МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И.Т. Трубилина»

КАФЕДРА СТАТИСТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Методические указания и задания для практических занятий и самостоятельной работы для бакалавров по направлению 38.03.01 Экономика

Краснодар
КубГАУ
2017

Основы финансовых вычислений: метод. указания и задания для практических занятий и самостоятельной работы по направлению 38.03.01 «Экономика» / П.С. Бондаренко, Н.Г. Давыденко, А.Е. Жминько, И.А. Кацко, А.Е. Сенникова, Н.Н. Яроменко – Краснодар : КубГАУ, 2017

Введение

В рыночной экономике от специалиста требуется умение оценивать возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. При этом следует учитывать, что принятие управленческих решений финансового характера всегда осуществляется в условиях неопределенности.

Финансовые вычисления представляют собой учебную дисциплину, в которой раскрывается методика количественного анализа финансовых, кредитных и банковских операций. Овладение методами и приемами финансовых вычислений является важной составляющей в профессиональной подготовке экономиста, банковского работника, предпринимателя, менеджера и других специалистов.

Цель изучения курса «Основы финансовых вычислений» – дать целостную концепцию количественного финансового анализа условий и результатов финансово-кредитных и коммерческих сделок, связанных с предоставлением денег в долг.

Финансовые вычисления охватывают круг задач, в которых присутствуют основные параметры финансовых сделок: величина капитала (кредита, депозита, ссуды), сроков финансовых операций, процентных ставок. Эти параметры связаны между собой определенной функциональной зависимостью. Финансовые вычисления устанавливают количественные связи между параметрами финансовых операций.

Рекомендуется следующий порядок изучения дисциплины: ознакомиться с программой, изучить рекомендованную литературу, разобраться с методикой решения типичных задач, выполнить письменную контрольную работу.

Рекомендуемая литература

1. Ильичев Е.В. Элементарные основы квантовых вычислений. Упражнения и задачи [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Е.В. Ильичев, Я.С. Гринберг— Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014. — 28 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45209.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю
2. Синицын Е.В. Приемы финансовых вычислений в условиях определенности. Практикум [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Е.В. Синицын— Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2014. — 64 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68279.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю.
3. Учебно-методическое пособие по дисциплине Основы финансовых вычислений [Электронный ресурс]/ — Электрон. текстовые данные.— М.: Московский технический университет связи и информатики, 2016.— 40 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61519.html.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

Тема 1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Финансово – экономические расчеты (финансовая математика, финансовые вычисления) – область знаний, в которой излагается методология количественного финансового анализа условий и результатов финансово-кредитных и коммерческих сделок. Они представляют собой совокупность методов и приемов определения изменения стоимости денег, происходящего вследствие их возвратного движения (предоставления в долг).

Процент рассматривается как плата за пользование заемными средствами, так и показатель доходности любого вложения капитала. Причем вложение капитала может в действительности и не состояться.

Условные обозначения:

P - величина первоначального капитала, (ссуды, долга, кредита и т.д.);
S – наращенная сумма или конечная стоимость капитала, которая получена прибавлением к первоначальной величине начисленных процентов;
n – число лет наращения;
i – годовая процентная ставка (обычно измеряется десятичной дробью);
t – срок финансовой операции, выраженный в днях;
m – срок операции, выраженный в месяцах;
K – число дней в году (365, 366 или 360);
d – годовая учетная ставка;
I – процентный доход или процент, как величина дохода от сделки.

Сумма процентного дохода, начисленного за весь период:

$$I = Pin. \tag{1.1}$$

Наращенная сумма **декурсивных процентов**:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni), \tag{1.2}$$

где (1 + ni) – *множитель наращения простых декурсивных процентов.*

Если срок финансовой сделки выражен в месяцах, то величина наращенной суммы определяется по формуле:

$$S = P\left(1 + \frac{m}{n'} i\right), \tag{1.3}$$

где n' - 12 месяцев.

Когда срок финансовой сделки выражается в днях, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P\left(1 + \frac{t}{K} i\right). \tag{1.4}$$

Если необходимо определить процентный доход, а срок финансовой сделки определяется в месяцах или днях, то:

доход за один месяц $I = \dfrac{Pi}{12 \cdot 100}$; (1.5)

доход за m – месяцев $I = \dfrac{Pim}{1200}$; (1.6) доход за один день $I=\frac{Pi}{36500}$; (1.7)

доход за t – дней $I=\frac{Pit}{36500}$ *или* $I=\frac{Pit}{36000}$. (1.8)

Эти формулы справедливы если процентная ставка выражается в процентах, если ставка выражена в виде десятичной дроби, то знаменатель необходимо разделить на 100.

Когда применяется переменная процентная ставка, дискретно изменяющаяся во времени, то наращенная сумма находится по формуле:

$$S=P(1+n_1i_1+n_2i_2+...+n_ji_j+...+n_li_l)=P(1+\sum_{j=1}^{l}n_ji_j). \quad (1.9)$$

При **антисипативном методе** начисления процентов за базу принимается сумма возврата долга, тогда наращенная сумма определяется по формуле:

$$S=\frac{P}{1-nd}, \quad (1.10)$$

где d – учетная ставка, выраженная десятичной дробью,

$(1-dn)^{-1}$ - множитель наращения простых антисипативных процентов.

Если d выражается в процентах, то формула примет вид:

$$S=\frac{P100}{100-nd}. \quad (1.11)$$

При математическом дисконтировании современная величина суммы S находится по формуле $P=S(1+ni)^{-1}$, (1.12)

где $(1 + ni)^{-1}$ является дисконтным множителем.

При *банковском дисконтировании* сумма, получаемая клиентом в результате учета долгового обязательства, находится по формуле:

$$P'=S-Sn'd=S(1-n'd), \quad (1.13)$$

где n' – временной интервал между датой учета и датой погашения векселя.

Дисконтный множитель здесь равен $(1-dn)$. Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе K=360 дней, число дней финансовой операции обычно берется точным. Дисконт $Д'=S-P'$.

Срок финансовой сделки и величина процентной ставки находятся из формул наращенных сумм:

$$n=\frac{S/P-1}{i},\ n=\frac{1-P/S}{d}, \quad (1.14)$$

$$t=\frac{S-P}{Pi}K;\ t=\frac{S-P}{Sd}K; \quad (1.15)$$

$$i=\frac{S-P}{Pn}=\frac{S-P}{Pt}K;\ d=\frac{S-P}{Sn}=\frac{S-P}{St}K. \quad (1.16)$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1 Банк выдал клиенту кредит в сумме 200000 руб. на 2 года, при процентной ставке 14,6 %. Определите, какую сумму должен вернуть клиент банку и процентный доход банка.

1.2 Определите проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 700 тыс.руб., начисляются простые декурсивные проценты по ставке 15 % годовых, при сроке ссуды: 45 дней; 90 дней; 6 месяцев; 10 месяцев; 1 год.

1.3 Ссуда выдана сроком на: 30 дней, 100 дней; 4 месяца; 8 месяцев; 1 год. По данным таблицы 1.1. Определить сумму к возврату ссуды и процентный доход, если при расчетах использовалась: а) процентная ставка; б) учетная ставка.

Таблица 1.1 – Размер ссуды и ставка

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %	Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %
1	800	16,0	16	200	17,4
2	280	18,5	17	300	15,0
3	370	16,3	18	400	16,2
4	690	14,9	19	1000	17,0
5	1100	15,7	20	600	15,9
6	1850	19,0	21	700	15,2
7	680	18,0	22	890	16,4
8	390	14,1	23	900	15,2
9	485	13,7	24	970	14,9
10	920	18,2	25	850	16,4
11	590	19,7	26	750	14,8
12	630	14,8	27	410	17,5
13	380	13,7	28	650	16,9
14	480	15,9	29	870	15,7
15	510	16,8	30	710	18,5

1.4 При известной годовой ставке простых процентов определить через сколько лет начальная сумма увеличится: в 1,2 раза; 1,5 раза; 1,8 раза; в 2 раза; 2,5 раза; в 3 раза; в 4 раза; в 5 раз. Как изменятся сроки ссуды, если при расчетах также использовалась простая учетная ставка.

Таблица 1.2 – Размер ставки по которой производится начисление

Вариант	Ставка, %	Вариант	Ставка, %
1	16,0	16	17,4
2	14,5	17	15,0
3	16,3	18	16,2
4	14,9	19	17,0
5	15,7	20	15,9
6	14,0	21	15,2
7	18,0	22	16,4
8	14,1	23	15,2
9	13,7	24	14,9
10	16,2	25	16,4
11	15,7	26	14,8

12	14,8	27	17,5
13	13,7	28	16,9
14	15,9	29	15,7
15	16,8	30	15,5

1.5 Банк выдал клиенту кредит. Определите сумму, подлежащую возврату по английской, французской и германской практике по данным таблицы 1.3

Таблица 1.3 – Параметры кредитных сделок

Вариант	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.	Вариант	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.
1.	10.01	20.08	10,2	200000	15.	16.01	11.09	13,4	300000
2.	19.01	30.10	14,0	300000	16.	1.02	13.08	11,0	570000
3.	5.02	18.09	12,6	280000	17.	28.03	30.10	18,5	512000
4.	9.01	1.06	18,0	350000	18.	12.02	5.12	14,3	640000
5.	30.01	10.11	14,9	100000	19.	14.03	5.06	20,4	700000
6.	24.03	15.09	10,0	275000	20.	16.01	26.10	17,0	450000
7.	16.02	20.11	14,3	120000	21.	11.04	24.11	18,9	396000
8.	18.03	3.12	18,7	800000	22.	9.01	12.09	12,0	360000
9.	16.04	23.10	21,2	750000	23.	6.04	7.12	14,3	430000
10.	3.01	19.10	13,0	240000	24.	5.02	6.10	16,7	270000
11.	18.01	19.05	16,5	260000	25.	7.01	5.05	10,9	590000
12.	12.02	19.11	13,7	160000	26.	12.02	14.12	13,5	540000
13.	2.03	14.07	12,0	298000	27.	24.02	16.09	21,3	237000
14.	10.04	17.12	16,2	175000	28.	2.01	24.11	16,0	624000

1.6 Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 09.01 поступило 350000 рублей, 18.04 снято 45000 рублей, 28.08 поступило 130000 рублей, 7.10 снято 74000 рублей, 27.11 поступило 95000 рублей. Найдите сумму на счете на конец года. Процентная ставка 11 % годовых. При расчетах использовалась английская практика.

Методические указания

1) Процентный делитель (дивизор) определяется по формуле:

$$Д = \frac{K}{i}.$$

2) Определим процентные числа за j- тый период (таблица 1.4)

$$\frac{R_j t_j}{100}, j = 1, 2, \ldots, l.$$

Таблица 1.4 – Определение сумм процентных чисел

Дата	Движение средств, руб.	Остаток (R_j), руб.	Срок (t_j)	Процентное число
09.01	350000	350000		
18.04				
28.08				
07.10				
27.11				
31.12	-		-	-
Итого	-	-		

3) Найдем сумму процентов за весь период:

$$I = \sum_{j=1}^{l} \frac{R_j n_j i}{100} = \frac{\sum_{j=1}^{l} R_j t_j}{100} : \frac{K}{i} = \frac{\sum_{j=1}^{l} R_j t_j}{100} : Д .$$

1.7 Движение средств на счете характеризуется данными представленными в таблице 1.5. Найдите сумму на счете на конец года, если процентная ставка составляет 9,5 % годовых. При расчетах использовалась французская практика.

Таблица 1.5 – Движение средств на счете

Вариант	Сумма на счете на 10.01, тыс. руб. (открытие счета)	Движение средств на счете (+ - поступление; – - выбытие)					
		20.03	19.04	5.06	10.08	19.10	6.12
1	800	+800	-680	-120	+300	-90	+270
2	900	-200	-130	-90	+280	+80	-100
3	1100	-190	-320	+180	-410	+390	+110
4	500	-80	+120	-20	+215	+80	-90
5	600	+200	+180	-310	+90	+110	-290
6	750	-350	-120	+240	+420	-370	+100
7	850	-450	+200	+280	-370	+130	-90
8	390	+400	+190	+210	-150	-205	+95
9	680	-280	+290	+110	-170	-85	+95
10	270	+130	+310	-150	-300	+290	+80
11	180	+220	+300	+200	-150	-50	+90
12	490	+110	+205	-280	-200	+80	+130
13	1250	-620	-100	+260	+505	-490	+320
14	1420	-480	-390	+190	+210	+520	-290
15	1730	+170	-700	-180	+380	+250	-480
16	1840	-380	-800	+510	+290	+500	-710
17	490	+130	-90	-200	+300	-150	+250
18	730	-130	-210	+200	-310	+205	-150
19	370	+190	-90	-170	-100	+280	+180
20	820	+130	-320	-270	+180	+320	-240
21	710	-250	+310	-200	+450	-130	+150

22	590	-120	+180	+120	-210	-225	+190
23	780	+110	-210	-255	+185	-325	+200
24	850	+100	-200	+380	-470	-170	+270
25	610	-280	-150	+295	+185	-80	-100
26	705	-170	+180	+200	-250	+80	+150
27	910	-200	+50	-180	+300	-450	-100
28	970	-150	+210	-370	-180	+205	+175
29	750	+180	+50	-280	+310	-420	+170
30	800	-100	+295	-315	-185	+275	-325

1.8 Банк предлагает клиенту следующие условия срочного годового депозита: в первом квартале процентная ставка 8 % годовых, каждые следующие три месяца ставка повышается на 0,8 %. Определите наращенную сумму 287 000 рублей.

1.9 Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первые пять месяцев ставка – 10 %, в каждом последующем месяце ставка повышается на 0,5 %. Необходимо определить множитель наращения за: полгода; один года.

1.10 Клиентом в банке 19 февраля открыт счет на сумму 400000 рублей, при ставке 9,5 % годовых. 10.04 снято 118000 рублей, 24.07 внесено 224000 рублей, 7.09 снято 97000 рублей, 18.11 внесено 109000 рублей, а в конце года счет был закрыт. Какую сумму получит клиент если 1.10 процентная ставка была повышена до 10,5 %.

1.11 Фирма получила кредит с оговоренной суммой возврата (таблица 1.6). Определите процентную и учетную ставку, если срок кредита составляет: 60 дней; 120 дней; 5 месяцев; 8 месяцев; 1 год (К = 360).

Таблица 1.6 – Сумма выдачи и возврата кредита

Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
1	200	250	16	370	399
2	180	220	17	390	436
3	150	175	18	280	307
4	370	410	19	450	474
5	250	280	20	480	509
6	380	420	21	805	845
7	470	500	22	610	629
8	620	650	23	740	781
9	390	420	24	210	242
10	250	286	25	280	296
11	810	834	26	470	504
12	890	918	27	820	853
13	180	202	28	705	738
14	290	324	29	810	837
15	620	647	30	600	624

1.12 Фирма планирует получение кредита в сумме 150000 рублей, при условии возврата 200000 рублей. На какой срок фирма может взять кредит, если процентная ставка равна: 9 %; 14 %; 19 %; 25%.

1.13 По данным таблицы 1.7, определить на какой срок (в днях и годах) была выдана ссуда, если использовалась: 1) простая процентная ставка; 2) простая учетная ставка; в размере: 10,0%; 12,5%; 13,0%; 14,9%; 15,7%; 17,8%.

Таблица 1.7 – Сумма выдачи и возврата кредита

Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
1	210	219	16	350	417
2	190	201	17	360	399
3	180	189	18	240	278
4	350	387	19	410	487
5	270	286	20	460	499
6	390	410	21	835	888
7	440	452	22	600	671
8	630	658	23	750	824
9	350	389	24	230	243
10	270	297	25	240	289
11	820	910	26	410	488
12	870	965	27	850	888
13	190	213	28	765	809
14	250	264	29	800	875
15	640	698	30	650	689

1.14 Клиентом в банке взят кредит под 18 % годовых. В конце периода клиент должен выплатить определенную сумму (таблица 1.8). Определите процентный доход и сумму кредита, если срок кредита составляет: 65 дней; 90 дней; 110 дней; 4 месяца; 9 месяцев; 1 год (К = 365).

Таблица 1.8 – Сумма возврата кредита

Вариант	Сумма возврата кредита, тыс. руб.	Вариант	Сумма возврата кредита, тыс. руб.
1	250	16	399
2	220	17	436
3	175	18	307
4	410	19	474
5	280	20	509
6	420	21	845
7	500	22	629
8	650	23	781
9	420	24	242
10	286	25	296
11	834	26	504
12	918	27	853
13	202	28	738
14	324	29	837
15	647	30	624

1.15 На какой срок фирма может взять кредит в банке в размере 190000 рублей с условием, что сумма возврата кредита не превысит 220000 рублей, если банк применит учетную ставку в размере: 10 %; 15 %; 21 %. (Временная база – 365 дней).

1.16 Банк предоставил клиенту ломбардный кредит сроком на 3 месяца с 7.03 по 7.06 под залог акций. Сумма кредита равна 75 % от курсовой стоимости акций. Определите размер кредита, полученного клиентом в момент его обращения в банк, с учетом того, что проценты и комиссионные удерживаются из суммы выдаваемого кредита, по условиям, представленным в таблице 1.9.

Таблица 1.9 – Условия ломбардного кредита

Вариант	Количество акций	Курсовая стоимость одной акции, руб.	Процентная ставка, %	Процент за обслуживание кредита	Вариант	Количество акций	Курсовая стоимость одной акции, руб.	Процентная ставка, %	Процент за обслуживание кредита
1.	50	500	14,0	0,6	15.	190	1800	15,0	0,6
2.	60	600	14,5	0,65	16.	200	1850	16,5	0,65
3.	70	700	18,0	0,7	17.	210	1200	15,5	0,7
4.	80	800	18,5	0,75	18.	220	1250	19,5	0,75
5.	90	900	12,0	0,8	19.	230	1300	17,0	0,8
6.	100	950	20,0	0,85	20.	240	1350	20,5	0,85
7.	110	1000	24,0	0,9	21.	250	1750	20,0	0,9
8.	120	850	16,0	0,95	22.	260	1700	19,5	0,95
9.	130	750	17,5	1,0	23.	270	1400	16,0	1,0
10.	140	1050	13,5	1,05	24.	280	1450	18,5	1,05
11.	150	1100	21,0	1,1	25.	290	1500	17,0	1,1
12.	160	550	19,0	1,15	26.	300	1550	13,5	1,15
13.	170	650	17,0	1,2	27.	310	1600	21,0	1,2
14.	180	1150	19,5	1,25	28.	320	1650	13,5	1,25

1.17 Ссуда в размере 150000 руб. выдана 20.03 под 19 % годовых. Ее нужно погасить 15.11. Определите наращенную сумму при условии, что проценты начисляются по простой учетной ставке.

1.18 Предоставлен потребительский кредит на 12 месяцев. Определите сумму возврата кредита, используя различные варианты расчета. Составьте план погашения потребительского кредита.

Таблица 1.10 – Варианты потребительского кредита

Вариант	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	Вариант	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)
1.	100000	15,0	16.	140000	12,5
2.	150000	15,5	17.	480000	13,0
3.	170000	16,0	18.	430000	13,5
4.	190000	16,5	19.	380000	14,0
5.	200000	17,0	20.	290000	14,5
6.	240000	17,5	21.	430000	15,0
7.	250000	18,0	22.	330000	15,5

8.	280000	18,5	23.	420000	16,0
9.	300000	19,0	24.	500000	16,5
10.	340000	19,5	25.	510000	17,0
11.	350000	20,0	26.	270000	17,5
12.	360000	20,5	27.	370000	18,0
13.	390000	11,0	28.	520000	18,5
14.	400000	11,5	29.	530000	19,0
15.	450000	12,0	30.	600000	19,5

Методические указания:

1). Сумма начисленных процентов за каждый период:

$$I_{m^/} = \frac{Pi}{1200} \times \left(1 - \frac{(m^/ - 1)}{m}\right)$$

где:

P – первоначальная сумма долга, руб.

i – процентная ставка, %.

$m^/$ – порядковый номер периода начисления процентов и выплаты основного долга.

m – число периодов начислений процентов и выплат основного долга.

2). Выплата основного долга за один период:

$$q^/ = \frac{P}{m}$$

3). Общая сумма начисленных процентов за весь период:

$$\sum I = \frac{Pi}{2400} \times (m + 1)$$

4). Вспомогательная таблица для расчетов:

Таблица 1.11 - План погашения кредита

Месяц	Непогашенная сумма основного долга, руб.	Процентный платеж, руб.	Месячная выплата основного долга, руб.	Месячная сумма всей погасительной задолженности, руб.
0		-	-	-
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Итого	-			

1.19 Вексель номинальной стоимостью 150000 руб. со сроком погашения 6.09 учтен 6.06 по учетной ставке 11,0 % годовых. Найдите дисконтированную величину векселя и сумму дисконта.

1.20 Вексель учтен 10.04 со сроком погашения 10.07. Определите номинальную стоимость векселя, если процентная ставка дисконтирования – 7,5 % годовых, а должник получил 10.04 – 248750 рублей.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение процентов и процентной ставки.
2. Какие виды процентных ставок применяются в финансовых расчетах и в чем их различие?
3. Как определяется наращенная сумма по формулам простых процентов?
4. Какие варианты расчета простых процентов применяются в мировой практике?
5. Что понимается под дисконтированием? Охарактеризуйте виды дисконтирования?
6. Как определяется современная стоимость платежа при применении математического и банковского дисконтирования?
7. Найдите срок финансовой сделки и величину процентной ставки из формул наращенных сумм по простым процентам.

Тема 2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

При использовании *сложных процентов* база для начисления процентов увеличивается от периода к периоду, т.е. процесс наращения капитала происходит с ускорением. Механизм возрастания капитала по сложным процентам называют *капитализацией*. Различают годовую капитализацию, полугодовую, квартальную, месячную и ежедневную.

Наращенная сумма сложных декурсивных процентов определяется по формуле:

$$S = P(1+i)^n, \tag{2.1}$$

где P – первоначальная величина капитала (кредита, депозита, ссуды и т.д.),
S – наращенная сумма капитала на конец срока финансовой операции,
n – срок финансовой операции, лет,
i – годовая ставка процентов, выраженная десятичной дробью.

Сумма начисленных процентов I составляет:

$$I = S - P = P\left((1+i)^n - 1\right). \tag{2.2}$$

Если используются *переменные значения* процентной ставки во времени, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \ldots (1+i_\lambda)^{n_\lambda} = P \prod_{k=1}^{\lambda} (1+i_k)^{n_k}, \tag{2.3}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda$ – последовательные значения переменной процентной ставки,

$n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ – продолжительность периодов (лет), к которым приурочены соответствующие значения процентной ставки,

ℓ – число значений процентной ставки.

Часто *срок* финансовой операции является не целым, *а дробным числом*. Для определения наращенной суммы капитала в этом случае используют два метода:

а) общий $S = P(1+i)^{a+b}$, (2.4)

б) смешанный $S = P(1+i)^a(1+bi)$, (2.5)

где $n = a + b$ – срок финансовой операции, лет; a – целое число лет, b – дробная часть года.

Аналогичный метод применяется и в случаях, когда периодом начисления является полугодие, квартал или месяц, а также при использовании учетной ставки d.

Множитель наращения по смешанному методу оказывается несколько больше, чем по общему.

Проценты капитализируются не только один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам, месяцам (даже ежедневно). В контрактах при этом указывается не ставка за период начисления (i), а годовая ставка (j), одновременно указывается период начисления процентов. Годовая процентная ставка j называется номинальной.

Формула наращения процентов при этом имеет вид:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}, \tag{2.6}$$

где m – число начисления процентов в году (*ежегодное* начисление m = 1; *по полугодиям,* m = 2; *ежеквартальное,* m = 4; *ежемесячное,* m = 12; *ежедневное*, m=365).

Наращение по *сложной учетной* ставке осуществляется по формулам:

а) при ежегодном начислении процентов (m=1)

$$S = \frac{P}{(1-d)^n} = P(1-d)^{-n}; \tag{2.7}$$

б) при m-разовом начислении процентов (m>1)

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}} = P(1 - \frac{f}{m})^{-mn}. \tag{2.8}$$

Если используются *переменные значения* учетной ставки, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1-d_1)^{-n_1}(1-d_2)^{-n_2} \ldots (1-d_\lambda)^{-n_\lambda} = P \prod_{k=1}^{\lambda}(1-d_k)^{-n_k}. \tag{2.9}$$

Дисконтирование по сложной ставке процента может быть математическим и банковским.

Математическое дисконтирование заключается в определении современной величины капитала P по значению наращенной суммы S с использованием сложной ставки декурсивных процентов. Современная стоимость капитала составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}; \qquad (2.10)$$

б) при m-разовом начислении процентов в году

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}. \qquad (2.11)$$

Банковское дисконтирование по сложной учетной ставке может быть использовано при учете среднесрочных и долгосрочных долговых обязательств. Дисконтированная величина долгового обязательства составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P = S(1-d)^n; \qquad (2.12)$$

б) при m-разовом начислении процентов

$$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}. \qquad (2.13)$$

Таблица 2.1 - Определение срока финансовой операции и ставки процента

Декурсивные проценты		Антисипативные проценты	
m=1	m>1	m=1	m>1
$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)}$ (2.14)	$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (2.16)	$n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{\ln(1-d)}$ (2.18)	$n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{m\ln\left(1-\frac{f}{m}\right)}$ (2.20)
$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$ (2.15)	$j = m\left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}} - 1\right)$ (2.17)	$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}$ (2.19)	$f = m\left(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}}\right)$ (2.21)

При *непрерывном* наращении процентов применяют *силу роста*, которая характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная сила роста (b) представляет собой номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$. Наращенная сумма капитала составит

$$S = Pe^{bn}, \qquad (2.22)$$

а современная стоимость $P = \frac{S}{e^{bn}}$. (2.23)

Переменная сила роста (b_t) изменяется во времени, следуя закону, представленному в виде непрерывной функции времени $b_t = f(t)$.

Линейная функция:

$$b_t = b_0 + at, \qquad (2.24)$$

где b_0 – начальное значение силы роста, a – прирост силы роста в единицу времени.

Наращенная сумма капитала составит

$$S = Pe^{b_0 n + \frac{an^2}{2}}, \tag{2.25}$$

а современная стоимость

$$P = \frac{S}{e^{b_0 n + \frac{an^2}{2}}}. \tag{2.26}$$

Экспоненциальная функция:

$$b_t = b_0 a^t, \tag{2.27}$$

где b_0 – начальное значение силы роста, a – постоянный коэффициент роста.

Наращенная сумма капитала составит

$$S = Pe^{\frac{b_0}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}, \tag{2.28}$$

а современная стоимость

$$P = \frac{S}{e^{\frac{b_0}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}}. \tag{2.29}$$

Таблица 2.2 - Определение срока финансовой операции и силы роста

Постоянная сила роста	Переменная сила роста (экспоненциальная)
$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{b}$ (2.30)	$n = \frac{\ln\left(\frac{\ln a \ln \frac{S}{P}}{b_0} + 1\right)}{\ln a}$ (2.32)
$b = \frac{\ln \frac{S}{P}}{n}$ (2.31)	$b_0 = \frac{\ln a \ln \frac{S}{P}}{a^n - 1}$ (2.33)

Налогообложение процентного дохода уменьшает реальную наращенную сумму и доходность депозитной операции. Если начисляются *простые* проценты, то *сумма налога* на проценты L за весь срок финансовой операции составит:

$$L = Pniq, \tag{2.34}$$

где q – ставка налога на проценты.

Наращенная сумма с учетом выплаты налога:

$$S' = P\left((1 + ni)(1 - q) + q\right). \tag{2.35}$$

При долгосрочных операциях и начислении *сложных* процентов *сумма налога* на проценты определяется по формуле:

$$L = Pq\left((1 + i)^n - 1\right). \tag{2.36}$$

Наращенная сумма с учетом выплаты налога:

$$S' = P\left((1 + i)^n (1 - q) + q\right). \tag{2.37}$$

Сумма налога на проценты L_t за каждый год отдельно составляет:

$$L_t = Pq\left((1+i)^t - (1+i)^{t-1}\right), \tag{2.38}$$

где t – порядковый номер года.

Наращенная сумма с учетом *влияния инфляции* (C) по схеме *простых* процентов определяется по формулам:

а) декурсивные проценты

$$C = \frac{P(1+ni)}{I_p}; \tag{2.39}$$

б) антисипативные проценты

$$C = \frac{P(1-nd)^{-1}}{I_p} = \frac{P}{I_p(1-nd)}, \tag{2.40}$$

где I_p – *индекс цен* за соответствующий период n (эту величину также называют *индексом инфляции* за период n).

Соответственно, *темп прироста инфляции* h_n за период времени n лет составит: $h_n = (I_p - 1)\,100$. (2.41)

Индекс инфляции I_p за весь период в n лет при известных темпах прироста инфляции за составляющие его подпериоды:

$$I_p = \left(1+\frac{h_1}{100}\right)^{n_1}\left(1+\frac{h_2}{100}\right)^{n_2}\ldots\left(1+\frac{h_\lambda}{100}\right)^{n_\lambda} = \prod_{\kappa=1}^{\lambda}\left(1+\frac{h_\kappa}{100}\right)^{n_\kappa}, \tag{2.42}$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_\lambda$ – темпы прироста инфляции за соответствующие подпериоды, %;
$n_\kappa, \kappa = 1, 2, \ldots, n_\lambda$ – период действия соответствующего темпа прироста

инфляции, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda = \sum_{\kappa=1}^{\lambda} n_\kappa$.

Наращенная сумма с учетом *влияния инфляции* по схеме *сложных* процентов определяется по формулам:

а) декурсивные проценты

$$C = \frac{P(1+i)^n}{I_p}, \text{ при } m=1; \quad C = \frac{P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{I_p}, \text{ при } m>1; \tag{2.43}$$

б) антисипативные проценты

$$C = \frac{P(1-d)^{-n}}{I_p} = \frac{P}{I_p(1-d)^n}, \text{ при } m=1; \tag{2.44}$$

$$C = \frac{P\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-mn}}{I_p} = \frac{P}{I_p\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}, \text{ при } m>1; \tag{2.45}$$

в) непрерывные проценты

$$C = \frac{Pe^{bn}}{I_p}. \tag{2.46}$$

Реальная доходность финансовой операции с учетом инфляции измеряется с помощью соответствующих ставок процента:

а) по схеме простых процентов

$$i_{реальн.} = \frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{I_p} - 1\right); \; d_{реальн.} = \frac{1-(1-nd)I_p}{n}; \tag{2.47}$$

б) по схеме сложных процентов

$$i_{реальн.} = \frac{(1+i)}{\sqrt[n]{I_p}} - 1, \; d_{реальн.} = 1-(1-d)\sqrt[n]{I_p}, \text{ при } m=1; \tag{2.48}$$

$$j_{реальн.} = m\left(\frac{1+\frac{j}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}} - 1\right), \; f_{реальн.} = m\left(1-\left(1-\frac{f}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p}\right), \text{ при } m>1; \tag{2.49}$$

$$b_{реальн.} = \delta - \frac{1}{n}\ln I_p, \; m \to \infty. \tag{2.50}$$

Минимальная ставка процента, нейтрализующая действие инфляции, определяется из равенства индекса инфляции и соответствующего множителя наращения. Если начисляются сложные декурсивные проценты по ставке i за n лет, а индекс инфляции за этот же период составил I_p, то:

$$(1+i)^n = I_p, \text{ откуда } \; i = \sqrt[n]{I_p} - 1. \tag{2.51}$$

Для обеспечения реального наращения капитала в условиях инфляции должно выполняться неравенство $i > \sqrt[n]{I_p} - 1$.

В целях компенсации потерь от снижения покупательной способности денег ставку процента корректируют с учетом темпа инфляции. Величина корректирующей *брутто-ставки* r, которая обеспечивает реальную доходность финансовой операции по заданной ставке процента, определяется по формулам:

а) по схеме простых процентов

$$r_{i_{пр}} = \frac{(1+ni)I_p - 1}{n}; \; r_{d_{пр}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1-nd}{I_p}\right); \tag{2.52}$$

б) по схеме сложных процентов

$$r_{i_{сл}} = (1+i)\sqrt[n]{I_p} - 1, \; r_{d_{сл}} = 1 - \frac{1-d}{\sqrt[n]{I_p}}, \text{ при } m=1; \tag{2.53}$$

$$r_j = m\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p}-1\right),\quad r_f = m\left(1-\frac{1-\dfrac{f}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}}\right),\ \text{при } m>1; \qquad (2.54)$$

$$r_b = b+\frac{1}{n}\ln I_p,\quad m\to\infty. \qquad (2.55)$$

Пример 2.1 Сумма 200 тыс. руб. инвестируется под процентную ставку 15 % годовых: 1) на 3 месяца; 2) на 6 месяцев; 3) на 1 год; 4) на 6 лет; 5) на 9 лет. Найти наращенные суммы по схеме простых и сложных процентов.

Решение. 1. По условию задачи n_1=0,25 года, n_2=0,5 года, n_3=1 год, n_4=6 лет, n_5=9 лет, P=200000 руб., i=0,15. При наращении простых процентов по формуле (1.2) получим:

1.1. $S = 200000(1+0{,}25\cdot 0{,}15) = 207500$ руб.

1.2. $S = 200000(1+0{,}5\cdot 0{,}15) = 215000$ руб.

1.3. $S = 200000(1+1\cdot 0{,}15) = 230000$ руб.

1.4. $S = 200000(1+6\cdot 0{,}15) = 380000$ руб.

1.5. $S = 200000(1+9\cdot 0{,}15) = 470000$ руб.

2. При наращении сложных процентов по формуле (2.1) получим:

2.1. $S = 200000(1+0{,}15)^{0{,}25} = 207112$ руб.

2.2. $S = 200000(1+0{,}15)^{0{,}5} = 214476$ руб.

2.3. $S = 200000(1+0{,}15) = 230000$ руб.

2.4. $S = 200000(1+0{,}15)^6 = 462612$ руб.

2.5. $S = 200000(1+0{,}15)^9 = 703575$ руб.

Для владельца капитала более выгодной является схема простых декурсивных процентов, если срок финансовой операции менее одного года; схема сложных декурсивных процентов – если срок превышает один год. При однократном начислении процентов и продолжительности периода один год обе схемы дают равные результаты.

Пример 2.2 В банке получена ссуда в размере 400 тыс. руб. на 8 лет на следующих условиях: для первых трех лет процентная ставка равна 10% годовых, на следующий год устанавливается маржа в размере 1%, а на последующие годы маржа равна 1,5%. Найдите сумму, которая должна быть возвращена банку по окончании срока ссуды при ежегодных начислениях сложных процентов.

Решение. Поскольку имеем дело с переменной процентной ставкой, то P=400000 руб., n_1=3, n_2=1, n_3=4, i_1=0,10, i_2=0,11, i_3=0,115. Используя формулу $S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_\lambda)^{n_\lambda} = P\cdot\prod_{k=1}^{\lambda}(1+i_k)^{n_k}$, получим:

$$S = 400000(1+0{,}10)^3(1+0{,}11)(1+0{,}115)^4 = 913399 \text{ руб.}$$

Пример 2.3 Предприниматель получил в банке ссуду в размере 50 тыс. руб. на 39 месяцев под процентную ставку 17% годовых на условиях начисления процентов: а) ежегодного; б) полугодичного. Какую сумму предприниматель должен будет вернуть банку по истечении срока при использовании схемы: сложных процентов, смешанной ?

Решение. 1. Так как срок финансовой операции выражается в месяцах, а проценты в первом варианте начисляются ежегодно, т.е. каждые 12 месяцев, то, разделив 39 месяцев на 12 месяцев, получим общее количество периодов начисления процентов или срок ссуды в годах:

$n = a + b = \frac{39}{12} = 3\frac{3}{12} = 3{,}25$ года, где a = 3, b=0,25. Остальные параметры ссуды составят: P = 50000 руб., i = 0,17. Наращенная сумма будет равна:

по схеме сложных процентов

$$S = P(1+i)^{a+b} = 50000(1+0{,}17)^{3{,}25} = 83286{,}39 \text{ руб.};$$

по смешанной схеме

$$S = P(1+i)^{a}(1+bi) = 50000(1+0{,}17)^{3}(1+0{,}25\cdot 0{,}17) = 83484{,}08 \text{ руб.}$$

2. Так как срок финансовой операции выражается в месяцах, а проценты во втором варианте начисляются по полугодиям, т.е. каждые 6 месяцев, то, разделив 39 месяцев на 6 месяцев, получим общее количество периодов начисления процентов или срок ссуды в полугодиях:

$mn = a + b = \frac{39}{6} = 6{,}5$ полугодий, где a=6 (a – целое количество периодов начисления процентов), b=0,5 (b – дробная часть одного периода). Наращенная сумма составит:

по схеме сложных процентов

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a+b} = 50000\left(1+\frac{0{,}17}{2}\right)^{6{,}5} = 84969{,}55 \text{ руб.};$$

по смешанной схеме

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a}\left(1+b\frac{j}{m}\right) = 50000\left(1+\frac{0{,}17}{2}\right)^{6}\left(1+0{,}5\frac{0{,}17}{2}\right) = 85040{,}24 \text{ руб.}$$

По смешанной схеме итоговая сумма несколько больше, чем при начислении только сложными процентами, кроме того, чем чаще начисляются декурсивные проценты, тем больше наращенная сумма. Значит для кредитора (банка) самым выгодным является последний вариант, а для заемщика (предпринимателя) первый вариант.

Пример 2.4 Вы имеете возможность поместить свои свободные денежные средства в долларах США на 1,5 года в одном банке на валютном депозите под процентную ставку 6% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов или в другом банке эту же сумму поместить на рублевом депозите под процентную ставку 10% годовых с полугодовым начислением сложных процентов. Как вам лучше поступить, если курс покупки долларов на начало срока – 29 руб. 10 коп., а ожидаемый курс продажи через 1,5 года – 30 руб. 10 коп.

Решение. Обозначим имеющееся количество долларов через P. Остальные параметры финансовой операции составят: n=1,5; $m_{\$}$=12; $m_{руб.}$=2; $j_{\$}$=0,06; $j_{руб.}$=0,1. Помещая доллары на валютный депозит, через 1,5 года можно получить:

$$S_{\$} = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot 1{,}5} = 1{,}0939P \text{ долл. США.}$$

Если же имеющиеся P долларов обменять на рубли, то в соответствии с курсом покупки можно получить 29,1P руб. Через 1,5 года наращенная сумма на рублевом депозите составит:

$$S_{руб.} = 29{,}1P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = 29{,}1P\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^{2\cdot 1{,}5} = 33{,}6869P \text{ руб.,}$$

что при конвертации по ожидаемому курсу продажи даст:

$$\frac{33{,}6869P}{30{,}1} = 1{,}1192P \text{ долл. США.}$$

Сравнивая эту величину с наращенной суммой на валютном депозите ($S_{\$} = 1{,}0939P$), делаем вывод, что лучше поместить доллары на рублевый депозит.

Пример 2.5 На сумму 90 тыс. руб. в течение 3,5 лет ежеквартально начисляются сложные проценты по ставке 14% годовых. За этот же период цены росли ежемесячно в течение первого года на 1%, в течение второго года – на 1,1%, в течение третьего – на 1,3%, последние полгода – на 1,1%. Определить: покупательную способность наращенной суммы через 3,5 года; ставку реальной доходности финансовой операции; минимальную положительную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала. Какова должна быть банковская ставка, которая обеспечит реальную доходность операции 14% годовых при ежеквартальном начислении процентов?

Решение. Имеем: P=90000 руб.; n=3,5 года или 42 месяца, n_1=n_2=n_3=12 месяцев, n_4=6 месяцев; h_1=1, h_2=1,1, h_3=1,3, h_4=1,1; m=4; j=0,14.

1. Найдем индекс инфляции за 3,5 года или 42 месяца по формуле (2.43)

$$I_p = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{12}\left(1+\frac{1{,}1}{100}\right)^{12}\left(1+\frac{1{,}3}{100}\right)^{12}\left(1+\frac{1{,}1}{100}\right)^{6} = 1{,}6021.$$

2. Определяем покупательную способность наращенной суммы с учетом инфляции. Так как m=4 (т.е. m>1), то

$$C = \frac{P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{I_p} = \frac{90000\left(1+\frac{0{,}14}{4}\right)^{4\cdot 3{,}5}}{1{,}6021} = 90932{,}22 \text{ руб.}$$

Таким образом, реальная наращенная сумма с учетом инфляции оказалась больше первоначальной только на 932,22 руб.

3. Ставка реальной доходности наращения составит:

$$j_{реальн.} = m\left(\frac{1+\frac{j}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}} - 1\right) = 4\left(\frac{1+\frac{0{,}14}{4}}{\sqrt[4\cdot 3{,}5]{1{,}6021}} - 1\right) = 0{,}0029 \text{ или } 0{,}29\%,$$

т.е. при исходных параметрах финансовая операция является малоприбыльной.

4. Минимальная ставка, компенсирующая влияние инфляции составит:

$$\left(1+\frac{j_{полож.}}{m}\right)^{mn}=I_p, \qquad (2.56)$$

откуда $j_{полож.}=m\left(\sqrt[mn]{I_p}-1\right)=4\left(\sqrt[4\cdot 3{,}5]{1{,}6021}-1\right)=0{,}137$ или 13,7%.

Таким образом, для обеспечения реального наращения капитала номинальная процентная ставка должна превышать 13,7% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

5. Брутто-ставка, обеспечивающая реальную доходность 14% годовых с поквартальным начислением процентов, при данных темпах инфляции будет определяться по формуле:

$$r_j=m\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p}-1\right)=4\left(\left(1+\frac{0{,}14}{4}\right)\sqrt[4\cdot 3{,}5]{1{,}6021}-1\right)=0{,}2817 \text{ или } 28{,}17\%.$$

Это означает, что если банк увеличит номинальную процентную ставку до 28,17% годовых, то влияние инфляции будет полностью компенсировано.

Задачи для самостоятельного решения

2.1 Определенная сумма (таблица 2.3) инвестируется под годовую процентную ставку: а) на 30 дней; б) 80 дней; в) на 3 месяца; г) на 6 месяцев; д) 1 год; е) 5 лет; ж) 8 лет. Найдите наращенные суммы при условии ежегодного начисления сложных и простых процентов.

Таблица 2.3 – Размер инвестируемой суммы и процентная ставка

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %	Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %
1	800	16,0	16	200	17,4
2	280	18,5	17	300	15,0
3	370	16,3	18	400	16,2
4	690	14,9	19	1000	17,0
5	1100	15,7	20	600	15,9
6	1850	19,0	21	700	15,2
7	680	18,0	22	890	16,4
8	390	14,1	23	900	15,2
9	485	13,7	24	970	14,9
10	920	18,2	25	850	16,4
11	590	19,7	26	750	14,8
12	630	14,8	27	410	17,5
13	380	13,7	28	650	16,9
14	480	15,9	29	870	15,7
15	510	16,8	30	710	18,5

2.2 Депозит в 400 тыс. руб. положен в банк на 5 лет под процентную ставку 12% годовых. Найдите сумму начисленных процентов и наращенную сумму, если ежегодно начисляются сложные проценты.

2.3 Предприниматель получил в банке ссуду в размере 830 тыс. руб. сроком на 7 лет на следующих условиях: для первых двух лет процентная ставка равна 14% годовых, на следующие три года устанавливается маржа в размере 0,5% и на последующие годы маржа равна 0,8%. Найдите сумму, которую предприниматель должен вернуть в банк по окончании срока ссуды при ежегодном начислении сложных процентов.

2.4 На определенную сумму кредита (таблица 2.4) в течении 8 лет начисляются проценты по соответствующей ставке на следующих условиях: первые 4 года ставка первоначальна, каждые следующие 2 года ставка увеличивается на определенную величину. Определить наращенную к концу срока сумму, если проценты начислялись: один раз в году; ежеквартально; каждые два года.

Таблица 2.4 – Варианты погашения кредита

Вариант	Сумма, тыс. руб.	Первоначальная ставка, %	Увеличение ставки, %	Вариант	Сумма, тыс. руб.	Первоначальная ставка, %	Увеличение ставки, %
1	800	17,4	1,1	16	200	16,0	0,8
2	280	15,0	0,9	17	300	18,5	1,0
3	370	16,2	1,7	18	400	16,3	1,1
4	690	17,0	2,1	19	1000	14,9	0,7
5	1100	15,9	0,8	20	600	15,7	1,2
6	1850	15,2	0,5	21	700	19,0	1,9
7	680	16,4	1,0	22	890	18,0	2,0
8	390	15,2	1,4	23	900	14,1	0,8
9	485	14,9	0,6	24	970	13,7	0,9
10	920	16,4	1,9	25	850	18,2	1,0
11	590	14,8	1,4	26	750	19,7	1,7
12	630	17,5	2,1	27	410	14,8	0,6
13	380	16,9	0,5	28	650	13,7	0,9
14	480	15,7	0,9	29	870	15,9	0,7
15	510	18,5	1,7	30	710	16,8	1,5

2.5 Банк предоставил ссуду (таблица 2.5) на 33 месяца на следующих условиях: а) ежегодного начисления процентов; б) ежеквартального начисления процентов; в) полугодичного начисления процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку по истечении срока ссуды при использовании схемы сложных процентов и при использовании смешанной схемы? Какая схема менее выгодна для банка?

Таблица 2.5 – Размер ссуды и ставка

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %	Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %
1	700	16,0	16	460	17,4
2	390	18,5	17	370	15,0
3	470	16,3	18	520	16,2
4	790	14,9	19	1200	17,0
5	900	15,7	20	610	15,9
6	1150	19,0	21	760	15,2
7	780	18,0	22	820	16,4
8	290	14,1	23	840	15,2
9	585	13,7	24	930	14,9
10	620	18,2	25	810	16,4
11	390	19,7	26	680	14,8
12	430	14,8	27	480	17,5

13	580	13,7	28	570	16,9
14	680	15,9	29	690	15,7
15	310	16,8	30	770	18,5

2.6 Банк предоставил ссуду (таблица 2.6) на 37 месяцев под процентную ставку 20% годовых на условиях единовременного возврата основной суммы долга и начислении сложных процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку, если проценты начисляются а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально. Используйте схему сложных процентов и смешанную схему.

Таблица 2.6 – Размер предоставленной ссуды

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Вариант	Ссуда, тыс. руб.
1	757	16	289
2	543	17	487
3	345	18	456
4	398	19	280
5	587	20	576
6	567	21	274
7	587	22	674
8	675	23	619
9	690	24	805
10	765	25	243
11	698	26	849
12	481	27	703
13	859	28	804
14	294	29	386
15	849	30	523

2.7 Предприниматель взял в банке ссуду (таблица 2.7) под сложную процентную ставку 16% годовых. Через 2 года и 7 месяцев кредит был погашен. Определите наращенную сумму кредита, если проценты начислялись а) ежегодно; б) по полугодиям; в) каждые два месяца; г) ежеквартально; в) ежемесячно.

Таблица 2.7 – Размер кредита

Вариант	Ссуда, тыс. руб.	Вариант	Ссуда, тыс. руб.
1	706	16	282
2	586	17	354
3	479	18	439
4	491	19	757
5	803	20	668
6	950	21	705
7	580	22	899
8	690	23	950
9	568	24	910
10	956	25	856
11	596	26	776
12	657	27	445
13	387	28	665

14	434	29	824
15	558	30	713

2.8 В банк вложены деньги в сумме (таблица 2.8) на определенный срок под процентную ставку r с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите наращенную сумму и проценты. Как изменится итоговая наращенная сумма и сумма процентов при ежемесячном и полугодовом начислении сложных процентов? Какой вывод можно сделать о частоте начисления сложных процентов?

Таблица 2.8 – Размер вклада и ставка

Вариант	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %	Вариант	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %
1	700	10,0	16	460	7,4
2	390	11,5	17	370	10,0
3	470	10,3	18	520	9,2
4	790	10,9	19	1200	11,0
5	900	9,7	20	610	8,9
6	1150	9,0	21	760	11,2
7	780	8,0	22	820	10,4
8	290	10,1	23	840	10,2
9	585	10,7	24	930	10,9
10	620	11,2	25	810	11,4
11	390	10,7	26	680	10,8
12	430	11,8	27	480	10,5
13	580	10,7	28	570	10,9
14	680	10,9	29	690	9,7
15	310	10,8	30	770	11,5

2.9 На вклад в конце каждого полугодия начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. За какой срок первоначальный капитал увеличится в четыре раза? Как изменится результат, если сложные проценты начисляются ежемесячно?

2.10 За какой срок исходная первоначальная сумма возрастет до заданной (таблица 2.9), если сложные проценты по ставке 11% годовых начисляются: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; г) каждые два месяца; д) ежемесячно?

Таблица 2.9 – Первоначальная сумма и сумма возврата

Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
1	210	289	16	350	490
2	190	278	17	360	476
3	180	274	18	240	312
4	350	458	19	410	523
5	270	360	20	460	564
6	390	489	21	835	1199
7	440	551	22	600	871
8	630	724	23	750	978
9	350	453	24	230	299
10	270	357	25	240	367

11	820	1098	26	410	534
12	870	1265	27	850	1099
13	190	293	28	765	999
14	250	389	29	800	1124
15	640	789	30	650	913

2.11 Вы имеете на счете определенную сумму (таблица 2.10) и хотели бы удвоить эту сумму через пять лет. Какое значение сложной процентной ставки удовлетворяет заданным условиям при: а) ежегодном начислении процентов; б) полугодичном начислении; в) ежеквартальном начислении; г) ежемесячном начислении.

Таблица 2.10 – Размер суммы на счете

Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.	Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.
1	800	16	200
2	280	17	300
3	370	18	400
4	690	19	1000
5	1100	20	600
6	1850	21	700
7	680	22	890
8	390	23	900
9	485	24	970
10	920	25	850
11	590	26	750
12	630	27	410
13	380	28	650
14	480	29	870
15	510	30	710

2.12 Вкладчик хотел бы за 6 лет удвоить сумму, помещаемую в банк на депозит. Какую годовую номинальную процентную ставку должен предложить банк при начислении сложных процентов ежеквартально?

2.13 Вы имеете возможность получить кредит либо на условиях 17% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов, либо на условиях 19% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Какой вариант предпочтительнее?

2.14 На вашем счете в банке 80 тыс. руб. Банк платит 10% годовых. Вам предлагают принять участие всем вашим капиталом в некоторой финансовой сделке. Представленные экономические расчеты показывают, что в случае согласия через пять лет ваш капитал возрастет до 140 тыс. руб. Стоит ли принимать это предложение?

2.15 Клиент поместил в банк 250 тыс. руб. на условиях начисления сложных процентов по процентной ставке 10% годовых. Через 1 год 9 месяцев клиент снял со счета 80 тыс. руб., еще через 3 года положил на свой счет 40 тыс. руб., а после этого через 2 года 3 месяца он закрыл счет. Определите сумму, полученную клиентом при закрытии счета.

2.16 Господин N поместил в банк 300 тыс. руб. на условиях начисления ежеквартально сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 9%.

Через 3 года 3 месяца господин N снял со счета 120 тыс. руб., еще через 1 год 6 месяцев положил на свой счет 80 тыс. руб., а после этого через 15 месяцев он закрыл счет. Определите сумму, полученную господином N при закрытии счета.

2.17 Вкладчик может свои свободные денежные средства в долларах на один год поместить в одном банке на валютном депозите под процентную ставку 7% годовых с полугодовым начислением сложных процентов или в другом банке эту же сумму поместить на рублевом депозите под процентную ставку 10% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Как ему лучше поступить, если курс покупки долларов на начало срока – 31 руб. 80 коп., а ожидаемый курс продажи через год – 30 руб. 50 коп.?

2.18 По условиям финансового контракта на депозит (таблица 2.11), положенный в банк на 5 лет, начисляются проценты по сложной учетной ставке. Определите наращенную сумму, если начисление процентов производится: а) ежегодно; б) каждое полугодие; в) ежеквартально; г) каждые два месяца; д) ежемесячно. Сравните полученные величины с результатами наращения сложными процентами по процентной ставке.

Таблица 2.11 – Размер вклада и ставка

Вариант	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %	Вариант	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %
1	500	10,0	16	470	7,4
2	320	11,5	17	365	10,0
3	650	10,3	18	820	9,2
4	490	10,9	19	950	11,0
5	900	9,7	20	710	8,9
6	950	9,0	21	790	11,2
7	780	8,0	22	520	10,4
8	390	10,1	23	640	10,2
9	485	10,7	24	950	10,9
10	620	11,2	25	820	11,4
11	550	10,7	26	630	10,8
12	220	11,8	27	580	10,5
13	440	10,7	28	590	10,9
14	610	10,9	29	490	9,7
15	330	10,8	30	720	11,5

2.19 Сроком на 6 лет выпущена облигация номиналом 10000 руб., причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке: первые три года – 12% годовых, в последующие два года – 16% годовых и в оставшийся год – 18% годовых. Найдите наращенную сумму.

2.20 Вексель был учтен за 21 месяц до срока погашения, при этом владелец векселя получил 80% от написанной на векселе суммы. По какой сложной годовой учетной ставке был учтен этот вексель?

2.21 Вы имеете вексель на сумму (таблица 2.12) и хотели бы при его учете по сложной учетной ставке за 2 года до срока погашения получить две трети этой суммы. Какая должна быть годовая номинальная учетная ставка при дисконтировании поквартально? Как изменится ответ, если дисконтирование осуществляется раз в год?

Таблица 2.12 – Размер суммы на счете

Вариант	Сумма, руб.	Вариант	Сумма, руб.
1	80000	16	20000
2	28000	17	30000
3	37000	18	40000
4	69000	19	100000
5	11000	20	60000
6	18500	21	70000
7	68000	22	89000
8	39000	23	90000
9	48500	24	97000
10	92000	25	85000
11	59000	26	75000
12	63000	27	41000
13	38000	28	65000
14	48000	29	87000
15	51000	30	71000

2.22 За какое время до срока погашения был учтен вексель на сумму 500 тыс. руб., если предъявитель векселя получил 350 тыс. руб., а дисконтирование по номинальной учетной ставке 14% годовых производилось: а) поквартально; б) помесячно?

2.23 Из какого капитала можно получить сумму (таблица 2.13) через 4 года при наращением по сложной процентной ставке 11% годовых, если наращение осуществлять: а) ежегодно; б) по полугодиям; в)ежеквартально; г) каждые два месяца; д) ежемесячно; е) каждые полмесяца?

Таблица 2.13 – Размер суммы на счете

Вариант	Сумма на счете, руб.	Вариант	Сумма на счете, руб.
1	180000	16	120000
2	280000	17	330000
3	137000	18	240000
4	690000	19	190000
5	111000	20	260000
6	185000	21	470000
7	268000	22	389000
8	239000	23	290000
9	348500	24	197000
10	392000	25	585000
11	459000	26	375000
12	463000	27	241000
13	538000	28	465000
14	548000	29	287000
15	251000	30	171000

2.24 Наращенная к концу седьмого года сумма составит 840 тыс. руб. Найдите ее современное значение, если начисляются сложные проценты: а) по полугодиям по процентной ставке 10% годовых; б) ежеквартально по процентной ставке 15% годовых.

2.25 Долговое обязательство на выплату 420 тыс. руб. со сроком погашения через 5 лет учтено за 3 года до срока с дисконтом по сложной учетной ставке 14% годовых. Найдите величину дисконта. Как изменится величина дисконта, если долговое обязательство учтено сразу после его выдачи?

2.26 Долговое обязательство на выплату 200 тыс. руб. со сроком погашения через 6 лет учтено за три года до срока. Определите полученную сумму и дисконт, если дисконтирование производилось: а) полугодовое; б) поквартальное; в) помесячное по номинальной учетной ставке 18% годовых.

2.27 Банк начисляет ежеквартально сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 10%. Определите современную ценность денежной суммы (таблица 2.14), которая должна быть выплачена через: а)1 год 2 месяца; б) 3 года 3 месяца; в) 5 лет 9 месяцев; в) 7 лет 4 месяца. Как изменится современная сумма если проценты будут начисляться ежемесячно?

Таблица 2.14 – Размер суммы на счете

Вариант	Сумма на счете, руб.	Вариант	Сумма на счете, руб.
1	380000	16	620000
2	480000	17	337000
3	337000	18	740000
4	290000	19	490000
5	511000	20	269000
6	195000	21	570000
7	468000	22	381000
8	289000	23	690000
9	398500	24	297000
10	302000	25	505000
11	759000	26	575000
12	468000	27	249000
13	508000	28	415000
14	567000	29	387000
15	255600	30	571000

2.28 Определите современное значение суммы в 800 тыс. руб., если она будет выплачена через 4 года 9 месяцев и дисконтирование производится по полугодиям по номинальной годовой учетной ставке 15%.

2.29 Клиент поместил в банк сумму (таблица 2.15) сроком на: а). 2 года; б) 3 года; в) 4 года. Какая сумма будет на счете клиента, если банк начисляет сложные проценты: а) по номинальной процентной ставке 11,5% годовых с полугодовым начислением процентов; б) по номинальной учетной ставке 11,5% годовых с ежеквартальным начислением процентов; в) по непрерывной ставке с силой роста 11,5% за год?

Таблица 2.15 – Размер суммы на счете

Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.	Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.
1	800	16	200

2	280	17	300
3	370	18	400
4	690	19	1000
5	1100	20	600
6	1850	21	700
7	680	22	890
8	390	23	900
9	485	24	970
10	920	25	850
11	590	26	750
12	630	27	410
13	380	28	650
14	480	29	870
15	510	30	710

2.30 Какую сумму необходимо поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 680 тыс. руб., если происходит непрерывное начисление процентов по ставке 12%?

2.31 За какой срок сумма 500 тыс. руб. достигнет величины 900 тыс. руб. при непрерывном начислении процентов и силе роста 14%? Как изменится ответ при начислении сложных процентов ежеквартально по номинальной процентной ставке 14% годовых?

2.32 Под какую непрерывную ставку можно поместить деньги на депозит, если первоначальная сумма сейчас эквивалентны определенной наращенной сумме (таблица 2.16) через: 2 года; 5 лет; 8 лет? Какая сложная процентная ставка с начислением процентов по полугодиям решает эту задачу?

Таблица 2.16 – Сумма выдачи и возврата кредита

Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Наращенная сумма, тыс. руб.	Вариант	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Наращенная сумма, тыс. руб.
1	200	290	16	370	599
2	180	320	17	390	536
3	150	275	18	280	407
4	370	510	19	450	674
5	250	380	20	480	709
6	380	520	21	805	1245
7	470	700	22	610	929
8	620	950	23	740	981
9	390	520	24	210	342
10	250	386	25	280	496
11	810	1034	26	470	804
12	890	1118	27	820	1253
13	180	302	28	705	1138
14	290	424	29	810	1337
15	620	847	30	600	1024

2.33 Определите наращенную сумму (таблица 2.17) сроком за: 1 год; 2 года; 3 года; 4 года, если начальное значение силы роста составляет 9%, процентная ставка непрерывно и линейно увеличивается со скоростью 2% в год.

Таблица 2.17 – Размер первоначальной суммы

Вариант	Сумма, тыс. руб.	Вариант	Сумма, тыс. руб.
1	800	16	200
2	280	17	300
3	370	18	400
4	690	19	1000
5	1100	20	600
6	1850	21	700
7	680	22	890
8	390	23	900
9	485	24	970
10	920	25	850
11	590	26	750
12	630	27	410
13	380	28	650
14	480	29	870
15	510	30	710

2.34 Определите современную стоимость 500 тыс. руб., которые должны быть выплачены через 5 лет, если начальное значение силы роста составляет 7%, процентная ставка непрерывно и линейно изменяется со скоростью 1,5% в год.

2.35 Клиент поместил в банк сумму (таблица 2.18) на определенный срок. Определите наращенную величину вклада, если начальный уровень силы роста 10%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста 1,5% в год.

Таблица 2.18 – Размер суммы на счете

Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.	Срок, лет.	Вариант	Сумма на счете, тыс. руб.	Срок, лет.
1	800	3	16	200	5
2	280	2	17	300	3
3	370	5	18	400	2
4	690	2	19	1000	4
5	1100	4	20	600	5
6	1850	3	21	700	3
7	680	5	22	890	4
8	390	4	23	900	2
9	485	2	24	970	4
10	920	3	25	850	3
11	590	6	26	750	2
12	630	4	27	410	3
13	380	2	28	650	6
14	480	3	29	870	4
15	510	2	30	710	5

2.36 Определите современную стоимость 780 тыс. руб., которые должны быть выплачены через 6 лет, если начальный уровень силы роста 9,5%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста 0,7% в год.

2.37 За какой срок произойдет: а) удвоение капитала; б) увеличение в 2,5 раза; в) увеличение в 3 раза; г) увеличение в 4 раза; если начальный уровень силы роста (таблица 2.19), процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста в год.

Таблица 2.19 – Размер суммы на счете

Вариант	Начальный уровень силы роста, %	Темп прироста в год, %	Вариант	Начальный уровень силы роста, %	Темп прироста в год, %
1	10,0	3,0	16	11,9	1,7
2	13,8	2,0	17	11,6	2,8
3	12,8	1,5	18	12,3	2,2
4	14,7	2,1	19	10,8	1,1
5	12,0	1,8	20	14,0	1,2
6	11,9	3,1	21	13,7	3,2
7	12,8	1,3	22	14,2	1,5
8	13,6	2,2	23	12,7	2,4
9	14,7	2,0	24	13,4	1,6
10	14,1	3,0	25	12,4	3,0
11	15,1	1,4	26	13,1	2,0
12	14,2	2,3	27	11,9	3,1
13	14,9	2,2	28	14,6	1,6
14	14,2	3,0	29	13,9	1,7
15	13,2	2,3	30	11,9	1,9

2.38 Определите начальное значение силы роста, необходимое для увеличения начального капитала в 3 раза за 8 лет, если процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается с постоянным темпом прироста 2% в год.

2.39 Среднемесячный темп прироста инфляции в течение года составлял 1,5%. Определите индекс и темп прироста инфляции: а) за квартал; б) за полгода; в) за год.

2.40 По данным таблицы 2.20 определить индекс инфляции за: а) полгода; б) год; в) полтора года; г) два года.

Таблица 2.20 – Темп прироста инфляции

Вариант	Инфляция, %	Число раз прироста инфляции в течение года	Вариант	Инфляция, %	Число раз прироста инфляции в течение года
1	0,8	12	16	2,0	4
2	1,0	12	17	2,5	2
3	0,9	2	18	2,1	4
4	1,2	4	19	1,7	12
5	1,3	4	20	0,9	12
6	0,7	2	21	2,4	2

7	0,8	12	22	2,7	2
8	1,4	4	23	3,0	2
9	0,9	4	24	2,1	4
10	0,6	12	25	0,9	12
11	1,0	12	26	2,8	2
12	1,8	4	27	4,0	2
13	2,0	2	28	4,7	2
14	1,7	4	29	2,6	12
15	1,9	4	30	2,4	4

2.41 На сумму (таблица 2.21) в течение: а) трех месяцев; б) полугода, начислялись простые проценты. Цены по месяцам для первого срока росли соответственно на 0,7; 1,5 и 1,4%, а для второго срока цены росли в этом же размере, но каждые два месяца. Для каждого из сроков, найдите: наращенную сумму с учетом инфляции; ставку реальной доходности операции; минимальную положительную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала; компенсирующую брутто-ставку. Как изменятся искомые параметры этой операции, если банк применит простую учетную ставку?

Таблица 2.21 – Сумма вклада и ставка

Вариант	Сумма, тыс. руб.	Простая процентная ставка, %	Вариант	Сумма, тыс. руб.	Простая учетная ставка, %
1	800	10,0	16	200	11,9
2	280	13,8	17	300	11,6
3	370	12,8	18	400	12,3
4	690	14,7	19	1000	10,8
5	1100	12,0	20	600	14,0
6	1850	11,9	21	700	13,7
7	680	12,8	22	890	14,2
8	390	13,6	23	900	12,7
9	485	14,7	24	970	13,4
10	920	14,1	25	850	12,4
11	590	15,1	26	750	13,1
12	630	14,2	27	410	11,9
13	380	14,9	28	650	14,6
14	480	14,2	29	870	13,9
15	510	13,2	30	710	11,9

2.42 На вклад (таблица 2.22) начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке. Оцените: сумму вклада через а) 2,5 года; б) 5 лет; реальную доходность финансовой операции; минимальную положительную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала; брутто-ставку, если ожидаемый темп прироста инфляции – 1,5% в месяц. Как изменится ситуация, если банк применит номинальную учетную ставку?

Таблица 2.22 – Сумма вклада, ставка и число раз начисления процентов

Вариант	Сумма, тыс.	Число раз начисления	Номинальная процентная	Вариант	Сумма, тыс.	Число раз начисления	Номинальная процентная

	руб.	процентов в году	ставка, %		руб.	процентов в году	ставка, %
1	800	12	10,0	16	200	6	11,9
2	280	2	13,8	17	300	4	11,6
3	370	4	12,8	18	400	2	12,3
4	690	6	14,7	19	1000	12	10,8
5	1100	12	12,0	20	600	6	14,0
6	1850	4	11,9	21	700	4	13,7
7	680	2	12,8	22	890	12	14,2
8	390	12	13,6	23	900	6	12,7
9	485	2	14,7	24	970	6	13,4
10	920	6	14,1	25	850	2	12,4
11	590	4	15,1	26	750	12	13,1
12	630	4	14,2	27	410	12	11,9
13	380	2	14,9	28	650	2	14,6
14	480	2	14,2	29	870	4	13,9
15	510	12	13,2	30	710	6	11,9

2.43 Определите реальную силу роста за год в условиях начисления непрерывных процентов при годовом темпе инфляции 8,4 %, если исходная сила роста составляет 9,0% за год. Какова должна быть минимальная положительная сила роста, чтобы при такой инфляции обеспечить реальное наращение капитала. Определите компенсирующую брутто-ставку, обеспечивающую реальную доходность финансовой операции 9,0% годовых.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит отличие сложных процентов от простых?
2. Как соотносятся величины наращенных сумм при начислении по схеме простых и сложных процентов?
3. Как определяется наращенная сумма капитала при дробном числе лет (периодов)?
4. Какая годовая процентная ставка называется номинальной?
5. Какая ставка называется эффективной годовой процентной ставкой и в каких целях она используется?
6. Охарактеризуйте два основных способа начисления сложных процентов.
7. Какая годовая учетная ставка называется номинальной?
8. Какая ставка называется эффективной годовой учетной ставкой и в каких целях она используется?
9. Что представляют собой математическое и банковское дисконтирование?
10. Какая ставка называется силой роста?
11. Как влияет налог на проценты на наращение капитала?
12. Как оценить наращенную сумму капитала с учетом ее обесценения в условиях инфляции? Что такое «эрозия» капитала?
13. Как определить реальную доходность финансовой операции?
14. Что представляет собой минимальная положительная ставка процента?

15. Какая ставка называется брутто-ставкой и для чего она используется?

Тема 3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК. КОНСОЛИДАЦИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

Для наращения и дисконтирования денежных сумм могут применяться различные виды процентных ставок. Часто требуется определить ставки, которые в конкретных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам, когда замена одного вида ставки на другой, при соблюдении принципа эквивалентности, не изменяет финансовых отношений сторон в рамках одной операции.

*Процентные ставки, обеспечивающие равноценность финансовых последствий называются **эквивалентными.*** Эквивалентность ставок обеспечивается равенством множителей наращения или дисконтных множителей.

Таблица 3.1 – Эквивалентность процентных ставок

№ п/п	Вид ставки	Формула эквивалентности	
1	2	3	4
1	$i_{пр}$ и $d_{пр}$	*Срок сделки выражен в годах (n)*	
		$i_{пр} = \dfrac{d_{пр}}{1 - d_{пр} n}$ (3.1)	$d_{пр} = \dfrac{i_{пр}}{1 + i_{пр} n}$ (3.2)
		Срок сделки выражен в месяцах (m)	
		$i_{пр} = \dfrac{12 d_{пр}}{12 - d_{пр} m}$ (3.3)	$d_{пр} = \dfrac{12 i_{пр}}{12 + i_{пр} m}$ (3.4)
		Срок сделки выражен в днях (временная база для обеих ставок 360 дней)	
		$i_{пр} = \dfrac{360 d_{пр}}{360 - d_{пр} t}$ (3.5)	$d_{пр} = \dfrac{360 i_{пр}}{360 + i_{пр} t}$ (3.6)
		Срок сделки выражен в днях (временная база для процентной ставки 365 дней, а для учетной ставки 360 дней)	
		$i_{пр} = \dfrac{365 d_{пр}}{360 - d_{пр} t}$ (3.7)	$d_{пр} = \dfrac{360 i_{пр}}{365 + i_{пр} t}$ (3.8)
2	$i_{сл}$ и $i_{пр}$	$i_{сл} = \sqrt[n]{(1 + i_{пр} n)} - 1$ (3.9)	$i_{пр} = \dfrac{(1 + i_{сл})^n - 1}{n}$ (3.10)
3	$d_{пр}$ и $d_{сл}$	$d_{сл} = 1 - \sqrt[n]{1 - d_{пр} n}$ (3.11)	$d_{пр} = \dfrac{1 - (1 - d_{сл})^n}{n}$ (3.12)
4	$d_{сл}$ и $i_{сл}$	$i_{сл} = \dfrac{d_{с}}{1 - d_{сл}}$ (3.13)	$i_{сл} = \dfrac{i_{сл}}{1 + i_{сл}}$ (3.14)

5	$i_{пр}$ и $d_{сл}$	$i_{пр} = \dfrac{(1-d_{сл})^{-n} - 1}{n}$ (3.15)	$d_{сл} = 1 - \sqrt[n]{(1+i_{пр}n)^{-1}}$ (3.16)
6	$i_{сл}$ и $d_{пр}$	$i_{сл} = \sqrt[n]{(1-d_{пр}n)^{-1}} - 1$ (3.17)	$d_{пр} = \dfrac{1-(1+i_{сл})^{-n}}{n}$ (3.18)
1	2	3	4
7	$i_{пр}$ и j	$i_{пр} = \dfrac{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn} - 1}{n}$ (3.19)	$j = m \cdot (\sqrt[nm]{1+i_{пр}n} - 1)$ (3.20
8	$i_{сл}$ и j	$j = m(\sqrt[m]{(1+i_{сл})} - 1)$ (3.21)	$i_{сл} = \left(1+{j}/{m}\right)^{m} - 1$ (3.22)
9	$i_{пр}$ и f	$i_{пр} = \dfrac{\left(1-{f}/{m}\right)^{-nm} - 1}{n}$ (3.23)	$f = m(1 - \sqrt[nm]{(1+i_{пр}n)^{-1}})$ (3.24)
10	$i_{сл}$ и f	$i_{сл} = \left(1-{f}/{m}\right)^{-m} - 1$ (3.25)	$f = m(1 - \sqrt[m]{(1+i_{сл})^{-1}})$ (3.26)
11	$d_{пр}$ и j	$j = m(\sqrt[mn]{(1-d_{пр}n)^{-1}} - 1)$ (3.27)	$d_{пр} = \dfrac{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-nm}}{n}$ (3.28)
12	$d_{сл}$ и j	$d_{сл} = 1 - \left(1+{j}/{m}\right)^{-m}$ (3.29)	$j = m(\sqrt[m]{(1-d_{сл})^{-1}} - 1)$ (3.30)
13	$d_{пр}$ и f	$d_{пр} = \dfrac{1-\left(1-{f}/{m}\right)^{nm}}{n}$ (3.31)	$f = m(1 - \sqrt[nm]{(1-d_{пр}n)})$ (3.32)
14	$d_{сл}$ и f	$d_{сл} = 1 - \left(1-{f}/{m}\right)^{m}$ (3.33)	$f = m(1 - \sqrt[m]{1-d_{сл}})$ (3.34)
15	j и f	$j = m(\left(1-{f}/{m}\right)^{-1} - 1)$ (3.35)	$f = m\left(1 - \left(1+{j}/{m}\right)^{-1}\right)$ (3.36)

Пример 3.1 Вексель учтен за год до даты его погашения по учетной ставке 15,0 %. Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки?
Решение. По формуле 3.1 находим:

$$i_{пр} = \frac{0{,}15}{1-1\cdot 0{,}15} = 0{,}17647, \text{ или } 17{,}647\%.$$

Пример 3.2 Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 18% (K=365), не изменяя финансовых последствий? Срок операции 580 дней.
Решение. Находим эквивалентную сложную ставку по формуле 3.9

$$i_{сл} = \sqrt[580/365]{1+\frac{580}{365}0{,}18} - 1 = 0{,}17153 \text{ или } 17{,}153\%.$$

Пример 3.3 При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 28% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно, поквартально?
Решение. Воспользуемся формулой 3.20:

$$j = 12\left(\sqrt[12]{1+0{,}28}-1\right) = 0{,}24942; \qquad j = 4\left(\sqrt[4]{1+0{,}28}-1\right) = 0{,}25464.$$

Если в финансовой операции размер процентной ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней.

Пусть за периоды $n_1, n_2, \ldots n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Средние процентные ставки получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу: $1 + N\bar{i}_{пр} = 1 + \sum_{t=1}^{к} n_t i_t$,

отсюда $\bar{i}_{пр} = \dfrac{\sum_{t=1}^{к} n_t i_t}{N}$. Аналогично получим $\bar{d}_{пр} = \dfrac{\sum_{t=1}^{к} n_t d_t}{N}$, (3.37)

где N = $\sum_{t=1}^{к} n_t$ - общий срок наращения процентов,

$\bar{d}_{пр}$ и $\bar{i}_{пр}$ - средняя учетная и процентная ставка.

Если изменяются во времени и первоначальные суммы, то $\bar{i}_{пр} = \dfrac{\sum_{t=1}^{к} i_t n_t P_t}{\sum_{t=1}^{к} n_t P_t}$.(3.38)

Если усредняются переменные во времени ставки сложных процентов, то:

$$\bar{i}_{сл} = \sqrt[N]{\Pi(1+i_t)^{n_t}} - 1; \qquad (3.39)$$

$$\bar{d}_{сл} = 1 - \sqrt[N]{\Pi(1-d_t)^{n_t}}. \qquad (3.40)$$

Пример 3.4 Для первых двух лет ссуды применяется ставка 20%, для следующих трех лет она составляет 24%. Нужно найти среднюю ставку.
Решение. $\bar{i} = \sqrt[5]{(1+0{,}20)^2 \cdot (1+0{,}24)^3} - 1 =$ 0,22384, или 22,384%.

Иногда меняются только суммы ссуд и проценты, а сроки операций равны.
Если применяются простые проценты, то $\bar{i}_{пр} = \dfrac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}$. (3.41)

Когда усредняются сложные процентные ставки, то средняя ставка составит

$$\bar{i}_{сл} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t (1+i_t)^n}{\sum P_t}} - 1. \qquad (3.42)$$

Часто возникает необходимость изменения условий ранее заключенных сделок: изменение сроков платежей, объединение нескольких платежей в один – консолидация платежей.

Пусть платежи $S_1, S_2, ..., S_m$ со сроками выплат $n_1, n_2, \ldots, n_m$ заменяются одним в сумме S_0 и сроком n_0. В этом случае возможны две постановки задачи: если задается срок n_0, то находится сумма S_0, и наоборот, если задана сумма консолидированного платежа, то определяется его срок.

Определение размера платежа

1) Если используется простая процентная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{m} S_j \left(1 + t_j i\right), \qquad (3.43)$$

где S_j - размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$.

2) Если используется простая процентная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1 + t_j i\right) + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 + t_k i\right)^{-1}, \qquad (3.44)$$

где S_j – размеры платежей со сроками погашения $n_j < n_o$, S_k - размеры платежей со сроками $n_k > n_0$, $t_j = n_0 - n_j$, $t_k = n_k - n_0$.

3) Если используется простая учетная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{m} S_j \left(1 - t_j d\right)^{-1}. \qquad (3.45)$$

4) Если используется простая учетная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1 - t_j d\right)^{-1} + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 - t_k d\right). \qquad (3.46)$$

5) Если используется сложная процентная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1 + i\right)^{t_j}, \text{ при } n_o > n_j. \qquad (3.47)$$

6) Если используется сложная процентная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1 + i\right)^{t_j} + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1 + i\right)^{-t_k}, \text{ при } n_j < n_o < n_к. \qquad (3.48)$$

7) Если используется сложная учетная ставка, а сроки объединяемых платежей меньше срока консолидированного платежа, то

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1-d\right)^{-t_j}. \qquad (3.49)$$

8) Если используется сложная учетная ставка, а сроки объединяемых платежей как меньше, так и больше срока консолидированного платежа:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1-d\right)^{-t_j} + \sum_{k=1}^{m} S_k \left(1-d\right)^{t_k}. \qquad (3.50)$$

Определение срока консолидированного платежа

При начислении простых процентов срок консолидированного платежа n_o находится по формуле:

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j \left(1+n_j i\right)^{-1}} - 1\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right), \qquad (3.51)$$

где P_0 – современная стоимость консолидируемых платежей,

$$P_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1+n_j i\right)^{-1}.$$

При использовании сложных процентов:

$$n_0 = \frac{\ln\frac{S_0}{P_0}}{\ln\left(1+i\right)}, \text{ где } P_0 = \sum_{j=1}^{\lambda} S_j \left(1+i\right)^{-n_j}. \qquad (3.52)$$

Эквивалентность сложных дискретных и непрерывных ставок

Обозначим силу роста через – b.

Эквивалентность сложной процентной ставки и силы роста:

$$b = \ln\left(1+i_{сл}\right); \qquad i_{сл} = e^b - 1. \qquad (3.53)$$

Эквивалентность номинальной процентной ставки и силы роста:

$$j = m\left(e^{b/m} - 1\right); \qquad b = m\ln\left(1 + j/m\right). \qquad (3.54)$$

Эквивалентность силы роста и учетной ставки:

$$b = -\ln\left(1-d_{сл}\right); \quad d_{сл} = 1 - e^{-b}; \quad b = \frac{-\ln(1-nd_{пр})}{n}; \quad d_{пр} = \frac{1-e^{-b}}{n}. \qquad (3.55)$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1 Определите:

- простую процентную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;

- простую учетную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке;
- простую процентную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- простую процентную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке.

Таблица 3.2 – Выдача кредитов

№ п/п	Срок предоставления кредита	Процентная ставка, %	№ п/п	Срок предоставления кредита	Процентная ставка, %
1	7 лет	10,0	16	4 года	20,0
2	3 месяца	11,0	17	240 дней	19,0
3	120 дней	10,5	18	5 месяцев	19,5
4	1 год	11,5	19	5 лет	15,5
5	9 месяцев	11,9	20	300 дней	16,5
6	200 дней	10,3	21	13 месяцев	16,0
7	4 года	12,0	22	3 года	17,0
8	320 дней	12,5	23	6 месяцев	17,5
9	4 месяца	12,8	24	320 дней	17,9
10	3 года	13,0	25	4 года	15,8
11	90 дней	13,5	26	8 месяцев	18,0
12	7 месяцев	13,2	27	270 дней	18,5
13	2 года	14,0	28	3 года	17,1
14	180 дней	14,5	29	11 месяцев	16,7
15	5 лет	15,0	30	190 дней	12,3

3.2 Какая сложная процентная ставка соответствует номинальной процентной ставке в размере (таблица 3.3) при начислении процентов 2 раза в месяц; 3 раза в месяц; 4 раза в месяц; 6 раз в месяц при сроке 1 год и 2 года.

Таблица 3.3 – Номинальная процентная ставка

№ п/п	Процентная ставка, %	№ п/п	Процентная ставка, %
1	9,0	16	12,0
2	8,0	17	13,0
3	9,5	18	12,5
4	10,5	19	13,5
5	10,9	20	12,1

6	11,3	21	11,8
7	11,0	22	11,6
8	8,5	23	12,1
9	9,8	24	11,9
10	10,1	25	12,8
11	10,7	26	12,2
12	10,2	27	12,3
13	11,1	28	14,1
14	11,5	29	13,7
15	10,6	30	12,9

3.3 Банк принимает депозиты на 1 год с ежеквартальным начислением процентов по ставке 12,0 %, с полугодовым начислением процентов по ставке 13,0 % годовых и с ежегодным начислением процентов по ставке 14,0 % годовых. Определите наилучший вариант вложения средств (определить сложную процентную ставку, при известной номинальной процентной ставке в первом и втором варианте, и результат сравнить со сложной процентной ставкой).

3.4 Вексель учтен в банке до даты погашения за: 60 дней; 90 дней; 120 дней; 180 дней; 7 месяца; 9 месяцев; 11 месяцев по учетной ставке (таблица 3.4). Какова ставка простых процентов, дающая такой же доход?

Таблица 3.4 – Величина учетной ставки

№ п/п	Процентная ставка, %	№ п/п	Процентная ставка, %
1	9,0	16	12,0
2	8,0	17	13,0
3	9,5	18	12,5
4	10,5	19	13,5
5	10,9	20	12,1
6	11,3	21	11,8
7	11,0	22	11,6
8	8,5	23	12,1
9	9,8	24	11,9
10	10,1	25	12,8
11	10,7	26	12,2
12	10,2	27	12,3
13	11,1	28	14,1
14	11,5	29	13,7
15	10,6	30	12,9

3.5 Определите значение простой учетной ставки, эквивалентной ставке простых процентов, равной (таблица 3.5) годовых, при сроке ссуды: 90 дней, 120 дней, 150 дней, 6 месяца, 8 месяцев, 11 месяцев.

Таблица 3.5 – Величина простой процентной ставки

№ п/п	Процентная ставка, %	№ п/п	Процентная ставка, %
1	13,0	16	12,8
2	11,0	17	12,1
3	11,5	18	14,5
4	12,5	19	15,5
5	11,9	20	14,1
6	10,3	21	14,8
7	10,0	22	15,6
8	8,9	23	15,1
9	9,5	24	14,9
10	10,7	25	16,8
11	10,8	26	16,2
12	13,2	27	17,3
13	13,1	28	18,1
14	13,5	29	17,7
15	10,6	30	12,9

3.6 Клиент имеет в банке счет, по которому: каждые два месяца; ежеквартально и ежемесячно в течение: 2 лет, 3 лет; 5 лет начисляются сложные проценты по номинальной ставке (таблица 3.6). Определите эквивалентную:

- простую процентную ставку;
- простую учетную ставку;
- сложную процентную ставку;
- сложную учетную ставку.

Таблица 3.6 – Величина годовой номинальной процентной ставки

№ п/п	Процентная ставка, %	№ п/п	Процентная ставка, %
1	8,0	16	8,8
2	9,0	17	9,1
3	7,5	18	10,5
4	9,5	19	12,5
5	10,9	20	14,1
6	11,3	21	14,8
7	10,0	22	11,6
8	8,9	23	12,1
9	9,8	24	11,9
10	10,7	25	10,8
11	10,1	26	11,2
12	13,2	27	12,3
13	11,1	28	7,7
14	11,5	29	11,7
15	10,6	30	12,6

3.7 Кредит выдан по номинальной процентной ставке.

Таблица 3.7 – Условия предоставления кредита по вариантам

№ п/п	Ставка, %	Число раз начислений процентов в году (m)	Срок кредита	№ п/п	Ставка, %	Число раз начислений процентов в году (m)	Срок кредита
1	10,9	2	100 дней	16	10,5	12	4 месяца
2	23,0	4	10 месяцев	17	10,0	2	6 лет
3	21,5	6	2 года	18	12,4	4	240 дней
4	24,3	12	3 года	19	12,8	6	9 месяцев
5	20,7	2	1 год	20	13,7	12	5 лет
6	18,9	4	120 дней	21	13,9	2	7 месяцев
7	17,3	6	90 дней	22	15,8	4	220 дней
8	13,8	12	3 месяца	23	13,1	6	6 лет
9	20,9	2	11 месяцев	24	19,7	12	270 дней
10	14,5	4	4 года	25	18,5	2	13 месяцев
11	12,3	6	5 лет	26	8,3	4	10 лет
12	13,2	12	180 дней	27	16,8	6	5 месяцев
13	11,2	2	6 месяцев	28	17,9	12	210 дней
14	9,5	4	5 лет	29	16,3	2	5 лет
15	11,4	6	200 дней	30	14,7	4	300 дней

Определите эквивалентную:
- простую процентную ставку;
- простую учетную ставку;
- сложную процентную ставку;
- сложную учетную ставку;
- номинальную учетную ставку.

3.8 Банк при выдаче ссуды сроком на 3,5 года использовал номинальную процентную ставку в размере 18,3 % годовых, при: а) ежеквартальной; б) полугодовой; в) ежемесячной капитализации процентов. Определите эквивалентную учетную ставку простых и сложных процентов.

3.9 Определите номинальную ставку сложных процентов при начислении процентов: а) каждые два месяца; б) ежеквартально; в) полугодичном; г) ежемесячном, эквивалентную сложной учетной ставке в размере 18,7 %.

3.10 Кредит выдан по номинальной учетной ставке по следующим условиям.

Таблица 3.8 – Условия предоставления кредита по вариантам

№	Ставка, %	Число раз	Срок	№	Ставка, %	Число раз	Срок

п/п		начислений процентов в году (m)	кредита	п/п		начислений процентов в году (m)	кредита
1	2	3	4	5	6	7	8
1	8,9	2	70 дней	16	14,5	2	4 месяца
2	13,0	4	10 месяцев	17	17,0	4	5 лет
3	11,5	6	2 года	18	14,4	6	245 дней
4	7,2	12	3 года	19	12,8	12	18 месяцев
5	10,7	24	1 год	20	11,7	24	6 лет
6	12,9	2	120 дней	21	13,9	2	7 месяцев
7	7,3	4	90 дней	22	15,8	4	205 дней
8	9,8	6	15 месяцев	23	13,1	6	5 лет
9	10,9	12	11 месяцев	24	9,7	12	250 дней
10	14,5	24	4 года	25	18,5	24	19 месяцев
11	9,3	2	7 лет	26	8,3	2	8 лет
12	13,2	4	180 дней	27	11,8	4	5 месяцев
13	21,2	6	6 месяцев	28	7,9	6	110 дней
14	14,5	12	5 лет	29	9,3	12	7 лет
15	10,4	24	200 дней	30	14,7	24	330 дней

Определите эквивалентную:
- сложную процентную ставку;
- простую процентную ставку;
- сложную учетную ставку;
- простую учетную ставку;
- номинальную процентную ставку.

3.11 Какая непрерывная ставка заменит: начисление процентов каждые два месяца; полугодовое; поквартальное начисление; ежемесячное начисление по номинальной ставке (таблица 3.9) годовых.

Таблица 3.9 – Величина номинальной процентной ставки

№ п/п	Процентная ставка, %	№ п/п	Процентная ставка, %
1	9,0	16	10,4
2	8,0	17	7,0
3	9,5	18	7,9
4	7,5	19	6,5
5	10,9	20	7,1
6	6,3	21	10,8
7	11,0	22	8,6
8	8,5	23	9,1
9	9,8	24	10,5
10	10,1	25	9,3
11	7,7	26	7,2
12	10,2	27	8,3
13	11,1	28	8,1

14	9,2	29	8,7
15	10,6	30	8,9

3.12 На определенную сумму денег в течение: 2 лет, 3 лет и 4 лет непрерывно начисляются проценты с силой роста (таблица 3.10). Определите эквивалентную номинальную процентную ставку, если проценты начислялись: по полугодиям, ежеквартально, ежемесячно, каждые два месяца.

Таблица 3.10 – Величина силы роста

№ п/п	Процентная ставка, %	№ п/п	Процентная ставка, %
1	8,0	16	8,8
2	9,0	17	9,1
3	7,5	18	10,5
4	9,5	19	12,5
5	10,9	20	11,4
6	11,3	21	14,8
7	10,0	22	11,6
8	8,9	23	12,1
9	9,8	24	11,9
10	10,7	25	10,8
11	10,1	26	11,2
12	13,2	27	12,3
13	11,1	28	7,7
14	11,5	29	11,7
15	10,6	30	12,6

3.13 На сумму денег в течение 6 лет непрерывно начисляются проценты с начальной силой роста 10,3 % и ежегодным абсолютным приростом в 2,0 %. Определите эквивалентную ставку сложных процентов.

3.14 Определите величину силы роста при начислении непрерывных процентов, эквивалентную учетной ставке в размере 16,7 % годовых, как простых так и сложных.

3.15 Клиент получил в банке три ссуды.

Таблица 3.11 – Условия получения ссуд по вариантам

№ п/п	Ссуда 1		Ссуда 2		Ссуда 3	
	Срок	Ставка, %	Срок	Ставка, %	Срок	Ставка, %
1	2	3	4	5	6	7
1	10 дней	11,5	15 дней	12,3	20 дней	13,5
2	1 месяц	10,8	2 месяца	12,3	3 месяца	14,7
3	30 дней	9,8	40 дней	11,5	50 дней	12,3
4	60 дней	10,0	75 дней	11,0	80 дней	11,8
5	80 дней	10,5	90 дней	11,4	100 дней	11,9
6	1 год	10,0	2 года	12,0	3 года	13,6

7	4 года	11,0	6 лет	12,5	9 лет	13,0
8	3 месяца	11,2	4 месяца	11,9	7 месяцев	12,3
9	4 месяца	11,3	5 месяцев	11,8	6 месяцев	12,2
10	4 месяца	11,4	7 месяцев	12,8	9 месяцев	13,2
11	2 года	11,2	3 года	12,3	6 лет	12,9
12	90 дней	11,9	120 дней	12,8	150 дней	13,2
13	5 месяцев	11,7	6 месяцев	13,9	7 месяцев	14,9
14	3 месяца	11,8	5 месяцев	13,7	8 месяцев	14,3
15	110 дней	10,8	140 дней	12,9	160 дней	14,5
16	4 года	12,3	7 лет	14,8	8 лет	16,7
17	150 дней	13,8	180 дней	14,9	200 дней	15,6
18	2 месяца	14,5	3 месяца	15,9	6 месяцев	16,8
19	170 дней	13,5	190 дней	13,9	210 дней	14,8
20	3 месяца	13,2	6 месяцев	14,8	9 месяцев	15,6
21	2 года	16,8	4 года	17,7	6 лет	18,2
22	6 месяцев	15,9	8 месяцев	16,3	11 месяцев	17,2
23	180 дней	12,8	220 дней	14,3	240 дней	15,2
24	3 года	12,4	5 лет	13,5	10 лет	14,1
25	6 месяцев	13,2	9 месяцев	14,8	12 месяцев	16,5
26	210 дней	13,4	240 дней	13,9	280 дней	14,8
27	1 год	14,5	3 года	15,8	4 года	16,7
28	4 месяца	13,2	7 месяцев	14,7	10 месяцев	15,4
29	250 дней	12,5	300 дней	13,8	330 дней	14,7
30	5 лет	14,8	7 лет	15,0	10 лет	15,9

Определите среднюю:
- простую процентную ставку;
- сложную учетную ставку;
- сложную процентную ставку.

3.16 По условиям погашения кредита, полученного под 15,0 % (простые проценты) 10 марта, фирма должна выплатить суммы в 4 срока:
- 15 апреля – 280000 руб.;
- 15 июня – 250000 руб.;
- 30 августа – 240000 руб.;
- 28 сентября – 300000 руб.

В связи со сложившимися обстоятельствами фирма просит банк объединить эти платежи в один и перенести дату выплаты долга на 10 августа.

Определите величину консолидированного платежа.

Определите величину консолидированного платежа, если использовалась сложная учетная ставка в размере 14,5 %.

3.17 Клиент взял в банке три кредита. Платежи по этим кредитам клиент желает объединить в один. Найдите консолидированную сумму платежа, если использовалась:

а) простая процентная ставка в размере 11,0%;

б) простая учетная ставка в размере 12,5 %;

в) сложная процентная ставка в размере 13,0 %;
г) сложная учетная ставка в размере 13,5 %.
Задачу решите для двух согласованных сроков.

Таблица 3.12 – Условия консолидации кредитов

№ п/п	Кредит 1		Кредит 2		Кредит 3		Согласованные сроки платежей	
	Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита	Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита	Сумма, тыс. руб. (P)	Срок кредита	первый	второй
1	10,0	40 дней	20,0	60 дней	30,0	70 дней	80 дней	65 дней
2	15,0	2 года	20,0	4 года	25,0	6 лет	7 лет	5 лет
3	30,0	60 дней	35,0	70 дней	40,0	100 дней	120 дней	90 дней
4	20,0	1 месяц	30,0	3 месяца	40,0	6 месяцев	8 мес.	5 мес.
5	30,0	1 год	40,0	3 года	50,0	6 лет	8 лет	5 лет
6	35,0	2 месяца	40,0	4 месяца	45,0	6 месяцев	7 мес.	5 мес.
7	40,0	80 дней	45,0	100 дней	50,0	150 дней	180 дней	120 дней
8	45,0	3 года	50,0	5 лет	55,0	7 лет	9 лет	6 лет
9	50,0	3 месяца	55,0	7 месяцев	60,0	8 месяцев	10 мес.	5 мес.
10	57,0	45 дней	60,0	90 дней	63,0	140 дней	200 дней	120 дней
11	60,0	200 дней	65,0	240 дней	70,0	330 дней	350 дней	290 дней
12	20,0	2 года	40,0	5 лет	60,0	6 лет	8 лет	4 года
13	25,0	100 дней	40,0	180 дней	55,0	240 дней	280 дней	170 дней
14	10,0	3 месяца	25,0	6 месяцев	35,0	9 месяцев	11 мес.	7 мес.
15	30,0	4 года	60,0	5 лет	70,0	6 лет	8 лет	6 лет
16	38,0	120 дней	45,0	180 дней	60,0	250 дней	300 дней	200 дней
17	40,0	2 месяца	58,0	3 месяца	63,0	7 месяцев	8 мес.	5 мес.
18	50,0	170 дней	67,0	220 дней	80,0	290 дней	320 дней	210 дней
19	60,0	150 дней	65,0	190 дней	70,0	280 дней	340 дней	210 дней
20	65,0	3 года	73,0	5 лет	78,0	7 лет	9 лет	6 лет
21	65,0	140 дней	75,0	190 дней	85,0	270 дней	300 дней	240 дней
22	60,0	4 месяца	70,0	7 месяцев	80,0	10 мес.	11 мес.	8 мес.
23	70,0	80 дней	78,0	120 дней	83,0	190 дней	220 дней	150 дней
24	70,0	4 года	80,0	5 лет	100,0	7 лет	10 лет	6 лет
25	80,0	5 месяцев	85,0	8 месяцев	99,0	11 мес.	14 мес.	10 мес.
26	79,0	95 дней	90,0	130 дней	103,0	200 дней	230 дней	180 дней
27	22,0	6 месяцев	45,0	10 мес.	63,0	12 мес.	15 мес.	9 мес.
28	95,0	160 дней	104,0	250 дней	110,0	340 дней	350 дней	290 дней
29	30,0	2 года	64,0	4 года	80,0	6 лет	8 лет	5 лет
30	37,0	4 месяца	59,0	9 месяцев	78,0	11 мес.	12 мес.	10 мес.

3.18 Предприятие имеет ряд обязательств перед кредитором: 450000 руб., 689000 руб., 897000 руб., которые должны быть выплачены соответственно через 80, 100 и 130 дней после заключения контракта. По согласованию сторон было решено эти платежи заменить одним платежом равным 2300 тыс. руб. (S_0) с продлением срока оплаты, используя:
а) простую процентную ставку 14,7 %;
б) сложную процентную ставку 12,5 %.
Определите:

а) срок погашения задолженности, если использовалась французская практика;
б) современную стоимость платежей.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие процентные ставки называются эквивалентными?
2. Как производится усреднение процентных и учетных ставок?
3. Каким образом учитывается принцип финансовой эквивалентности обязательств?
4. Напишите уравнение эквивалентности размеров консолидированных платежей?
5. Составьте уравнение эквивалентности сроков консолидированного платежа?

Тема 4. ПОСТОЯННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

Финансовая рента или **аннуитет –** это однонаправленный денежный поток с равными временными интервалами.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:
R – величина годового платежа;
n – срок ренты, лет;
i или ***j*** – годовые сложные процентные ставки, используемые для наращения ренты или дисконтирования платежей;
m **–** частота начисления процентов в году;
p – число рентных платежей в году;
S – наращенная сумма ренты, т.е. сумма всех платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты;
A **–** современная величина ренты (приведенная стоимость), т.е. сумма всех платежей, уменьшенная (дисконтированная) на величину процентной ставки на определенный момент времени (как правило, на начало ренты).

Таблица 4.1 – Определение наращенной суммы и современной стоимости постоянной ренты постнумерандо

Число платежей в году	Число начисления процентов в году	Наращенная сумма	Современная стоимость
1	2	3	4
p=1	m=1	$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ (4.1)	$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ (4.2)

	m>1	$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$ (4.3)	$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$ (4.4)
1	2	3	4
	m→ ∞	$S = R\frac{e^{bn}-1}{e^{b}-1}$ (4.5)	$A = R\frac{1-e^{-bn}}{e^{b}-1}$ (4.6)
p>1	m=1	$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}$ (4.7)	$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}$ (4.8)
	m=p	$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}$ (4.9)	$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$ (4.10)
	m≠p	$S = R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p((1+\frac{j}{m})^{m/p}-1)}$ (4.11)	$A = R\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{p((1+\frac{j}{m})^{m/p}-1)}$ (4.12)
	m→ ∞	$S = R\frac{e^{bn}-1}{p(e^{b/p}-1)}$ (4.13)	$A = R\frac{1-e^{-bn}}{p(e^{b/p}-1)}$ (4.14)

При разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик – S или A, а необходимо рассчитать значение недостающего параметра.

Таблица 4.2 – Расчет величины годового платежа постоянных рент постнумерандо

Число платежей в году	Частота начисления процентов в году	Исходные параметры	
		S	A
1	**2**	**3**	**4**
p=1	m=1	$R = \frac{Si}{(1+i)^{n}-1}$ (4.15)	$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$ (4.16)
	m>1	$R = \frac{S\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$ (4.17)	$R = \frac{A\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right)}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}$ (4.18)
	m→ ∞	$R = \frac{S(e^{b}-1)}{e^{bn}-1}$ (4.19)	$R = \frac{A(e^{b}-1)}{1-e^{-bn}}$ (4.20)

p>1	m=1	$R=\frac{Sp\left((1+i)^{1/p}-1\right)}{(1+i)^{n}-1}$ (4.21)	$R=\frac{Ap\left((1+i)^{1/p}-1\right)}{1-(1+i)^{-n}}$ (4.22)
1	2	3	4
	m=p	$R=\frac{Sj}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$ (4.23)	$R=\frac{Aj}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}$ (4.24)
	m≠p	$R=\frac{Sp\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$ (4.25)	$R=\frac{Ap\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}$ (4.26)
	m→ ∞	$R=\frac{Sp\left(e^{b/p}-1\right)}{e^{bn}-1}$ (4.27)	$R=\frac{Ap\left(e^{b/p}-1\right)}{1-e^{-bn}}$ (4.28)

В случае согласования остальных параметров финансовой сделки ***срок ренты*** можно рассчитать с помощью величины наращенной суммы или современной стоимости ренты.

Таблица 4.3 – Расчет срока постоянных рент постнумерандо

Число платежей в году	Число начислений процентов в году	Исходные параметры	
		S	A
1	2	3	4
p=1	m=1	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$ (4.29)	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$ (4.30)
	m>1	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right)+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (4.31)	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (4.32)
	m→ ∞	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}b+1\right)}{b}$ (4.33)	$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{A}{R}b\right)}{b}$ (4.34)

p>1	m=1	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left((1+i)^{1/p}-1\right)+1\right)}{\ln(1+i)}$ (4.35)	$n=\dfrac{\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left((1+i)^{1/p}-1\right)\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$ (4.36)
1	2	3	4
	m=p	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}j+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (4.37)	$n=\dfrac{\ln\left(1-\frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (4.38)
	m≠p	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (4.39)	$n=\dfrac{\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (4.40)
	$m\to\infty$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(e^{b/p}-1\right)+1\right)}{b}$ (4.41)	$n=\dfrac{-\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left(e^{b/p}-1\right)\right)}{b}$ (4.42)

При расчете срока ренты нужно принять во внимание следующее:
а) расчетные значения срока будут, как правило, дробные, тогда для годовой ренты в качестве *n* удобно принять ближайшее целое число лет;
б) в связи с округлением величины *n* до целого значения необходимо пересчитать величину годового рентного платежа *R* с тем, чтобы наращенная сумма (или современная стоимость) ренты осталась неизменной.

Величину ***процентной ставки*** ренты определяют обычно методом линейной интерполяции следующим образом:

а) при известных величинах наращенной суммы ренты S, годового платежа *R* и коэффициента наращения ренты $s_{n;i}=\dfrac{S}{R}$

$$i=i_{(н)}+\frac{s_{n;i}-s_{(н)}}{s_{(в)}-s_{(н)}}\left(i_{(в)}-i_{(н)}\right), \tag{4.43}$$

где $i_{(н)}$ и $i_{(в)}$ – нижнее и верхнее значения предполагаемой процентной ставки;

$s_{(н)}$ и $s_{(в)}$ – нижнее и верхнее значения коэффициентов наращения ренты для ставок $i_{(н)}$ и $i_{(в)}$;

б) при известных величинах современной стоимости ренты *A*, годового платежа *R* и коэффициента приведения ренты $a_{n;i}=\dfrac{A}{R}$

$$i=i_{(н)}+\frac{a_{n;i}-a_{(н)}}{a_{(в)}-a_{(н)}}\left(i_{(в)}-i_{(н)}\right), \tag{4.44}$$

где $a_{(н)}$ и $a_{(в)}$ – значения коэффициентов приведения ренты для ставок $i_{(н)}$ и $i_{(в)}$.

При расчетах рентных платежей в финансовой практике чаще всего используются сложные проценты. Однако существуют рентные платежи, в которых начисление производится по ставкам простых процентов, при этом наращенная сумма и современная стоимость ренты определяются по формулам:

$$S = Rn\left(1+\frac{np-1}{2p}i\right); \tag{4.45}$$

$$A = Rnp(1+npi)^{-1}, \tag{4.46}$$

где p – число рентных платежей в году.

Таблица 4.4 – Определение наращенной суммы и современной стоимости ренты пренумерандо

Число платежей в году	Частота начислений процентов в году	Наращенная сумма	Современная стоимость
p=1	m=1	$S' = R\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)$ (4.47)	$A' = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$ (4.48)
	m>1	$S' = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ (4.49)	$A' = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ (4.50)
	m→∞	$S' = R\frac{e^{bn}-1}{e^{b}-1}e^{b}$ (4.51)	$A' = R\frac{1-e^{-bn}}{e^{b}-1}e^{b}$ (4.52)
p>1	m=1	$S' = R\frac{(1+i)^n-1}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}(1+i)^{1/p}$ (4.53)	$A' = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}(1+i)^{1/p}$ (4.54)
	m=p	$S' = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}\left(1+\frac{j}{m}\right)$ (4.55)	$A' = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}\left(1+\frac{j}{m}\right)$ (4.56)
	m≠p	$S' = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$ (4.57)	$A' = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$ (4.58)
	m→∞	$S' = R\frac{e^{bn}-1}{p\left(e^{b/p}-1\right)}e^{b/n}$ (4.59)	$A' = R\frac{1-e^{-bn}}{p\left(e^{b/p}-1\right)}e^{b/n}$ (4.60)

Пример 4.1 Фирма создает инвестиционный фонд. В течение 5 лет в фонд вносятся платежи в размере 75000 руб. в год под 12% годовых. Найти величину инвестиционного фонда через 5 лет, если: 1) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются один раз в году; 2) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются ежеквартально; 3) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются один раз в году; 4) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям; 5) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально.

Решение. По формулам (4.1), (4.3), (4.7), (4.9), (4.11) находим величину наращенной суммы ренты постнумерандо.

1) p=1, m=1, $S = 75000 \cdot \frac{(1+0{,}12)^5 - 1}{0{,}12} = 476463{,}55$ руб.;

2) p=1, m=4, $S = 75000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 5} - 1}{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4} - 1} = 481705{,}97$ руб.;

3) p=2, m=1, $S = 75000 \cdot \frac{(1+0{,}12)^5 - 1}{2\cdot\left((1+0{,}12)^{1/2} - 1\right)} = 490352{,}59$ руб.;

4) p=2, m=2, $S = 75000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2\cdot 5} - 1}{0{,}12} = 494279{,}81$ руб.;

5) p=2, m=4, $S = 75000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 5} - 1}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4/2} - 1\right)} = 496373{,}91$ руб.

Пример 4.2 Фирма предусматривает создание в течение 4-х лет фонда развития и имеет возможность вносить ежегодно 34700 руб. под 8% годовых. Какая сумма потребовалась бы фирме изначально для создания фонда, если бы она поместила ее в банк на 4 года под 8% годовых, если: 1) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются один раз в году; 2) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются ежеквартально; 3) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются один раз в году; 4) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям; 5) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально.

Решение. Найдем современную величину ренты постнумерандо, используя формулы (4.2), (4.4), (4.8), (4.10), (4.12).

1) p=1, m=1, $A = 34700 \cdot \frac{1-(1+0{,}08)^{-4}}{0{,}08} = 114930{,}80$ руб.;

2) p=1, m=4, $A = 34700 \cdot \dfrac{1-\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{-4\cdot 4}}{\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{4}-1} = 114311{,}33$ руб.;

3) p=2, m=1, $A = 34700 \cdot \dfrac{1-(1+0,08)^{-4}}{2\cdot\left((1+0,08)^{1/2}-1\right)} = 117185{,}20$ руб.;

4) p=2, m=2, $A = 34700 \cdot \dfrac{1-\left(1+\dfrac{0,08}{2}\right)^{-2\cdot 4}}{0,08} = 116813{,}12$ руб.;

5) p=2, m=4, $A = 34700 \cdot \dfrac{1-\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{-4\cdot 4}}{2\cdot\left(\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{4/2}-1\right)} = 116620{,}42$ руб.

Пример 4.3 Какой срок необходим для накопления 400 тыс. руб., если ежеквартально будет вноситься 10 тыс. руб. под 12 % годовых при ежегодном начислении процентов?

Решение. Так как величина наращенной суммы S=400 тыс. руб., число начислений процентов в году m = 1, рентные платежи вносятся ежеквартально (p=4), а R-величина годового взноса составляет $10000 \cdot 4$ =40 000 руб. то по формуле (4.35)

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{400000}{40000}\cdot 4\left((1+0,12)^{1/4}-1\right)+1\right)}{\ln(1+0,12)} = 6,75 \approx 6\,\text{лет}.$$

Вследствие округления срока ренты необходимо пересчитать величину годового взноса по формуле (4.21)

$$R = \frac{400000\cdot 4\left((1+0,12)^{1/4}-1\right)}{(1+0,12)^{6}-1} = 47215,73 \text{ руб},$$

$$47215,73 : 4 = 11803,93.$$

Таким образом, ежеквартально необходимо вносить 11803,93 руб.

Задачи для самостоятельного решения

4.1 Страховая компания заключила договор с предприятием на: 2 года, 3 года, 4 года, 7 лет, установив годовой страховой взнос в сумме (таблица 4.5). Страховые взносы помещаются в банк под сложную процентную ставку 12% годовых.

Определите сумму, которую получит страховая компания по этому контракту, если взносы будут поступать: а) в конце каждого года при ежегодном начислении процентов; б) в конце каждого года при полугодовом начислении процентов; в) равными долями в конце каждого полугодия при ежегодном начислении процентов; г) равными долями в конце каждого квартала при ежеквартальном начислении процентов; д) равными долями в конце каждого квартала при ежемесячном начислении процентов.

Таблица 4.5 – Величина годового взноса

Вариант	Сумма, тыс. руб.	Вариант	Сумма, тыс. руб.
1	100	16	98
2	80	17	105
3	50	18	120
4	70	19	45
5	110	20	180
6	90	21	120
7	75	22	130
8	62	23	220
9	200	24	215
10	250	25	285
11	170	26	300
12	210	27	228
13	135	28	305
14	175	29	195
15	255	30	240

4.2. Определите современную стоимость всех платежей по всем вариантам задачи **4.1.**

4.3. Для создания фонда фирма вкладывает ежегодно в банк по 124 тыс. руб. под годовую номинальную процентную ставку 12%. Определите сумму, которая будет накоплена в фонде через 8 лет, если: а) взносы делаются в конце года, а сложные проценты начисляются по полугодиям; б) взносы делаются равными долями в конце каждого месяца, а сложные проценты начисляются ежеквартально; в) взносы делаются равными долями в конце каждого квартала и начисляются непрерывные проценты.

4.4. Страховая компания, заключив на 4 года договор с некоторой фирмой, получает от нее страховые взносы по 150 тыс. руб. в конце каждого квартала. Эти взносы компания помещает в банк под годовую номинальную процентную ставку 11% годовых. Найдите приведенную стоимость суммы, которую получит страховая компания по данному контракту, если сложные проценты начисляются: а) ежеквартально; б) ежемесячно; в) непрерывно.

4.5. Клиент хочет накопить на своем счете сумму (таблица 4.6), осуществляя в конце каждого года равные вклады в банк под сложную процентную ставку 10% годовых. Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы клиент мог накопить требуемую сумму за: а) 3 года; б) 5 лет; в) 7 лет; г) 10 лет?

Таблица 4.6 – Величина фонда

Вариант	Сумма, тыс. руб.	Вариант	Сумма, тыс. руб.
1	1000	16	980
2	800	17	1050
3	500	18	1200
4	700	19	450
5	1100	20	1800
6	900	21	1200
7	750	22	1300
8	620	23	2200
9	2000	24	2150
10	2500	25	2850
11	1700	26	3000
12	2100	27	2280
13	1350	28	3050
14	1750	29	1950
15	2550	30	2400

4.6. Предприниматель, с целью покупки оборудования, делает в конце каждого квартала равные вклады в банк под годовую номинальную процентную ставку 14%, причем сложные проценты начисляются по полугодиям. Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы предприниматель мог накопить 1000 тыс. руб. за: а) 3 года; б) 5 лет; в) 8 лет.

4.7. Предприятие намеревается создать за 5 лет фонд развития в размере (таблица 4.7). Какую сумму предприятие должно ежегодно ассигновать на эту цель при условии помещения денег в банк в конце каждого года под процентную ставку 14% годовых с начислением сложных процентов: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; б) ежемесячно; д) непрерывно?

Таблица 4.7 – Величина фонда

Вариант	Сумма, тыс. руб.	Вариант	Сумма, тыс. руб.
1	1000	16	980
2	800	17	1050
3	500	18	1200
4	700	19	450
5	1100	20	1800
6	900	21	1200
7	750	22	1300
8	620	23	2200
9	2000	24	2150
10	2500	25	2850
11	1700	26	3000
12	2100	27	2280
13	1350	28	3050
14	1750	29	1950
15	2550	30	2400

4.8. Для создания за 5 лет фонда в размере 1 млн. руб. фирма делает ежегодные равные взносы в банк под годовую номинальную процентную ставку 11%. Определите, какой величины взнос должна ежегодно делать фирма, если: а) взносы делаются в конце года, а сложные проценты начисляются ежемесячно; б) взносы делаются равными долями в конце каждого полугодия, а сложные проценты начисляются ежеквартально; в) взносы делаются равными долями в конце каждого квартала и начисляются непрерывные проценты.

4.9. Анализируются два варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо: а) вносить на депозит сумму в размере 15 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет 10% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов; б) делать ежегодный вклад в размере 52 тыс. руб. на условиях 12% годовых при ежегодном начислении сложных процентов. Какая сумма будет на счете через 8 лет при реализации каждого плана? Какой план более предпочтителен? Изменится ли Ваш выбор, если процентная ставка во втором плане будет увеличена до 13%?

4.10. Клиент хочет накопить на своем счете 800 тыс. руб., осуществляя в конце каждого года равные вклады в банк в размере 150 тыс. руб. под сложную процентную ставку 13% годовых. За какой срок он сможет это сделать? Как изменится ответ задачи, если проценты будут начисляться: по полугодиям; ежеквартально; ежемесячно?

4.11. Определите срок, необходимый для создания инвестиционного фонда в размере 10 млн. руб., если планируется а) вносить по полугодиям 100 тыс. руб. под 12% годовых; б) ежемесячно осуществлять взносы в размере 15 тыс. руб. под 14% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

4.12. Путем ежегодных взносов постнумерандо по 300 тыс. руб. предполагается за 3 года накопить 1200 тыс. руб. Какова должна быть годовая процентная ставка?

4.13. Клиент в конце каждого года вкладывает 14 тыс. руб. в банк, выплачивающий простые проценты по ставке 10% годовых. Определите сумму, которая будет на счете клиента через 3 года. Как изменится ответ задачи, если деньги вносятся по полугодиям по 7 тыс. руб.?

Вопросы для самоконтроля.

1. Какой денежный поток называется потоком постнумерандо?
2. Какой денежный поток называется потоком пренумерандо?
3. В рамках решения каких двух задач может выполняться оценка денежного потока?
4. Какой денежный поток называют аннуитетом?
5. Что называется членом аннуитета, периодом аннуитета?
6. Какой аннуитет называется срочным?
7. Какой аннуитет называется p-срочным?
8. Какой аннуитет называется постоянным?
9. Что такое наращенная сумма ренты?
10. Что такое приведенная стоимость ренты?
11. Что называется коэффициентом наращения и приведения ренты?

12. Какие проценты в основном используются при оценке ренты?
13. Какой аннуитет называется отсроченным?
14. Что такое вечная рента?

Тема 5. ПЕРЕМЕННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ. КОНВЕРСИИ РЕНТ

В практике встречаются случаи, когда члены потока платежей изменяются в течение срока ренты. Изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка, а иногда и случайными факторами.

Поток последовательных платежей, члены которого не являются постоянными величинами, называется ***переменной рентой***. Изменение величины платежей может быть описано каким-либо законом или носить нерегулярный характер. При этом определяются параметры следующих видов рент:

а) ренты с разовыми изменениями платежей

Наращенная сумма годовой ренты

$$S = R_1 \cdot s_{n_1;i_1} \cdot (1+i_1)^{n-n_1} + R_2 \cdot s_{n_2;i_2} \cdot (1+i_2)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k \cdot s_{n_k;i_k}, \qquad (5.1)$$

где $s_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коэффициент наращения годовой ренты.

Современная величина годовой ренты

$$A = R_1 \cdot a_{n_1;i_1} + R_2 \cdot a_{n_2;i_2} \cdot v^{n_1} + \ldots + R_k \cdot a_{n_k;i_k} \cdot v^{n-n_k}, \qquad (5.2)$$

где $a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$v = \dfrac{1}{(1+i)}$ – дисконтный множитель по ставке i;

n – срок ренты, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_к$;

$n_1, n_2, \ldots, n_к$ – продолжительность временных отрезков;

$R_1, R_2, \ldots, R_к$ - годовой платеж в соответствующем временном отрезке;

$i_1, i_2, \ldots, i_к$ – процентные ставки.

Если платежи вносятся несколько раз в году, то коэффициенты наращения ($s_{n;i}^{(p)}$) или приведения ($a_{n;i}^{(p)}$) рассчитываются как для p-срочной ренты.

б) ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов

Наращенная сумма переменной ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов составит:

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right), \qquad (5.3)$$

где d – разность арифметической прогрессии (величина абсолютного годового изменения членов ренты с соответствующим знаком),

R – первый член ренты.

Современная величина данной ренты составит:

$$A = R \cdot a_{n;i} + \frac{d}{i}\left(a_{n;i} - nv^n\right). \qquad (5.4)$$

Зная значение постоянного прироста d, процентной ставки i, наращенной суммы S или текущей суммы долга A, определяется размер первого платежа R:

$$R = \frac{S - \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right)}{s_{n;i}}; \qquad (5.5)$$

$$R = \frac{A - \frac{d}{i}\left(a_{n;i} - nv^n\right)}{a_{n;i}}. \qquad (5.6)$$

Величина абсолютного прироста d определяется по формулам:

$$d = \frac{i\left(S - R \cdot s_{n;i}\right)}{s_{n;i} - n};$$

$$d = \frac{i\left(A - R \cdot a_{n;i}\right)}{a_{n;i} - nv^n}. \qquad (5.7)$$

Для переменной p-срочной ренты с постоянным абсолютным приростом платежей наращенная сумма и современная стоимость определяются по формулам:

$$S = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{d}{p}(t-1)\right)(1+i)^{n-t/p}; \qquad (5.8)$$

$$A = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{d}{p}t\right)v^{t/p}. \qquad (5.9)$$

в) ренты с постоянным относительным приростом платежей

Наращенная сумма и современная стоимость ренты составят:

а) при ежегодных платежах

$$S = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}; \qquad (5.10)$$

$$A = R\frac{(qv)^n - 1}{q - (1+i)}, \qquad (5.11)$$

где q – знаменатель прогрессии, т.е. коэффициент роста;

б) при p-срочной ренте

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}}; \qquad (5.12)$$

$$A = R\frac{q^{np}v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}}. \qquad (5.13)$$

Расчеты по коммерческим сделкам могут предусматривать изменение условий оплаты, которое называется ***конверсией финансовых рент***. Простейшими случаями конверсии являются ***выкуп*** ренты (замена ренты разовым платежом) и ***рассрочка*** платежа (замена разового платежа рентой).

Замена нескольких рент одной, параметры которой надо определить, называется ***консолидацией*** рент. Современная величина вновь образованной консолидированной ренты должна быть равна сумме современных величин консолидируемых рент:

$$A = \sum_{q=1}^{K} A_q = \sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}\ , \tag{5.14}$$

где A – современная величина консолидированной ренты;

A_q – современная величина q-ой заменяемой ренты, q=1, 2, …, K;

K – число консолидируемых рент;

R_q – член q-ой ренты;

n_q и i_q – соответственно продолжительность и процентная ставка q-ой ренты.

Член консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$R = \frac{A}{a_{n;i}} = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{a_{n;i}} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n;i}}, \tag{5.15}$$

где $a_{n;i}$ – коэффициент приведения консолидированной ренты.

Член консолидированной отсроченной ренты определяется по формуле:

$$R_{отсроч.} = \frac{A}{a_{n-t;i} \cdot v^t} = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{a_{n-t;i} \cdot v^t} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n-t;i} \cdot v^t}, \tag{5.16}$$

где $a_{n-t;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{i}$ – коэффициент приведения отсроченной консолидированной ренты;

t – продолжительность отсрочки, лет;

i – процентная ставка консолидированной ренты;

$v^t = \dfrac{1}{(1+i)^t}$ – дисконтный множитель за период t, на который отложена рента.

Срок консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$n = \frac{-\ln\left(\dfrac{1}{K}\sum_{q=1}^{K}\dfrac{1-(1+i_q)^{-n_q}}{i_q}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{5.17}$$

Если процентные ставки объединяемых рент и вновь создаваемой равны между собой, т.е. $i_1 = i_2 = \text{K} = i_q = i$, то

$$n = \frac{\ln K - \ln \sum_{q=1}^{K}(1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}. \tag{5.18}$$

Замена немедленной ренты на отсроченную, т.е. когда первый платеж по ренте переносится на более поздний срок в t лет. При этом возможны следующие варианты конверсии:

1) общая продолжительность ренты остается прежней, т.е. $n_1 = n_2 = n$, рентный платеж составит:

$$R_2 = \frac{A_1}{a_{n;i} \cdot v^t} = \frac{R_1}{v^t} = R_1 (1+i)^t, \tag{5.19}$$

где R_1 и R_2 – годовые платежи соответственно первоначальной и отсроченной ренты;

$a_{n;i}$ – коэффициент приведения первоначальной годовой ренты;

t - продолжительность отсрочки;

2) общая продолжительность ренты изменяется, т.е. $n_1 \neq n_2$, рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = \frac{A_1 \cdot (1+i)^t}{a_{n_1;i}} = R_1 \cdot \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} \cdot (1+i)^t, \tag{5.20}$$

где $a_{n_1;i}$ и $a_{n_2;i}$ – коэффициенты приведения соответственно первоначальной и отложенной рент;

3) члены ренты остаются неизменными, т.е. $R_1 = R_2$, тогда срок отложенной ренты составит:

$$n_2 = \frac{-\ln\left(1 - \left(1 - (1+i)^{-n_1}\right)(1+i)^t\right)}{\ln(1+i)}.$$

Замена годовой ренты на р-срочную. Годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1 заменяется на p-срочную с параметрами R_2, n_2, p. Если заданы срок заменяющей ренты, ее периодичность и ставка, то

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}^{(p)}}, \tag{5.21}$$

где $a_{n_1;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n_1}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$a_{n_2;i}^{(p)} = \dfrac{1-(1+i)^{-n_2}}{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}$ – коэффициент приведения p-срочной ренты.

Если $n_1 = n_2 = n$, то

$$R_2 = R_1 \frac{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}{i}. \tag{5.22}$$

При ***изменении продолжительности ренты*** размер нового рентного платежа составит

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}. \tag{5.23}$$

При ***изменении срочности ренты*** (числа выплат в году) годовой рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n;i}^{(p_1)}}{a_{n;i}^{(p_2)}} = R_1 \frac{p_1\left((1+i)^{1/p_1}-1\right)}{p_2\left((1+i)^{1/p_2}-1\right)}, \tag{5.24}$$

где p_1 и p_2 – характеристики срочности двух рент.

Пример 5.1 По условиям контракта платежи вносятся в конце года, первый платеж составляет 2 млн. руб., каждый год его величина возрастает на 200 тыс. руб., срок выплат 4 года, процентная ставка 8%. Определить наращенную сумму.

Решение. Параметры ренты:

$$R = 2000000 \text{ руб.};\ n = 4;\ i = 0{,}08;\ d = 200000 \text{руб.};$$

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}08)^4 - 1}{0{,}08} = 4{,}506112.$$

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right) = 2000000 \cdot 4{,}506112 + \frac{200000}{0{,}08}(4{,}506112 - 4) = 10277504 \text{ руб.}$$

Пример 5.2 Клиентом получен кредит сроком на 7 лет, при следующих условиях погашения: первый платеж 2 млн. руб., каждый следующий возрастает на 10%, платежи вносятся два раза в году, процентная ставка 8% годовых. Определить размер полученного кредита и сумму долга, подлежащую возврату.

Решение. Параметры ренты:

$$R = 2000000 \text{ руб.};\ n = 7;\ i = 0{,}08;\ p = 2;\ q = 1{,}1.$$

Размер полученного кредита – это современная стоимость ренты.

$$A = R\frac{q^{np}v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000\frac{1{,}1^{14} \cdot 1{,}08^{-7} - 1}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 40000000 \text{ руб.}$$

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000\frac{1{,}1^{14} - 1{,}08^7}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 68576300 \text{ руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1 Предприятием был получен кредит на 10 лет. Условия погашения кредита следующие: в первые пять лет платежи размером 6 млн. руб. вносятся каждый год под 11% годовых; следующие три года платежи размером 4 млн. руб. вносятся по полугодиям под 9% годовых. Последние два года ежеквартально вносятся платежи размером 3 млн. руб. под 8% годовых. Определите наращенную сумму долга по кредиту. Рассчитайте современную стоимость кредита.

5.2 Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 7 лет: а) в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 60 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 3000 руб.; б) каждое полугодие будут поступать платежи, первый из которых составит 35 тыс. руб., а каждый последующий будет увеличиваться на 1700 руб. Определите наращенную стоимость и приведенную величину этого аннуитета, если банк применяет процентную ставку 12% годовых, а сложные проценты начисляются один раз в конце года.

5.3 По условиям контракта на счет клиента в банке поступают в течение 6 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 150 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 11%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 10% годовых.

5.4 За 5 лет необходимо накопить 1000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 15%, а процентная ставка равна 11% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Как изменится величина первого вклада, если предполагается ежеквартальный рост поступлений на 6%?

5.5 За 10 лет необходимо накопить 5000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 10000 руб., а процентная ставка равна 10% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 150 тыс. руб.

5.6 Три немедленные годовые ренты постнумерандо, с характеристиками: $R_q = 130$; 220 и 300 тыс. руб.; $n_q = 5$; 12 и 8 лет; $i_q = 14$; 22 и 18% ; заменяются: а) одной немедленной рентой постнумерандо со сроком 10 лет и процентной ставкой 20% годовых; б) одной отсроченной на 3 года рентой с общим сроком 10 лет, включая отсрочку, и процентной ставкой 20% годовых. Определите величину годового платежа консолидированной ренты.

5.7. Объединяются три ренты со сроками $n_q = 7$; 4 и 9 лет, члены рент равны между собой, а $R_q = 500$ тыс. руб.; процентные ставки также равны и составляют $i_q = 8\%$. Размер консолидированного годового платежа равен 1,5 млн. руб., процентная ставка сохраняется на уровне 8% годовых. Определите срок новой ренты.

5.8. Фирма по торговле недвижимостью продает объект стоимостью 3,5 млн. руб. При этом предлагаются следующие варианты оплаты: а) оплата в течение трех лет равными платежами, вносимыми в конце года под 9% годовых; б) оплата с отсрочкой платежа в один год, остальные условия аналогичны предыдущему варианту; в) оплата с отсрочкой в один год, но срок ренты возрастает до четырех лет. Определите финансовые последствия для каждого варианта.

5.9. По условиям договора немедленная годовая рента сроком четыре года, величиной годового платежа 200 тыс. руб. и процентной ставкой 10 % годовых, заменяется отсроченной на два года рентой. Определите срок новой ренты при сохранении остальных параметров.

5.10. По условиям соглашения между кредитором и заемщиком годовая рента постнумерандо с величиной годового платежа 180 тыс. руб., сроком три года и ставкой 14% годовых, заменяется на квартальную при сохранении остальных параметров. Оцените новый аннуитет. Как изменятся параметры аннуитета, если срок ренты увеличится до четырех лет?

Вопросы для самоконтроля.

1. Какой аннуитет называется переменным?
2. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
3. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным относительным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
4. Перечислите виды конверсии ренты.
5. Что такое консолидация ренты?
6. Что такое отсроченная рента?

Тема 6. ПОГАШЕНИЕ ДОЛГОСРОЧНЫХ КРЕДИТОВ

В банковской практике стран со стабильной экономикой и невысокой инфляцией (до 10% в год) среднесрочным считается кредит, выданный на срок от 2 до 5 лет, если срок кредита составляет 5 и более лет, то он является долгосрочным.

Стороны сделки выбирают удобные для них условия погашения долгосрочных кредитов в виде постоянных и переменных финансовых рент, а также нерегулярных потоков платежей. Затем, в соответствии с условиями контракта, составляется план погашения задолженности. Одним из важных элементов этого плана является определение числа срочных выплат и их величины.

Срочные выплаты – это денежные средства, предназначенные для погашения как основного долга, так и текущих процентных платежей. Величина срочных уплат зависит от суммы кредита, его срока, наличия и продолжительности льготного периода, размера процентной ставки и других условий.

Погашение долга в рассрочку

а) Погашение займа производится равными срочными выплатами, когда каждая срочная выплата Y является суммой двух величин: годового расхода по погашению основного долга R и процентного платежа по займу I, т.е. $Y = R + I$.

Величина долгосрочного кредита D равна сумме всех дисконтированных платежей, т.е. является современной величиной всех срочных выплат:

$$D = \frac{Y_1}{(1+i)} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}$$

Если все срочные выплаты по кредиту равны между собой, т.е. $Y_1 = Y_2 = ... = Y_n$ с одинаковой процентной ставкой , то величина кредита составит:

$$D = Y\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}, \tag{6.1}$$

а величина срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}. \tag{6.2}$$

Зная первую процентную выплату $I_1 = i \cdot D$ и величину срочной выплаты Y, можно определить сумму первого погашения основного долга $R_1 = Y - I_1$. Это, в свою очередь, дает остаток долга на второй расчетный период $D_2 = D - R_1$, который является базой для начисления процентов в следующем году $I_2 = i \cdot D_2$, что позволит определить величину платежа основного долга во втором году $R_2 = Y - I_2$ и т.д.

Выплата основного долга R_k в k-ом периоде времени

$$R_k = Y(1+i)^{-n+k-1}, \tag{6.3}$$

где $k = 1,2,...n$ - порядковый номер расчетного периода времени.

Остаток основной суммы задолженности в k-ом периоде

$$D_k = \frac{D((1+i)^n - (1+i)^{k-1})}{(1+i)^n - 1}. \tag{6.4}$$

Сумма начисленных процентов в k-ом периоде времени

$$I_k = Y(1-(1+i)^{-n+k-1}). \tag{6.5}$$

Если процентная ставка по займу изменяется во времени, то величина годовой срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y_k = D_k \frac{i_k(1+i_k)^{n-k+1}}{(1+i_k)^{n-k+1} - 1}. \tag{6.6}$$

б) Погашение займа производится равными выплатами основного долга, то в этом случае размеры платежей по основному долгу будут равными

$$R_1 = R_2 = ... = R_k = ... = R_n = \frac{D}{n}, \tag{6.7}$$

а остаток основного долга в начале k-го расчетного периода определится как

$$D_k = D - R(k-1), \tag{6.8}$$

где D – величина всего долга.

Величина срочной выплаты в k-ом расчетном периоде равна:

$$Y_k = D_k \cdot i + R = (D - R(k-1)) \cdot i + R. \tag{6.9}$$

Величина процентного платежа для k-го расчетного периода находится по формуле:

$$I_k = D_k \cdot i = (D - R(k-1)) \cdot i. \tag{6.10}$$

в) Погашение займа производится переменными выплатами основного долга, а выплаты изменяются в арифметической прогрессии, то есть контрактом предусмотрено погашение основного долга осуществлять платежами, возрастающими или убывающими в арифметической прогрессии с разностью d, тогда выплаты основного долга в k-ом периоде составляют

$$R_k = R_1 \pm (n-k) \cdot d\,. \tag{6.11}$$

Для возрастающей арифметической прогрессии величина первого платежа по погашению основной суммы долга по займу составит:

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d\,, \tag{6.12}$$

а для убывающей арифметической прогрессии

$$R_1 = \frac{D}{n} + \frac{n-1}{2} \cdot d\,. \tag{6.13}$$

Если выплаты изменяются в геометрической прогрессии, то погашение основного долга производится платежами, каждый из которых больше или меньше предыдущего в q раз. Эти платежи являются членами возрастающей или убывающей геометрической прогрессии, где q – знаменатель прогрессии.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}, \text{ при } q > 1; \tag{6.14}$$

$$R_1 = D \cdot \frac{1-q}{1-q^n}; \text{ при } 0 < q < 1\,. \tag{6.15}$$

Конверсия займов

Конверсией называется изменение условий займов, когда могут меняться сроки их погашения, процентные ставки и т.п.

Обозначим параметры займов:

n – первоначальный срок погашения займов до конверсии;

n_1 – срок, на который продлен период погашения в результате конверсии;

k – число оплаченных расчетных периодов до конверсии;

i – процентная ставка до конверсии;

i_1 – процентная ставка после конверсии;

Y – величина срочной выплаты до конверсии;

Y_1 – величина срочной выплаты после конверсии;

D – величина основного долга;

D_{n-k} – остаток долга на момент конверсии.

Для составления плана погашения конверсионного займа определяют:

а) величину срочной выплаты по старым условиям:

$$Y = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; \tag{6.16}$$

б) остаток долга на момент конверсии:

$$D_{n-k} = Y\frac{(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^{n-k}\cdot i}; \qquad (6.17)$$

в) величину срочной выплаты по новым условиям:

$$Y_1 = D_{n-k}\,\frac{i(1+i)^{n-k+n_1}}{(1+i)^{n-k+n_1}-1}. \qquad (6.18)$$

Льготные кредиты

При льготном долгосрочном кредитовании заемщик фактически получает субсидию, а кредитор теряет определенную сумму в результате данной сделки. Эта добровольно упущенная выгода кредитора называется ***грант-элементом*** и может быть рассчитана в виде абсолютной или относительной величины.

Обозначим параметры льготных займов:

D – сумма предоставленного кредита;

n – срок кредита, лет;

g – льготная процентная ставка, по которой предоставлен кредит;

i – общепринятая процентная ставка ($i > g$);

$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i;

$a_{n;g} = \dfrac{1-(1+g)^{-n}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g;

$a_{L;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-L}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком L;

L – продолжительность льготного периода погашения кредита, лет;

$a_{n-L;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком $n-L$;

$a_{n-L;g} = \dfrac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g со сроком $n-L$;

$v^L = \dfrac{1}{(1+i)^L}$ – дисконтный множитель по ставке i;

w – относительный грант-элемент;

W – абсолютный грант-элемент.

Для всех вариантов льготного кредитования абсолютный грант-элемент может быть рассчитан по формуле:

$$W = D\cdot w. \qquad (6.19)$$

Варианты льготного кредита:

а) кредит предоставляется по льготной ставке:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}; \tag{6.20}$$

б) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого выплачиваются только проценты:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot v^L + g \cdot a_{L;i} \right); \tag{6.21}$$

в) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого проценты не выплачиваются:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \right) \cdot \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^L; \tag{6.22}$$

г) беспроцентный кредит:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{n}; \tag{6.23}$$

д) беспроцентный кредит с наличием льготного периода погашения:

$$w = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{n} \cdot v^L. \tag{6.24}$$

Пример 6.1 Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 300 тыс. руб. на 5 лет под 10% годовых. Начисление процентов производится раз в году. Погашение кредита должно производиться: а) равными срочными выплатами; б) равными выплатами основного долга; в) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 10 тыс. руб.; г) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 5%. Составить план погашения займа для каждого варианта.

Решение. Параметры кредита: D = 300000 руб.; n = 5; i = 0,1; d = 10000 руб.; q = 1,05.

а) Определяется величина срочной выплаты

$$Y = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 300000\frac{0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^5}{(1+0{,}1)^5 - 1} = 79139 \text{ руб.}$$

Далее последовательно рассчитываются процентные платежи, годовой расход по погашению основной суммы долга, остаток долга за каждый год и составляется план погашения задолженности.

Таблица 6.1 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	49139	79139
2	250861	25086	54053	79139
3	196808	19681	59458	79139
4	137350	13735	65404	79139
5	71946	7193	71946	79139
Итого	—	95695	300000	395695

б) Определяем величину годового расхода по погашению основной суммы долга

$$R_1 = R_2 = ... = R_k = ... = R_n = \frac{D}{n} = \frac{300000}{5} = 60000 \text{ руб.}$$

Остальные параметры сделки определяются последовательно по годам и составляется план погашения кредита.

Таблица 6.2 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	60000	90000
2	240000	24000	60000	84000
3	180000	18000	60000	78000
4	120000	12000	60000	72000
5	60000	6000	60000	66000
Итого	—	90000	300000	390000

в) Определяем величину первого платежа для возрастающей арифметической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d = \frac{300000}{5} - \frac{5-1}{2} \cdot 10000 = 40000 \text{ руб.}$$

Таблица 6.3 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	40000	70000
2	260000	26000	50000	76000
3	210000	21000	60000	81000
4	150000	15000	70000	85000
5	80000	8000	80000	88000
Итого	—	100000	300000	400000

г) Определяем величину первого платежа для возрастающей геометрической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 300000 \frac{1{,}05 - 1}{1{,}05^5 - 1} = 54292 \text{ руб.}$$

Таблица 6.4 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	54292	84292
2	245708	24571	57007	81578
3	185851	18585	59857	78442
4	125994	12599	62850	75449

5	63144	6314	65994	72308
Итого	—	92069	300000	392069

Пример 6.2 Льготный заем в сумме 500000 руб. выдан на 10 лет под 8% годовых. Обычная ставка для подобных займов составляет 14%. Погашение займа предусматривает льготный период 2 года, в течение которых будут выплачиваться только проценты. Определить абсолютную и относительную величину грант-элемента.

Решение. По условию задачи имеем: D=500000 руб., n=10; i=14%; g= 0,08; L=2,

$$a_{L;i} = \frac{1-(1+i)^{-L}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-2}}{0{,}14} = 1{,}646661;$$

$$a_{n-L;i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-(10-2)}}{0{,}14} = 4{,}638864;$$

$$a_{n-L;g} = \frac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g} = \frac{1-(1+0{,}08)^{-(10-2)}}{0{,}08} = 5{,}746639;$$

$$v^L = \frac{1}{(1+i)^L} = \frac{1}{(1+0{,}14)^2} = 0{,}769468.$$

Определяем величину относительного грант-элемента:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot v^L + g \cdot a_{L;i}\right) = 1 - \left(\frac{4{,}638843}{5{,}746639} \cdot 0{,}769468 + 0{,}08 \cdot 1{,}646661\right) = 0{,}2471$$

или 24,11%.

Абсолютная величина грант-элемента, т.е. добровольно упущенной выгоды кредитора, составит:

$$W = D \cdot w = 500000 \cdot 0{,}2411 = 123550 \text{ руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Банк выдал долгосрочный кредит в сумме (таблица 6.5) на несколько лет под 12% годовых. Погашение кредита должно производиться равными срочными выплатами при ежегодном начислении сложных декурсивных процентов. Составьте план погашения кредита.

Таблица 6.5 – Размер и срок кредита

Вариант	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.	Вариант	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.
1	80	7	16	29	7
2	70	6	17	35	10
3	100	5	18	40	8
4	88	7	19	99	9
5	50	6	20	60	6
6	55	8	21	75	9
7	68	5	22	89	8
8	39	8	23	90	7
9	45	7	24	97	10

10	92	9	25	85	8
11	59	6	26	77	7
12	63	7	27	41	9
13	38	10	28	65	7
14	59	7	29	87	6
15	20	8	30	71	9

6.2 Составьте план погашения кредита по данным таблицы 6.5 если банк выдал долгосрочный кредит под 14% годовых. Начисление процентов производится раз в году. Погашение кредита должно производиться равными выплатами основного долга.

6.3 Составьте план погашения кредита по данным таблицы 6.5 если банк выдал долгосрочный кредит под 9% годовых. Выплаты основного долга должны ежегодно возрастать на 3 млн. руб. проценты начисляются один раз в году.

6.4 Кредит в размере (таблица 6.5) должен быть погашен в течение нескольких лет ежегодными выплатами. Процентная ставка сложных декурсивных процентов составляет 15% годовых. Платежи основного долга ежегодно возрастают на 7%. Составьте план погашения кредита.

6.5 Клиентом банка получен кредит в размере 10 млн. руб. сроком на 7 лет. Первые два года ставка составляет 8% годовых, следующие два года – 10%, последние три года – 15%. Погашение основного долга и выплата процентов осуществляется в конце года. Составьте план погашения займа.

6.6 Кредит в сумме 40 млн. руб., выданный на 5 лет под 6% годовых, погашается равными срочными выплатами в конце каждого года. После погашения третьего платежа кредитор и заемщик договорились о продлении срока погашения займа на 2 года и увеличении процентной ставки с момента конверсии до 10%. Составьте план погашения оставшейся части долга.

6.7 Льготный заем в сумме (таблица 6.5) выдан на несколько лет под 7% годовых. Обычная ставка для подобных займов 12%. Погашение долга предусматривается равными срочными выплатами. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 3 года, в течение которого выплачиваются только проценты; в) имеется льготный период 3 года, в течение которого проценты не выплачиваются.

6.8. Предоставлен льготный беспроцентный заем в размере (таблица 6.5) на несколько лет. Существующая процентная ставка на момент выдачи займа 9%. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 2 года.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие кредиты считаются кратко, средне и долгосрочными?
2. Что такое срочные выплаты?
3. От каких параметров зависит величина срочных выплат?

4. Назовите варианты погашения долгосрочного кредита в рассрочку.
5. Что такое конверсия займов?
6. Что представляет собою грант-элемент?
7. Перечислите варианты льготных кредитов.

Тема 7. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Решение проблемы измерения и сравнения степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета условной годовой ставки для каждого вида операций с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения.

Расчетная процентная ставка, отражающая общую доходность финансовой операции, имеет различные названия. В простых депозитных и ссудных операциях она называется *эффективной,* в расчетах по оценке облигаций ее часто называют *полной доходностью,* в анализе производственных инвестиций для аналогичного по содержанию показателя применяется термин – *внутренняя норма доходности.* В целом для всех случаев, кроме анализа производственных инвестиций, эта годовая ставка называется – *полной доходностью.*

Минимальная полная доходность – это расчетная ставка процента, при которой капитализация всех видов доходов от операции равна сумме инвестиций и, следовательно, капиталовложения окупаются. Чем выше полная доходность, тем больше эффективность операции.

Ссудные операции. Доходность этих операций измеряется с помощью эквивалентной годовой ставки сложных процентов.
Условные обозначения:
D – размер ссуды;
n – срок ссуды, выраженный в годах;
G – сумма удержанных комиссионных;
$i_э$ – ставка полной доходности;
D – G – размер фактически выданной суммы.

Наращение величины D – G по ставке полной доходности $i_э$ должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке простых процентов – i, т.е.

$$(D-G)(1+i_э)^n = D(1+ni).$$

Так как сумма удержанных комиссионных G определяется в процентах от номинальной стоимости кредита D, то G=Dq, где q – доля комиссионных в сумме кредита, тогда:

$$i_э = \left(\frac{1+ni}{1-q}\right)^{1/n} - 1. \qquad (7.1)$$

Если полная доходность финансовой операции измеряется в виде ставки простых процентов, получим:

$$i_{эп} = \frac{1+ni}{(1-q)n} - 1. \qquad (7.2)$$

Когда ссуда выдается под сложные проценты i, то исходное уравнение для определения сложной процентной ставки полной доходности $i_э$, имеет вид:
$(D-G)(1+i_э)^n = D(1+i)^n$, откуда

$$i_э = \frac{1+i}{(1-q)^{1/n}} - 1. \qquad (7.3)$$

Пример 7.1 При выдаче ссуды на 200 дней под 12 % годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,8 % от суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов, если кредит выдан: а) по простым процентам; б) по сложным процентам.
Решение. По условию задачи: n = 200/365; i = 0,12; q = 0,008.
Используя формулы (7.1) и (7.2), получим:

а) $i_э = \left(\frac{1+0{,}12\cdot\frac{200}{365}}{1-0{,}008} \right)^{\frac{365}{200}} - 1 = 0{,}1398$ или 13,98%;

б) $i_э = \frac{1+0{,}12}{(1-0{,}008)^{365/200}} - 1 = 0{,}1365$ или 13,65%.

Учетные операции. При определении ставки доходности операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$**,** если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке d, с удержанием комиссионных и дисконта, то заемщик получит сумму D (1 – n'd – q) или D – Dn'd – Dq.
D – номинальная стоимость векселя;
Dn'd - дисконт;
G = Dq – сумма комиссионных удержаний;
d – простая учетная ставка;
n' - временной интервал между датой учета и датой погашения векселя.

Тогда D (1 – n'd – q) (1 + $i_э$)^n = D, отсюда:

$$i_э = (1 - n'd - q)^{-\frac{1}{n}} - 1. \qquad (7.4)$$

Если эффективность измеряется в виде ставки простых процентов – $i_{эп}$., то
D (1 – n'd – q) (1 + n$i_{эп}$) = D, отсюда

$$i_{эп} = \frac{1}{(1-n'd-q)n} - 1. \qquad (7.5)$$

Пример 7.2 Вексель учтен в банке по учетной ставке 8 % годовых за 90 дней до даты погашения. При учете с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 % (К=360 дней). Определить полную доходность операции по ставке сложных процентов.

Решение. По условию задачи $n' = \frac{90}{360}$, d = 0,08; q = 0,004.

$$i_э = (1 - \frac{90}{360} 0{,}08 - 0{,}004)^{-\frac{360}{90}} - 1 = 0{,}102 \text{ или } 10{,}2\%.$$

Покупка и продажа векселя (простая учетная ставка).

Если вексель или другое долговое обязательство через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить с помощью ставок простых и сложных процентов.

Финансовая результативность операции здесь связана с разностью цен купли-продажи, которые в свою очередь определяются сроками этих активов до погашения векселя и уровнем учетных ставок.

Обозначим:

S – номинал векселя;

К = 365 дней; К' = 360 дней;

d_1 – учетная ставка, по которой вексель был куплен;

t_1 – число дней до наступления срока погашения векселя;

t_2 – число дней, до продажи векселя;

d_2 – учетная ставка, по которой вексель был продан;

P_1 – цена векселя в момент его покупки (учета);

P_2 – цена продажи векселя;

$t_1 - t_2$ – время между моментом покупки и продажи векселя.

Доходность купли продажи (в виде ставки простых процентов $i_{эп}$).

$$i_{эп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1(t_1 - t_2)} \cdot K \text{ или } i_{эп} = \frac{(t_1 d_1 - t_2 d_2)}{(K' - t_1 d_1)} \cdot \frac{K}{(t_1 - t_2)} \quad (7.6)$$

При использовании годовой сложной процентной ставки доходность сделки составит:

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1 \text{ или } i_э = \left(\frac{K' - t_2 d_2}{K' - t_1 d_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1. \quad (7.7)$$

Пример 7.3 Вексель номинальной стоимостью 1 млн. руб. был учтен в банке за 120 дней до его погашения по учетной ставке 9%. Через 30 дней он был переучтен в другом банке по учетной ставке 8%. Определить эффективность данной операции в виде простой и сложной ставки.

Решение. По условию: S = 1 млн. руб., t_1 = 120 дней; t_2 = 120-30 = 90 дней; d_1 = 0,09; d_2 = 0,08.

Найдем эффективность сделки по формуле (7.6):

$$i_{эп} = \frac{(120 \cdot 0{,}09 - 90 \cdot 0{,}08)}{(360 - 120 \cdot 0{,}09)} \cdot \frac{365}{(120 - 90)} = 0{,}125.$$

Эффективность операции составляет 12,5%.

Если использовать ставку сложных процентов, то эффективность сделки определяется по формуле (7.7):

$$i_э = \left(\frac{360 - 90 \cdot 0{,}08}{360 - 120 \cdot 0{,}09}\right)^{\frac{365}{30}} - 1 = 0{,}133.$$

Эффективность операции составляет 13,3%.

Операции с депозитными сертификатами.

Если депозитный сертификат, или другой подобного рода краткосрочный инструмент, через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения вновь продан, то доходность такой операции можно измерить в виде ставки простых или сложных процентов.

Если сертификат с разовым начислением процентов, со сроком погашения t_1, покупается по номиналу, продается за t_2 дней до погашения, а процентная ставка сертификата изменилась с i_1 до i_2, то эффективность по простой ставке находится по формуле:

$$i_{эп} = \left(\frac{1 + \frac{t_1}{K} i_1}{1 + \frac{t_2}{K} i_2} - 1\right)\frac{K}{t_1 - t_2}, \text{ где К = 365 или 360 дней.} \quad (7.8)$$

Если мерой эффективности служит сложная процентная ставка, то:

$$i_э = \left(\frac{K + t_1 i_1}{K + t_2 i_2}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1. \quad (7.9)$$

Сертификат покупается после выпуска и погашается в конце срока:

P_1 – номинал финансового инструмента;

P_2 – цена приобретения финансового инструмента;

i – объявленная эмитентом процентная ставка.

$$i_{эп} = \left(P_1 \frac{1 + \frac{t_1}{K} i}{P_2} - 1\right)\frac{K}{t_2}; \quad (7.10)$$

$$i_э = \left(\frac{P_1\left(1 + \frac{t_1}{K} i\right)}{P_2}\right)^{365/t_2} - 1. \quad (7.11)$$

Пример 7.4 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 185 дней до срока его погашения и продан через 120 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была 15,0 %, в момент продажи – 12,7 %. Определить доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.

Решение. По условию t_1 = 185 дней, t_2 = 120 дней, i_1 = 0,15; i_2 = 0,127. Используем формулу (7.9)

$$i_э = \left(\frac{365 + 185 \cdot 0{,}15}{365 + 120 \cdot 0{,}127} \right)^{365/(185-120)} - 1 = 0{,}1993 \text{ или } 19{,}93\%.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1 Банк предоставил кредит в сумме 200 тыс. руб. на 250 дней под 18,0 % годовых простых процентов. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,8 % от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности простых и сложных процентов.

7.2 Банком предоставлен кредит на 300 дней под 12,0 % годовых в сумме 180 тыс. рублей. При выдаче кредита были удержаны комиссионные в сумме 0,5 %. Определите годовую ставку полной доходности сложных процентов, если проценты начислялись: а) по простым процентам; б) по сложным процентам.

7.3 Банком предоставлен кредит сроком на 5 лет в сумме 245 тыс. рублей, под 11,8 % годовых (проценты сложные). При выдаче кредита были удержаны комиссионные в размере 0,7% от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности операции по сложным процентам. На какую величину повысилась стоимость кредита для заемщика вследствие удержания комиссионных?

7.4 Вексель учтен в банке по учетной ставке 12,0 % годовых за 130 дней до его оплаты. При учете векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 %. Определите доходность операции в виде простых и сложных процентов.

7.5 Вексель куплен за 158 дней до его погашения с учетной ставкой 8,0 % годовых. Через 67 дней его реализовали по учетной ставке 7,3 %. Определите эффективность операции в виде простой и сложной ставки.

7.6 Вексель стоимостью 140 тыс. рублей учтен банком по учетной ставке 18,0 % годовых за 140 дней до оплаты. Через 60 дней банк переучел его в другом банке по учетной ставке 14,7 % годовых. Определите эффективность данной финансовой операции для банка по простой и сложной ставке. Как изменится эффективность операции, если переучет векселя проведен по учетной ставке 19,8 % годовых?

7.7 Банком выпущен депозитный сертификат номинальной стоимостью 400 тыс. рублей сроком на 11 месяцев по ставке 17,0 % годовых. Определите эффективность следующих финансовых операций:

- клиент приобрел сертификат по номиналу в момент его выпуска и продал его через 90 дней после приобретения по ставке 14,0 % годовых;
- клиент приобрел сертификат через 45 дней после его выпуска и погасил его в конце установленного срока;
- клиент приобрел сертификат через 50 дней после выпуска под 17,0 % годовых, а через 180 дней после приобретения реализовал его по ставке 15,8 % годовых.

7.8 Сертификат с номиналом 140 тыс. рублей, с объявленной доходностью 12,7 % (простые проценты) сроком 640 дней куплен за 165 тыс. рублей за 190 дней до его оплаты. Какова доходность инвестиции?

7.9 Денежный сертификат был приобретен за 170 дней до срока погашения в сумме 90 тыс. рублей и продан за 115 тыс. рублей через 90 дней. Определите доходность операции, если применялась простая и сложная ставка процентов.

7.10 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 250 дней до срока его погашения и продан через 140 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была равна 14,7 %, в момент продажи – 12,5 %. Определите доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под полной доходностью финансовой операции?
2. Как определяется годовая ставка полной доходности в виде ставки простых и сложных процентов?
3. Из какого уравнения выводится показатель доходности учетных операций?
4. Как определяется доходность операций с векселями?
5. Как оценивается доходность перепродажи депозитного сертификата?