Для того, чтобы динамическая система была хаотической, она должна быть нелинейной. Линейные системы никогда не бывают хаотическими. Теорема Пуанкаре–Бендиксона доказывает, что странный аттрактор может возникнуть в непрерывной динамической системе, только если она имеет три или больше измерений. Однако это ограничение не работает для дискретных динамических систем: дискретные двух- и даже одномерные системы могут иметь странные аттракторы. Движение трёх или большего количества тел, испытывающих гравитационное притяжение при некоторых начальных условиях может оказаться хаотическим движением.

Среди непрерывных систем хаотическое поведение имеют только неплоские пространственные системы (обязательно наличие не менее трех измерений или неевклидова геометрия). Однако дискретная динамическая система на какой-то стадии может проявить хаотическое поведение даже в одномерном или двумерном пространстве.

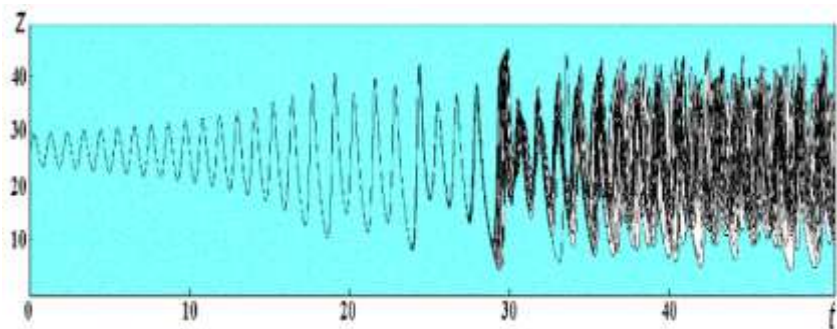
Чувствительность к начальным условиям или эффект бабочки

Чувствительность к начальным условиям означает, что все точки, первоначально близко приближенные между собой, в будущем имеют значительно отличающиеся траектории. Таким образом, маленькое изменение текущей траектории может привести к значительному изменению в её будущем поведении. Доказано, что последние два свойства фактически подразумевают чувствительность к первоначальным условиям (альтернативное, более слабое определение хаоса использует только первые два свойства из вышеупомянутого списка).

Чувствительность к начальным условиям более известна как «**Эффект бабочки**». Термин возник в связи со статьёй Эдварда Лоренца в 1972 г. «Предсказание: Взмах крыльев бабочки в Бразилии вызовет торнадо в штате Техас». Взмах крыльев бабочки символизирует мелкие изменения в первоначальном состоянии системы, которые вызывают цепочку событий, ведущих к крупномасштабным изменениям. Если бы бабочка не хлопала крыльями, то траектория системы была бы совсем другой.

Этот феномен («Эффект бабочки») для системы дифференциальных уравнений, известной как система Лоренца, иллюстрируется на следующем рисунке. На начальной стадии реализация выглядит как единственная. На самом деле их много, но они очень незначительно отличаются по начальным условиям. Хорошо видно, что по истечении некоторого времени эти отличия становятся существенными. В результате картина становится «смазанной», хаотической.





$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

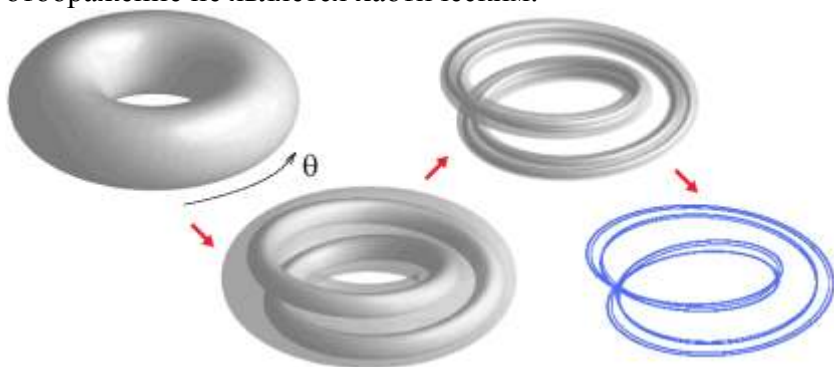
$$\dot{z} = -bz + xy$$

**Топологическое смешивание** в динамике хаоса означает такую схему расширения системы, что одна её область в какой-то стадии расширения накладывается на любую другую область. Математическое понятие «смешивание», как пример хаотической системы, соответствует смешиванию разноцветных красок или жидкости.

В определении хаоса внимание обычно ограничивается только закрытыми системами, в которых расширение и чувствительность к первоначальным условиям объединяются со смешиванием.

Даже для закрытых систем, чувствительность к первоначальным условиям не идентична с хаосом в смысле изложенном выше. Например, рассмотрим тор (геометрическая фигура, поверхность вращения которой имеет форму бублика), заданный парой углов  $(x, y)$  со значениями от нуля до  $2\pi$ . Отображение любой точки  $(x, y)$  определяется как  $(2x, y+a)$ . Удвоение первой координаты в отображении указывает на чувствительность к первоначальным условиям. Однако, из-за иррационального изменения во второй коор-

динате, нет никаких периодических орбит — следовательно отображение не является хаотическим.



### Различия между случайными и хаотическими данными

Только по исходным данным трудно сказать, каким является наблюдаемый процесс — случайным или хаотическим, потому что практически не существует явного чистого «сигнала» отличия.

Это значит, что любая система, даже если она детерминированная, будет содержать немного случайностей.

Чтобы отличить детерминированный процесс от стохастического, нужно знать, что детерминированная система всегда развивается по одному и тому же пути от данной отправной точки.

Таким образом, чтобы проверить процесс на детерминизм необходимо:

- выбрать тестируемое состояние;
- найти несколько подобных или почти подобных состояний;
- сравнить их развитие во времени.

## 5.5.2 Простые и хаотические аттракторы динамических систем. Фрактал

Аттрактор (англ. attract — привлекать, притягивать) — множество состояний (точнее — точек фазового пространства) динамической системы, к которому она стремится с течением времени.

Наиболее простыми вариантами аттрактора являются притягивающая неподвижная точка (к примеру, в задаче о маятнике с трением), однако бывают и значительно более сложные примеры.

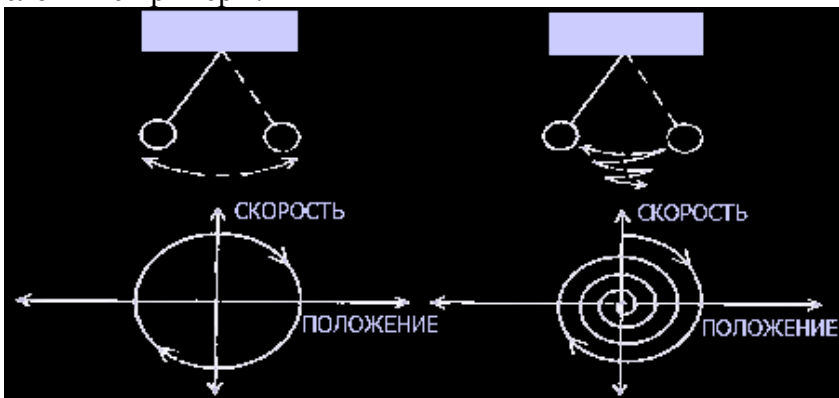


Рисунок - Движение маятника как пример фазового пространства

**Аттрактор** (от англ. to attract – притягивать) – геометрическая структура, характеризующая поведение в фазовом пространстве по прошествии длительного времени. Здесь возникает необходимость определить понятие фазового пространства. Итак, **фазовое пространство** – это абстрактное пространство, координатами которого являются степени свободы системы.

Например, у **движения маятника** две степени свободы. Это движение полностью определено начальной ско-

ростью маятника и положением. Если движению маятника не оказывается сопротивления, то фазовым пространством будет замкнутая кривая. В реальности на движение маятника влияет сила трения. В этом случае фазовым пространством будет спираль. Самым простым типом аттрактора является **точка**. Такой аттрактор характерен для маятника при наличии трения. Независимо от начальной скорости и положения, такой маятник всегда придет в состояние покоя, т.е. в точку. Еще одним примером предельного цикла является биение сердца. Частота биения может снижаться и возрастать, однако она всегда стремится к своему аттрактору, своей замкнутой кривой.

Третий тип аттрактора – тор.

**Аттрактор Лоренца** рассчитан на основе всего трех степеней свободы - три обыкновенных дифференциальных уравнения, три константы и три начальных условия. Однако, несмотря на свою простоту, система Лоренца ведет себя псевдослучайным (хаотическим) образом. Смоделировав свою систему на компьютере, Лоренц выявил причину ее хаотического поведения – разницу в начальных условиях. Даже микроскопическое отклонение двух систем в самом начале в процессе эволюции приводило к экспоненциальному накоплению ошибок и соответственно их стохастическому расхождению. Вместе с тем, любой аттрактор имеет граничные размеры, поэтому экспоненциальная расходимость двух траекторий разных систем не может продолжаться бесконечно. Рано или поздно орбиты вновь сойдутся и пройдут рядом друг с другом или даже совпадут, хотя последнее очень маловероятно. При схождении траектории сближаются и начинает проявляться эффект близорукости – возрастает неопределенность крупномасштабной информации. При расхождении траекторий наоборот, они расходятся и проявляется эффект дальнорукости, когда возрастает неопределенность мелкомасштабной информации. В результа-

те постоянной сходимости-расходимости хаотичного аттрактора неопределенность стремительно нарастает, что с каждым моментом времени лишает нас возможности делать точные прогнозы.

Здесь же необходимо отметить, что скорость схождения-расхождения является мерой хаоса, т.е. численным выражением того, насколько система хаотична. Другой статистической мерой хаоса служит **размерность аттрактора**.

Таким образом, основным свойством хаотических аттракторов является сходимость-расходимость траекторий разных систем, которые случайным образом постепенно и бесконечно перемешиваются. Здесь проявляется пересечение фрактальной геометрии и теории хаоса. Хотя одним из инструментов теории хаоса является фрактальная геометрия, фрактал – это противоположность хаоса. Главное различие между хаосом и фракталом заключается в том, что хаос является динамическим явлением, а фрактал статическим. Под динамическим свойством хаоса понимается непостоянное и непериодическое изменение траекторий.

**Фрактал** – это геометрическая фигура, определенная часть которой повторяется снова и снова, отсюда проявляется одно из свойств фрактала – **самоподобие**. Другое свойство фрактала – **дробность**. Дробность фрактала является математическим отражением меры неправильности фрактала. Фактически все, что кажется случайным и неправильным может быть фракталом, например, облака, деревья, изгибы рек, биения сердца, популяции и миграции животных или языки пламени.

Слово **фрактал** образовано от латинского **fractus** и в переводе означает состоящий из фрагментов. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 г. книги Мандельброта `The

Fractal Geometry of Nature'. В его работах использованы научные результаты других ученых, работавших в период 1875-1925 годов в той же области (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф). Но только в наше время удалось объединить их работы в единую систему.

Роль фракталов в машинной графике сегодня достаточно велика. Они приходят на помощь, например, когда требуется, с помощью нескольких коэффициентов, задать линии и поверхности очень сложной формы. С точки зрения машинной графики, фрактальная геометрия незаменима при генерации искусственных облаков, гор, поверхности моря. Фактически найден способ легкого представления сложных неевклидовых объектов, образы которых весьма похожи на природные.

Одним из основных свойств фракталов является **самоподобие**. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всем фрактале. Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: "Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому".

Существует большое число математических объектов, называемых фракталами (треугольник Серпинского, снежинка Коха, кривая Пеано, множество Мандельброта и лоренцевы аттракторы). Фракталы с большой точностью описывают многие физические явления и образования реального мира: горы, облака, турбулентные (вихревые) течения, корни, ветви и листья деревьев, кровеносные сосуды, что далеко не соответствует простым геометрическим фигурам. Впервые о фрактальной природе нашего мира заговорил Бенуа Мандельброт в своей основополагающей работе "**Фрактальная геометрия природы**".

Термин фрактал введен Бенуа Мандельбротом в 1977 году в его фундаментальной работе "Фракталы, Форма, Хаос и Размерность". Согласно Мандельброту, слово фрактал

происходит от латинских слов *fractus* - дробный и *frangere* - ломать, что отражает суть фрактала, как "изломанного", нерегулярного множества.

### Решетка Серпинского

Это один из фракталов, с которыми экспериментировал Мандельброт, когда разрабатывал концепции фрактальных размерностей и итераций. Треугольники, сформированные соединением средних точек большего треугольника вырезаны из главного треугольника, образуя треугольник, с большим количеством дырочек. В этом случае инициатор - большой треугольник, а шаблон - операция вырезания треугольников, подобных большему. Так же можно получить и трехмерную версию треугольника, используя обыкновенный тетраэдр и вырезая маленькие тетраэдры. Размерность такого фрактала  $\ln 3 / \ln 2 = 1.584962501$ .

### Фрактал Серпинского

Не перепутайте этот фрактал с решеткой Серпинского. Это два абсолютно разных объекта. В этом фрактале, инициатор и генератор одинаковы. При каждой итерации, добавляется уменьшенная копия инициатора к каждому углу генератора и так далее. Если при создании этого фрактала произвести бесконечное число итераций, он бы занял всю плоскость, не оставив ни одной дырочки. Поэтому его фрактальная размерность  $\ln 9 / \ln 3 = 2.0$ .

Чтобы получить **ковер Серпинского**, возьмем квадрат, разделим его на девять квадратов, а средний вырежем. То же сделаем и с остальными, меньшими квадратами. В конце концов образуется плоская фрактальная сетка, не имеющая площади, но с бесконечными связями. В своей

пространственной форме, губка Серпинского преобразуется в систему сквозных форм, в которой каждый сквозной элемент постоянно заменяется себе подобным. Эта структура очень похожа на разрез костной ткани. Когда-нибудь такие повторяющиеся структуры станут элементом строительных конструкций. Их статика и динамика, считает Мандельброт, заслуживает пристального изучения.

### Странные аттракторы

Аттрактор Лоренца как диаграмма хаотической системы. Эти два графика демонстрируют чувствительную зависимость от первоначальных условий в пределах занятого аттрактором региона

Большинство типов движения описывается простыми аттракторами, являющиеся ограниченными циклами. Хаотическое движение описывается странными аттракторами, которые очень сложны и имеют много параметров. Например, простая трехмерная система погоды описывается известным аттрактором Лоренца - одной из самых известных диаграмм хаотических систем, не только потому, что она была одной из первых, но и потому, что она одна из самых сложных.

### Модель Рёсслера

Описывается системой трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = -y - z, \dot{y} = x + ay, \dot{z} = b + (x - r)z$$

где  $x, y, z$  - динамические переменные,  $a, b, r$  - параметры.

Модель предложена в 1976 г. как сконструированная искусственно система с хаотической динамикой, более простая, чем хорошо известная к тому времени модель Лоренца.



Ниже приведена карта динамических режимов на плоскости параметров  $a$ ,  $r$  при  $b=0.2$ . По периферии рисунка показаны фазовые портреты аттракторов в некоторых характерных точках плоскости параметров.

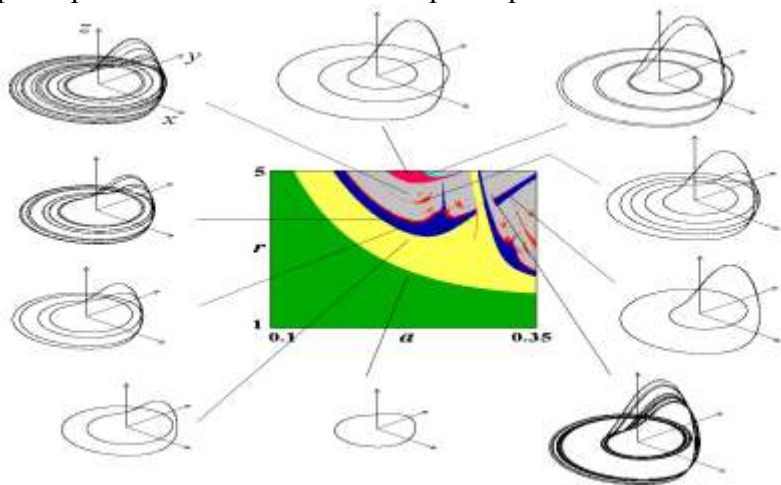


Рисунок - Отображение Рёслера имеет двойной период, подобно логистическому отображению.

Различают **детерминистские фракталы**, примером которых является ковер Серпинского, и **сложные фракталы**. При построении первых не нужны формулы или уравнения. Достаточно взять лист бумаги и провести несколько итераций над какой-нибудь фигурой. Сложным фракталам присуща бесконечная сложность, хотя и генерируются простой формулой. Классическим примером сложного фрактала является **множество Мандельброта**, получаемое из простой формулы  $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ , где  $Z$  и  $C$  - комплексные числа и  $a$  - положительное число.

## Отображения Хенона (в некоторых дискретных системах)

Отображение задается формулой

$$p(x, n) = T^n x,$$

где отображение  $T$  определено по формуле:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_2 - ax_1^2 \\ bx_1 \end{pmatrix},$$

Где  $a > 0$ ,  $0 < b < 1$

В этой динамической системе возникает, так называемый, странный аттрактор. Движение этой динамической системы носит хаотичный характер.

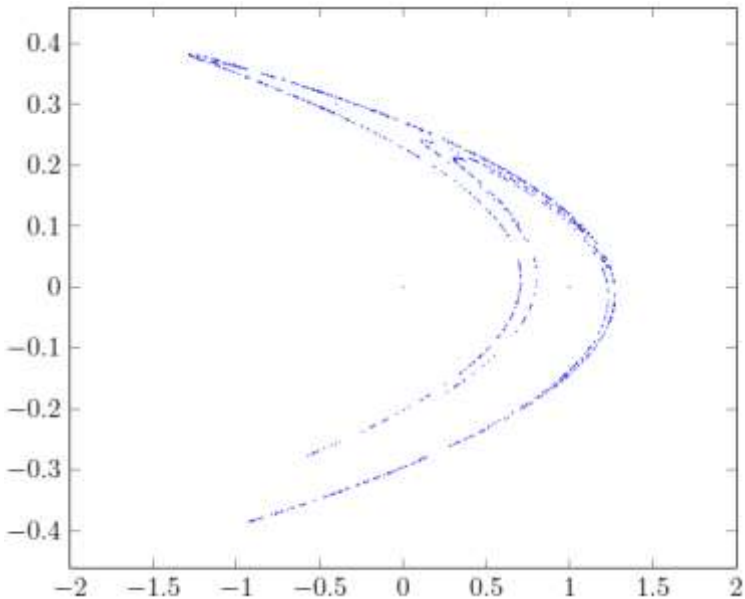


Рисунок – Множество Хенона

## Множество Жулиа

Множество Жулиа было изобретено французским математиком Гастоном Жулиа, по имени которого и было названо множество. Первый вопрос, возникающий после визуального знакомства с множествами Мандельброта и Жулиа это "если оба фрактала сгенерированы по одной формуле, почему они такие разные?" Сначала посмотрите на картинку множества Жулиа. Достаточно странно, но существуют разные типы множеств Жулиа. При рисовании фрактала с использованием различных начальных точек (чтобы начать процесс итераций), генерируются различные изображения. Это применимо только ко множеству Жулиа.

Хотя это нельзя увидеть на картинке, фрактал Мандельброта - это, на самом деле, множество фракталов Жулиа, соединенных вместе. Каждая точка (или координата) множества Мандельброта соответствует фракталу Жулиа. Множества Жулиа можно сгенерировать используя эти точки в качестве начальных значений в уравнении  $Z=ZI+C$ . Но это не значит, что если выбрать точку на фрактале Мандельброта и увеличить ее, можно получить фрактал Жулиа. Эти две точки идентичны, но только в математическом смысле. Если взять эту точку и просчитать ее по данной формуле, можно получить фрактал Жулиа, соответствующий определенной точке фрактала Мандельброта.

Хаотический аттрактор является фракталом. Как бы мы не изменяли размер аттрактора, он всегда останется пропорционально одинаковым.

Некоторые динамические системы являются хаотическими всегда, но в большинстве случаев хаотическое поведение наблюдается только в тех случаях, когда параметры динамической системы принадлежат к некоторому специальному подпространству.

Наиболее интересны случаи хаотического поведения, когда большой набор первоначальных условий приводит к изменению на орбитах аттрактора. Простой способ продемонстрировать хаотический аттрактор - это начать с точки в районе притяжения аттрактора и затем составить график его последующей орбиты. Из-за свойства топологической транзитивности, это похоже на отображения картины полного конечного аттрактора. Например, в системе, описывающей маятник - пространство двумерное и состоит из данных о положении и скорости. Можно составить график положений маятника и его скорости. Положение маятника в покое будет точкой, а один период колебаний будет выглядеть на графике как простая замкнутая кривая. График в форме замкнутой кривой называют **орбитой**. Маятник имеет бесконечное количество таких орбит, формируя по виду совокупность вложенных эллипсов.

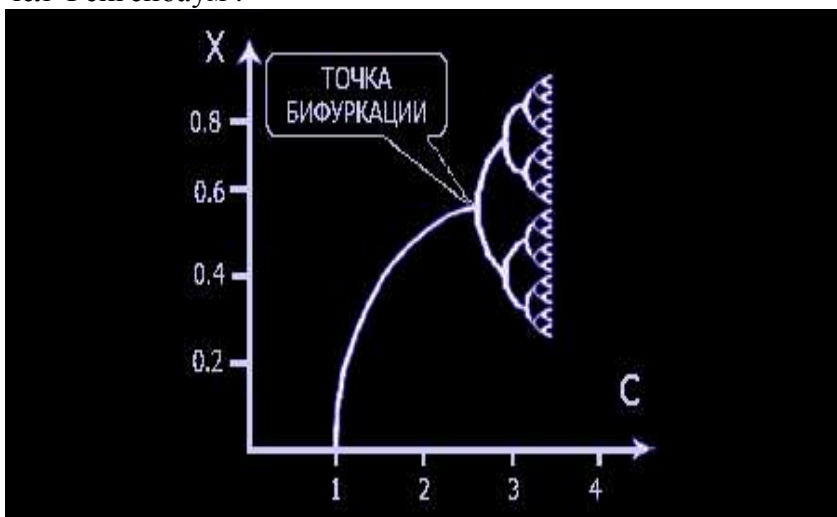
### 5.5.3 Переход от равновесия к хаосу: бифуркация и дерево Фейгенбаума

#### Простые хаотические системы

Хаотическими могут быть и простые системы без дифференциальных. Примером может быть **логистическое отображение**, которое описывает изменение количества населения с течением времени. Логистическое отображение является полиномиальным отображением второй степени и часто приводится в качестве типичного примера того, как хаотическое поведение может возникать из очень простых нелинейных динамических уравнений.

К хаосу системы могут переходить разными путями. Среди последних выделяют бифуркации, которые изучает теория бифуркаций.

**Бифуркация** (от лат. bifurcus - раздвоенный) - процесс качественного перехода от состояния равновесия к хаосу через последовательное очень малое изменение (например, удвоение Фейгенбаума при бифуркации удвоения) периодических точек. Обязательно необходимо отметить, что происходит качественное изменение свойств системы, т.н. катастрофический скачок. Момент скачка (раздвоения при бифуркации удвоения) происходит в точке бифуркации. Хаос может возникнуть через бифуркацию, что показал Митчел Фейгенбаум .



При создании собственной теории о фракталах Фейгенбаум, в основном, анализировал логистическое уравнение

$$X_{n+1} = CX_n - C(X_n)^2 = CX_n (1 - X_n),$$

где  $C$  - внешний параметр, откуда вывел, что при некоторых ограничениях во всех подобных уравнениях происходит переход от равновесного состояния к хаосу. Ниже рассмотрен классический биологический пример этого уравнения. Например, изолированно живет популяция особей нормированной численностью  $X_n$ . Через год появляется потомство численностью  $X_{n+1}$ . Рост популяции описывается первым членом правой части уравнения  $CX_n$ , где коэффициент  $C$  определяет скорость роста и является определяющим параметром. Убыль животных (за счет перенаселенности, недостатка пищи и т.п.) определяется нелинейным членом.  $C(X_n)^2$

Результатом расчетов являются следующие выводы:

- при  $C < 1$  популяция с ростом  $n$  вымирает;
- в области  $1 < C < 3$  численность популяции приближается к постоянному значению  $X_0 = 1 - 1/C$ , что является областью стационарных, фиксированных решений.
- при значении  $C=3$  точка бифуркации становится отталкивающей фиксированной точкой. С этого момента функция уже никогда не сходится к одной точке. До этого точка была притягивающая фиксированная;
- в диапазоне  $3 < C < 3.57$  начинают появляться бифуркации и разветвление каждой кривой на две. Здесь функция (численность популяции) колеблется между двумя значениями, лежащими на этих ветвях. Сначала популяция резко возрастает, на следующий год возникает перенаселенность и через год численность снова уменьшается;
- при  $C > 3.57$  происходит перекрытие областей различных решений (они как бы закрашиваются) и поведение системы становится хаотическим.

При создании собственной теории о фракталах Фейгенбаум, в основном, анализировал логистическое уравнение

$$X_{n+1} = CX_n - C(X_n)^2 = CX_n (1 - X_n),$$

где  $C$  - внешний параметр, откуда вывел, что при некоторых ограничениях во всех подобных уравнениях происходит переход от равновесного состояния к хаосу. Ниже рассмотрен классический биологический пример этого уравнения. Например, изолированно живет популяция особей нормированной численностью  $X_n$ . Через год появляется потомство численностью  $X_{n+1}$ . Рост популяции описывается первым членом правой части уравнения  $CX_n$ , где коэффициент  $C$  определяет скорость роста и является определяющим параметром. Убыль животных (за счет перенаселенности, недостатка пищи и т.п.) определяется нелинейным членом.  $C(X_n)^2$

### **Бифуркационная диаграмма логистического отображения**

Структура бифуркационной диаграммы самоподобна: если увеличить область, к примеру, при значении  $r=3.82$  в одном из трех ответвлений, то можно увидеть, что тонкая структура этой области выглядит, как искаженная и размытая версия всей диаграммы. То же самое верно для любой окрестности нехаотических точек. Это пример глубокой связи между хаотическими системами и фракталами.

Бифуркации возникают при переходе системы от состояния видимой стабильности и равновесия к хаосу. Примерами таких переходов являются дым, вода и многие другие самые обычные природные явления. Так, поднимающийся вверх дым сначала выглядит как упорядоченный столб. Однако через некоторое время он начинает претерпевать изменения, которые сначала кажутся упорядоченными, однако затем становятся хаотически непредсказуемыми. Фактически первый переход от стабильности к некоторой форме видимой упорядоченности, но уже изменчивости,

происходит в первой точке бифуркации. Далее количество бифуркаций увеличивается, достигая огромных величин. С каждой бифуркацией функция турбулентности дыма приближается к хаосу. С помощью теории бифуркаций можно предсказать характер движения, возникающего при переходе системы в качественно иное состояние, а также область существования системы и оценить ее устойчивость.

#### **5.5.4 Использование моделей хаотической динамики в различных областях науки и практики**

Теория хаоса применяется во многих научных дисциплинах: математика, биология, информатика, экономика, инженерия, финансы, философия, физика, политика, психология и робототехника.

В лаборатории хаотическое поведение можно наблюдать в разных системах, например, электрические схемы, лазеры, химические реакции, динамика жидкостей и магнитно-механических устройств.

В природе хаотическое поведение наблюдается в движении спутников солнечной системы, эволюции магнитного поля астрономических тел, приросте населения в экологии и др.

Есть сомнения о существовании динамики хаоса в тектонике плит и в экономике.

**Модель Рикера** описывает динамику населения. Одно из самых успешных применений теории хаоса было в экологии, когда динамические системы, похожие на модель Рикера, использовались, чтобы показать зависимость прироста населения от его плотности.

**Клеточный автомат** — это набор клеток, образующих некоторую периодическую решетку с заданными правилами перехода. Клеточный автомат является дискретной динамической системой, поведение которой полностью оп-



ределяется в терминах локальных зависимостей. Эволюция даже простых дискретных систем, таких как клеточные автоматы может сильно зависеть от начальных условий. Стивен Вольфрам исследовал это свойство клеточного автомата и назвал его Правило № 30.

Простую модель консервативного (обратимого) хаотического поведения демонстрирует так называемое отображение — **кот Арнольда**. В математике отображение — кот Арнольда является моделью тора, которую он продемонстрировал в 1960 г. с использованием образа кошки.

Известно в литературе как отображение "кот Арнольда". (Штрих отмечает значения динамических переменных, относящиеся к следующему шагу дискретного времени.) Фазовое пространство этой системы обычно интерпретируют как поверхность тора, на которой одна переменная задает координату по параллели, а другая по меридиану тора, причем обе определены на интервале от 0 до 1. Для графических иллюстраций удобнее использовать единичный квадрат, считая, что расположенные напротив друг друга его стороны отождествляются. Происхождение названия связано с тем, что В.И.Арнольд, предложивший это отображение в качестве примера системы с хаотической динамикой на торе, иллюстрировал его действие, используя картинку в виде головы кота (см. рис.).



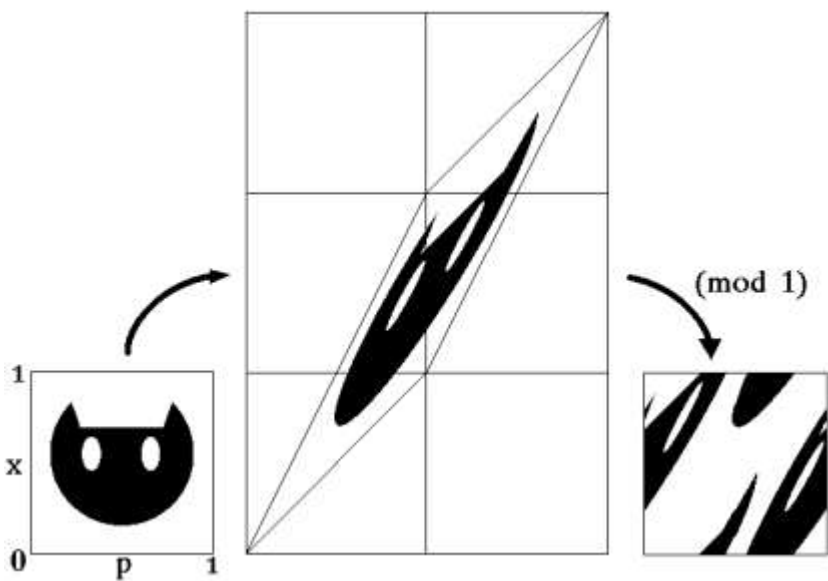
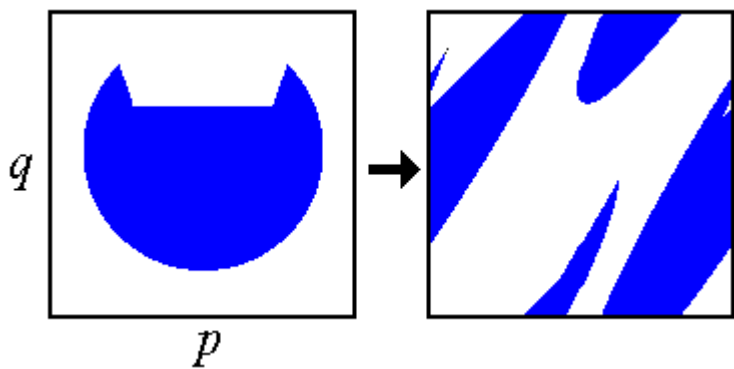
Двумерное  
отображение

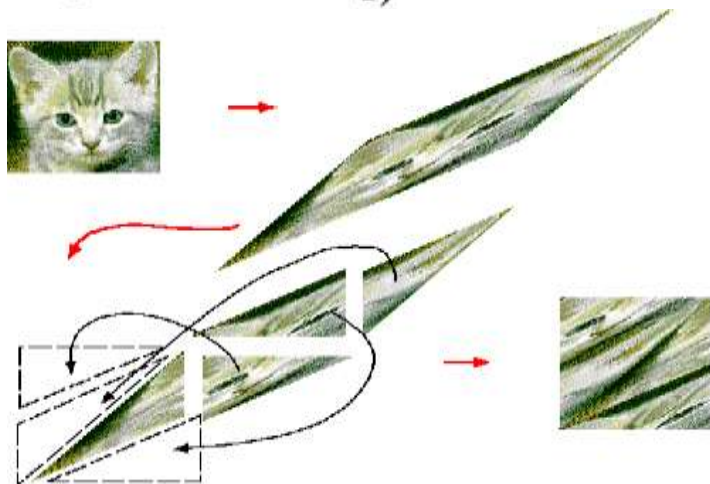
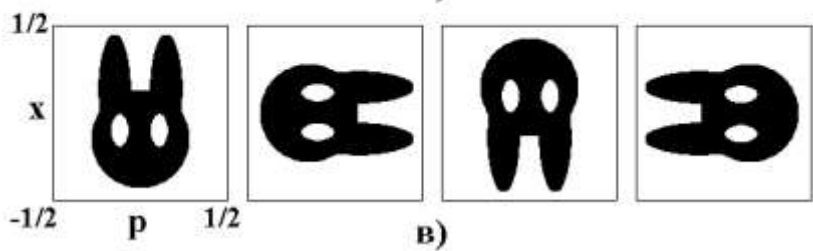
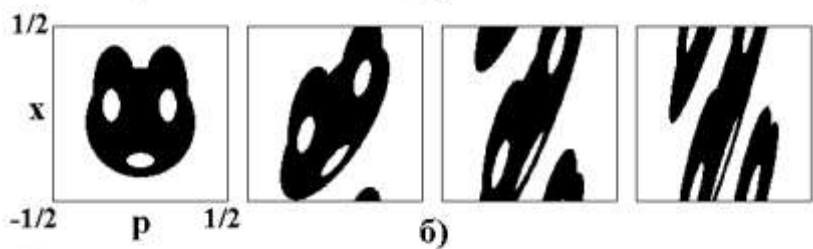
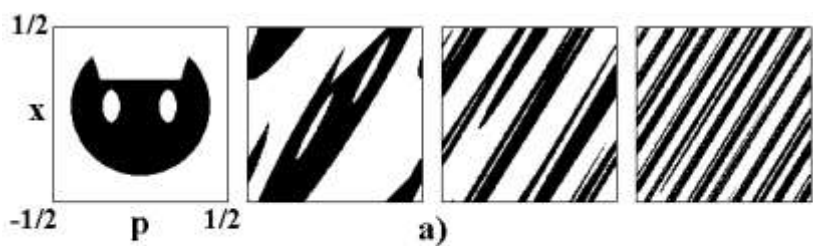
### Отображение "кот Арнольда"

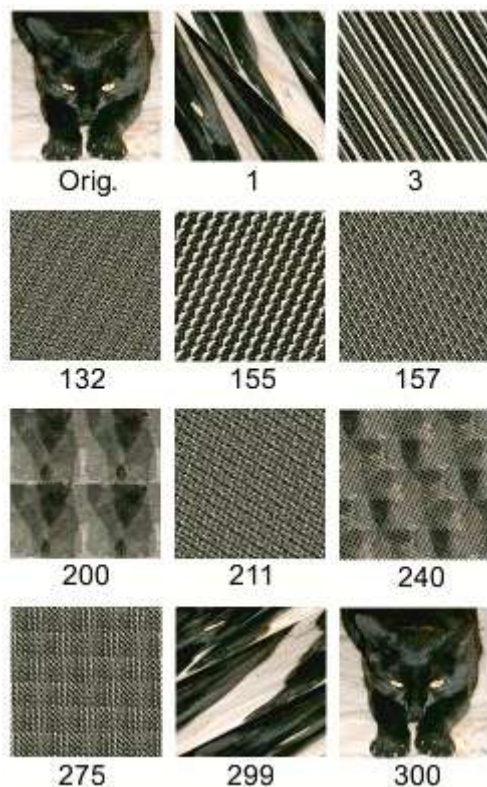
$$p' = p + q \pmod{1}$$

$$q' = p + 2q \pmod{1}$$

Рисунок – Отображение «кот Арнольда»







### В экономике

**Теория хаоса** в последнее время является одним из самых модных подходов к исследованию рынка. К сожалению, точного математического определения понятия хаос пока не существует. Сейчас зачастую **хаос** определяют как крайнюю непредсказуемость постоянного нелинейного и нерегулярного сложного движения, возникающую в динамической системе.

Согласно теории хаоса, если вы говорите о хаотичном движении цены, то вы должны иметь ввиду не случай-

ное движение цены, а другое, особенно упорядоченное движение. Если динамика рынка хаотична, то она не случайна, хотя и по-прежнему непредсказуема. **Непредсказуемость** хаоса объясняется в основном существенной зависимостью от начальных условий.

К сожалению, само существование теории хаоса трудно совместимо с классической наукой. Обычно научные идеи проверяются на основании предсказаний и их сверки с реальными результатами. Однако, как мы уже знаем, хаос непредсказуем, когда изучаешь хаотическую систему, то можно прогнозировать только модель ее поведения. Поэтому с помощью хаоса не только нельзя построить точный прогноз, но и, соответственно, проверить его. Однако это не должно говорить о неверности теории хаоса, подтвержденной как в математических расчетах, так и в жизни. Но сейчас еще не существует математически точного аппарата применения теории хаоса для исследования рыночных цен, поэтому спешить с применением знаний о хаосе нельзя. Вместе с тем, это действительно самое перспективное современное направление математики с точки зрения прикладных исследований финансовых рынков.

## ТЕМА 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

### 6.1 Принципы рационального ведения хозяйства и расчета оптимальной площади

1. Основные условия и факторы производства — земля, материальные ресурсы, рабочая сила — должны находиться в определенных пропорциях и быть **сбалансированными**.

2. Производственное направление хозяйства, его специализация и структура должны обязательно устанавливаться с учетом плодородия почв, степени окультуренности земель, возможности последующей трансформации и улучшения угодий.

3. Устойчивое развитие любого хозяйства возможно только на основе **расширенного воспроизводства** Необходимо также обеспечить постоянный кругооборот капитала и определенные накопления, обеспечивающие дальнейшее развитие хозяйства и рост фондов потребления.

4. Хозяйство по возможности должно располагаться **на одном земельном массиве, иметь правильную форму**, рациональную конфигурацию с экологически обоснованным размещением границ и расположением хозяйственного центра ближе к середине участка.

5. По размерам земельной площади и организационно-производственной структуре хозяйство должно быть **управляемым**.

6. Учет комплекса требований, предъявляемых к любому сельскохозяйственному производству (сезонность, технологическая зависимость отраслей растениеводства и

животноводства, агрономические, зоотехнические, биологические, экологические, строительно-планировочные, санитарно-гигиенические условия и ограничения).

Под **производственным параметром**, по нашему мнению, можно понимать существенное качественное свойство или состояние производственной системы, которое отражает её основные пропорции, может быть выражено количественно и использовано для характеристики производственной системы или процесса. Производственный параметр – это количественная характеристика существенных, значимых свойств производственной системы. Каждый производственный параметр выделяет данное производство среди других, показывает, чем оно отличается качественно и по количеству.

Сущность производственных параметров состоит в единстве качественной и количественной характеристик производства. Параметр отражает не любое свойство, не каждое состояние, а именно существенное, значимое, одно из основных для данной производственной системы или процесса.

- размер предприятия
- уровень специализации
- уровень концентрации производства конкретных видов продукции
- уровень эффективности производства
- технологические параметры
- уровень интенсивности производства

**Размер сельскохозяйственного предприятия** является одним из основных его параметров. Он отражает существенные свойства предприятия, может быть выражен количественно.

О размере сельскохозяйственного предприятия обычно судят по объему производимой продукции, по пло-

щади земли, по наличию средств производства и трудовых ресурсов, поголовья скота и по некоторым другим показателям. Каждый из названных показателей не во всех случаях отражает действительные размеры предприятия в полной мере. Объем производства продукции - удобный измеритель для сравнения хозяйств узкой специализации – птицефабрик, откормочных хозяйств, тепличных комбинатов, но это результативный показатель, он зависит от многих факторов.

Определенное представление о размере хозяйства дает число занятых работников и наличие производственных фондов, но эти показатели зависят от специализации, технической оснащенности, природных условий и т.д. Если исключить узкоспециализированные хозяйства, у которых земля (как и у промышленных предприятий) выступает в качестве территориально-операционной базы, то остальные сельскохозяйственные предприятия используют землю как главное средство производства.

Четкое представление о размере предприятия дает только **объем чистой продукции**, а другие показатели – стоимость валовой и товарной продукции, площадь обрабатываемой земли, численность работников, стоимость основных средств производства, поголовье животных – это **косвенные показатели размера предприятия**.

Количественная оценка параметров предприятия осуществляется через **систему показателей**. Параметры функционирующего предприятия можно получить на основе учетных данных, а рациональные на перспективу необходимо рассчитать.

Для определения рациональных значений параметров аграрного предприятия можно использовать различные методы:

- статистический,
- монографический,
- расчетно-конструктивный,



– моделирования и оптимизации.

## 6.2. Структурная модель экономико-математической задачи оптимизации параметров аграрного предприятия

Требуется найти параметры, обеспечивающие получение максимума прибыли

$$C = \sum_{j \in J_7} x_j - \sum_{j \in J_{19}} x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

При условиях:

1. Ограничения по численности работников хозяйства и использованию трудовых ресурсов.

В модели численность работников задается:

$$x_j = v_i, \text{ где } j \in J_1, i \in I_1 \quad (2)$$

Ограничения по использованию трудовых ресурсов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{где } i \in I_1 \quad (3)$$

2. Ограничения по поголовью животных.

2.1 По покупке необходимого поголовья коров

$$\sum_{j \in J_2} x_j \geq 0 \quad (4)$$

2.2 По минимально-допустимому уровню концентрации поголовья

$$\sum_{j \in J_2} x_j \geq b_i \quad \text{где } i \in I_2 \quad (5)$$

2.3 По поголовью приплода

$$\sum_{j \in J_2} w'_{ij} x_j - \sum_{j \in J_2} w''_{ij} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_2 \quad (6)$$

3. Условия по земельным ресурсам, посевным площадям и севооборотам, зеленому конвейеру, сохранению почвенного плодородия.

3.1 Ограничения по земельным ресурсам

$$\sum_{j \in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_1} dx_j - \sum_{j \in J_3} x_j \leq 0 \quad \text{где } i \in I_3 \quad (7)$$

3.2 Требования севооборотов

$$\sum_{j \in J_3} w'_{ij} x_j - \sum_{j \in J_3} w''_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} 0 \quad \text{где } i \in I_3 \quad (8)$$

3.3 Ограничения по зеленому конвейеру

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_4} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_3 \quad (9)$$

3.4 Ограничения по органическим удобрениям и сохранению почвенного плодородия

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_3} a_{ij} x_j \geq 0 \quad (10)$$

4. Ограничения по кормам в натуре

$$\sum_{j \in J_3} v_{ij} x_j - \sum_{j \in J_4} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_4 \quad (11)$$

5. Баланс питательных элементов и структура рационов

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_3} v_{ij} x_j \leq 0 \quad \text{где } i \in I_5 \quad (12)$$

6. Условия по определению производственного и коммерческого потенциала, объемов производства продукции в натуральном выражении

$$\sum_{j \in J_2} v_{ij} x_j - \sum_{j \in J_2, J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_6} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_6 \quad (13)$$

7. Условия по расчету коммерческого потенциала, денежной выручки от реализации продукции

$$\sum_{j \in J_6} c_j x_j - \sum_{j \in J_7} x_j = 0 \quad (14)$$

или

$$\sum_{j \in J_2, J_3} v_{ij} c_j x_j - \sum_{j \in J_7} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_7 \quad (15)$$

8. Определение затрат на производство кормов

$$\sum_{j \in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_8} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_8 \quad (16)$$

9. Расчет потребности в основных фондах

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_9} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_9 \quad (17)$$

10. Затраты на зооветеринарное обслуживание

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_{10}} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_{10} \quad (18)$$

11. Страховые платежи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_{11}} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_{11} \quad (19)$$

12. Отчисления и платежи на социальное страхование, в пенсионный фонд, на медицинское страхование, местные налоги

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_{12}} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_{12} \quad (20)$$

13. Определение затрат на горючее и смазочные материалы, энергию и водоснабжение

$$\sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_3} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_{13}} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_{13} \quad (21)$$

14. Определение сумм амортизационных отчислений

$$\sum_{j \in J_9} a_{ij} x_j - \sum_{j \in J_{14}} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_{14} \quad (22)$$

15. Определение сумм краткосрочного кредита

$$\sum_{j \in J_1} x_j + \sum_{j \in J_3} c_j x_j + \sum_{j \in J_3} x_j + \sum_{j \in J_{10}} x_j + \sum_{j \in J_{11}} x_j + \sum_{j \in J_{12}} x_j + \sum_{j \in J_{13}} x_j - \sum_{j \in J_{15}} x_j = 0 \quad (23)$$

16. Определение сумм кредита на приобретение основных средств

$$\sum_{j \in J_2} c_j x_j + \sum_{j \in J_9} x_j - \sum_{j \in J_{16}} x_j = 0 \quad (24)$$

Для этих условий в модели отводится  $i \in I_{16}$  строк.

17. Годовой возврат ссуд и уплата процентов за пользование кредитом

$$\sum_{j \in J_{15}} (k_{ij} + 1) x_j + \sum_{j \in J_{16}} (k_{ij} + k'_{ij}) x_j - \sum_{j \in J_{17}} x_j = 0 \quad \text{где } i \in I_{17} \quad (25)$$

18. Расходы на внутрихозяйственные перевозки

$$\sum_{j=1}^n s c_j x_j - \sum_{j \in J_{18}} x_j = 0 \quad (26)$$

$$S = \alpha \sqrt{x_j} \quad \text{где } j \in J_3 \quad (27)$$

$\alpha$  - коэффициент, учитывающий конфигурацию участка и дорожной сети

19. Производственные затраты и ежегодные платежи хозяйства

$$\sum_{j \in J_1} c_j x_j + \sum_{j \in J_2} c_j x_j + \sum_{j \in J_8} x_j + \sum_{j \in J_{10}} x_j + \sum_{j \in J_{11}} x_j + \sum_{j \in J_{12}} x_j + \sum_{j \in J_{13}} x_j + \sum_{j \in J_{14}} x_j + \sum_{j \in J_{15}} k_{ij} x_j + \sum_{j \in J_{18}} x_j - \sum_{j \in J_{19}} x_j = 0 \quad (28)$$

Для этих условий в модели отводится  $i \in I_{19}$  строк.

20. Определение стартовой суммы капитала

$$\sum_{j \in J_9} x_j + \sum_{j \in J_{19}} x_j - \sum_{j \in J_{14}} x_j - \sum_{j \in J_1} (q+1)x_j - \sum_{j \in J_{20}} x_j = 0 \quad (29)$$

Для этих условий в модели отводится  $i \in I_{20}$  строк.

21. Условия не отрицательности переменных

$$x_j \geq 0 \quad (30)$$

Таблица 1 – Размеры коллективных аграрных предприятий Краснодарского края, в среднем за 1999-2000 гг.

Зоны	Приходится в среднем на одно предприятие					
	сельхоз- угодий га	пашни, га	основных производ- ственных фондов, млн. руб.	работников, чел.	выручки от реализации продукции, млн. руб.	валового дохода, млн. руб.
Северная	7656	7267	82,6	559	34,9	14,3
Центральная	5381	4964	82,0	552	37,3	16,5
Западная	6127	5508	130,8	616	38,7	15,4
Южно-предгорная	4946	3493	55,0	300	12,1	3,5
Анапо-таманская	2659	1653	61,5	451	39,6	15,1
Черноморская	529	142	42,6	211	12,4	3,6
По краю	5451	4785	76,9	482	30,6	12,4

Таблица 2 – Средние размеры земельных участков фермерских хозяйств Краснодарского края, общая земельная площадь на 1 января, га

Годы	Зоны						По краю
	северная	центральная	западная	южно-предгорная	анапо-таманская	черноморская	
1991	19,6	5,8	4,0	12,1	6,5	–	12,4
1992	23,6	19,5	8,7	11,0	3,5	2,4	15,0
1993	33,3	15,0	9,3	12,0	4,1	5,2	16,2
1994	29,6	14,0	10,6	11,6	4,2	4,7	15,2
1997	24,8	14,2	13,2	15,0	4,3	2,6	16,2
1998	29,1	15,6	15,2	17,6	4,4	2,7	18,9
1999	32,1	16,4	17,1	19,5	4,7	2,7	20,3
2000	34,8	20,4	18,2	22,3	5,0	2,7	23,6

Таблица 3 – Влияние размеров аграрных предприятий на эффективность сельскохозяйственного производства, центральная зона Краснодарского края, 1999 г.

Группы хозяйств по валовому доходу, тыс. руб.	Количество хозяйств, единиц	Валовой доход на хозяйство, тыс. руб.	Прибыль от реализации продукции на:			Рентабельность, %
			1 га сельхозугодий, руб.	1 работника, руб.	1000 руб. основных фондов, руб.	
до 5000	50	2118	273	2855	10,19	6,9
5001-10000	49	7483	900	11787	57,91	30,5
10001-15000	32	12179	1586	21473	113,79	52,5
свыше 15000	70	30146	2152	26303	162,72	64,0
Итого и в среднем	201	14789	1651	20393	109,47	50,1

Таблица 4 – Оптимальные параметры специализированных молочных хозяйств для условий центральной зоны Краснодарского края при продуктивности коров 6000 кг молока

Параметры и показатели	Хозяйства с числом постоянных работников, человек							
	3	5	10	30	30	100	300	500
	малые			средние			крупные	
<b>Размер предприятия</b>								
Валовой доход, тыс. руб.	1256	2125	4297	12220	20776	42127	126067	210940
Площадь сельскохозяйственной земли, га	31	52	106	302	515	1045	3938	6603
Ноголовые коровы, голов	35	55	111	314	334	1085	3179	5320
<b>Уровень специализации предприятия</b>								
Удельный вес молока в товарной продукции, %	90,8	90,8	90,8	90,8	90,8	90,8	90,8	90,8
<b>Уровень концентрации производства</b>								
Стоимость продукции скотоводства, тыс. руб.	1520	2574	5206	14837	25248	51275	153825	257935
<b>Коммерческий потенциал</b>								
Стоимость товарной продукции, тыс. руб.	1480	2504	5065	14436	24566	49891	149673	250971
<b>Уровень интенсивности производства</b>								
Производственные затраты на 1 корову, тыс. руб.	15,9	16,3	16,5	16,3	16,1	16,0	16,0	16,1
<b>Результаты производства</b>								
Произведено: молока, т	188	319	645	1840	3130	6357	19071	31979
телят, голов	28	48	97	276	470	954	2861	4797
мавота, т	283	479	968	2759	4695	9536	28607	47968
<b>Уровень эффективности производства</b>								
Уровень рентабельности, %	195,6	199,2	201,8	188	192	195	195	193

Таблица 5 – Внутрихозяйственные грузоперевозки и затраты на управление в специализированных молочных хозяйствах оптимальных параметров для условий центральной зоны Краснодарского края, продуктивность коров 6000 кг молока

Предприятие	Хозяйства с числом постоянных работников, человек	Объемы грузоперевозок, т-км в расчете на		Расходы на грузоперевозки		Количество слушателей управления, шт.	Затраты на управление	
		1 корову	1 га с-х угодий	всего, тыс. руб.	в % к производственным затратам		тыс. руб.	в % к производственным затратам
Малые	3	7,1	5,7	1,1	0,2	1	11,9	2,4
	5	9,2	7,4	2,4	0,3	1	11,9	1,4
	10	13,1	10,6	7,0	0,4	1	11,9	0,7
Средние	30	20,8	16,8	31,0	0,6	2	194,8	3,9
	50	27,1	21,9	70,8	0,8	2	218,6	2,6
	100	38,7	31,2	205,0	1,2	2	278,3	1,0
Крупные	300	66,6	53,8	1058,5	2,1	3	834,9	1,6
	500	86,3	69,6	2299,1	2,7	3	1073,4	1,2



Таблица 6 – Сравнительная характеристика специализированных молочных хозяйств и хозяйств с полным циклом воспроизводства стада

Показатель	Специализированные хозяйства с числом постоянных работников, чел.			Хозяйства с полным циклом воспроизводства стада с числом работников, чел.		
	5	50	500	5	50	500
Валовой доход, тыс. руб.	2125	20776	210940	1891	18393	187635
Площадь сельхозугодий, га	66	646	6603	86	843	8723
Поголовье животных, усл. гол.	53	522	5330	76	745	7707
Производственные затраты, тыс. руб.	837	8408	85741	878	8809	90599
Выручено от реализации, тыс. руб.	2504	24566	250971	2306	22526	233118
Прибыль, тыс. руб.	1667	16158	165230	1428	13717	141607
Прибыль на: 1 чел.-ч, руб.	140	135	138	120	115	119
1 га сельхозугодий, руб.	25304	24999	25023	16550	16273	16233
1 руб. производственных затрат, руб.	1,99	1,92	1,93	1,63	1,56	1,56

Таблица 7 – Оптимальные параметры полеводческих фермерских хозяйств для условий центральной зоны Краснодарского края

Параметры и показатели	Хозяйства с числом постоянных работников, человек				
	1 вариант	2 вариант	3	5	10
<b>Размер предприятия</b>					
Валовой доход, тыс. руб.	1157	1593	2434	4114	8321
Площадь пашни, га	112	156	239	402	818
<b>Уровень специализации предприятия</b>					
Удельный вес зерна в стоимости товарной продукции, %	100	100	100	100	100
<b>Уровень концентрации производства</b>					
Стоимость валовой продукции хозяйства, тыс. руб.	1544	2129	3257	5511	11148
<b>Уровень интенсивности производства</b>					
Производственные затраты на 1 га пашни, руб.	4642	4623	4590	4587	4588
Основные производственные фонды и текущие производственные затраты (без амортизации) в расчете на 1 га пашни, руб.	3011	7992	7968	7956	7937
<b>Результаты производства</b>					
Произведено зерна, - всего, т	453	825	956	1618	3273
в т.ч.: олеумной пшеницы	255	352	538	910	1841
кукурузы	142	195	299	506	1023
гороха	56	78	119	202	409
<b>Уровень эффективности производства</b>					
Уровень рентабельности, %	193,5	194,7	196,3	197,1	198,3

Таблица 8 – Оптимальные параметры аграрных предприятий, сочетающих товарное скотоводство и полеводство для условий центральной зоны края

Параметры предприятий и показатели	Хозяйства с числом постоянных работников, человек					
	4		50		500	
	1 вариант	2 вариант	1 вариант	2 вариант	1 вариант	2 вариант
<b>Размер предприятия</b>						
Валовой доход, тыс. руб.	2175	2098	21159	20418	21862	208178
Площадь сельскохозяйственных угодий, га	86	82	844	804	874	924
Половина скота, условные головы	63	67	616	660	633	682
Стоимость товарной продукции, тыс. руб.	2592	2517	25318	24588	262024	254458
<b>Уровень специализации предприятия</b>						
Удельный вес в стоимости товарной продукции, %						
продукции растениеводства	26,6	19,0	26,6	19,0	26,6	19,0
в т.ч. зерна	1,1	11,9	1,1	11,9	1,1	11,9
технически уступку	25,5	7,1	25,5	7,1	25,5	7,1
продукции животноводства	73,4	81,0	73,4	81,0	73,4	81,0
в т.ч. молока	57,4	63,3	57,4	63,3	57,4	63,3
живой массы скота	14,6	16,1	14,6	16,1	14,6	16,1
нетелой	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
<b>Уровень концентрации производства</b>						
Стоимость валовой продукции, тыс. руб.:						
скотоводства	2087	2253	20259	21693	209734	224627
полеводства	509	1413	15253	13808	17852	142897
<b>Уровень интенсивности производства</b>						
Производственные затраты на 1 га сельскохозяйств., руб.	10179	9528	10470	9797	10553	9868
<b>Результаты производства</b>						
Стоимость валовой продукции, тыс. руб.	3647	3646	35512	35501	367586	367524
<b>Уровень эффективности производства</b>						
Уровень рентабельности, %	194,7	185,5	186,3	177,7	184,2	175,7

Таблица 9 – Оптимизация расширенного воспроизводства фермерского хозяйства «Белый лебедь» Кореновского района при норме накопления 25% (данные Е.А. Метельской)

Показатели	Значения производственных параметров по годам до достижения оптимального варианта расширенного воспроизводства				
	1-й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год
Численность постоянных работников, занятых в производстве, человек	1,88	2,50	3,31	4,40	5,00
Отработано чел.-часов: всего	4524	5999	7955	10549	12000
в т.ч. наемными работниками	1131	1500	1989	2637	3000
Площадь пашни, га	249,57	320,96	438,89	582,01	662,07
Посевная площадь, га					
сидеральных культур	74,87	99,29	131,67	174,60	198,62
озимой пшеницы	24,96	33,10	43,89	58,20	66,21
яровой пшеницы	62,39	82,74	109,72	145,50	165,32
подсолнечника	49,91	66,19	87,78	116,4	132,41
соя	37,44	49,64	65,83	87,30	99,31
Производство зерна, т	1045	1387	1839	2439	2774
Производство семян подсолнечника, т	125	165	219	219	331
Стоимость валовой продукции, тыс. руб.	4440	5888	7809	10355	11780
Производственные затраты и платежи, тыс. руб.	1927	2555	3388	4494	5112
Прибыль, тыс. руб.	2513	3333	4420	5862	6668
в т.ч. направляемая на накопления:					
возможная величина, тыс. руб.	628	833	1105	1466	-
фактическая величина, тыс. руб.	628	833	1105	618	-

Таблица 10 – Валовая продукция моделируемых аграрных предприятий, сочетающих производство и переработку молока (данные Благовского И.М.)

Наименование продукции	Хозяйства с числом постоянных работников					
	300 человек			500 человек		
	без переработки молока	с промышленной переработкой молока		без переработки молока	с промышленной переработкой молока	
	1 вариант	2 вариант	3 вариант	1 вариант	2 вариант	3 вариант
Продукция растениеводства:						
зерно озимой пшеницы, т	2097	2007	1994	3528	3436	3327
корнеплоды сахарной свеклы, т	31413	30044	29859	52799	51430	50246
маслосемена подсолнечника, т	586	564	559	989	964	941
корма и корм. ед.	59953	56824	56967	100745	98156	95859
Продукция животноводства:						
молоко, т	12879	12318	12238	21642	21087	20593
живая масса скота, т	859	821	816	1443	1406	1373
племенные телки, гол.	483	462	459	812	790	772
навоз, т	34976	33453	33234	58773	57264	55924
Продукция переработки молока:						
молоко фасованное в пакетах, т						
	–	210	210	–	210	210
сир, т	–	360	388	–	360	663
масло, т	–	144	186	–	144	318
побочная продукция (сыворожка, пахта), т	–	3789	4086	–	3789	6982

Таблица 11 – Размеры производственных ресурсов моделируемых хозяйств по оптимальным решениям (данные Благовского И.М.)

Показатели	Хозяйства с числом постоянных работников					
	300 чел.			500 чел.		
	без промышленной переработки молока	с промышленной переработкой молока		без промышленной переработки молока	с промышленной переработкой молока	
	1 вариант	2 вариант	3 вариант	1 вариант	2 вариант	3 вариант
Численность работников, чел.	405	405	405	675	675	675
Запас труда, тыс. чел. – ч	716,1	716,1	716,1	1193,5	1193,5	1193,5
Площадь сельскохозяйственных угодий, всего, га	5089	4868	4836	8553	8339	8138
в том числе:						
нашии	4663	4460	4431	7836	7635	7456
естественных пастбищ	426	408	405	716	698	682
Поголовье крупного рогатого скота, усл. гол.	3670	3511	3488	6168	6009	5869
Поголовье овец, гол.	2146	2053	2040	3607	3514	3432
Стоимость основных производственных фондов сельскохозяйственного назначения, млн. руб.	150,4	143,9	143,0	2352,8	246,3	240,6
Производственные затраты, тыс. руб.	51529	52906	53082	86042	87413	88487

Таблица 12 – Размеры производственных ресурсов моделируемого аграрного предприятия, сочетающего производство и переработку с.-х. продукции, по оптимальному решению при численности работников 500 чел. (по Франциско О.Ю.)

Показатель	Сценарии развития предприятия				
	без переработки	переработка маслосемян подсолнечника	переработка озимой пшеницы	переработка молока	переработка маслосемян подсолнечника с возможностью их покупки
	1 сценарий	2 сценарий	3 сценарий	4 сценарий	5 сценарий
Площадь сельскохозяйственных угодий, всего, га	9291	9103	7993	9048	8017
в том числе:					
нашии	8513	8341	7324	8290	7346
естественных пастбищ	778	762	669	758	671
Поголовье крупного рогатого скота, усл. гол.					
	7911	7750	6805	7703	6826
Поголовье коров, гол.					
	3919	3839	3371	3816	3381
Стоимость основных производственных фондов, млн. руб.					
	350	342	298	340	302
Производственные затраты, тыс. руб.					
	126843	127212	125713	148614	230903

Таблица 13 – Эффективность производства при различных сценариях развития моделируемого предприятия по оптимальному решению при численности постоянных работников 500 чел. (данные Франциско О.Ю.)

Показатель	Сценарии развития предприятия				
	без переработки	переработка маслосемян подсолнечника	переработка озимой пшеницы	переработка мопова	переработка маслосемян подсолнечника с возможностью их покупки
	1 сценарий	2 сценарий	3 сценарий	4 сценарий	5 сценарий
Выручка от реализации, млн. руб.	332,8	335,8	346,8	361,6	444,9
Выручка от реализации в расчете на:					
1 га сельхозугодий, тыс. руб.	35,8	36,9	43,4	40,0	55,5
1 работника, тыс. руб.	498,9	303,4	320,0	542,1	667,0
1 руб. затрат, руб.	2,6	2,6	2,8	2,4	1,9
Прибыль, млн. руб.	205,9	208,6	221,1	212,9	214,0
Прибыль в расчете на:					
1 га сельхозугодий, тыс. руб.	22,2	22,9	27,7	23,5	26,7
1 работника, тыс. руб.	308,7	312,7	331,5	319,3	320,8
1 руб. затрат, руб.	1,6	1,6	1,8	1,4	0,9
Рентабельность, %	162,0	164,0	176,0	143,0	93,0

**Факторы интеграции** способствуют созданию многоотраслевых хозяйств. К ним относятся:

- Стремление к равномерному распределению работ в течение года и равномерной загрузке рабочей силы.
- Стремление сохранить плодородие почвы.
- Стремление уменьшить риск от неудач с одним или малым числом видов продукции.
- Стремление использовать в хозяйстве побочные продукты, которые нельзя продать.
- Стремление к самообеспечению семенами, посадочным материалом, кормами, молодняком животных, органическими удобрениями.

**Факторы дифференциации** способствуют более узкой специализации хозяйств. К ним относятся:

- Благоприятные природные условия производства (почва, климат, рельеф местности).

- Высокий уровень развития науки и техники.
- Благоприятные экономические условия и рыночная конъюнктура.
- Высокий уровень развития кооперирования товаропроизводителей.
- Наличие хорошо развитых путей сообщения и невысокий уровень транспортных расходов.
- Близость перерабатывающих предприятий.

## **6.3 Математическое моделирование управления системами массового обслуживания**

### **6.3.1 Марковские процессы**

Теория массового обслуживания изучает случайные процессы. **Случайный процесс** – это такой процесс, течение которого может быть различным в зависимости от случая, причем вероятность того или иного течения определена. Случайные процессы можно рассматривать как множество реализаций случайной функции, либо как последовательность случайных величин, заданных в различные моменты времени.

Из случайных процессов в теоретическом и прикладном плане лучше других исследованы марковские процессы.

**Марковские процессы** – это специальный вид случайных процессов, суть которых предполагает, что при известном настоящем будущее не зависит от прошлого. Например, распад радиоактивного вещества: вероятность распада данного атома за малый промежуток времени не зависит от значения процесса в предшествующий период. Теория марковских процессов возникла на основе исследований А. А. Маркова (старшего).

**Марков Андрей Андреевич** (1856-1922) русский математик, профессор Петербургского университета, академик

Петербургской Академии Наук с 1890 г. Исследования А. А. Маркова по теории вероятностей имеют мировое значение, заложил основы теории случайных процессов, называемых во всем мире марковскими. Значительный вклад **А.А. Марков** внес в теорию чисел и математический анализ, дал вероятностное обоснование метода наименьших квадратов.

Дата рождения:	2(14) июня 1856
Место рождения:	Рязань, Российская империя
Дата смерти:	20 июля 1922 (66 лет)
Место смерти:	Петроград, РСФСР
Страна:	Российская империя РСФСР
Научная сфера:	Математика

**Марковский процесс** – случайный процесс  $\xi(t)$ , отличительное свойство которого заключается в том, что при известном значении  $\xi(t_1)=s_1$  случайные величины  $\xi(t)$ ,  $t > t_1$  не зависят от значений  $\xi(u)$ , вычисленных при любых  $u \leq t_1$ .

Марковские процессы классифицируют по природе состояний пространства и по временным параметрам.

### **Классы марковских процессов:**

- Марковские процессы, дискретные в пространстве и во времени
- Марковские процессы, дискретные в пространстве и непрерывные во времени
- Марковские процессы, непрерывные как в пространстве состояний, так и во времени



## Марковские процессы, дискретные в пространстве состояний и во времени

Пусть последовательность  $\xi(0)=s_0, \xi(1)=s_1, \dots$ , представляет в фазовом пространстве  $S$  конечное или счетное множество возможных состояний некоторой физической системы. Например: технологический процесс какого-либо производства, предприятия, отрасли народного хозяйства.

В каждом из возможных состояний  $S_0, S_1, \dots$ , система может находиться в один из моментов  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Если  $P\{\xi(n)=S_n | \xi(n-1)=S_{n-1}, \dots, \xi(0)=S_0\}$  есть вероятность того, что в момент  $n$  имеет место  $\xi(n)=S_n$  при условии, что в предыдущие моменты было  $\xi(n-1)=S_{n-1}, \dots, \xi(0)=S_0$ , то **цепью Маркова** называется последовательность состояний  $\{S_0, S_1, \dots\}$  изучаемого процесса, для которого  $P\{\xi(n)=S_n | \xi(n-1)=S_{n-1}, \dots, \xi(0)=S_0\} = P\{\xi(n)=S_n | \xi(n-1)=S_{n-1}\}$ .

Величина  $p_{ij}=P\{\xi(n)=j | \xi(n-1)=i\}$ ,  $i, j=0, 1, 2, \dots$ , называется вероятностью перехода системы из состояния  $i$  в состояние  $j$ , совершаемое системой за один шаг. При этом  $p_{ij} \geq 0$  для всех  $i, j$  и

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1,$$

$i=0, 1, 2, \dots$ ,  $S_j$  заменено целочисленными индексами  $j=\{0, 1, 2, \dots\}$ .

Матрица  $P = (p_{ij})$ ,  $i, j=0, 1, 2, \dots$  называется **матрицей переходных вероятностей**.

Для счетного множества состояний эта квадратная матрица имеет бесконечный порядок, а для конечного множества ее порядок равен числу состояний.

Матрицу Маркова можно записать так:

$$\begin{aligned}
 P_{n \times n} &= \{p_{ij}\}, p_{ij} \geq 0, \\
 i, j &= 1, 2, 3, \dots, n; \\
 \sum_{j=1}^n p_{ij} &= 1, i=1, 2, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $p_{ij}$  вероятность перехода системы, имеющей  $n$  возможных состояний из состояния  $i$  в состояние  $j$ .

Марковская цепь называется **однородной**, если переходные вероятности не зависят от момента  $n$ , то есть  $p_{ij}(n) = p_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$  такие переходные вероятности называются **стационарными**. Для полного описания однородной марковской цепи за один шаг достаточно знать:

а)  $p(i) = P\{\xi(0) = i\}$  – распределение начальных состояний процесса;

б)  $P = (p_{ij})$  – матрицу переходных вероятностей.

Если в начальный момент система находится в состоянии  $i$  с вероятностью  $p(i)$ , то безусловная вероятность того, что в момент  $t = n$  система будет находиться в состоянии  $j$ , вычисляется по формуле

$$p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p(i) p_{ij}^{(n)} \tag{2}$$

Пусть  $v$  - некоторое промежуточное состояние системы,  $p_i^{(m)} v$  - вероятность перехода из начального состояния  $v$  за  $m$  шагов, а  $p^{(k)} v_j$  - вероятность перехода из состояния  $v$  в состояние  $j$  за  $k$  - шагов. Тогда выполнено уравнение Колмогорова-Чепмена:

$$p_{ij}^{(m+k)} = \sum P_{iv}^{(m)} P_{vj}^{(k)}. \quad (3)$$

Для однородной марковской цепи имеет место следующее соотношение:  $\pi = \pi_0 P^n$ , где  $\pi_n = (p_1^n, p_2^n \dots p^n)$  - распределение вероятностей значений  $\xi(t)$  на  $n$  - м шаге,  $P = (p_{ij})$ , а  $\pi_0$  - начальное распределение.

### Состояния марковских цепей

Различают следующие состояния марковских цепей:

- **несущественное**, если для  $t_0 > 0$ ,  $p_{ij}(t_0) > 0$  и  $p_{ij}(t_0) = 0$  для любого целого числа  $t$ ;
- **сообщающееся**, если существуют такие целые числа  $t > 0, l > 0$ , что  $p_{ij}(t) > 0$  и  $p_{ij}(l) > 0$ ;
- **поглощающее**, если  $p_{ii}=1$ ;  $p_{ij} = 0, i \neq j$ ;

Множество состояний  $S$  называется **замкнутым**, если из любого состояния множества  $S$  невозможен одношаговый переход в любое состояние множества  $S$ , являющееся дополнением  $S$ .

Марковская цепь называется **разложимой**, если пространство состояний содержит больше двух замкнутых множеств.

### *Марковские процессы, дискретные в пространстве состояний и непрерывные во времени*

Если переход системы из одного состояния в другое возможен в любой момент времени  $t$ , а вероятность  $p_{ik}(t_1, t_2)$  перехода системы из  $S_i$  в момент  $t_1$ , в состояние  $S_k$  в момент  $t_2 > t_1$ , не зависит от поведения системы до момента  $t_1$ , то случайный процесс  $\xi(t)$  называется **марковским с конечным или счетным множеством состояний, непрерывным во времени**.

Вероятность  $p_{ij}(t)$  того, что система в момент  $t$  будет находиться в одном из возможных состояний  $j$  при заданном начальном распределении вероятностей  $p_i^0, i=1,2,\dots$  вычисляется по формуле  $p_j(t) = \sum_i p_i^0 p_{ij}(t), j=1,2,\dots$ , где  $p_{ij}(t)$  удовлетворяет соотношению

$p_{ij}(t+S) = \sum_k p_{ij}(t) p_{kj}(S), i,j=1,2,\dots$ , и

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

При определенных допущениях  $p_{ij}(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова:

$$p_{ij}^1(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t) - \text{прямая система и} \quad (4)$$

$$p_{ij}^1(t) = \sum_k p_{ik}(t) \lambda_{kj} - \text{обратная система} \quad (5)$$

где  $\lambda_{ij}$  – плотность перехода.

Примерами таких марковских процессов являются многочисленные задачи теории массового обслуживания.

Марковские процессы, непрерывные как в пространстве состояний, так и во времени.

Непрерывные марковские процессы связаны с изучением реальных явлений, отличительное свойство которых заключается в том, что изменение состояний процесса имеет место при любом малом интервале времени его протекания.

Примером могут служить диффузионные процессы. Диффузия – это распространение, растекание, движение частиц среды, приводящее к переносу вещества и выравниванию концентраций или к установлению равновесного распределения концентраций частиц данного сорта в среде.

Диффузные процессы изучаются с помощью уравнений Колмогорова, в которых неизвестными являются переходные вероятности (для обратного уравнения) и плотность переходных вероятностей (для прямого уравнения).

### **6.3.2 Основные элементы и понятия теории массового обслуживания**

Системы обслуживания существуют реально в производстве, быту, медицине, военном деле, науке, повседневной жизни и т.п.

Теория массового обслуживания - это раздел исследования операций, прикладная область случайных процессов, рассматривающая разнообразные явления как процессы обслуживания.

Предметом исследования теории массового обслуживания являются вероятностные модели реальных систем обслуживания, в которых в определенные моменты времени (случайные или неслучайные) возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок.

**Задачи массового обслуживания** возникают тогда, когда объекты, требующие обслуживания или самообслуживающее оборудование могут оказаться бездействующими. Собственно, ситуация в том, что желающих обслужиться слишком много, и очередь для обслуживания длинна, а время ожидания слишком велико. Здесь может иметь место и недостаток оборудования для обслуживания клиентов. Бывают случаи, когда заказов на обслуживание поступает

недостаточное число, и обслуживающее оборудование простаивает, может иметь место и избыток оборудования. Естественно, что со всех точек зрения оптимальный вариант должен предусматривать баланс заказов и возможностей обслуживания, а потери из-за ожидания и простоя оборудования были минимальными.

Считают, что начало теории массового обслуживания, положено статьей **Эрланга**, опубликованной в 1909 году. В первоначальный период развития (примерно до 1945 г.) в качестве прикладных задач теории рассматривалась работа телефонных сетей, затем область применения значительно расширилась и сейчас трудно назвать область человеческой деятельности, где бы она не использовалась.

### **Агнер Краруп Эрланг**

Дата рождения:	1 января 1878
Место рождения:	Лонгборг, Дания
Дата смерти:	3 февраля 1929 (51 год)
Научная сфера:	Теория массового обслуживания

Термин «теория массового обслуживания» принадлежит советскому математику Александру Яковлевичу Хинчину (1894 – 1959).

А.Я.Хинчин - советский математик, один из наиболее значимых учёных в советской школе теории вероятностей.

### **Александр Яковлевич Хинчин**

Дата рождения:	7(19) июля 1894
Место рождения:	село Кондрово, Медынский уезд, Калужская губерния, Российская империя
Дата смерти:	18 ноября 1959 (65 лет)
Место смерти:	Москва, РСФСР, СССР
Страна:	Российская империя → СССР
Научная сфера:	Математика
Место работы:	Московский университет
Альма-матер:	Московский университет
Научный руководитель:	Н.Н. Лузин

Большой вклад в развитие теории массового обслуживания внесли также советские ученые Б.В. Гнеденко, Н.П. Бусленко, И.Н.Коваленко. Активно эти проблемы изучаются и за рубежом, в науку внесены существенные результаты многими зарубежными авторами.

## Борис Владимирович Гнеденко

Дата рождения:	1 января 1912
Место рождения:	Симбирск, Российская Империя
Дата смерти:	27 декабря 1995 (83 года)
Место смерти:	Москва Россия
Страна:	СССР→Россия
Научная сфера:	Математика
Альма-матер:	МГУ им. Ломоносова
Научный руководитель:	А. Я. Хинчин и А. Н. Колмогоров
Известен как:	Предложивший метод сопровождающих безгранично делимых законов.

Примерами массового обслуживания можно рассматривать: обслуживание кораблей в порту, их разгрузка, погрузка, обслуживание клиентов в прачечной, прием больных у врача, обслуживание станков бригадой ремонтников, очереди в магазинах, билетных кассах, скопление – самолетов на посадку над аэродромами, система противовоздушной обороны и т. п.

Во всех приведенных примерах речь идет об очередности обслуживания. Ряд авторов употребляют понятие теории массового обслуживания, другие авторы – **теория очередей**, причем, некоторые трактуют эти понятия как равнозначные. В большинстве работ теория очередей все же рассматривается как часть теории массового обслуживания, как ее самостоятельный раздел.



В теории массового обслуживания изучаются системы не только с очередями, а и **системы с отказами**, когда очередь не образуется, то есть теория очередей уже теории массового обслуживания. С таким утверждением трудно не согласиться.

### **Основные понятия теории массового обслуживания**

- Входящий поток
- Организация очереди
- Структура обслуживающей системы
- Выходящий поток

Под **входящим потоком** понимают последовательность требований, заказов на обслуживание. Они возникают случайно и требуют определенного времени для своего удовлетворения. Примерами входящих потоков можно представить запрос и прибытие кораблей в порт на разгрузку, поток клиентов в прачечной, поток автомобилей, прибывающих на станцию для технического осмотра, диагностики и обслуживания и т.п.

Если одновременно поступает только одна заявка, то такой поток носит название **ординарного**, если в момент  $t_i$  может появиться более одной заявки, то входящий поток называют **неординарным**. Входящий поток называют **рекуррентным**, если величины  $t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$  независимы и одинаково распределены, то есть  $P\{t_i < x\} = F(x)$  для всех  $i$ . Рекуррентные соотношения (лат. recurrens – возвращающийся – равенство связывающее между собой два или несколько соседних членов ряда и позволяющее определить последующие члены ряда через предыдущие. Например, в известном ряду **чисел Фибоначчи** (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...) каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.

При фиксированных параметрах потока требований и заданном объеме обслуживающего оборудования длина очереди является функцией времени. Поэтому процесс образования очереди называют стохастическим процессом. Стохастический процесс имеет место, если он состоит из случайных переменных, значение которых меняется во времени.

Частным случаем рекуррентного потока является простейший или пуассоновский поток. Пусть  $n$  - число заявок, поступающее в интервале  $(a, b)$ . Поток будет пуассоновским, если  $n(0, t)$  имеет распределение Пуассона, то есть

$$P\{n_{от}=K_1\} = \frac{(\lambda t)^{K_1} e^{-\lambda t}}{K_1!} \quad (6)$$

$K=0, 1, 2, \dots, \lambda \geq 0$  – параметр потока.

Обычно это стационарный (зависит от момента величины интервала времени и не зависит от начала отсчета), ординарный без последствия (случайная величина независимая от предыстории процесса) поток, который называют простейшим. Таким образом, ординарный поток времени без последствий описывается распределением Пуассона и называется Пуассоновским потоком или простейшим.

Простейший поток в теории массового обслуживания играет такую же роль, как нормальный закон в теории вероятностей.

В простейшем потоке времени вероятность требования в любой малый промежуток времени пропорциональна длине этого промежутка и не зависит от того, возникали или нет требования в предшествующие промежутки времени.

Поток без последствий следует понимать таким, в котором числа поступающих за произвольно взятые (разные) промежутки времени требований, заявок взаимно независимы.

Входной поток называется **дискретным**, если требования поступают в определенные моменты времени. Встречаются и системы с **непрерывным** входящим потоком. Телефонная сеть, универсам – можно рассматривать как сети с дискретными входными потоками, а емкость для газа может заполняться как отдельными порциями, так и непрерывно, точно также его можно и откачивать.

Если в систему обслуживания может поступить одновременно только конечное число требований – входной поток называется **ограниченным**, в противном случае – **неограниченным**.

Под **организацией очереди** понимают системы правил, определяющую очередность и возможность обслуживания заявок. В теории массового обслуживания под **очередью** понимают последовательность требований или заявок, которые, заставая систему обслуживания занятой, не выбывают, а ожидают ее освобождения. Очередь образует так же совокупность простаивающего неисправного оборудования, требующего ремонта. Процесс образования очереди носит стохастический характер. Простейшая **дисциплина обслуживания** – «первый пришел – первый обслуживаешься». Такая дисциплина представляется наиболее справедливой. Но может оказаться справедливой и обслуживание по **приоритетам** – у кого приоритет повыше, обслуживается первым, а более низкие приоритеты откладывают обслуживание – **ожидают**. Приоритеты могут быть статическими и динамические, когда клиент, ждущий обслуживания, увеличивает свой приоритет пропорционально времени ожидания, проведенному в очереди.

Очереди подразделяют на **замкнутые и разомкнутые**. В **замкнутых очередях** обслуженные клиенты могут возвращаться в систему для нового обслуживания. Например, автомашины одного парка для подзарядки аккумуляторов могут образовать замкнутую очередь, так как они рабо-

тают на электротяге в автопарке и постоянно требуют зарядки на своей станции. В разомкнутых очередях клиенты не постоянные, обслуженные не возвращаются в систему. Например, междугородняя АТС.

**Длина очереди** (это среднее число ожидающих требований) и **время ожидания обслуживания** (это среднее время пребывания требования в системе до момента начала обслуживания) являются одним из самых важных параметров для определения потерь от ожидания.

Структура обслуживающей системы характеризуется составом элементов и функциональными связями.

Основными элементами обслуживающей системы являются: входящий поток требований, очередь требований, блок обслуживания, выходящий поток обслуженных заявок.

**Блок обслуживания** (иногда называют сервер) – это та часть системы массового обслуживания, в которую поступает поток требований (заявок) и где происходит обслуживание. Блок обслуживания может состоять из одного или нескольких каналов. Канал обслуживания, (или по-другому – устройство, прибор, пункт, станция в том же смысле) – это устройство или средство (может быть и человек), способное в данный момент времени обслуживать лишь одно требование. Основными характеристиками канала обслуживания являются – пропускная способность и среднее время обслуживания одной заявки.

Если блок обслуживания состоит из одного канала, он называется **одноканальным**, при нескольких каналах обслуживания блок называют **многоканальным**. Различают **однофазные и многофазные** блоки обслуживания. Если клиент после обслуживания только одним прибором покидает систему обслуживания, имеет место **однофазное** обслуживание. При многофазном обслуживании клиент последовательно обслуживается несколькими приборами, причем, приборы могут быть одной или разной последова-

тельности, при обслуживании перед каждым прибором может оказаться своя очередь.

По времени пребывания требований в системе до начала обслуживания выделяют: системы с неограниченным временем ожидания, системы с отказами, смешанного вида (прождав определенное время, получают отказ).

**Системы с неограниченным временем ожидания** характерны тем, что, застав все приборы занятыми, клиент становится в очередь и дожидается освобождения одного из приборов. Это привычная нам система обслуживания в обычной жизни – парикмахерская, магазин, билетные кассы и т. п. Системы с отказами отличаются тем, что, застав все приборы занятыми клиент покидает систему. Например, если линия связи занята, то абонент АТС получает отказ.

Системы смешанного типа характеризуются тем, что, застав все приборы занятыми, клиент становится в очередь, но в очереди он находится в ограниченное время, после чего он покидает систему не дождавшись обслуживания. Вопрос: «Можно ли занимать очередь?» – известен каждому. Его обычно задают, когда нет уверенности, что будут обслужены.

**Выходящий поток** – это совокупность обслуженных заявок. В замкнутых очередях, а также при многофазном обслуживании может оказаться так, что выходные потоки формируют входящие потоки. Выходные потоки используются и при оценке эффективности обслуживания.

Задача массового обслуживания обычно заключается в оптимизации ее параметров. Здесь оптимальные параметры понимаются, или как характеристики структуры системы обслуживания, или как характеристики функционирования системы.

Выбор числа каналов обслуживания, определение оптимальной последовательности и пропускной способности – это примеры оптимизации структуры системы, а формиро-

вание дисциплины обслуживания – это уже оптимизация функционирования системы.

Эффективность систем обслуживания можно характеризовать следующими показателями:

**1. Вероятность отказа или потери требования**

Она равна вероятности того, что все  $m$  приборов в системе заняты обслуживанием. Ее обозначают  $P_0$  или  $P_{отк}$ . Эта характеристика бывает очень существенной, например, в военных задачах это уже поражение. Допустим при оценке деятельности объектов ПВО она характеризует вероятность прорыва воздушных целей к охраняемому объекту.

**2. Вероятность того, что обслуживанием заняты  $k$  приборов –  $P_k$ .**

Если все приборы свободны –  $P_0$ .

**3. Среднее число занятых приборов** характеризует степень загрузки приборов:

$$M_3 = \sum_{k=1}^m k P_k$$

**4. Среднее число приборов, свободных от обслуживания**

$$M_0 = \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) P_k$$

**5. Коэффициент простоя приборов**

$$K_m = \frac{M_0}{m}$$

**6. Коэффициент загрузки приборов**

$$K_3 = \frac{M_3}{m}$$

## 7. Коэффициент использования или загрузка

$$\Psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

Системы с ожиданием дополнительно характеризуются: средним временем ожидания требований, вероятностью того, что время пребывания в очереди продлится не больше определенной величины, средней длиной очереди и т. д. В каждом конкретном случае используются и свои экономические показатели: стоимость обслуживания заявки, стоимость потерь, убытки от отказа, эксплуатационные расходы за единицу времени на каждый прибор и т. д.

### 6.3.3 Замкнутые и разомкнутые системы обслуживания

Системы с ожиданием подразделяют **на замкнутые и разомкнутые**.

**Замкнутой** система называется тогда, когда входящий поток требований у нее ограничен.

Типичной замкнутой системой является система наладки станков в цехе.

#### **Задача об обслуживании станков.**

В цехе имеется  $n$  станков и бригада из  $m$  человек, обслуживающая эти станки. Станок, работающий в момент времени  $t$ , отказывает к моменту  $t+x$  с вероятностью  $F(x)=1-e^{-lx}$ ,  $l>0$ . Время обслуживания станка – случайная величина  $\eta$  с функцией распределения  $F(x)$ . Для такой системы можно вычислить распределение и среднее число простаивающих рабочих. Эти характеристики можно использовать для оптимизации состояния между  $n$  и  $m$ . Задача состоит в том, чтобы найти оптимальную нагрузку на одного наладчика.

Как видим, замкнутая система имеет конечное число требований для обслуживания, причем, это число постоян-

ное. После обслуживания требование возвращается в входящий поток, и при выходе из строя становится в очередь на обслуживание (см. рис. 1).

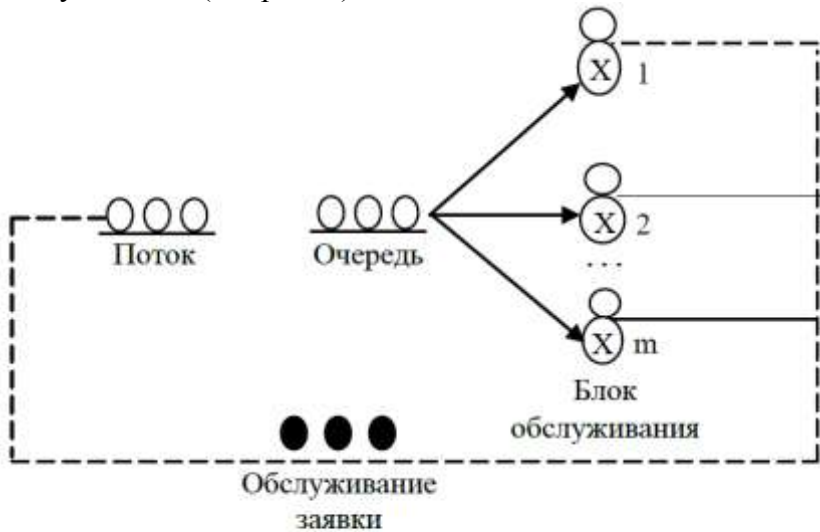


Рис. 1 - Замкнутая система обслуживания

В замкнутых системах возможны случаи, когда число требований на обслуживание совпадает с числом обслуживающих приборов ( $n=m$ ), число заявок больше числа приборов ( $n>m$ ), число заявок меньше числа приборов ( $n<m$ ).

Применительно к задаче о станках, с практической точки зрения представляют два случая:

- число станков больше числа рабочих  $n>m$ ;
- число станков не превосходит числа рабочих  $n \leq m$ .

Основные числовые характеристики замкнутой системы при  $n>m$  будут определяться:

$n$  – число требований; в нашей задаче - станков.

$m$  – число обслуживающих приборов; в нашей задаче - бригад наладчиков.



Обозначим через  $\mu$  - интенсивность обслуживания одним прибором, одним наладчиком в задаче о станках.

Пусть  $K$  – число станков требующих ремонта, тогда  $n - k$  - число исправных станков, вероятность поломки хотя бы одного станка в интервале  $(t, t+dt)$  равна  $(n-k) \lambda dt$ .

**Вероятность того, что все приборы свободны:**

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \frac{n!}{(n-k)!k!} + \sum_{k=m+1}^n \frac{n!}{m!(n-k)!} \cdot \frac{\Psi^k}{m^{k-m}}} \quad (7)$$

**Вероятность того, что в системе находится  $K$  требований ( $K > m$ ):**

$$P_k = \frac{n!}{m(n-k)!} \cdot \frac{\Psi^k}{m^{k-m}} P_0 \quad (8)$$

**Среднее число требований, ожидающих обслуживания:**

$$M_{ож} = \sum_{K=m+1}^n (k-m) \frac{n!}{(n-k)!m!} \cdot \frac{\Psi^k}{m^{k-m}} P_0 \quad (9)$$

**Среднее число требований, находящихся в системе обслуживания:**

$$M - M_{ож} + \sum_{k=1}^m \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} \Psi^k P_0 \quad (10)$$

**Среднее число свободных приборов в установившемся режиме:**

$$M_0 = \sum_{K=0}^{m-1} (m-k) P_k = \sum_{K=0}^{m-1} \frac{(m-K)n! \Psi^k}{K!(n-k)!} P_0 \quad (11)$$

**Коэффициент простоя требований, ожидающих обслуживания:**

$$K = \frac{M_{ож}}{n} \quad (12)$$

**Коэффициент простоя приборов обслуживания, наладчиков:**

$$K = \frac{M_0}{n} \quad (13)$$

Если число приборов больше числа требований, то каждому требованию можно выделить отдельный прибор, в этих случаях для клиентов очереди на обслуживание не бывает, часть приборов остается бездействующими. Вычисления будем производить для случая  $n=m$ . В этом случае систему обслуживания можно представить как совокупность независимых, замкнутых систем, каждая из которых имеет одно требование и один прибор.

Для каждой такой одиночной системы вероятности состояний  $P_0$  и  $P_1$  в стационарном режиме можно получить из формул (1 и 2), подставляя  $m=n=1$ .

$$P_0 = \frac{1}{1 + \Psi}; \quad P_1 = \frac{\Psi}{1 + \Psi} \quad (14)$$

**Вероятность того, что во всей системе обслуживания находится ровно  $K$  требований, выражается биномиальным распределением:**

$$P_K = C_n^k \left( \frac{\Psi}{1 + \Psi} \right)^k \left( \frac{1}{1 + \Psi} \right)^{n-k} \quad (15)$$

$$K=0,1,\dots,n.$$

**Среднее число требований, находящихся в системе при любом значении  $n$ :**

$$N = \sum_{k=1}^n kP_k = nP_1 = n \frac{\Psi}{1 + \Psi} \quad (16)$$

Разомкнутые системы – это системы с неограниченным источником потока требований.

Типичными разомкнутыми системами обслуживания можно считать: обслуживание покупателей в магазине, клиентов в парикмахерской, пассажиров в метро и т.п.

Разомкнутые системы обслуживания:

- С одним прибором
- С несколькими одинаковыми приборами
- С бесконечным числом одинаковых приборов
- С несколькими приборами разной производительности

Рассмотрим систему с одним прибором.

Процесс обслуживания здесь характеризуется: входящий поток требований носит случайный характер, дисциплина очереди – «кто первый пришел, тот первым обслуживается»; система имеет один прибор обслуживания, время обслуживания распределяется по показательному закону с параметром  $\mu$ , интенсивность входящего потока равна  $\lambda$ . Предположим, что входящий поток требований – пуассоновский, то есть процесс обслуживания не зависит от того, что было раньше, а зависит только от текущего состояния системы и потока требований. Следовательно, процесс, описывающий состояние системы будет марковским и потому характеризуется матрицей переходных вероятностей.

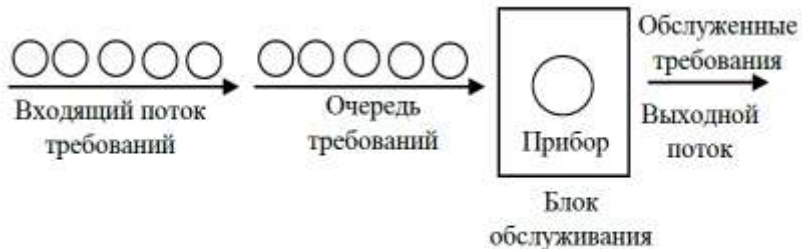


Рис.2 - Разомкнутая система с одним прибором

### Основные числовые характеристики системы для установившегося режима

1. Среднее число требований в системе:

$$\bar{n} = E(N) = \frac{\Psi}{1-\Psi}, \text{ где } \Psi = \frac{\lambda}{\mu} \quad (17)$$

2. Средняя длина очереди:

$$M_{\text{ож}} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = \frac{\Psi^2}{1-\Psi} \quad (18)$$

3. Вероятность того, что в системе имеется, по меньшей мере, одно требование, равна:

$$P(N>0) = 1 - P_0 = \Psi.$$

4. Число требований, проходящих в среднем за единицу времени через систему:

$$\lambda = (1 - P_0)\mu \quad (19)$$

5. Среднее время пребывания требования в системе:

$$\bar{t}_{\text{проб}} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{\bar{n}}{(1 - P_0)\mu} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Psi}{1 - \Psi} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - \Psi}. \quad (20)$$

6. Среднее время ожидания в системе:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{M_{\text{ож}}}{\lambda} = \frac{M_{\text{ож}}}{(1 - P_0)\mu} = \frac{\Psi^2}{1 - \Psi} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Psi}{1 - \Psi} \quad (21)$$

7. Среднее время обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{проб}} - t_{\text{от}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - \Psi} - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Psi}{1 - \Psi} = \frac{1}{\mu}. \quad (22)$$

Для переходного режима, даже в простейшей одноканальной сети решить дифференциальные уравнения состояний достаточно трудно, поэтому более сложные системы мы не рассматриваем.

### *Система массового обслуживания с отказами*

Особенность этих систем в том, что застав все каналы занятыми, клиент получает отказ в обслуживании и покидает систему. Такая задача известна как **задача Эрланга**.

Пусть обслуживающая система состоит из обслуживающих устройств. Входящий поток – простейший с параметром  $\lambda$ . Заявка обслуживается в любом свободном устройстве и теряется, если в момент ее поступления свободных обслуживающих устройств не оказалось. Время обслуживания произвольной заявки  $\eta$  - случайная величина с непрерывной функцией распределения  $M_{\eta}=\mu$ . Если  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  то существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n = p_n \text{ и } p_n = \frac{\rho^n}{n!} : \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \right) \quad (23)$$

$p_n$  можно интерпретировать как вероятность потери требования (отказ) в произвольно взятый момент времени.

Промежуточное место между системами обслуживания с ожиданием и с отказами занимают **смешанные системы**. Смешанные системы обслуживания отличаются тем, что имеют ограничения на время ожидания в очереди или системе, на длину очереди, или ограничения на время ожидания и длину очереди.

## Литература

1. Барановская Т. П. Модели производственной структуры агропредприятия и их согласование / Т. П. Барановская, С. А. Курносов, И. В. Арушанов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2006. – № 23. – С. 35–52.

2. Барановская Т. П. Математические модели оптимизации объемов материальных потоков в интегрированных зерноперерабатывающих производственных системах / Т. П. Барановская, В. И. Лойко, О. А. Макаревич, С. Н. Богославский // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 100. С. 1153-1173.

3. Бурда А. Г. Тренд-сезонные модели управления запасами хлебопекарных производств / А. Г. Бурда, Д. В. Чулков // Тр. Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2009. – № 18. – С. 28–32.

4. Бурда А. Г. Исследование операций: учеб.-метод. пособие по выполнению курсовой работы / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, Е. В. Яроцкая. – Краснодар : КубГАУ, 2013. – 59 с.

5. Бурда А. Г. Компьютерное экспериментирование процессов расширенного воспроизводства в фермерских хозяйствах Кубани / А. Г. Бурда // Региональное развитие: опыт и перспективы: сб. материалов междунар. науч. е-симпозиума. – Киров, 2013. – С. 86–99.

6. Бурда А. Г. Компьютерные технологии в экспериментировании процессов расширенного воспроизводства в фермерских хозяйствах Кубани / А. Г. Бурда, Е. А. Метельская // Социально-экономические проблемы развития Южного макрорегиона: сб. научн. трудов. – Краснодар, 2013. – С. 26–36.

7. Бурда А. Г. Кооперативные связи сельскохозяйственных и перерабатывающих отраслей предприятий: параметризация, моделирование и оптимизация / А. Г. Бурда, О. Ю. Франциско, Л. А. Исаева // сб. Инновационные исследования и разработки для научного обеспечения производства и хранения

экологически безопасной сельскохозяйственной и пищевой продукции ГНУ "Всерос. науч.-исслед. институт табака, махорки и табачных изделий РАСХН". – 2013. – С. 193–196.

8. Бурда А. Г. Математическая экономика: учеб. пособие для вузов / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, А. А. Гусельникова – Краснодар : КГАУ, 2003 г., 2010 г. – 510 с.

9. Бурда А. Г. Математические модели наращивания по простым процентам и их реализация в компьютерном тренажере финансовых вычислений / А. Г. Бурда // сб. Образовательный процесс в современной высшей школе: инновационные технологии обучения. – 2014. – С.18-22.

10. Бурда А. Г. Математическое моделирование в управлении плодородными предприятиями: учеб.-метод. пособие / А. Г. Бурда, С. Н. Косников. – Краснодар : КубГАУ, 2012.

11. Бурда А. Г. Математическое моделирование процессов расширенного воспроизводства и вычислительное экспериментирование производственных параметров крестьянских (фермерских) хозяйств при различных нормах накопления / А. Г. Бурда, Е. А. Метельская // Программные системы и вычислительные методы. – 2013. – № 3. – С. 285–294.

12. Бурда А. Г. Методика рейтинговой оценки использования плодородного потенциала и его экономической эффективности в хозяйствах Краснодарского края / А. Г. Бурда, С. Н. Косников // Тр. Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2009. – № 16. – С. 7–12.

13. Бурда А. Г. Методические подходы к исследованию воспроизводственных операций фермерских хозяйств методами экономико-математического моделирования в контексте жизненного цикла семьи и производства / А. Г. Бурда, Е. А. Метельская // сб. Социально-экономический ежегодник - 2014. – Краснодар, 2014. – С. 21–25.

14. Бурда А. Г. Методы принятия управленческих решений в экономических системах АПК: учеб. пособие для вузов / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2013. – 532 с.

15. Бурда А. Г. Моделирование процессов расширенного воспроизводства в АПК : монография / А. Г. Бурда,

С. Н. Косников, С. И. Турлий. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – 146 с.

16. Бурда А. Г. Моделирование экономики: учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Часть 1. Основы моделирования и оптимизации экономики // А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, А. Г. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2005.

17. Бурда А. Г. Моделирование экономики: учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Часть 2. Методы моделирования производства и рынка // А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, А. Г. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2005.

18. Бурда А. Г. Мониторинг и методика комплексной сравнительной оценки конкурентоспособности предприятий кондитерской промышленности / А. Г. Бурда // Промышленность: технологии, управление, экономика: сб. материалов междунар. науч. е-симпозиума. – Россия, Москва, 26–28 сентября 2013 г. ; под ред. А. Г. Бурды. – Москва, 2013. – С. 15–29.

19. Бурда А. Г. Обоснование выбора свеклосеющих аграрных районов Краснодарского края в качестве объектов моделирования и оптимизации / А. Г. Бурда, В. А. Шеховцов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2004. – № 6. – С. 223–228.

20. Бурда А. Г. Обоснование производственных параметров молочной отрасли сельскохозяйственных предприятий (по материалам краснодарского края): автореф. дисс. ... канд. экон. наук : 08.00.05 / А. Г. Бурда; КубГАУ; науч. рук. А. З. Рысьмятов – Краснодар, 1994.

21. Бурда А. Г. Определение рациональных экономических параметров фирмы методами имитационного моделирования / А. Г. Бурда, Т. В. Кудрявцева // Политематический сетевой электронный науч. журнал Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2004. – № 6. – С. 214 – 222.

22. Бурда А. Г. Основы финансовых вычислений: учебное пособие для самостоятельной работы / А. Г. Бурда, А. А. Белоусова. – Краснодар: Изд-во ЮИМ, 2015. – 140 с.

23. Бурда А. Г. Параметризация и компьютерное экспериментирование процессов расширенного



воспроизводства в фермерских хозяйствах / А. Г. Бурда // Политематический сетевой электронный науч. журнал Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2012. – № 84. – С. 619–637.

24. Бурда А. Г. Параметризация, моделирование и оптимизация эффективного использования производственного потенциала АПК Кубани / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда // Труды Кубанского государственного аграрного университета. – 2015 – № 2.

25. Бурда А. Г. Плодовый потенциал Кубани: экономическая оценка и эффективность использования: монография / А. Г. Бурда, С. Н. Косников. – Краснодар: КГАУ, 2009. – 224 с.

26. Бурда А. Г. Практикум по методам принятия оптимальных управленческих решений в экономических системах АПК: учеб. пособие для вузов / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2013. – 272 с.

27. Бурда А. Г. Практикум по моделированию и оптимизации производственных процессов: учеб. пособие для вузов / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, Ан. Г. Бурда – Краснодар: КГАУ, 2008. – 495 с.

28. Бурда А. Г. Практикум по основам финансовых вычислений: учеб. пособие для вузов / А. Г. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2013.

29. Бурда А. Г. Рейтинговая оценка конкурентоспособности кондитерских предприятий / А. Г. Бурда, В. В. Кочетов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2006. – № 17. – С. 98–117.

30. Бурда А. Г. Рекомендации по оптимизации плодового потенциала сельскохозяйственного предприятия / А. Г. Бурда, С. Н. Косников. – Краснодар : КубГАУ, 2010 – 29 с.

31. Бурда А. Г. Рекомендации по рейтинговой оценке плодового потенциала и эффективности его использования / А. Г. Бурда, С. Н. Косников. – Краснодар : КубГАУ, 2010 – 30 с.

32. Бурда А. Г. Синергический эффект и эмерджентность амортизационных отчислений в аграрных предприятиях / А. Г. Бурда, С. А. Бурда // Глобализация науки: проблемы и

перспективы: сб. статей Международной научно-практической конференции (13 октября 2014 г., г. Уфа). – Уфа: РИО МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2014. – С. 54–56.

33. Бурда А. Г. Социальные параметры аграрного сектора Кубани: развитие и количественная оценка взаимосвязей / А. Г. Бурда, С. А. Бурда // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №04(108). – IDA [article ID]: 1081504058. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/04/pdf/58.pdf>

34. Бурда А. Г. Управление процессом расширенного воспроизводства в фермерских хозяйствах: результаты компьютерного экспериментирования / А. Г. Бурда, Е. А. Метельская // Дайджест-финансы. – 2013. – № 5. – С. 58-68.

35. Бурда А. Г. Управление процессом расширенного воспроизводства в фермерских хозяйствах: результаты компьютерного экспериментирования / А. Г. Бурда, Е. А. Метельская // Региональная экономика: теория и практика. – 2013. – № 14. – С. 30–40.

36. Бурда А. Г. Финансовая математика на персональном компьютере: разработка и использование тренажера финансовых вычислений по простым процентам / А. Г. Бурда // сб. науч. тр. Социально-экономические проблемы развития Южного макрорегиона. – Краснодар, 2013. – С. 36–48.

37. Бурда А. Г. Финансовые вычисления по простым процентам: математические модели и компьютерные симуляции / А. Г. Бурда // сб. Социально-экономический ежегодник - 2014. – Краснодар, 2014. – С. 96–99.

38. Бурда А. Г. Финансовые вычисления по простым процентам: математические модели и компьютерные симуляции / А. Г. Бурда // в сб.: Социально-экономический ежегодник – Краснодар, 2014. – С. 96–99.

39. Бурда А. Г. Эконометрическая модель рейтинговой оценки конкурентоспособности предприятий кондитерской промышленности / А. Г. Бурда // Социально-экономические проблемы развития Южного макрорегиона: сб. науч. трудов – Краснодар, 2013. – С. 48–59.

40. Бурда А. Г. Экономико-математическое моделирование и исследование воспроизводственных операций фермерских хозяйств в контексте жизненного цикла семьи и производства / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда // Экономика, социология и право. – 2014. – № 1. – С. 26–29.

41. Бурда А. Г. Экономико-математическое моделирование и исследование воспроизводственных операций фермерских хозяйств в контексте жизненного цикла семьи и производства / А. Г. Бурда // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. – Омск, 2014. – № 2 (10). – С. 10 – 13.

42. Бурда А. Г. Экономические проблемы параметризации аграрных предприятий ; под ред. академика РАСХН, профессора И. Т. Трубилина – Краснодар, 2001. – 508 с.

43. Бурда А. Г. Экономические проблемы параметризации аграрных предприятий и повышения эффективности использования их потенциала (по материалам Краснодарского края): дисс. ... докт. экон. наук : 08.00.05 / А. Г. Бурда; КубГАУ; науч. конс. И. Т. Трубилин. – Краснодар, 2001.

44. Бурда А. Г. Эффект эмерджентности амортизационных отчислений как источник финансирования расширенного воспроизводства основных фондов в АПК / А. Г. Бурда, С. А. Бурда // Научное обеспечение агропромышленного комплекса: материалы Всерос. науч.- практ. конф. молодых ученых (26–28 ноября 2013 г. и 2–4 декабря 2014 г.). – Краснодар: КубГАУ, 2014. – 768 с. – С. 366-367.

45. Бурда Г. П. Методические разработки для самостоятельной работы студентов по моделированию и оптимизации экономических процессов и систем / Г. П. Бурда, А. Г. Бурда – Краснодар : КГАУ, 2008 г. – 185 с.

46. Бурда Г. П. Практикум по методам оптимальных решений: учеб. пособие для вузов / Г. П. Бурда, А. Г. Бурда – Краснодар : КубГАУ, 2012. – 233 с.

47. Бурда Г. П. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие для вузов. Издание 2-е. Краснодар, КГАУ, 2003. – 638 с.

48. Бурда Г. П. экономико-математические методы и модели: учеб. пособие для вузов / Г. П. Бурда. – Краснодар : КГАУ, 2000. – 638 с.

49. Бурда Г.П. Методы оптимальных решений и теория игр: пособие для вузов // Г. П. Бурда, А. Г. Бурда – Краснодар : КубГАУ, 2011. – 491 с.

50. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под ред. П. В. Трусова. - М.: Логос, 2005. - 440 с.

51. Власов, М.П. Моделирование экономических процессов: учеб. пособие / М.П. Власов, П.Д. Шимко – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 410 с.

52. Журнал «Математическое моделирование» (основан в 1989 г.).

53. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие. – М.: Издательство Дело АНХ, 2008

54. Замотайлова Д. А. Оптимизация перевозок с использованием автоматизированной информационной системы визуального решения транспортных задач / Д. А. Замотайлова, А. Г. Бурда // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2010. – № 60. – С. 183–190.

55. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. - 496 с. 2-е изд. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI).

56. Затонская И. В. Игровые модели в экономике : методические разработки для лабораторно-практических занятий и самостоятельной работы / Затонская И. В., Франциско О. Ю., Бурда А. Г. – Краснодар : КубГАУ, 2009 – 28 с.

57. Зелинская М. В. Проблемы функционирования виртуальных организаций социально-экономических региональных систем России / М. В. Зелинская, Е. Н. Ткачева. – Бизнес в законе. Экономико-юридический журнал. – 2009. – № 3. – С. 229-231.

58. Информационные технологии и модельные тренажеры в обучении методам оптимальных решений в агроэконо-

мических системах: монография / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, С. Н. Косников, В. В. Осенний, С. В. Пермякова, О. Ю. Франциско ; под ред. А. Г. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2012. – 133 с.

59. Ковалева К. А. Фазовый анализ как инструмент предпрогнозного анализа деятельности многофункционального центра / К. А. Ковалева, Е. В. Попова, С. А. Молошнев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 107. С. 473-483.

60. Косников С. Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов: учеб. пособие / С.Н. Косников ; под ред. д-ра экон. наук, проф. А. Г. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2013. – 90 с.

61. Косников С. Н. Теория принятия решений: учеб. пособие, задачник / С. Н. Косников; под ред. д-ра экон. наук, проф. А. Г. Бурда. – Краснодар : КубГАУ, 2013. – 54 с.

62. Косников С. Н. Экономическая оценка формирования и использования плодового потенциала: автореф. дисс. ... канд. экон. наук / С. Н. Косников; КубГАУ. – Краснодар, 2009.

63. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Питер, 2010 – 496 с.

64. Кумратова А. М. Экономико-математическое моделирование риска в задачах управления ресурсами здравоохранения /А. М. Кумратова, Е. В. Попова, А. З. Биджиев. – Краснодар: Кубанский государственный аграрный университет. – 2014.

65. Липчиу Н.В. Методология научного исследования: учебное пособие / Н.В. Липчиу, К.И. Липчиу. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – 290 с.

66. Лопатников Л. И. Популярный экономико-математический словарь / Л. И. Лопатников. – 3-е изд., доп. – М. : Знание, 1990.

67. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь. Словарь современной экономической науки / Л. И. Лопатников. – Изд. 4-е. – М. : Изд-во «АВФ», 1996. – 704 с.

68. Лосев А.Ф. Творческий путь Владимира Соловьева // Вл.Соловьев. Сочинения. М., 1988. Т. 1. С. 5.
69. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. - М. Физматлит. 2004. - 320 с.
70. Математические методы и модели исследования операций / под ред. Колемаева. - Изд-тво: Юнити-Дана, 2007 г. 592 с.
71. Математические модели природы и общества. Монография. Калиткин Н.Н. и др.М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 360 с.
72. Моделирование крестьянских хозяйств ; под ред. академика Россельхозакадемии И. Т. Трубилина – Краснодар: КГАУ, 1995.
73. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей: Изд-во Либроком. – 2009. – 192 с.
74. Плохотников К.Э. Метод и искусство математического моделирования: курс лекций. – М.: Флинта. – 2012. – 519 с.
75. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике Университет, Высшая школа, 2002 – 288с.
76. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005 г.
77. Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Высш. Шк., 2004 – 616 с.
78. Советов Б. Я., Яковлев С. А., Моделирование систем: Учеб. для вузов — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 2001.
79. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. —912 с.
80. Трубилин А. И. Параметризация, моделирование и оптимизация конкурентоспособного АПК: монография / А. И. Трубилин, А. Г. Бурда, Г. П. Бурда, И. М. Благивский, С. Н. Косников, В. В. Кочетов, Е. А. Метельская, С. И. Турлий, О. Ю. Франциско ; под руководством и ред. академика

РАСХН, доктора экономических наук, профессора И. Т. Трубилина – Краснодар : КубГАУ, 2012. – 630 с.

81. Трубилин И. Т. Инструментальные средства финансовых вычислений: разработка и обучение применению в экономической работе на предприятиях АПК / И. Т. Трубилин, А. Г. Бурда, О. Ю. Франциско // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – № 08 (102). – IDA [article ID]: 10214080029. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/08/pdf/29.pdf>.

82. Трубилин И. Т. Моделирование крестьянских хозяйств / И. Т. Трубилин, Г. П. Бурда. – Краснодар: КГАУ, 1999.

83. Трубилин И.Т. Инструментальные средства финансовых вычислений: разработка и обучение применению в экономической работе на предприятиях АПК / И.Т. Трубилин, А.Г. Бурда, О.Ю. Франциско // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №08(102). С. 459 – 484. – IDA [article ID]: 1021408029. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/08/pdf/29.pdf>

84. Турлий С. И. Моделирование в управлении предприятиями по переработке молока: учеб.-метод. пособие – С. И. Турлий – Краснодар, КубГАУ, 2014. – 150 с.

85. Улезько А. В. Имитационное моделирование как инструмент исследования агроэкономических систем / А. В. Улезько, А. П. Курносов, А. А. Тютюников. – Экономика сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий. – 2012. – № 8. – С. 28–30.

86. Улезько А. В. Моделирование как инструмент принятия управленческих решений / А. В. Улезько, А. В. Котарев // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. – 2008. – № 1–2. – С. 73–80.

87. Франциско О. Ю. Выбор режима налогообложения при развитии подсобных перерабатывающих производств

аграрных предприятий / О. Ю. Франциско, А. Г. Бурда // Тр. Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2009. – № 16. – С. 72–77.

88. Франциско О. Ю. Обоснование прогнозных сценариев сочетания производства и переработки сельскохозяйственной продукции в аграрных предприятиях (с использованием методов моделирования и оптимизации) / О. Ю. Франциско // Тр. Кубан. гос. аграр. ун-та. – 2007. – № 9. – С. 46–49.

89. Франциско О. Ю. Обоснование экономических параметров и прогнозных сценариев развития подсобных производств аграрных предприятий: автореф. дисс. ... канд. экон. наук / О. Ю. Франциско; КубГАУ. – Краснодар, 2008.

90. Франциско О. Ю. Особенности развития перерабатывающих производств аграрных предприятий / О. Ю. Франциско, А. Г. Бурда // сб. Инновационные исследования и разработки для научного обеспечения производства и хранения экологически безопасной сельскохозяйственной и пищевой продукции ГНУ "Всероссийский научно-исслед. институт табака, махорки и табачных изделий РАСХН". – 2013. – С. 196 – 197.

91. Чураков, Е.П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике: учеб. пособие / Е.П. Чураков –М. Финансы и статистика, 2004. 240 с.

92. Burda A. G. Study of economic operations of the farms using methods economic and mathematical modeling / A. G. Burda, G. P. Burda // Формування науково-освітньої політики: 1 частина (економічні науки, філологічні науки, педагогічні науки) міжнародна конференція, м. Київ, 31 травня 2014р. Центр наукових публікацій. – 102 стр., с. 16-19 – URL: [http://cnp.org.ua/files/Archive/May\\_2014/Kyiv\\_may\\_part\\_1.pdf](http://cnp.org.ua/files/Archive/May_2014/Kyiv_may_part_1.pdf)

93. Burda A. G. Parameters expanded reproduction in farms at various norms of accumulation: mathematical modeling and computer experimenting / A. G. Burda // International Journal Of Applied And Fundamental Research. – 2013. – № 2 – URL: [www.science-sd.com/455-24086](http://www.science-sd.com/455-24086)



## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
1.1. Управление как функция сложной системы. ....	7
1.2 Теория автоматического управления, фундаментальные принципы управления .....	14
1.3 Процессы управления в социально-экономических и технических системах.....	19
1.4 Модель и моделирование в управлении .....	25
2.1 Элементы и условия процесса управления .....	38
2.2 Основные типы задач управления.....	44
2.3 Математическая теория оптимальных процессов, оптимальное управление .....	46
2.4 Принцип максимума Л.С. Понтрягина .....	48
2.5 Техническая реализация оптимального управления .....	53
<b>ТЕМА 3. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ .....</b>	<b>58</b>
3.1 Особенности моделирования процессов управления.....	58
3.2 Основы теории принятия решений и типичные классы задач исследования операций .....	61
3.3 Роль моделирования в процессе подготовки и принятия управленческих решений .....	76
3.4 Математико-компьютерная поддержка и современные методы принятия решения .....	81
<b>ТЕМА 4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ИМИ.....</b>	<b>85</b>
4.1 Дискретность и непрерывность в теории и практике применения математических моделей .....	85
4.2 Дискретное программирование и символьная модель дискретной задачи.....	97
4.3 Методы решения задач непрерывного и дискретного моделирования .....	99

ТЕМА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ.....	109
5.1 Понятие, особенности, основные назначения и виды макро-экономических моделей.....	109
5.2 Модели экономического роста и расширяющейся экономики .....	118
5.3 Модель общего экономического равновесия .....	127
5.4 Моделирование межотраслевых связей на макроуровне. Динамическая модель межотраслевого баланса .....	139
5.5 Модели хаотической динамики .....	164
5.5.1 Основные понятия и история теории хаоса, признаки хаотической системы. «Эффект бабочки».....	164
5.5.2 Простые и хаотические аттракторы динамических систем. Фрактал .....	178
5.5.3 Переход от равновесия к хаосу: бифуркация и дерево Фейгенбаума .....	187
5.5.4 Использование моделей хаотической динамики в различных областях науки и практики .....	191
ТЕМА 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ .....	197
6.1 Принципы рационального ведения хозяйства и расчета оптимальной площади .....	197
6.2. Структурная модель экономико-математической задачи оптимизации параметров аграрного предприятия.....	200
6.3 Математическое моделирование управления системами массового обслуживания.....	214
6.3.1 Марковские процессы.....	214
6.3.2 Основные элементы и понятия теории массового обслуживания .....	220
6.3.3 Замкнутые и разомкнутые системы обслуживания...	230
Литература .....	237
ОГЛАВЛЕНИЕ .....	248

Учебное издание

**БУРДА** Алексей Григорьевич  
**БУРДА** Григорий Петрович

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ В УПРАВЛЕНИИ**

*Учебное пособие (курс лекций)*

В авторской редакции

Дизайн и оформление: А.А. Зарученко,  
В. В. Осенний

Подписано в печать \_\_.\_\_.2015. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Усл. печ. л. – 14,53. Уч.-изд. л. – 11,36.

Тираж \_\_\_ экз. Заказ № \_\_\_.

Типография Кубанского государственного  
аграрного университета,  
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13