**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И.Т. Трубилина»**

А.В. Огняник, Е.И. Трубилин, Е.Е. Самурганов, В.В. Цыбулевский

# МОДЕЛИРОВАНИЕ В АГРОИНЖЕНЕРИИ

**Практикум**

Краснодар
КубГАУ
2019

**Рецензент:**

**Е.И. Виневский** - доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторииолог механизации и агротехнологии ФГБНУ ВНИИТТИ

Моделировние в агроинженерии: практикум / сост. А.В. Огняник, Е.И. Трубилин, Е.Е. Самурганов, В.В. Цыбулевский – Краснодар: КубГАУ, 2019.- 61 с.

В практикуме представлены некоторые типичные задачи и кейс-задания компьютерного математического моделирования на примерах моделей в среде математического процессора MS Excel. Рекомендуется для аудиторной и самостоятельной работы.

Предназначены для магистрантов направления подготовки 35.04.06 «Агроинженерия», очной и заочной форм обучения.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией факультета механизации, протокол № 6 от 26.11.2019.

Председатель методической комиссии, доцент В.Ю. Фролов

СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Под моделью мы понимаем систему, неотличимую от моделируемого объекта в отношении некоторых свойств, которые полагают существенными, и отличимую по всем остальным свойствам, которые полагаются несущественными; при этом отсутствие в модели несущественных элементов не менее важно, чем присутствие в ней существенных.

Исходный объект и его модель понимаются как системы. Понятие системы в свою очередь предполагает: наличие элементов, ее составляющих, наличие связей между ними; целостность системы, наличие свойств и у модели и у ее объекта, которые проявляются как через отношения между элементами модели, так и через отношения с внешними объектами.

Модели нужны для того, чтобы:

1. понять сущность изучаемого объекта: какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром;
2. научиться управлять объектом или процессом и определить наилучшие способы управления при заданных целях и категориях;
3. прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект;
4. решать прикладные задачи.

Моделирование - процесс создания и исследования модели.

Адекватность – это степень соответствия модели представляемому объекту.

Классификация моделей. Богатство содержания реальных задач и объектов и способов их моделирования порождает массу оснований для классификации. Выделим содержание признаков важных для компьютерного моделирования:

- дискретность и непрерывность;
- случайность и детерминированность;
- матричность – скалярность;
- статичность – динамичность.

Модели делятся на:

- аналитические (описание процессов формулами и уравнениями);
- имитационные (отображение реальной системы в памяти компьютера с учетом связей между элементами памяти);
- информационные (математические, алгоритмические);
- предметные;
- образно – знаковые (модель в уме человека);
- масштабные модели.

В основу темы компьютерное математическое моделирование в среде математического процессора MS Excel положено решение прикладных задач из разных областей знаний и практической деятельности. Эти задания, от простого моделирования до исследовательских проектов, могут быть положены, в основу длительной самостоятельной работы.

В данной работе на примерах моделей из разных областей познания, показаны некоторые типичные задачи компьютерного математического моделирования.

## ТЕМА 1. Обработка вариационных рядов

Результаты экспериментальных измерений при испытании сельскохозяйственных машин представляют набор данных имеющих разброс относительно средней величины. Измеряемая случайная величина должна подчиняться нормальному закону распределения (кривая Гауса). Набор случайных величин варьирующих относительно средней величины принято называть вариационным рядом. Непосредственно по вариационному ряду трудно оценить качественный процесс и характер распределения случайной величины. Для оценки вариационного ряда существует методика статистической обработки случайных величин.

Важная качественная характеристика вариационного ряда – средняя арифметическая. Средняя арифметическая вариационного ряда представляет наиболее вероятностное значение измеряемой величины при данном количестве измерений.

Средняя арифметическая определяется по выражению [1,2]

$$X_{ср} = \frac{\sum x_i}{n}, \qquad (1)$$

где $X_{ср}$ – средняя арифметическая измеряемой величины;

$x_i$ – значение i- измеряемой величины;

n – число измерений.

Отклонение случайной величины от средней оценивают средне квадратическим отклонением. Среднее квадратическое отклонение представляет абсолютную величину, выраженную в единицах того же наименования [2 ].

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - X_{cp})^2}{n-1}}, \qquad (2)$$

Отклонение измеряемой величины от средней проводится по величине относительной изменчивости. Величину отклонения измеряемой величины от средней арифметической принято называть коэффициентом вариации [2].

$$V = \frac{100\sigma}{X_{cp}}, \qquad (3)$$

где V- коэффициент вариации измеряемой величины, проц.

Средняя ошибка средней арифметической оценивается выражением [2 ]

$$m = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

Единица измерения средней ошибки имеет размерность измеряемой величины.

В ходе измерения случайной величины получен интервал, в котором заключены значения измеряемой величины $X_{ср} \pm m$.

Отклонение средней ошибки от средней арифметической принято называть показателем точности [2]

$$P = \pm \frac{100m}{X_{cp}} \qquad (5)$$

где Р - показатель точности измеряемой величины, проц.

Измерения являются достоверными, если показатель точности менее 5%.

Необходимое число измерений случайной величины для обеспечения достаточной точности определяется по выражению [2]

$$n \geq \left(\frac{1{,}96V}{P}\right)^2 \qquad (6)$$

где Р – показатель точности измеряемой величины, не более 5%.

Для анализа и упрощения статистической обработки, данных измерений проводят разбивку вариационного ряда на классы с одинаковой величиной интервалов. Величина интервала определяется по формуле[2 ]

$$\Delta x = (X_{max} - X_{min})(1+3{,}322lqn) \qquad (7)$$

где $\Delta x$ – величина классового интервала случайной величины;

$X_{max}$ , $X_{min}$ – наибольшее и наименьшее значение результата замера измеряемой величины;

n – число измерений.

При количестве замеров 20…30 число классов должно составлять 5…7. При количестве замеров 30 …100 число классов 7…9 и при количестве замеров 100…200 число классов 9…12.

Разбивка вариационного ряда на классы позволяет оценить экспериментальное и теоретическое распределение. Экспериментальное распределение должно соответствовать теоретическому (нормальному) распределению. Близость этих распределений позволяет заключить, что погрешности измерений вызваны одинаковыми причинами.

Оценка экспериментального распределения к теоретическому проводится по критерию согласия Пирсона $\chi^2$. Если при заданном уровне точности (принимается 5%) расчетное значение $\chi^2$ меньше табличного, то наблюдаемые частоты распределены нормально.

**Цель работы**: освоить методику обработки вариационных рядов полученных при испытании сельскохозяйственных машин.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя результаты замеров случайной величины не менее 20 значений и поместить в таблицу 1.

Таблица 1 – Данные измерения случайной величины

| Номер замера | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Значение величины | | | | | | | | | | | | |

2. Определить по формуле 1 среднее значение измеряемой величины $x_{ср}$ представляющее собой среднее арифметическое.

3. Выписать из таблицы 1 наибольшее значение $X_{max}$ и наименьшее значение $X_{min}$ измеряемой величины.

4. Определить величину классового интервала по формуле

$$\Delta x = (x_{max} - x_{min})/(1+3{,}322lqn)$$

5. Сгруппировать по интервалам результаты измерений и поместить в таблицу 2. В первой графе указывают меньшее и большее значение интервала. Последующая граница интервала определяется по алгоритму, представленному в таблице 2. При этом большее значение границы предыдущего интервала является меньшим значением границы последующего интервала.

Таблица 2- Данные вариационного ряда

| Граница интервала, мм | Центр интервала, $x_{цi}$ | Подсчет частот | Частота |
|---|---|---|---|
| $x_{min} \dots x_{min} + \Delta x$ | $x_1$ | | $f_1$ |
| $x_{min} + \Delta x \dots x_{min} + 2\Delta x$ | $x_2$ | | $f_2$ |
| $x_{min} + 2\Delta x \dots x_{min} + 3\Delta x$ | $x_3$ | | $f_3$ |
| $x_{min} + 3\Delta x \dots x_{min} + 4\Delta x$ | $x_4$ | | $f_4$ |
| | | | |

ИТОГО $n = \Sigma f = n$

Во втором столбце таблицы 2 указывают центр интервала представляющий собой среднее арифметическое меньшего и большего значения границ интервала.

В третьем столбце подсчитывается число измерений попавших в рассматриваемый интервал из общего числа измерений. Каждое значение измеряемой величины заключенное в интервале помечается вертикальной чертой.

В четвертом столбце таблицы 2 проставляют число вертикальных черточек представляющих частоту повторения измеряемой величины в интервале.

Таблица 3- Обработка вариационного ряда

| $x_i$ | $f$ | $x_i \cdot f$ | $x_i - x_{ср}$ | $(x_i - x_{ср})^2$ | $f \cdot (x_i - x_{ср})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f_1$ | $x_1 \cdot f_1$ | $x_1 - x_{ср}$ | $(x_1 - x_{ср})^2$ | |
| $x_2$ | $f_2$ | $x_2 \cdot f_2$ | $x_2 - x_{ср}$ | $(x_2 - x_{ср})^2$ | |
| $x_3$ | $f_3$ | $x_3 \cdot f_3$ | $x_3 - x_{ср}$ | $(x_3 - x_{ср})^2$ | |

Определить среднюю арифметическую вариационного ряда [2]

$$X_{ср} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum n}$$

Определить среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - X_{ср})^2}{n-1}}$$

Определить коэффициент вариации по формуле

$$V = \frac{100\sigma}{X_{ср}}.$$

Определить среднюю ошибку средней арифметической

$$m = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Определить показатель точности измеряемой величины

$$P = \pm \frac{100m}{X_{ср}}$$

где P - показатель точности измеряемой величины, проц.

Измерения являются достоверными, если показатель точности менее 5%.

Количество измерений для обеспечения достаточной точности определяется по выражению

$$n \geq \left(\frac{1{,}96V}{P}\right)^2$$

На основе представленных расчетов сделать вывод о достаточности представленных замеров и их точности.

2. Сравнение эмпирического распределения с теоретическим

Для построения эмпирического распределения с нормальным определяется путем определения критерия согласия $\chi^2$ Пирсона. Значение критерия согласия представляет сумму по всем классам квадратов разностей между наблюдаемыми частотами и ожидаемыми частотами отнесенная к ожидаемой частоте.

Таблица 4 - Сравнение эмпирического распределения с нормальным

| f | $x_{цi}$-$x_{ср}$ | $t = \frac{x_{цi} - X_{ср}}{\sigma}$ | φ(t) | $f^1$ | $f - f^1$ | $(f - f^1)^2$ | $\frac{(f - f^1)}{f^1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $x_{ц1}$-$x_{ср}$ | $\frac{x_{ц1} - X_{ср}}{\sigma}$ | | | | | |
| $f_2$ | $x_{ц2}$-$x_{ср}$ | $\frac{x_{ц2} - X_{ср}}{\sigma}$ | | | | | |
| $f_3$ | $x_{ц3}$-$x_{ср}$ | $\frac{x_{ц3} - X_{ср}}{\sigma}$ | | | | | |

В первый столбец таблицы переносят частоты повторения измеряемой величины. Для каждой частоты определяют вычисленное нормированное отклонение t в каждой строке таблицы 4 (графа 2).

Из Приложения А выписывают ординаты стандартной нормальной кривой распределения φ( t ) (графа 3).

Ожидаемая (расчетная по итогам измерения) частота $f^1$ определяется по выражению

$$f^1 = \frac{n \cdot \Delta X}{\sigma}\varphi(t),$$

где $f^1$ – ожидаемая частота;

n – число измерений случайной величины $n=\sum f$;

Δx – величина классового интервала, мм;

σ – среднее квадратическое отклонение, мм;

φ(t) – ординаты нормированного нормального распределения.

Результат расчета $f^1$ помещают в пятую графу таблицы 4.

Проводят сравнение эмпирического и теоретического распределения случайной величины по критерию согласия Пирсона

$$\chi^2_p = \sum_1^k \frac{(f - f^1)^2}{f^1},$$

где $\chi^2_р$ – критерий согласия, вычисленный по эмпирическим данным (расчетный);

f, $f^1$ – частота соответственно наблюдаемая (экспериментальная) и ожидаемая (теоретическая);

k – число классов (строк).

Теоретическое значение $\chi^2$ критерия согласия при 5-% уровне значимости для числа степеней свободы $\nu = k - 2$ приведено в Приложении Б. Гипотеза о нормальности распределения эмпирических данных принимается, если соблюдается условие

$$\chi_p^2 \leq \chi_T^2$$

где $\chi_p^2, \chi_T^2$ - критерий согласия Пирсона соответственно расчетный и табличный.

По результатам расчета построить график распределения теоретический и экспериментальный.

Таблица 5-Данные к построению графиков распределения случайной величины

| Средина интервала распределения случайной величины | Ожидаемая частота распределения | Наблюдаемая частота распределения |
|---|---|---|
| $x_1$ | $f_1$ | $f_1^1$ |
| $x_2$ | $f_2$ | $f_2^1$ |
| $x_i$ | $f_i$ | $f_i^1$ |

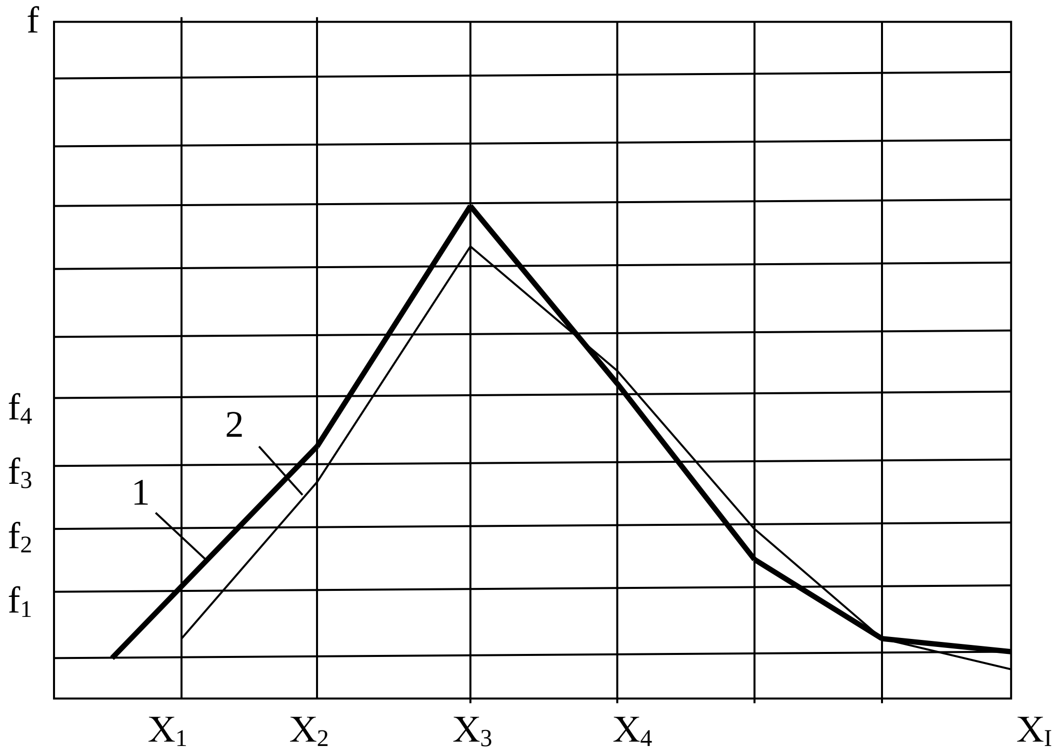



Рисунок 1 – Кривая распределения результатов распределения
1- эмпирическая; 2- теоретическая.

## ТЕМА 2. Моделирование корреляционных зависимостей

**Корреляционная зависимость** - это вероятностная зависимость между величинами, которая возникает тогда, когда одна из величин зависит не только от данной второй, но и от ряда случайных факторов, или когда среди условий, от которых зависят та и другая величины, имеются общие для них обоих условия.

То есть корреляционная зависимость отличается от функциональной зависимости, при которой одна величина зависит только от второй и возникает взаимно-однозначное соответствие: значению одной величины соответствует строго определённое значение второй величины. Поэтому, хотя и при корреляционной зависимости результаты наблюдения находятся на некотором приближении к прямой линии, они не лежат на прямой, а лишь приближаются к ней (рисунок 2).

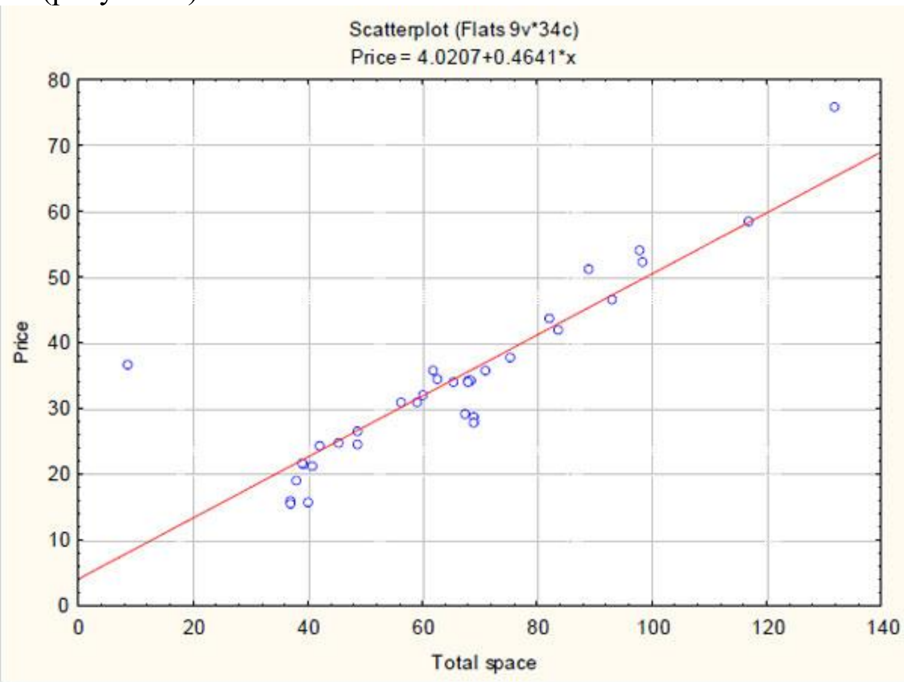



Рисунок 2 – Корреляционная зависимость

Понятие корреляционной зависимости проиллюстрируем на примере из так любимой многими темы цен на недвижимость. По некоторой выборке обобщены данные об общей площади квартир и ценах на квартиры. На оси $O_x$ задана общая площадь квартир, а на оси $O_y$ - цены на квартиры. Точки на графике (рисунок 2) - результаты выборочного наблюдения.

На графике видно, что результаты наблюдения находятся на некотором приближении к прямой. Поэтому можно утверждать, что между признаками (общей площадью квартиры и ценой квартиры) существует зависимость. А именно: чем больше общая площадь квартиры, тем выше цена. Но результаты наблюдения располагаются не строго на прямой, поэтому нельзя утверждать, что каждой определённой величине площади квартиры в квадратных метрах соответствует строго определённая величина цены. Значит, мы говорим, что зависимость между признаками - корреляционная.

Пусть обобщены и данные о площади кухни квартир и ценами квартир. На оси $O_x$ задана площадь кухни, а на оси $O_y$ - цены на квартиры (рисунок 3). Для увеличения рисунка нужно щёлкнуть по нему левой кнопкой мыши.

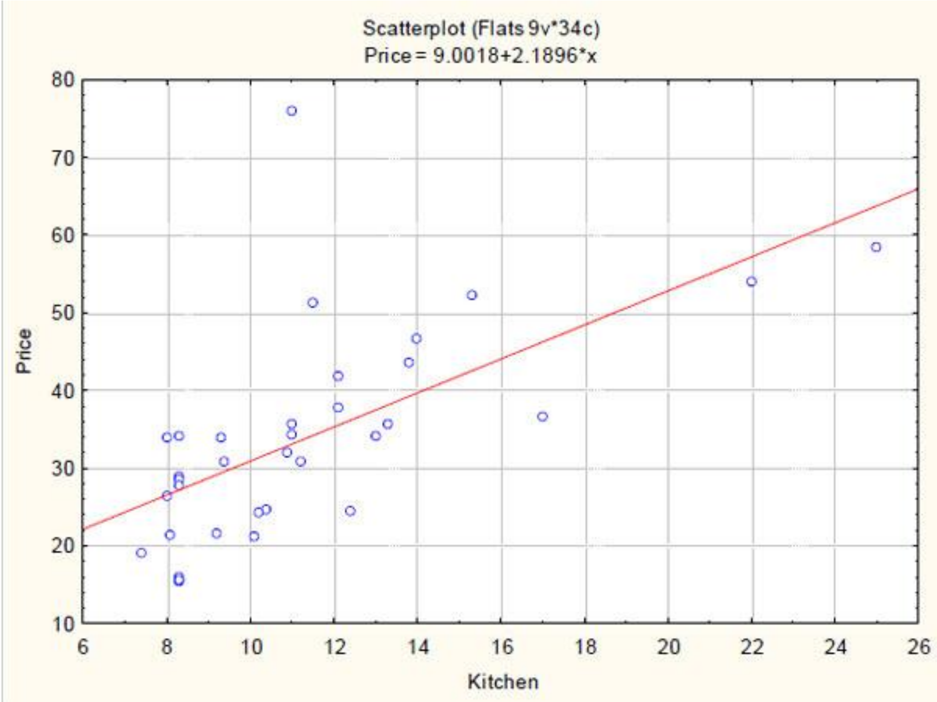



Рисунок 3 – Корреляционная зависимость

Видим, что результаты наблюдений также выстраиваются на некотором приближении к прямой. Но в случае с площадью кухни отклонения результатов наблюдения от прямой несколько больше, чем в случае с общей площадью. Между тем здесь мы также наблюдаем корреляционную зависимость и можно утверждать, что чем больше площадь кухни, тем выше цена квартиры.

В этих двух случаях мы наблюдаем корреляционные зависимости разной интенсивности или тесноты. В случае общей площади квартиры зависимости более интенсивная (тесная), а в случае с площадью кухни - менее интенсивная (тесная).

В описанных случаях случайная величина Y (цена квартиры) - зависимая переменная, а случайна величина X (общая площадь квартиры или площадь кухни) - независимая переменная.

**Цель работы**: освоить методику обработки корреляционных зависимостей полученных при оценке стажа работников.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Создайте на рабочем столе файл под названием «Работники» и заполните его согласно варианта выданного преподавателем.

В данной таблице представлен список работников с указанием стажа работы до приёма на эту работу и после приёма, а также указана заработная плата.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | № п.п. | ФИО | Должность | Стаж работы до приёма на работу в данную организацию | Стаж работы в данной организации | Общий стаж работы | Зарплата |
| 2 | 1 | Бельтюков М.И. | Директор | 9 | 5 | | 20000 |
| 3 | 2 | Борисова А.В. | Заместитель | 5 | 0 | | 12000 |
| 4 | 3 | Брусницын А.П. | Водитель | 8 | 3 | | 8000 |
| 5 | 4 | Загидуллина С.М. | Уборщица | 15 | 15 | | 5000 |
| 6 | 5 | Залевский Е.Ф. | Дворник | 15 | 5 | | 5500 |
| 7 | 6 | Конакова А.А. | Секретарь | 20 | 9 | | 6000 |
| 8 | 7 | Куликова С.С. | Бухгалтер | 15 | 15 | | 9000 |
| 9 | 8 | Макаришин В.В. | Библиотекарь | 25 | 4 | | 3000 |
| 10 | 9 | Мезюров А.А. | Охранник | 20 | 4 | | 14000 |
| 11 | **Максимальная зарплата** | | | | | | |
| 12 | **Минимальная зарплата** | | | | | | |
| 13 | **Среднее количество лет** | | | | | | |
| 14 | **Максимальное количество лет** | | | | | | |
| 15 | **Минимальное количество лет** | | | | | | |
| 16 | **Корреляция общий стаж** | | | | | | |

Рисунок 4 - Таблица задания

**Задание 1.** Заполнить столбец Общий стаж работы. Для этого в ячейку **F2** необходимо ввести формулу **=D2+E2**, затем скопировать формулу методом протаскивания сверху вниз, для того чтобы просчитать общий стаж по всем ячейкам данного столбца. В итоге для каждого сотрудника должен быть рассчитан общий стаж.

**Задание 2.** Рассчитать максимальную зарплату. В ячейку **G11** ввести формулу = **МАКС(G2:G10)**. В результате в ячейке должна быть отражена максимальная зарплата.

**Задание 3.** Рассчитать минимальную зарплату. В ячейку **G12** ввести формулу = **МИН(G2:G10)**. В результате в ячейке должна быть отражена минимальная зарплата.

**Задание 4.** Рассчитать среднее количество лет стажа работников по трём столбца: **D, E, F**. Для этого в ячейку **D13** введите формулу **=СРЗНАЧ(D2:D9)**, методом протаскивания слева направо скопируйте формулу в ячейки **E13, F13**.

**Задание 5.** Рассчитать максимальное количество лет по трём столбца: **D, E, F**. Для этого в ячейку **D14** введите формулу **=МАКС(D2:D9)**, методом протаскивания слева направо скопируйте формулу в ячейки **E14, F14**.

**Задание 6.** Рассчитать минимальное количество лет по трём столбца: **D, E, F**. Для этого в ячейку **D15** введите формулу **=МИН(D2:D9)**, методом протаскивания слева направо скопируйте формулу в ячейки **E15, F15**.

**Задание 7.** Рассчитать корреляционную зависимость. Зависимость заработной платы от общего стажа работников.

Для этого в ячейку **C16** введите формулу **= КОРРЕЛ(F2:F9;G2:G9).**

**Задание 8.** Постройте точечную диаграмму.

Выделите количественные данные в столбцах **F** и **G** нажмите вставка- диаграмма- точечная. Добавьте названия осей.

**Задание 9.** Добавьте линейную линию тренда. Диаграмма – добавить линию тренда – тип - линейная

**Задание 10.** Добавьте ещё 3 столбца по образцу.

| G | H | I | J |
|---|---|---|---|
| Зарплата | Стаж работы до 10 лет | Стаж работы от 10 до 15 лет | Стаж работы более 20 лет |
| 20000 | | | |

Рисунок 4 - Таблица задания

Посчитайте сколько сотрудников должно быть и вставьте количество по столбцам. Посчитайте сколько процентов приходится для каждого критерия.

Для этого в ячейку **H3** введите формулу **=H2/9**. Методом протаскивания скопируйте её в ячейки **I3, J3**.

Выделите полученные три числа и поменяйте тип данных на процентный.

**Задание 11.** Постройте диаграмму для последнего результата.

Выделите полученный диапазон ячеек. Нажмите вставка – диаграмма – круговая – объёмная – добавить.

## ТЕМА 3. Моделирование смешанных задач.

Модели (целевая функция и ограничения) смешанных задач.

Рассмотрим одну из частных задач линейного программирования, заданную моделью:

- целевая функция:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$$

- ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0;\ i = 1 \div n \\ b_j \ge 0;\ j = 1 \div m. \end{cases}$$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах компонентов, их себестоимости, октановом числе и содержании серы приведены в таблице 1

Таблица 1 – Исходные данные

| Характеристика | Компоненты бензина | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 вид | 2 вид | 3 вид | 4 вид |
| Октановое число | 68 | 72 | 80 | 90 |
| Содержание серы, % | 0,35 | 0,35 | 0,3 | 0,2 |
| Ресурсы | 700 | 600 | 500 | 300 |
| Себестоимость, ден. ед/т.. | 40 | 45 | 60 | 70 |

Сколько тонн каждого компонента надо использовать для получения 1000 т. автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

**Построение экономико-математической модели**

Обозначим через $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$,– количества тонн компонентов 1,2,3 и4 тогда целевая функция будет иметь вид:

$F(X) = 40X_1+45X_2+60X_3+70X_4 \rightarrow \min$,

ограничения по количеству

$X_1+X_2+X_3+X_4=1000$,

$X_1<=700$

$X_2<=600$

$X_3<=500$

$X_4<=300$

ограничения по содержанию серы октановому числу

$0{,}0035X_1+0{,}0035X_2+0{,}003X_3+0{,}002X_4 <=3$

$68X_1+72X_2+80X_3+90X_4>=76\ 000$

Окончательно модель примет вид

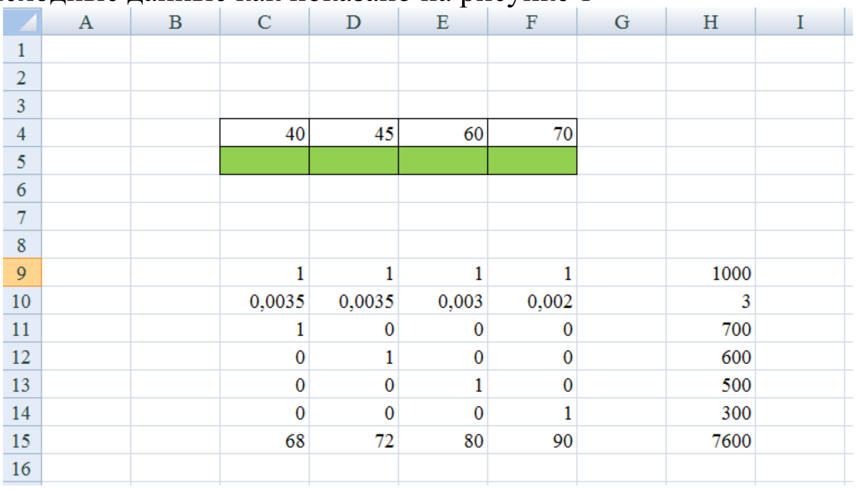
$F(X) = 40X_1+45X_2+60X_3+70X_4 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4=1000, \\ X_1<=700 \\ X_2<=600 \\ X_3<=500 \\ X_4<=300 \\ 0{,}0035X_1+0{,}0035X_2+0{,}003X_3+0{,}002X_4<=3 \\ 68X_1+72X_2+80X_3+90X_4>=76\ 000 \\ X_i>=0 \end{cases}$$

**Решение задачи в Excel.**

Решение задачи выполним с помощью надстройки Excel Поиск решения. В нашей задаче оптимальные значения вектора X=(X1, X2, X3, X4,) будут помещены в ячейках C5:F5, оптимальное значение целевой функции – в ячейке H7.

Введем исходные данные как показано на рисунке 1



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | 40 | 45 | 60 | 70 | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1000 | |
| 10 | | | 0,0035 | 0,0035 | 0,003 | 0,002 | | 3 | |
| 11 | | | 1 | 0 | 0 | 0 | | 700 | |
| 12 | | | 0 | 1 | 0 | 0 | | 600 | |
| 13 | | | 0 | 0 | 1 | 0 | | 500 | |
| 14 | | | 0 | 0 | 0 | 1 | | 300 | |
| 15 | | | 68 | 72 | 80 | 90 | | 7600 | |
| 16 | | | | | | | | | |

Рисунок 1 - Фрагмент исходного рабочего листа Excel

Сначала задаем в ячейке H7 целевую функцию с помощью функции – =СУММПРОИЗВ(C4:F4;C5:F5). А потом ввели данные для левых частей ограничений. В ячейках вводим G9, G10 и т. д. G15формулы соответственно:

=СУММПРОИЗВ(C5:F5;C9:F9)

=СУММПРОИЗВ(C5:F5;C10:F10)

=СУММПРОИЗВ(C5:F5;C15:F15)

для вычисления левых частей ограничений

Вызываем Поиск решения и вводим направление целевой функции, адреса искомых переменных, добавим ограничения. На экране появилось диалоговое окно Поиск решения с введенными условиями (рисунок 2).

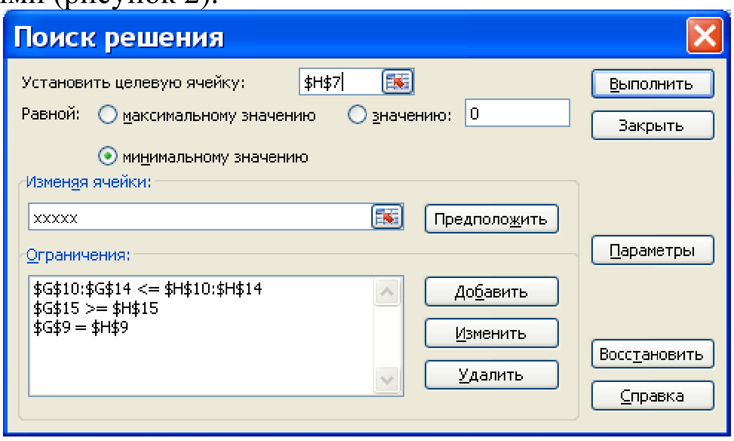


Рисунок 2 - Диалоговое окно Поиск решения

Вводим ограничения и параметры поиска задачи (см. рисунок 3 и 4).

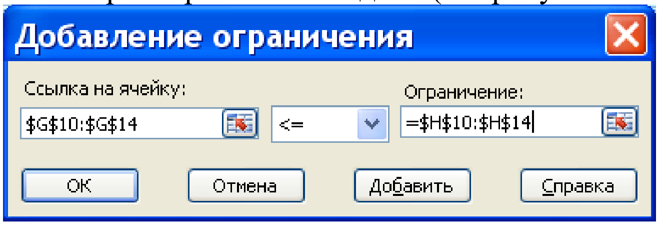



Рисунок 3 - Диалоговое окно «Добавление ограничений»

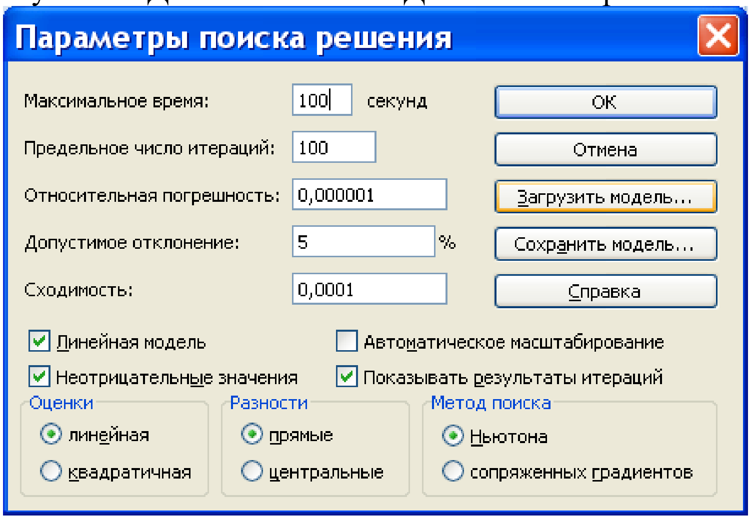



Рисунок 4 – Параметры поиска решения

После ввода параметров для решения ЗЛП следует нажать кнопку Выполнить. На экране появится сообщение, что решение найдено (рисунок 5 и 6).

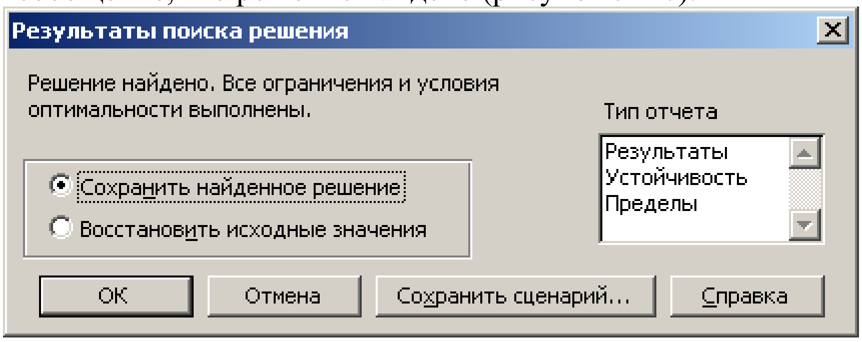



Рисунок 6 - Решение найдено

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | 40 | 45 | 60 | 70 | | |
| 5 | | | 600 | 0 | 100 | 300 | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | F= | 51000 |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1000 | 1000 |
| 10 | | | 0,0035 | 0,0035 | 0,003 | 0,002 | 3 | 3 |
| 11 | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 600 | 700 |
| 12 | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 600 |
| 13 | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 100 | 500 |
| 14 | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 300 | 300 |
| 15 | | | 68 | 72 | 80 | 90 | 75800 | 7600 |
| 16 | | | | | | | | |

Рисунок 6 - Решение задачи

Полученное решение означает, что оптимальная смесь состоит из 600 т. компонента 1 вида, 100 т. компонента 3 вида, 300 т. компонента 4 вида. Минимальная стоимость равна 51 000 ден. ед.

## 2 Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей: X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч. в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y — 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ф. ст., а от производства одной детали типа Y — 40 ф. ст.?

***Решение***

Сначала необходимо сформировать модель задачи линейного программирования.

*1.* Идентификация переменных. Необходимо произвести x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю.

*2.* Какова цель задачи? Каковы ограничения на процесс производства? Цель состоит в максимизации общего дохода за неделю. Производственный процесс ограничивается уровнем:

а) фонда рабочего времени — максимально возможный фонд рабочего времени составляет 4000 чел. -ч. в неделю.

б) производственной мощности — для каждого типа деталей существует отдельное ограничение по производственной мощности. Оборудование позволяет выпускать не более 2250 деталей типа X и 1750 типа Y в неделю.

в) металлических стержней — максимальный их уровень составляет 10000 кг в неделю.

г) листового металла — максимальный уровень этого ресурса равен 10000 кг в неделю.

Кроме того, существуют ограничения на минимальный объем производства деталей каждого вида:

а) постоянные заказы — число произведенных деталей X должно быть достаточным для удовлетворения размера постоянных заказов.

б) Профсоюзное соглашение —общее число деталей (x + y) не должно быть ниже объема, предусмотренного соглашением.

*3.* Целевая функция. Пусть F — общий доход за неделю, ф. ст., где

$$F = 30x + 40y \text{ (ф. ст. в неделю).}$$

*4.* Ограничения на производственный процесс. Для каждого ограничения на ресурсы, необходимые для производства x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю, ниже приведены количества и соответствующие им максимальные уровни наличных ресурсов.

Требуемый фонд рабочего времени: x + 2 y S 4000 чел.-ч.

Требуемая производственная мощность: $x \le 2250$ деталей

$y \le 1750$ деталей

Требуемое количество металлических стержней: $2x + 5y \le 10000$ кг

Требуемое количество листового металла: $5x + 2y \le 10000$ кг
Постоянные заказы: $x \ge 600$ деталей
Профсоюзное соглашение: $x + y \ge 1500$ деталей
Условие неотрицательности: $x, y \ge 0$

Окончательная формулировка задачи линейного программирования имеет виды
Производится x деталей типа X и y деталей типа У в неделю.
Максимизировать: $F=30x+40y$(ф.ст.)
при ограничениях:

Фонд рабочего времени: $1x + 2y \le 4000$ чел.-ч
Производственная мощность: $x \le 2250$ деталей
$y \le 1750$ деталей
Металлические стержни: $2x + 5y \le 10000$ кг
Листовой металл: $5x + 2y \le 10000$ кг
Постоянные заказы: $x \ge 600$ деталей
Профсоюзное соглашение: $x + y \ge 1500$ деталей |
Условие неотрицательности: $x, y \ge 0$

**Задача 2.** На имеющихся у фермера 400 гектарах земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требует на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед.. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.
Фермеру хотелось бы знать, сколько гектар нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

**Задача 3.** Перед проектировщиком автомобиля поставлена задача сконструировать дешёвый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу, стоимость которых соответственно составляет 25, 20, 40 р./м2; причём масса 1 м2 листового металла, стекла и пластмассы равна соответственно 10, 15, 3 кг. Совместная общая поверхность кузова вместе с дверями и окнами должна составлять 14 м2; из них не менее 4 м2 и не более 5 м2 следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг. Сколько листового металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший план ?

## ТЕМА 4. Моделирование оптимизационных задач

**Цель работы:** Изучить возможности надстройки «Поиск решения» Excel на примере решения оптимизационных задач.

**Теоретическая часть**

Среди оптимизационных задач экономики и управления производством наиболее известны задачи линейного программирования, в которых максимизируемая (минимизируемая) функция F(X) является линейной, а ограничения G задаются линейными неравенствами.

Общая форма записи модели задачи линейного программирования имеет вид:

Целевая функция (ЦФ):

$$F(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max \text{ или } (\min),$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le (\ge,=) b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le (\ge,=) b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le (\ge,=) b_m, \\ x_1,x_2,\ldots x_k \ge 0\,(k \le n). \end{cases}$$

Прикладная программа Excel содержит достаточно мощное средство для решения задач оптимизации с учетом ограничений. Это так называемая надстройка «Поиск решения» (рисунок 1).

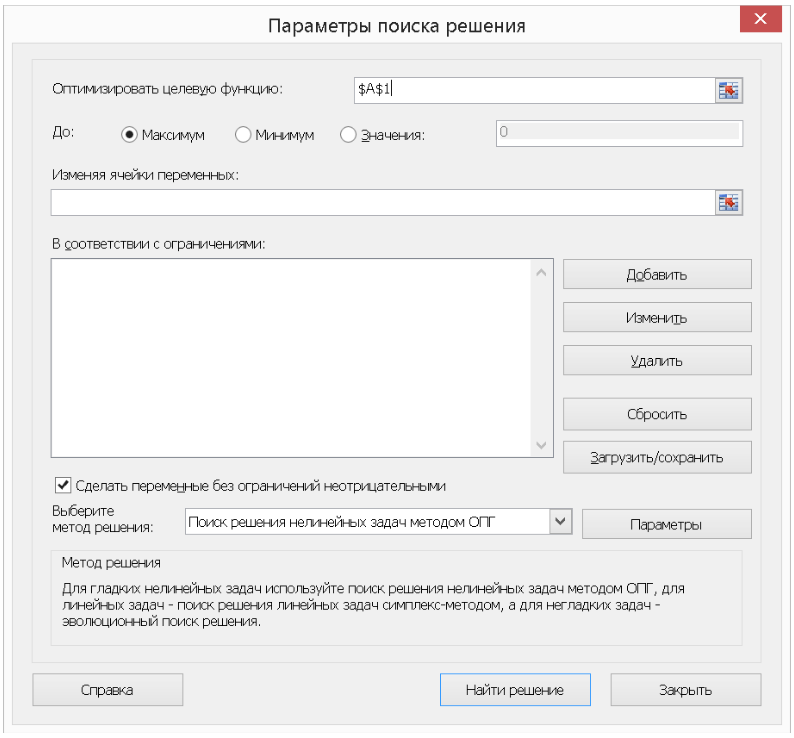



Рис. 1– Окно Параметры поиска решения

Искомые переменные - ячейки рабочего листа Excel - называются регулируемыми ячейками.

Целевая функция F(x1, x2, … , xn), называемая иногда просто целью или отклик, должна задаваться в виде формулы в ячейке рабочего листа. Эта формула может содержать функции, определенные пользователем, и должна зависеть (ссылаться) от регулируемых ячеек. В момент постановки задачи определяется, что делать с целевой функцией. Возможен выбор одного из вариантов:

- найти максимум целевой функции F(x1, x2, … , xn);
- найти минимум целевой функции F(x1, x2, … , xn);
- добиться того, чтобы целевая функция F(x1, x2, … , xn) имела фиксированное значение: F(x1, x2, … , xn) = a

Функции G(x1, x2, … , xn) называются ограничениями. Их можно задать как в виде равенств, так и неравенств.

На регулируемые ячейки (искомые параметры – x1, x2, … , xn) можно наложить дополнительные ограничения: неотрицательности и/или целочисленности, тогда решение ищется в области положительных и/или целых чисел (см. рис. 2).

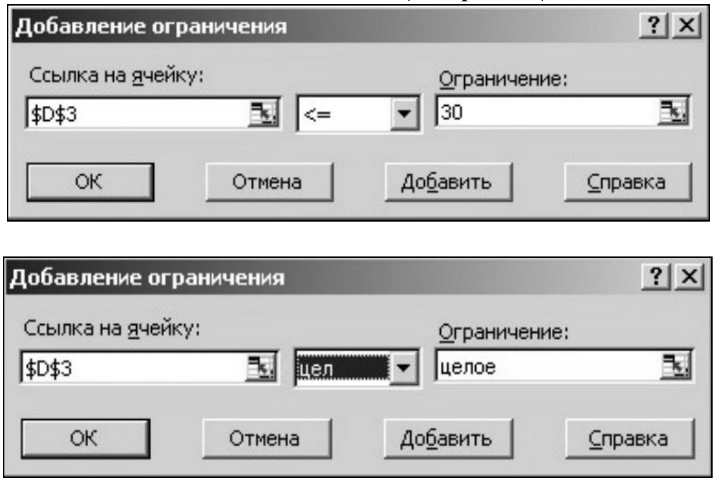



Рис. 2 – Определение ограничений

Под эту постановку попадает самый широкий круг задач оптимизации, в том числе решение различных уравнений и систем уравнений, задачи линейного (см. выше) и нелинейного программирования.

Управление диалоговым окном поиска решения осуществляется следующим образом (см. рис. 1):

| | |
|---|---|
| *Оптимизировать целевую ячейку:* | Служит для указания адреса целевой ячейки, в которую вводят целевую функцию, значение которой необходимо максимизировать, минимизировать или установить равным заданному числу. Эта ячейка обязательно должна содержать формулу для вычисления целевой функции. |
| *До:* | Служит для выбора варианта оптимизации значения целевой ячейки (максимизация, минимизация или подбор заданного значения). Чтобы установить значение, необходимо ввести его в поле справа. |
| *Изменяя ячейки переменных:* | Служит для указания ячеек, значения которых изменяются в процессе поиска решения до тех пор, пока не будут выполнены наложенные ограничения и условие оптимизации значения ячейки, указанной в поле *Оптимизировать целевую ячейку*. В этих ячейках долж- |

| | |
|---|---|
| | ны содержаться переменные из модели задачи. |
| *В соответствии с ограничениями:* | Служит для отображения списка граничных условий поставленной задачи. |
| *Найти решение* | Служит для запуска поиска решения поставленной задачи. |
| *Закрыть* | Служит для выхода из окна диалога без запуска поиска решения поставленной задачи. При этом сохраняются установки сделанные в окнах диалога. |
| *Параметры* | Служит для отображения диалогового окна Параметры поиска решения, в котором можно загрузить или сохранить оптимизируемую модель и указать предусмотренные варианты поиска решения. |
| *Выбор метода решения* | Служит для выбора одного из трех методов: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, Поиск решения линейных задач симплекс-методом или Эволюционный поиск решения. |

Можно изменять условия и варианты поиска решения для линейных и нелинейных задач, а также загружать и сохранять оптимизируемые модели. Значения и состояния элементов управления, используемые по умолчанию, подходят для решения большинства задач (см. рис. 4).

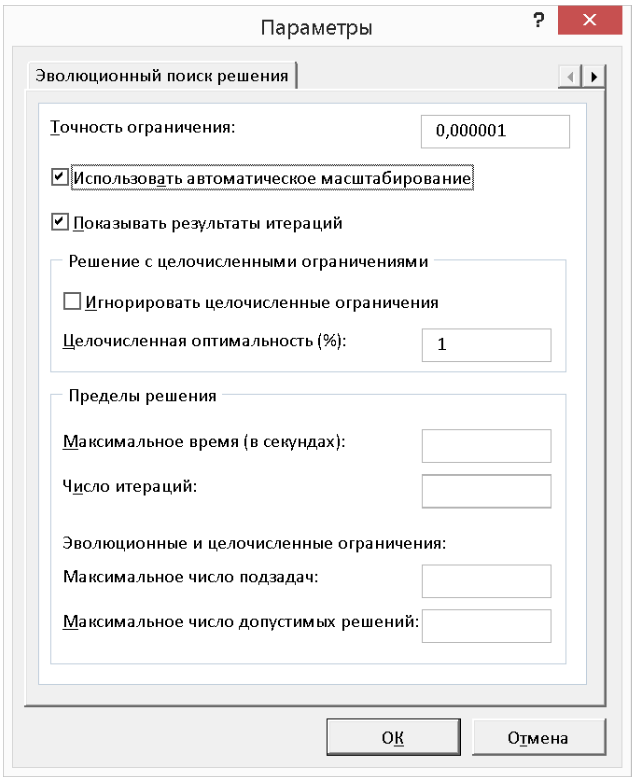



Рис.4 –Окно "Параметры"

*Максимальное время*

Служит для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время (в секундах) не превышающее 32767; значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства простых задач.

*Предельное число итераций*

Служит для управления временем решения задачи, путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести значение не превышающее 32767; значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства простых задач.

*Относительная погрешность*

Служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать десятичную дробь от 0 (нуля) до 1. Чем больше десятичных знаков в задаваемом числе, тем выше точность — например, число 0,0001 представлено с более высокой точностью, чем 0,01.

*Допустимое отклонение*

Служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

*Сходимость*

Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле Сходимость, поиск прекращается. Сходимость применяется только к нелинейным задачам, условием служит дробь из интервала от 0 (нуля) до 1. Лучшую сходимость характеризует большее количество десятичных знаков — например, 0,0001 соответствует меньшему относительному изменению по сравнению с 0,01. Лучшая сходимость требует больше времени на поиск оптимального решения.

*Линейная модель*

Служит для ускорения поиска решения линейной задачи оптимизации.

*Показывать результаты итераций*

Служит для приостановки поиска решения для просмотра результатов отдельных итераций.

*Автоматическое масштабирование*

Служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно различающихся по величине — например, максимизация прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемым в миллионах рублей.

*Неотрицательные значения*

Позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех влияющих ячеек, для которых она не была указана в поле Ограничение диалогового окна  Добавить ограничение

*Оценка*

Служит для указания метода экстраполяции — линейная или квадратичная — используемого для получения исходных оценок значений переменных в каждом одномерном поиске.

Линейная – служит для использования линейной экстраполяции вдоль касательного вектора.

Квадратичная – служит для использования квадратичной экстраполяции, которая дает лучшие результаты при решении нелинейных задач.

*Разности*

Служит для указания метода численного дифференцирования — прямые или центральные производные — который используется для вычисления частных производных целевых и ограничивающих функций.

Прямые – используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока.

Центральные – используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдается сообщение о том, что получить более точное решение не удается.

*Метод поиска*

Служит для выбора алгоритма оптимизации — метод Ньютона или сопряженных градиентов — для указания направление поиска.

Ньютона. Реализация квазиньютоновского метода, в котором запрашивается больше памяти, но выполняется меньше итераций, чем в методе сопряженных градиентов.

Сопряженных градиентов. Реализация метода сопряженных градиентов, в котором запрашивается меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно велика и необходимо экономить память, а также если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.

Утилита «Поиск решения» позволяет представлять результаты в виде трех отчетов: Результаты, Устойчивость и Пределы.

Для генерации одного или нескольких отчетов выделяются их названия в окне диалога Результаты поиска решения.

Отчет по устойчивости содержит информацию о том, насколько целевая ячейка чувствительна к изменениям ограничений и переменных. Этот отчет имеет два раздела: один для изменяемых ячеек, а второй для ограничений. Раздел для изменяемых ячеек содержит значение нормированного градиента, которое показывает, как целая ячейка реагирует на увеличение значения в соответствующей изменяемой ячейке на одну единицу. Подобным образом, множитель Лагранжа в разделе для ограничений показывает, как целевая ячейка реагирует на увеличение соответствующего значения ограничения на одну единицу.

Отчет по результатам содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления, во второй - значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи, в третьей - результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограничения, как статус и разница. Статус может принимать три состояния: связанное, несвязанное или невыполненное. Значение разницы - это разность между значением, выводимым в ячейке ограничения при получении решения, и числом, заданным в правой части формулы ограничения.

Отчет по пределам содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.

**Задание 1. Решить линейную оптимизационную задача.**

Фирма производит три вида продукции (A, B, C), для выпуска каждого требуется определенное время обработки на четырех устройствах.

| **Вид продукции** | **Время обработки, ч.** | | | | **Прибыль, у.е.** |
|---|---|---|---|---|---|
| | **I** | **II** | **III** | **IV** | |
| **A** | **1** | **3** | **1** | **2** | **3** |
| **B** | **6** | **1** | **3** | **3** | **6** |
| **C** | **3** | **3** | **2** | **4** | **4** |

Максимально допустимое время работы на устройствах I, II, III, IV составляет соответственно 84, 42, 21 и 42 часа.

Требуется рассчитать план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

Решение.

Разместим таблицу с исходными данными в ячейках A1:G9 Рабочего листа Excel и выполним необходимые предварительные расчеты (см. рис. 5).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Вид продукции | Время обработки, ч. | | | | Прибыль, у.е. | Количество |
| 2 | | I | II | III | IV | | |
| 3 | A | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 4 | B | 6 | 1 | 3 | 3 | 6 | 0 |
| 5 | C | 3 | 3 | 2 | 4 | 4 | 0 |
| 6 | | | | | | 0 | |
| 7 | Время | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | Ограничения | 84 | 42 | 21 | 42 | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Вид | Время обработки, ч. | | | | Прибыль, у.е. | Колич |
| 2 | продукции | I | II | III | IV | | |
| 3 | A | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 4 | B | 6 | 1 | 3 | 3 | 6 | 0 |
| 5 | C | 3 | 3 | 2 | 4 | 4 | 0 |
| 6 | | | | | | =СУММПРОИЗВ(F3:F5;G3:G5) | |
| 7 | Время | =СУММПРОИЗВ(B3:B5;$G$3:$G$5) | =СУММПРОИЗВ(C3:C5; | =СУММПР | =СУММПР | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | Ограничен | 84 | 42 | 21 | 42 | | |

Рис. 5 – Исходные данные оптимизационной задачи

Отыскать решение задачи, приняв следующие условия:
1. Общая итоговая прибыль (F6) => max
Количество изделий (G3:G5)- целое и неотрицательное число
Баланс времени по каждому устройству (B7:E7) <= (B9:E9)
Изменению подлежат: количество изделий (G3:G5)

Окончательный вид формулировки задачи представлен на рис. 6:

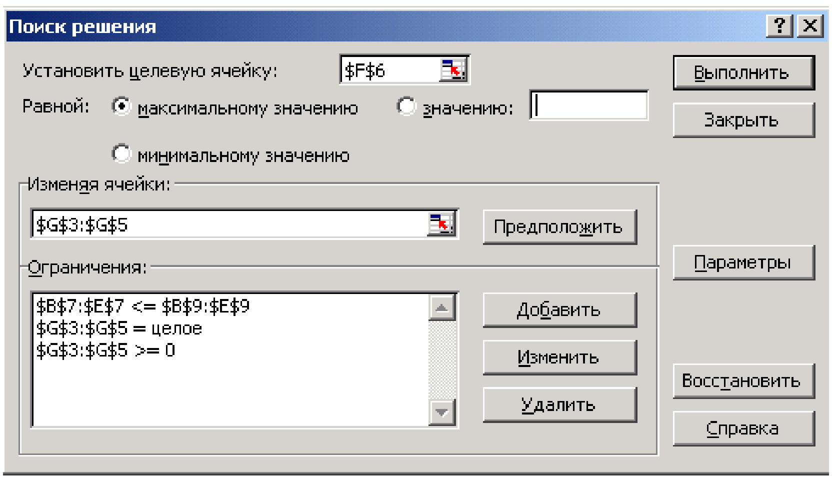



Рис.6 – Формулировка задачи в терминах рабочего листа Excel

Итоговый результат представлен на рис.4.7:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Вид продукции | Время обработки, ч. | | | | Прибыль, у.е. | Количество |
| 2 | | I | II | III | IV | | |
| 3 | A | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 12 |
| 4 | B | 6 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 |
| 5 | C | 3 | 3 | 2 | 4 | 4 | 0 |
| 6 | | | | | | 54 | |
| 7 | Время | 30 | 39 | 21 | 33 | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | Ограничения | 84 | 42 | 21 | 42 | | |

Рис.7 – Результат оптимизации

Анализ решения показывает, что все без исключения требования задачи оптимизации выполнены. При этом видно, что для получения максимальной прибыли нецелесообразно выпускать изделие С.

Результаты расчетов представлены в отчете по результатам (рис.8):

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам** | | | | | | |
| 2 | **Рабочий лист: [К ЛР 4.xls]Лист3** | | | | | | |
| 3 | **Отчет создан: 30.09.2007 10:20:40** | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | Целевая ячейка (Максимум) | | | | | | |
| 7 | | **Ячейка** | **Имя** | **Исходное значение** | **Результат** | | |
| 8 | | $F$6 | Прибыль, у.е. | 0 | 54 | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | Изменяемые ячейки | | | | | | |
| 12 | | **Ячейка** | **Имя** | **Исходное значение** | **Результат** | | |
| 13 | | $G$3 | A Количество | 0 | 12 | | |
| 14 | | $G$4 | B Количество | 0 | 3 | | |
| 15 | | $G$5 | C Количество | 0 | 0 | | |
| 16 | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | Ограничения | | | | | | |
| 19 | | **Ячейка** | **Имя** | **Значение** | **Формула** | **Статус** | **Разница** |
| 20 | | $B$7 | Время I | 30 | $B$7<=$B$9 | не связан. | 54 |
| 21 | | $C$7 | Время II | 39 | $C$7<=$C$9 | не связан. | 3 |
| 22 | | $D$7 | Время III | 21 | $D$7<=$D$9 | связанное | 0 |
| 23 | | $E$7 | Время IV | 33 | $E$7<=$E$9 | не связан. | 9 |
| 24 | | $G$3 | A Количество | 12 | $G$3>=0 | не связан. | 12 |
| 25 | | $G$4 | B Количество | 3 | $G$4>=0 | не связан. | 3 |
| 26 | | $G$5 | C Количество | 0 | $G$5>=0 | связанное | 0 |
| 27 | | $G$3 | A Количество | 12 | $G$3=целое | связанное | 0 |
| 28 | | $G$4 | B Количество | 3 | $G$4=целое | связанное | 0 |
| 29 | | $G$5 | C Количество | 0 | $G$5=целое | связанное | 0 |
| 30 | | | | | | | |

Рис.8 – Отчет по результатам

Утилита «Поиск решения» может использоваться и для решения более сложных задач оптимизации.

## ТЕМА 5. Построение моделей с минимизацией целевой функции

*Задача о смеси.*

Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 0,5 кг. Для того чтобы цыплята к 8-ой неделе достигли необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут удовлетворять смеси различных видов кормов или ингрдиентов. В таблице приведены данные характеризующие содержание (по весу) питательных веществв каждом из ингридиентов и удельную стоимость каждого ингридиента.

| Ингридиент | Содержание питательных веществ (кг/ингридиент) | | | Стоимость (руб./кг.) |
|---|---|---|---|---|
| | Кальций | Белок | Клетчатка | |
| Известняк | 0,38 | | | 0,4 |
| Зерно | 0,001 | 0,09 | 0,02 | 0,15 |
| Соевые бобы | 0,002 | 0,5 | 0,08 | 0,4 |

Смесь должна содержать (от общего веса смеси): не менее 0,08% кальция; не менее 22% белка; не менее 5% клетчатки; Требуется определить количество (в кг) каждого из трех ингридиентов образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

*1. Построение экономико-математической модели*

Обозначим через X1, X2, X3,,– количества в кг компонентов кальция, белка и клетчатки соответственно, тогда целевая функция будет иметь вид:

F(X) =0,4 X1+0,15 X2+0,4 X3 $\rightarrow$ min,

Масса всей кормосмеси на неделю 20000*0,5 = 10 000 кг.

ограничения по количеству

не менее 0,08% кальция - 0,08*10000/100 = 8 кг.

не менее 22% белка - 22*10000/100 = 2 200 кг.

не менее 5% клетчатки - 5*10000/100 = 500 кг.

Сумма всех компонентов X1+X2+X3=10000,

ограничения по содержанию кальция

0,38X1+0,001X2+0,002X3 > = 8

ограничения по содержанию белка

0*X1+0,09*X2+0,5X3 > = 2200

ограничения по содержанию клетчатки

0*X1+0,02X2+0,08X3 > = 500

Окончательно модель примет вид

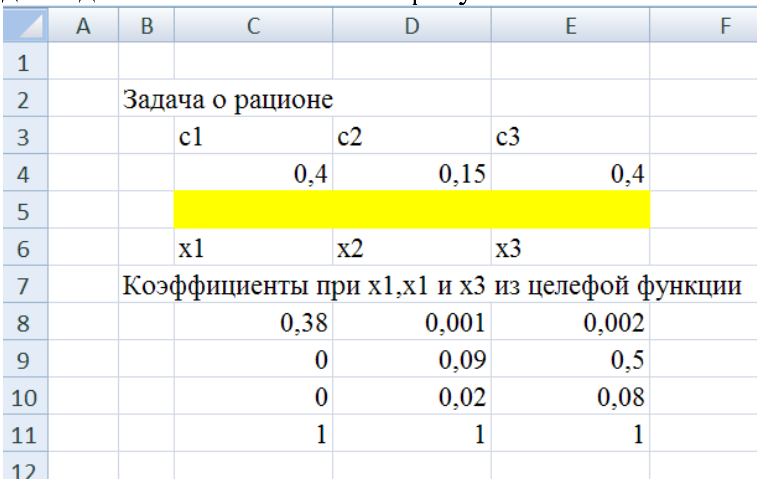
F(X) =0,4 X1+0,15 X2+0,4 X3 $\rightarrow$ min,

$$\begin{cases} 0{,}38X1+0{,}001X2+0{,}002X3 >= 8 \\ 0*X1+0{,}09X2+0{,}5X3 >= 2200 \\ 0*X1+0{,}02X2+0{,}08X3 >= 500 \\ Xi>=0 \end{cases}$$

*2. Описание алгоритма решения задачи в Excel.*

Решение задачи выполним с помощью надстройки Excel Поиск решения. В нашей задаче оптимальные значения вектора X=(X1, X2, X3,) будут помещены в ячейках C5:E5, оптимальное значение целевой функции – в ячейке H5 с формулой =СУММПРОИЗВ(C4:E4;C5:E5).

Введем исходные данные как показано на рисунке 1



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | Задача о рационе | | | | |
| 3 | | | c1 | c2 | c3 | |
| 4 | | | 0,4 | 0,15 | 0,4 | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | x1 | x2 | x3 | |
| 7 | | Коэффициенты при x1,x1 и x3 из целефой функции | | | | |
| 8 | | | 0,38 | 0,001 | 0,002 | |
| 9 | | | 0 | 0,09 | 0,5 | |
| 10 | | | 0 | 0,02 | 0,08 | |
| 11 | | | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | | | | | | |

Рисунок 1 - Фрагмент исходного рабочего листа Excel

Сначала задаем в ячейке H5 целевую функцию с помощью функции – =СУММПРОИЗВ(C4:E4;C5:E5). В ячейках вводим F8, F9, F10, F11 формулы соответственно:

=СУММПРОИЗВ(C5:E5;C8:E8)

=СУММПРОИЗВ(C5:E5;C9:E9)

=СУММПРОИЗВ(C5:E5;C10:E10)

=СУММПРОИЗВ(C5:E5;C11:E11)

для вычисления левых частей ограничений

Вызываем Поиск решения и вводим направление целевой функции, адреса искомых переменных, добавим ограничения. На экране появилось диалоговое окно Поиск решения с введенными условиями (рисунок 2).

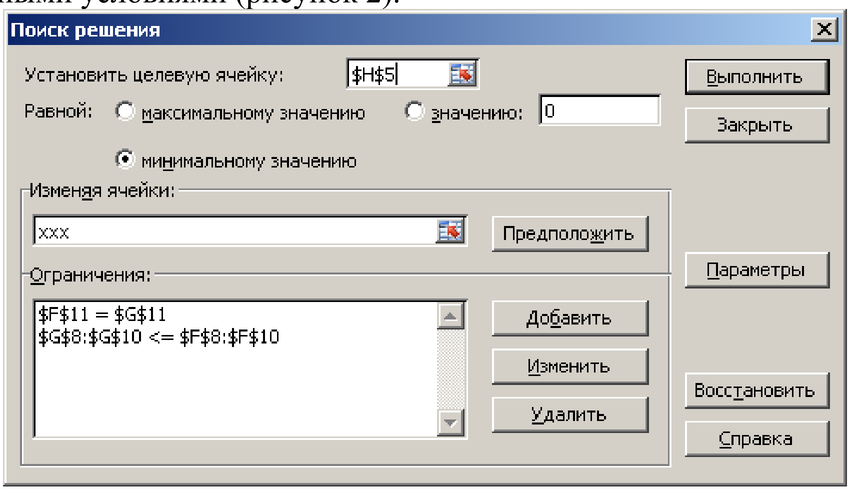



Рисунок 2 - Диалоговое окно Поиск решения

Вводим ограничения и параметры поиска задачи (см. рисунок 3 и 4).

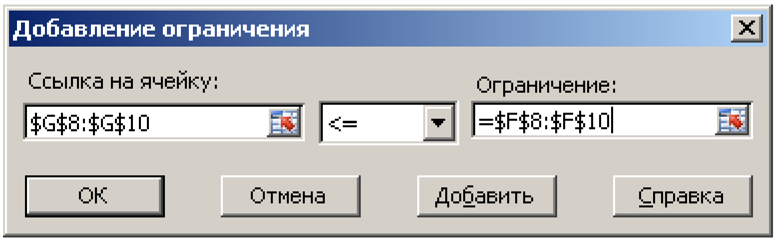



Рисунок 3 - Диалоговое окно «Добавление ограничений»

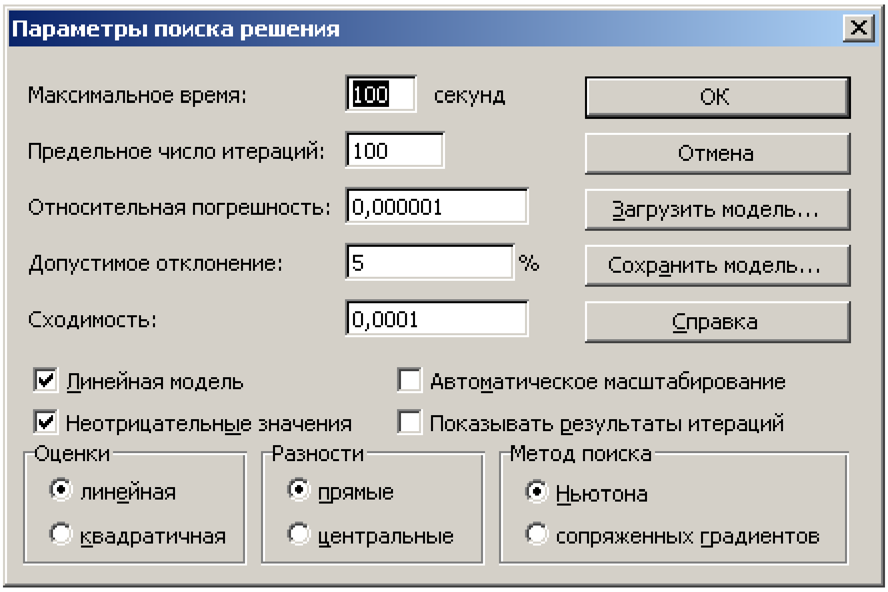



Рисунок 4 – Параметры поиска решения

После ввода параметров для решения ЗЛП следует нажать кнопку Выполнить. На экране появится сообщение, что решение найдено (рисунок 5 и 6).

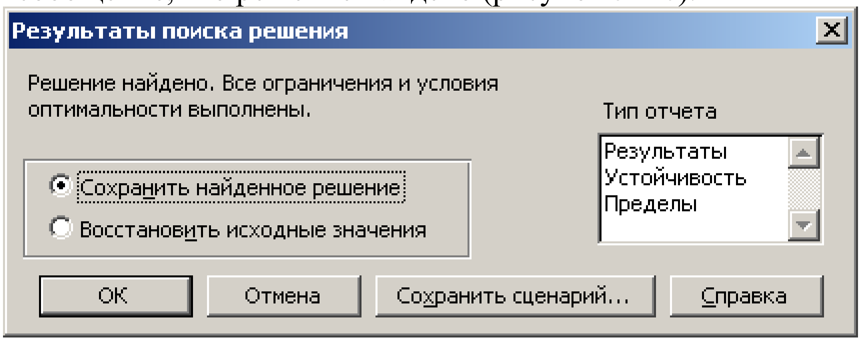



Рисунок 6 - Решение найдено

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | Задача о рационе | | | | | | |
| 3 | | | c1 | c2 | c3 | | | |
| 4 | | | 0,4 | 0,15 | 0,4 | | Целевая функция | |
| 5 | | | 0 | 5000 | 5000 | | F= | 2750 |
| 6 | | | x1 | x2 | x3 | | | |
| 7 | | Коэффициенты при x1,x1 и x3 из целефой функции | | | | | | |
| 8 | | | 0,38 | 0,001 | 0,002 | 15 | 8 | |
| 9 | | | 0 | 0,09 | 0,5 | 2950 | 2200 | |
| 10 | | | 0 | 0,02 | 0,08 | 500 | 500 | |
| 11 | | | 1 | 1 | 1 | 10000 | 10000 | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | |

Рисунок 6 - Решение задачи

Полученное решение означает, что оптимальная смесь состоит из 5000 кг. зерна и 5000 кг. соевых бобов. Минимальная стоимость равна 2750 руб.

*3. Самостоятельное решение задач*

**Задача 1. Решить типовую задачу оптимизации.**

Продукция двух видов (краска для внутренних (I) и наружных (E) работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно. Расходы продуктов A и B на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

| Исходный продукт | Расход исходных продуктов на тонну краски, т | | Максимально возможный запас, т |
|---|---|---|---|
| | Краска E | Краска I | |
| A | 1 | 2 | 6 |
| B | 2 | 1 | 8 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3000 ден. ед. для краски E и 2000 ден. ед. для краски I. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

**Построить экономико-математическую модель задачи, и получить решение средствами EXCEL. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?**

**Задача 2. Решить средствами Excel задачу**

На основании информации, приведенной в таблице, решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

| Вид ресурсов | Нормы расхода ресурсов на ед. продукции | | | Запасы ресурсов |
|---|---|---|---|---|
| | I вид | II вид | III вид | |
| Труд | 1 | 4 | 3 | 200 |
| Сырье | 1 | 1 | 2 | 80 |
| Оборудование | 1 | 1 | 2 | 140 |
| Цена изделия | 40 | 60 | 80 | |

## ТЕМА 6. Оптимальное использование ресурсов

**Задача 1.** Предприятие выпускает торты двух видов. Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль графическим и средствами Excel, если известны следующие данные из таблицы: М- мука, кг; С- сахар, кг; О- орехи, кг; УМ- упаковочный материал, м2 ; В- время, чел-час.

| Вид печенья | Расход ресурсов на 1 торт | | | | | Объем имеющихся ресурсов | | | | | Прибыль, руб. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | М | С | О | УМ | В | М | С | О | УМ | В | |
| А | 0,36 | 0,32 | 0,14 | 0,21 | 0,01 | 410 | 370 | 450 | 390 | 920 | 270 |
| В | 0,17 | 0,33 | 0,51 | 0,15 | 0,02 | | | | | | 320 |

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Решение графическим методом.

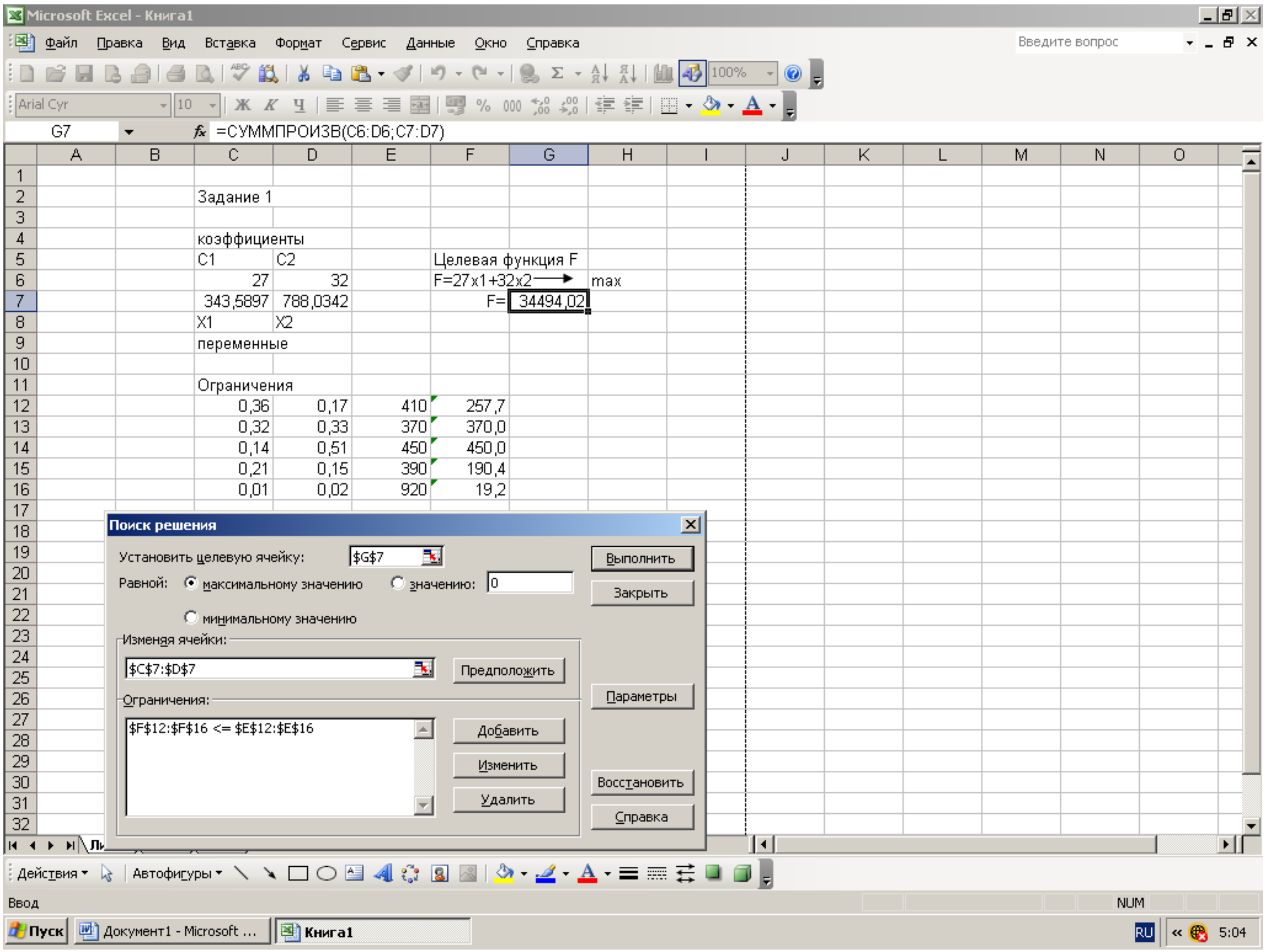
Построим экономико-математическую модель задачи. Введем x1, x2- количества единиц тортов вида А и В, соответственно. Тогда целевая функция F=270*x1+320*x2→max, а ограничения запишем в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}36x_1+0{,}17x_2\le 410 \\ 0{,}32x_1+0{,}33x_2\le 370 \\ 0{,}14x_1+0{,}51x_2\le 450 \\ 0{,}21x_1+0{,}15x_2\le 390 \\ 0{,}01x_1+0{,}02x_2\le 920 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

Для решения графическим методом построим в системе координат X1OX2 область которая соответствует системе неравенств. Получим многоугольник, как показано на чертеже. Затем строим вектор С(27,32) (его координаты являются коэффициентами в целевой функции. Через начало координат проводим прямую перпендикулярно вектору С и перемещаем эту прямую, сохраняя перпендикулярность к вектору до последнего касания с заштрихованной областью в точке К(344,788).

Таким образом решением задачи является выпуск 344 тортов вида А и 788 тортов вида В. При такой структуре товарооборота максимальная прибыль равна 344940 руб.

2. Решение в таблицах Excel.




Ответ:

X1=344 тортов вида А

X2=788 тортов вида В.

**Задача 2.** Продукцией городского молочного завода является молоко, кефир и сметана. На производство 1т. молока, 1т. кефира и 1т. сметаны требуется соответственно 1.01, 1.01 и 9.45 т молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира соответственно 0,18 и 0,19 машино/час. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 час.

Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136 т молока. Основное оборудование может быть использовано  в течение21,4 часа, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 часа. Прибыль от реализации 1т. молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100т молока.

Требуется в таблицах Excel:

определить объемы выпуска молочной продукции, позволяющей получить наибольшую прибыль;

проанализировать, как изменится прибыль и план выпуска молочной продукции, если основное оборудование будет работать на 2 часа больше;

определить, к чему приведет задание по выпуску кефира в объеме не менее 10т.

## ТЕМА 7. Моделирование транспортных задач

Компания, занимающаяся ремонтом автомобильных дорог, в следующем месяце будет проводить ремонтные работы на пяти участках автодорог. Песок на участки ремонтных работ может доставляться из трех карьеров, месячные объемы предложений по карьерам известны. Из планов производства ремонтных работ известны месячные объемы потребностей по участкам работ. Имеются экономические оценки транспортных затрат (в у.е.) на перевозку 1тонны песка с карьеров на ремонтные участки.

Числовые данные для решения содержатся ниже в матрице планирования.

Требуется:

1) Предложить план перевозок песка на участки ремонта автодорог, который обеспечивает минимальные совокупные транспортные издержки.

2) Что произойдет с оптимальным планом, если изменятся условия перевозок: а) появится запрет на перевозки от первого карьера до второго участка работ?; б) по этой коммуникации будет ограничен объем перевозок 3 тоннами?

Матрица планирования:

| Участки работ / Карьеры | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Предложение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 5 | 15 | 24 | 15 |
| $A_2$ | 19 | 2 | 22 | 4 | 13 | 15 |
| $A_3$ | 20 | 27 | 1 | 17 | 19 | 15 |
| Потребности | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | |

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Экономико-математическая модель задачи

Обозначим через xij –количество перевезенной продукции из карьера i до участка работ j.

c ij–тарифы от i до j.

Целевая функция

$f(x) = \sum\sum c_{ij} x_{ij} \to \min$

$x_{ij} \geq 0$,

Предложение 15+15+15=45 т.

Потребности 11+11+11+16+11=60 т.

60>45 имеем открытую транспортную задачу, чтобы привести ее к закрытому виду необходимо добавить карьер А4 с предложением 60-45=15т и нулевыми тарифами за перевозки.

Ограничения по предложению:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=15$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=15$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=15$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=15$$

Ограничение попотребностям:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=11$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=11$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=11$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=16$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=11$$

Информационная модель

Задачу будем решать с помощью прикладной программы Excel. Откроем чистый лист Excel. Введем исходные данные задачи в созданную таблицу. Создадим текстовую форму – таблицу для ввода условий задачи (Рис. 1).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Матрица планирования** | | | | | | | | | |
| 2 | Участки работ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Предло | | | |
| 3 | Карьеры | | | | | | жение | | | |
| 4 | $A_1$ | 3 | 4 | 5 | 15 | 24 | 15 | | | |
| 5 | $A_2$ | 19 | 2 | 22 | 4 | 13 | 15 | | | |
| 6 | $A_3$ | 20 | 27 | 1 | 17 | 19 | 15 | | | |
| 7 | $A_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | | | |
| 8 | Потребности | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | **Матрица перевозок** | | | | | | | | | |
| 12 | Участки работ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Ограничение по | | | |
| 13 | Карьеры | | | | | | предложению | | | |
| 14 | $A_1$ | | | | | | 0 | = | 15 | |
| 15 | $A_2$ | | | | | | 0 | = | 15 | |
| 16 | $A_3$ | | | | | | 0 | = | 15 | |
| 17 | $A_4$ | | | | | | 0 | = | 15 | |
| 18 | Ограничение | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 19 | по | = | = | = | = | = | | | | |
| 20 | потребностям | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | |
| 22 | | | ЦФ= | 0 | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | | | |

Рис. 1. Таблица для ввода условий задачи

Введем формулы для расчета ограничений (Рис.2)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | **Матрица планирования** | | | | | |
| 2 | Участки работ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Предложение | | |
| 3 | Карьеры | | | | | | | | |
| 4 | $A_1$ | 3 | 4 | 5 | 15 | 24 | 15 | | |
| 5 | $A_2$ | 19 | 2 | 22 | 4 | 13 | 15 | | |
| 6 | $A_3$ | 20 | 27 | 1 | 17 | 19 | 15 | | |
| 7 | $A_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | | |
| 8 | Потребности | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | | | **Матрица перевозок** | | | | | |
| 12 | Участки работ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Ограничение по | | |
| 13 | Карьеры | | | | | | предложению | | |
| 14 | $A_1$ | | | | | | =СУММ(B14:F14) | = | 15 |
| 15 | $A_2$ | | | | | | =СУММ(B15:F15) | = | 15 |
| 16 | $A_3$ | | | | | | =СУММ(B16:F16) | = | 15 |
| 17 | $A_4$ | | | | | | =СУММ(B17:F17) | = | 15 |
| 18 | Ограничение по | =СУММ(B14:B17) | =СУММ(C14:C17) | =СУММ(D14:D17) | =СУММ(E14:E17) | =СУММ(F14:F17) | | | |
| 19 | потребностям | = | = | = | = | = | | | |
| 20 | | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | | | |
| 21 | | | | | | | | | |
| 22 | | | ЦФ= | =СУММПРОИЗВ(B4:F7;B14:F17) | | | | | |
| 23 | | | | | | | | | |

Рис.2 Лист с формулами

В строке Меню указатель мышки поместить на Сервис. В развернутом меню выбрать команду Поиск решения. В Поиск решения введем направление целевой функции $D$22. Изменяемые ячейки $B$14:$F$17. Добавим ограничения (Рис. 3).

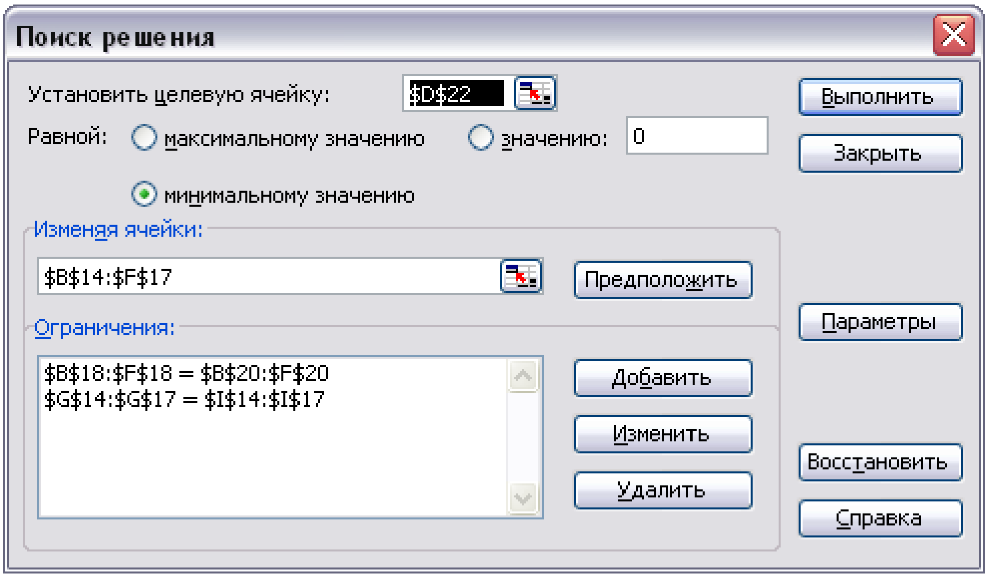
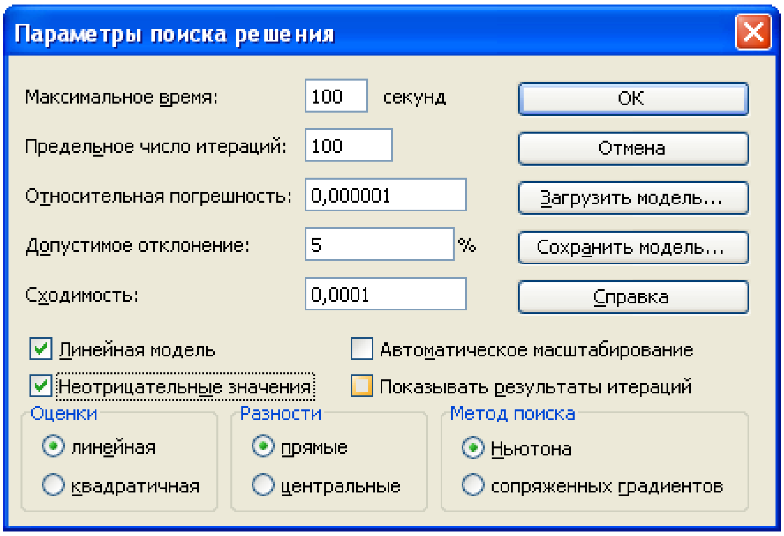



Рис. 3. Введены все условия задачи




После ввода параметров для решения задачи следует нажать кнопку Выполнить. На экране появится сообщение, что решение найдено (Рис. 4).

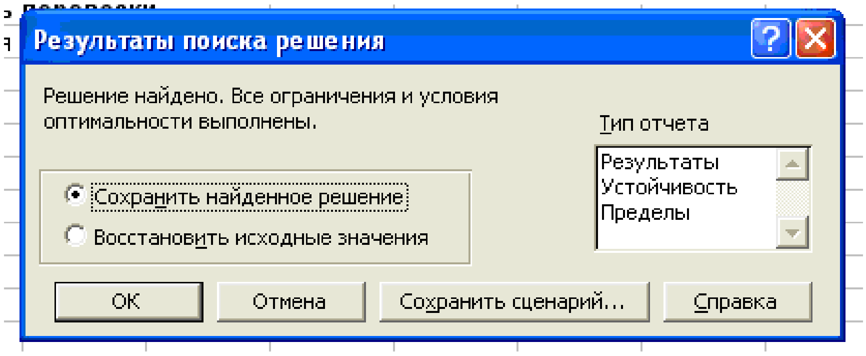



Рис. 4. Решение получено

Полученное решение означает, что перевозки нужно организовать следующим образом (Рис. 5):

**Матрица планирования**

| Участки работ / Карьеры | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Предложение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 5 | 15 | 24 | 15 |
| $A_2$ | 19 | 2 | 22 | 4 | 13 | 15 |
| $A_3$ | 20 | 27 | 1 | 17 | 19 | 15 |
| $A_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 |
| Потребности | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | |

**Матрица перевозок**

| Участки работ / Карьеры | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Ограничение по предложению | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 11 | 4 | 0 | 0 | 0 | 15 | = | 15 |
| $A_2$ | 0 | 7 | 0 | 8 | 0 | 15 | = | 15 |
| $A_3$ | 0 | 0 | 11 | 4 | 0 | 15 | = | 15 |
| $A_4$ | 0 | 0 | 0 | 4 | 11 | 15 | = | 15 |
| Ограничение по потребностям | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | | | |
| | = | = | = | = | = | | | |
| | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | | | |

ЦФ= 174

Рис. 5 Оптимальное решение

Из карьера А1 нужно перевезти 11 т на участок работ В1, 4т – В2;

Из карьера А2 нужно перевезти 7 т на участок работ В2, 8т – В4;

Из карьера А3 нужно перевезти 11 т на участок работ В3, 4т – В4.

При этом затраты будут минимальны составят 174 у.е.

Варианты кейс-заданий приведены в Приложении В.

## ТЕМА 8. Моделирование на основе метода Монте-Карло.

**Метод Монте-Карло** - это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Само название «Монте-Карло» происходит от города в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом.

Идея метода состоит в следующем. Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата (дифференциальных или алгебраических уравнений), производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат. В действительности конкретное осуществление случайного процесса складывается каждый раз по-иному; так же и в результате статистического моделирования мы получаем каждый раз новую, отличную от других реализацию исследуемого процесса.

Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки могут быть получены любые интересующие нас характеристики: вероятности событий, математические ожидания и дисперсии случайных величин и т. д.

Алгоритм исполнения метода Монте-Карло.

1. Подготовка данных для модели- получение теоретических распределений входных параметров объекта;
2. Ввод теоретических распределений параметров объекта в программу;
3. Задание критерия останова работы программы моделирования;
4. Генерация случайного числа для каждого входного параметра объекта в соответствии с их теоретическими распределениями;
5. Прогон модели по каждой генерации случайных чисел;
6. Сбор статистического материала по результатам моделирования- функции цели и промежуточных параметров модели по каждой генерации;
7. Если критерий останова достигнут, то необходимо расчеты прекратить (стоп), в противном случае продолжить, вернуться к п.4.
8. Расчет статистических характеристик: математического ожидания, средних значений и моментов для функции цели и промежуточных параметров модели;
9. Конец расчета.

Критерием останова могут быть:

- количество случайных чисел по каждому входному параметру;
- время расчета;
- абсолютное значение функции;

- скорость изменения целевой функции.

При моделировании случайных явлений методом Монте-Карло мы пользуемся самой случайностью как аппаратом исследования, заставляем ее «работать на нас».

Нередко такой прием оказывается проще, чем попытки построить аналитическую модель. Для сложных операций, в которых участвует большое число элементов (машин, людей, организаций, подсобных средств), а случайные факторы сложно переплетены, где процесс - явно не марковский, метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического (а нередко бывает и единственно возможным).

**Цель работы:** выполнять имитационное моделирование стохастических процессов методом статистических испытаний (Монте-Карло)

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи.
2. Выберите условие задачи в соответствии с номером варианта из Приложение В.
3. Заполните расчетную таблицу MS Excel по аналогии с примером выполнения для задания 1.
4. Сравните результаты расчетов в MS Excel с точным значением вероятности отказа системы.

**Условие задачи**

Задана схема соединения приборов, составляющих систему контроля качества продукции. Вероятность отказа каждого из приборов в течение времени t одинакова и равна P1. Приборы выходят из строя независимо друг от друга. Используя метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), найти вероятность P того, что система откажет за время t.

Выполнить имитационное моделирование эксперимента средствами табличного процессора MS Excel. Выполнить расчеты для 10 экспериментов, каждый из которых включает в себя 1000 испытаний системы. Для имитации состояния прибора в испытании использовать стандартную функцию **СЛЧИС**. Искомую вероятность отказа системы определить как среднее значение по результатам 10 экспериментов.

Описание процедуры моделирования

Обычно числа, полученные с помощью программного генератора случайных чисел, подчиняются равномерному закону распределения. На практике это означает, что *вероятности появления любого из чисел из некоторого заданного интервала одинаковы*.

Допустим, все случайные числа принадлежат интервалу [0,1). Тогда попадание сгенерированного числа в интервал [0, 0.1) будет соответствовать выходу из строя испытуемого прибора, если эта вероятность равна 0.1. Попадание числа в интервал [0.1, 1) будет соответствовать безотказной работе прибора (рисунок 5).

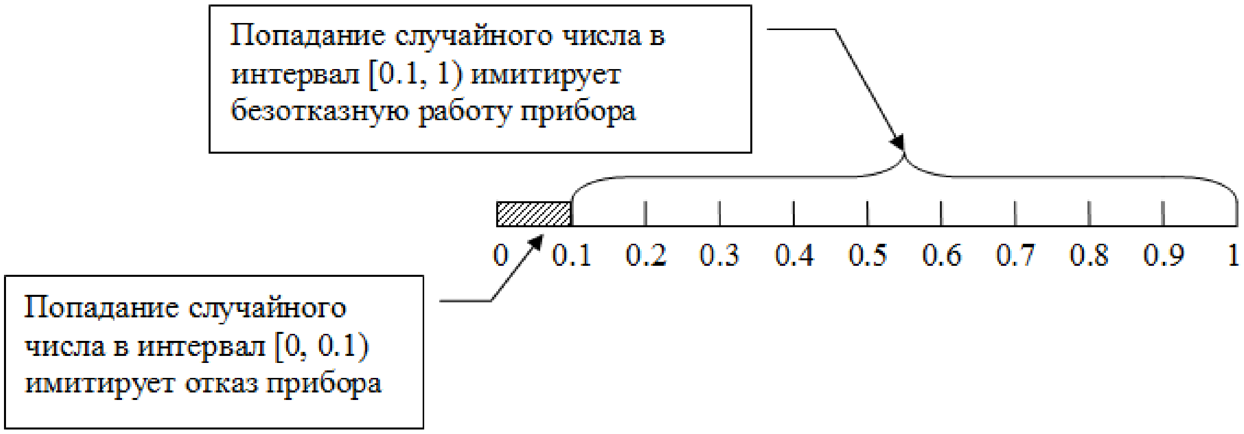



Рисунок 5 - Моделирование работы прибора

В том случае, если вероятность отказа каждого прибора равна 0.2, отказ прибора имитируется попаданием случайного числа в интервал [0, 0.2). Если вероятность отказа каждого прибора равна 0.3, отказ прибора имитируется попаданием случайного числа в интервал [0, 0.3) и т.д.

Так будет моделироваться работа любого из приборов, составляющих систему контроля качества. Компьютерная генерация случайных чисел, количество которых равно количеству приборов в системе, с проверкой условия, соответствующего схеме соединения приборов, будет соответствовать одному испытанию со всей системой. Под экспериментом будем понимать серию последовательных испытаний.

Построенная модель позволит многократно имитировать испытания, фиксируя всякий раз результат (безотказная работа или отказ системы). При большом количестве испытаний отношение числа отрицательных исходов (система вышла из строя) к общему числу испытаний даст приближенное значение вероятности P выхода из строя системы за время t.

Пример выполнения работы

Выполним расчеты для схемы соединения приборов, показанной на рис. 6 для P1=0.1.

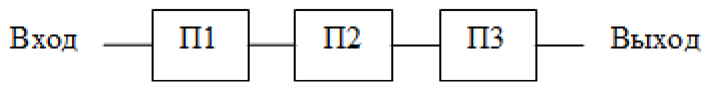



Рисунок 6 - Схема соединения приборов в системе контроля качества

В этом случае испытание каждого прибора моделируется в соответствии с рисунком 5. Анализ схемы соединения приборов (рисунок 6) позволяет сделать вывод, что вся система выйдет из строя, если хотя бы один из приборов выйдет из строя. В условиях имитационной модели этот факт формулируется следующим образом: если хотя бы одно из трех случайных чисел, полученных в результате имитации испытания системы, попадает в интервал [0, 0.1), фиксируется отказ всей системы в данном испытании.

**Задание 1.** Выполним имитационное моделирование эксперимента средствами табличного процессора MS Excel.

Для генерации случайных чисел в электронной таблице MS Excel используется стандартная функция **СЛЧИС()**. Функция возвращает равномерно распределенное случайное число, большее либо равное 0 и меньшее 1.

Для имитации испытаний системы заполним таблицу, показанную на рисунке 7. При заполнении столбца Номер испытания введем значения 1 и 2 в ячейки **A2** и **A3** соответственно. Затем выделим эти ячейки и «протянем» вниз до ячейки **A1001**, используя маркер заполнения. В ячейку **B2** введем формулу **=СЛЧИС()** и «протянем» сначала вправо на ячейки **C2** и **D2**, а затем вниз до ячеек **B1001:D1001**.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Номер испытания | Прибор 1 | Прибор 2 | Прибор 3 | Состояние системы | Вероятность отказа системы в текущем эксперименте |
| 2 | 1 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B2<0,1;C2<0,1;D2<0,1);0;1) | =СЧЁТЕСЛИ(E1:E1001;0)/1000 |
| 3 | 2 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B3<0,1;C3<0,1;D3<0,1);0;1) | |
| 4 | 3 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B4<0,1;C4<0,1;D4<0,1);0;1) | |
| 5 | 4 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B5<0,1;C5<0,1;D5<0,1);0;1) | |
| 6 | 5 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B6<0,1;C6<0,1;D6<0,1);0;1) | |
| 7 | 6 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B7<0,1;C7<0,1;D7<0,1);0;1) | |
| 8 | 7 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B8<0,1;C8<0,1;D8<0,1);0;1) | |
| 9 | 8 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B9<0,1;C9<0,1;D9<0,1);0;1) | |
| 10 | 9 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B10<0,1;C10<0,1;D10<0,1);0;1) | |
| 11 | 10 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B11<0,1;C11<0,1;D11<0,1);0;1) | |
| 12 | 11 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B12<0,1;C12<0,1;D12<0,1);0;1) | |
| 1000 | 999 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B1000<0,1;C1000<0,1;D1000<0, | |
| 1001 | 1000 | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =СЛЧИС() | =ЕСЛИ(ИЛИ(B1001<0,1;C1001<0,1;D1001<0, | |

Рисунок 7 - Таблица с имитацией испытаний в режиме показа формул

В ячейку **E2** введем формулу **=ЕСЛИ(ИЛИ(B2<0,1;C2<0,1;D2<0,1);0;1)**. Эта формула фиксирует состояние системы, полученное в испытании с номером 1. Если хотя бы один прибор выходит из строя **(ИЛИ(B2<0,1;C2<0,1;D2<0,1))**, то фиксируется отказ всей системы (значение в ячейке **E2** равно 0), в противном случае система работоспособна (значение в ячейке **E2** равно 1). Используя маркер заполнения, распространим формулу на ячейки диапазона **E3:E1001**.

Для удобства работы с таблицей скроем строки с 13 по 999, выделив их и выбрав из контекстного меню (открывается щелчком правой кнопки мыши) команду **Скрыть**.

В ячейку **F2** введем формулу для вычисления вероятности отказа системы по результатам 1000 испытаний. За вероятность принимается отношение числа зафиксированных отказов к общему числу испытаний: **=СЧЁТЕСЛИ(E1:E1001;0)/1000**.

С целью возможности управления экспериментом установим пересчет формул на рабочем листе в ручном режиме, выполнив в меню **Сервис – Параметры – вкладка Вычисления – вручную** (рисунок 8). В этом случае для имитации серии испытаний (пересчета значений рабочего листа таблицы) потребуется нажимать на клавиатуре клавишу <**F9**>.

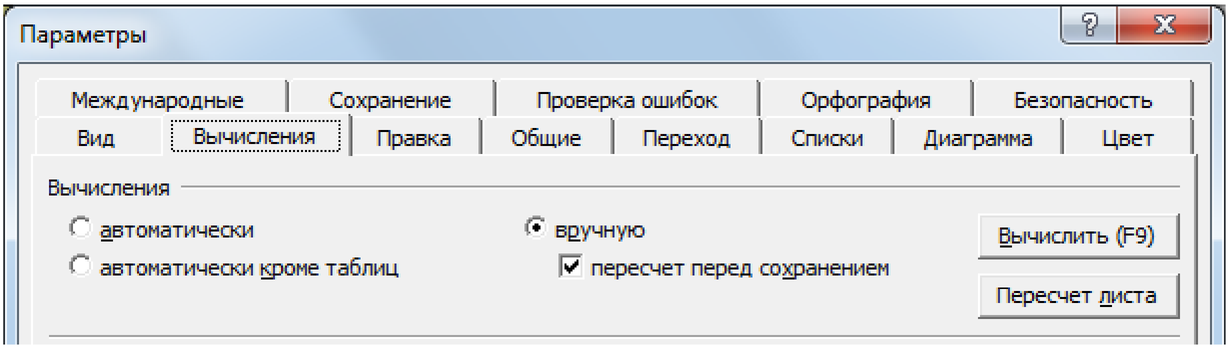



Рисунок 8 - Установка параметров пересчета формул рабочего листа таблицы

В ячейки диапазона **G2:G11** введем номера экспериментов от 1 до 10 (рисунок 9). В ячейки **H2:H11** будем заносить вычисленные в каждом эксперименте значения из ячейки **F2**. В ячейку **H12** внесем формулу для вычисления среднего арифметического значения вероятности отказа системы по результатам 10 экспериментов: **=СРЗНАЧ(H2:H11)**.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Номер испытания | Прибор 1 | Прибор 2 | Прибор 3 | Состояние системы | Вероятность отказа системы в текущем эксперименте | Номер эксперимента | Зафиксированная вероятность отказа системы |
| 2 | 1 | 0,0972 | 0,3252 | 0,5998 | 0 | 0,261 | 1 | 0,278 |
| 3 | 2 | 0,2551 | 0,0893 | 0,5421 | 0 | | 2 | 0,250 |
| 4 | 3 | 0,5277 | 0,1100 | 0,4013 | 1 | | 3 | 0,263 |
| 5 | 4 | 0,9842 | 0,9320 | 0,8107 | 1 | | 4 | 0,261 |
| 6 | 5 | 0,8710 | 0,7206 | 0,1392 | 1 | | 5 | |
| 7 | 6 | 0,8665 | 0,0949 | 0,3259 | 0 | | 6 | |
| 8 | 7 | 0,0492 | 0,4134 | 0,6870 | 0 | | 7 | |
| 9 | 8 | 0,2037 | 0,9354 | 0,5590 | 1 | | 8 | |
| 10 | 9 | 0,1445 | 0,0050 | 0,3610 | 0 | | 9 | |
| 11 | 10 | 0,3791 | 0,4699 | 0,8709 | 1 | | 10 | |
| 12 | 11 | 0,1643 | 0,9000 | 0,7776 | 1 | *Среднее значение* | | **0,2637** |
| 1000 | 999 | 0,8499 | 0,7428 | 0,6525 | 1 | | | |
| 1001 | 1000 | 0,4105 | 0,8463 | 0,7776 | 1 | | | |

Рисунок 9 - Расчетная таблица, имитирующая испытания системы

Опишем последовательность действий, имитирующих один эксперимент:

- нажимаем на клавиатуре клавишу <**F9**>;

- выделив ячейку **F2**, выполняем **Правка – Копировать**;

- выделив ячейку столбца **H**, соответствующую номеру эксперимента, выполняем **Правка – Специальная вставка… – значения** (в ячейку будет вставлено вычисленное значение вероятности).

Полученное в результате расчетов значение в ячейке **H12** даст нам приближенное значение вероятности отказа системы. Для оценки точности полученного с помощью имитационной модели значения вероятности можно сравнить его с точным значением вероятности отказа системы, вычисленным по формулам теории вероятностей, которое для рассматриваемого случая равно 0.271.

Анализ результатов расчетов позволяет принять за приближенное значение вероятности отказа значение **P = 0.27**. Сравним полученное значение с точным значением вероятности отказа системы, вычисленным по формулам теории вероятностей, которое равно **0.271**. В рассмотренном случае относительное отклонение вычисленного по методу Монте-Карло значения вероятности от точного значения составляет менее 0.37% **((0.271 - 0.27) *100 / 0.271 = 0.369%)**.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова В.М. и др. Математическая статистика.- М.: Высшая школа, 1981.-381с.

2. Веденяпин Г.В. Общая методика экспериментального исследования и обработки опытных данных. изд. второе допол. - М.: Колос, 1967- 157с.

3. И.Г. Семакин, У.Л. Хеннер Информатика. Задачник – практикум 2т. М.Лаборатория Базовых Знаний, 1999 – 65 с.

4. П.Л.Гращенко. Программно-методический комплекс по курсу информатики. Задача. Модель. Компьютер. Минск «Инфотриумф». 1996 – 152 с.

Приложение А

Ординаты стандартной нормальной кривой φ (t)

| t | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,I | 0,3970 | 0,3965 | 0,396I | 0,3956 | 0,395I | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,39I8 |
| 0,2 | 0,39I0 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3 | 0,38I4 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3726 | 0,37I2 | 0,3697 |
| 0,4 | 0,3683 | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,362I | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5 | 0,352I | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,34I0 | 0,339I | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 0,33I2 | 0,3292 | 0,327I | 0,325I | 0,3230 | 0,3209 | 0,3I87 | 0,3I66 | 0,3I44 |
| 0,7 | 0,3I23 | 0,3I0I | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,30II | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2708 | 0,2685 |
| 0,9 | 0,266I | 0,2637 | 0,26I3 | 0,2589 | 0,2565 | 0,244I | 0,25I6 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| I,0 | 0,2420 | 0,2396 | 0,237I | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,225I | 0,2227 | 0,2203 |
| I,I | 0,2I79 | 0,2I55 | 0,2I3I | 0,2I07 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,20I2 | 0,I989 | 0,I965 |
| I,2 | 0,I942 | 0,I9I9 | 0,I895 | 0,I872 | 0,I849 | 0,I826 | 0,I804 | 0,I78I | 0,I758 | 0,I736 |
| I,3 | 0,I7I4 | 0,I69I | 0,I669 | 0,I647 | 0,I626 | 0,I604 | 0,I582 | 0,I56I | 0,I539 | 0,I5I8 |
| I,4 | 0,I497 | 0,I476 | 0,I456 | 0,I435 | 0,I4I5 | 0,I394 | 0,I374 | 0,I354 | 0,I334 | 0,I3I5 |
| I,5 | 0,I295 | 0,I276 | 0,I257 | 0,I238 | 0,I2I9 | 0,I200 | 0,II82 | 0,II63 | 0,II45 | 0,II27 |
| I,6 | 0,II09 | 0,I092 | 0,I074 | 0,I057 | 0,I040 | 0,I023 | 0,I006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| I,7 | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,08I8 | 0,0804 |
| I.8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,076I | 0,0748 | 0,0734 | 0,072I | 0,0707 | 0,0694 | 0,068I | 0,0669 |
| I,9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,055I |
| t | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 2,I | 0,0440 | 0,043I | 0,0422 | 0,04I3 | 0,0404 | 0,0396 | 0,0387 | 0,0379 | 0,037I | 0,0363 |
| 2,2 | 0,0355 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,03I7 | 0,03I0 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,024I | 0,0235 | 0,0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0,02I9 | 0,02I3 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0I98 | 0,0I94 | 0,0I89 | 0,0I84 | 0,0I80 |
| 2,5 | 0,0I75 | 0,0I7I | 0,0I67 | 0,0I63 | 0,0I58 | 0,0I54 | 0,0I5I | 0,0I47 | 0,0I43 | 0,0I39 |
| 2,6 | 0,0I36 | 0,0I32 | 0,0I29 | 0,0I26 | 0,0I22 | 0,0II9 | 0,0II6 | 0,0II3 | 0,0II0 | 0,0I07 |
| 2,7 | 0,0I04 | 0,0I0I | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,009I | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,008I |
| 2,8 | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,007I | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,006I |
| 2,9 | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,005I | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3,I | 0,0033 | 0,0032 | 0,003I | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,002I | 0,0020 | 0,0020 | 0,00I9 | 0,00I8 | 0,00I8 |
| 3,3 | 0,00I7 | 0,00I7 | 0,00I6 | 0,00I6 | 0,00I5 | 0,00I5 | 0,00I4 | 0,00I4 | 0,00I3 | 0,00I3 |
| 3,4 | 0,00I2 | 0,00I2 | 0,00I2 | 0,00II | 0,00II | 0,00I0 | 0,00I0 | 0,00I0 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,000I | 0,000I |

Приложение Б

Пятипроцентные границы критерия согласия $\chi^2$ Пирсона

| Число степеней свободы | Критерий согласия $\chi^2$ Пирсона |
| --- | --- |
| 1 | 3,84 |
| 2 | 5,99 |
| 3 | 7,81 |
| 4 | 9,49 |
| 5 | 11,07 |
| 6 | 12,59 |
| 7 | 14,07 |
| 8 | 15,51 |
| 9 | 16,92 |
| 10 | 18,31 |
| 11 | 19,68 |
| 12 | 21,03 |
| 13 | 22,36 |
| 14 | 23,68 |
| 15 | 25,0 |

Приложение В

## Варианты кейс-заданий для транспортной задачи.

Построить математическую модель задачи согласно вашему варианту.

Решить задачу с помощью средства MS Excel **Поиск решения**.

Сделать соответствующие выводы.

### Вариант 1

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 1

| Пункты отправ-ления | Пункты назначения | | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|
| | B1 | B2 | B3 | B4 | |
| A1 | 3 | 4 | 6 | 1 | 460 |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 340 |
| A3 | 4 | 5 | 8 | 1 | 300 |
| Потребности | 350 | 200 | 450 | 100 | |

### Вариант 2

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 2

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 50 | 50 | 40 | 60 |
| 1 | 30 | 5 | 4 | 6 | 3 |
| 2 | 70 | 4 | 5 | 5 | 8 |
| 3 | 70 | 7 | 3 | 4 | 7 |

## Вариант 3

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 3

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 450 | 250 | 100 | 100 |
| 1 | 200 | 6 | 4 | 4 | 5 |
| 2 | 300 | 6 | 9 | 5 | 8 |
| 3 | 100 | 8 | 2 | 10 | 6 |

## Вариант 4

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 4

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 50 | 10 | 20 | 40 |
| 30 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| 50 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| 20 | 8 | 4 | 2 | 5 |
| 20 | 6 | 5 | 2 | 4 |

## Вариант 5

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 5

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 15 | 25 | 8 | 12 |
| 95 | 5 | 4 | 13 | 9 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 35 | 2 | 7 | 9 | 8 |
| 55 | 9 | 7 | 11 | 7 |
| 75 | 1 | 6 | 1 | 1 |

## Вариант 6

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 6

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 250 | 100 | 150 | 50 |
| 80 | 6 | 6 | 1 | 4 |
| 320 | 8 | 30 | 6 | 5 |
| 100 | 5 | 4 | 3 | 30 |
| 50 | 9 | 9 | 9 | 9 |

## Вариант 7

Решить транспортную задачу. А – вектор мощностей поставщиков, В – вектор мощностей потребителей, С – матрица транспортных издержек на единицу груза:

$$A = (300; 350; 150; 200)$$
$$B = (400; 400; 200)$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Вариант 8

Решить транспортную задачу. А – вектор мощностей поставщиков, В – вектор мощностей потребителей, С – матрица транспортных издержек на единицу груза:

$$A = (20; 30; 40; 20)$$
$$B= (40; 40; 20)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Вариант 9

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 9

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 20 | 110 | 40 | 110 |
| 1 | 60 | 1 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 120 | 1 | 6 | 5 | 2 |
| 3 | 100 | 6 | 3 | 7 | 4 |

## Вариант 10

Решить транспортную задачу со следующими условиями :

Таблица 10

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| | | 60 | 60 | 50 |
| 1 | 50 | 2 | 3 | 2 |
| 2 | 70 | 2 | 4 | 5 |
| 3 | 60 | 6 | 5 | 7 |

## Вариант 11

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 11

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 15 | 25 | 8 | 12 |
| 25 | 2 | 4 | 3 | 6 |
| 18 | 3 | 5 | 7 | 5 |
| 12 | 1 | 8 | 4 | 5 |
| 15 | 4 | 3 | 2 | 8 |

## Вариант 12

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 1

| Пункты отправления | Пункты назначения | | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|
| | B1 | B2 | B3 | B4 | |
| A1 | 5 | 4 | 6 | 1 | 450 |
| A2 | 3 | 9 | 7 | 3 | 350 |
| A3 | 8 | 5 | 9 | 19 | 200 |
| Потребности | 300 | 150 | 350 | 300 | |

## Вариант 13

Решить транспортную задачу со следующими условиями):

Таблица 2

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 90 | 60 | 140 | 160 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 110 | 3 | 7 | 6 | 6 |
| 2 | 170 | 4 | 9 | 5 | 8 |
| 3 | 170 | 5 | 3 | 3 | 9 |

Вариант 14

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 3

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 50 | 50 | 10 | 20 |
| 1 | 20 | 2 | 5 | 4 | 5 |
| 2 | 30 | 3 | 5 | 5 | 7 |
| 3 | 80 | 8 | 6 | 3 | 8 |

**Вариант 15**

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 4

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 30 | 30 | 10 | 50 |
| 30 | 3 | 4 | 7 | 4 |
| 50 | 2 | 7 | 5 | 2 |
| 20 | 8 | 3 | 2 | 7 |
| 20 | 8 | 5 | 4 | 6 |

**Вариант 16**

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 5

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 65 | 55 | 80 | 40 |
| 90 | 5 | 4 | 13 | 9 |
| 30 | 2 | 7 | 9 | 8 |
| 50 | 9 | 7 | 11 | 7 |
| 70 | 1 | 6 | 1 | 1 |

## Вариант 17

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 6

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 250 | 500 | 350 | 450 |
| 800 | 6 | 3 | 7 | 4 |
| 320 | 6 | 7 | 6 | 3 |
| 100 | 2 | 4 | 3 | 6 |
| 500 | 8 | 3 | 5 | 9 |

## Вариант 18

Решить транспортную задачу. A – вектор мощностей поставщиков, B – вектор мощностей потребителей, C – матрица транспортных издержек на единицу груза:

$$A = (400; 250; 250; 200)$$

$$B = (300; 500; 300)$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Вариант 19

Решить транспортную задачу. A – вектор мощностей поставщиков, B – вектор мощностей потребителей, C – матрица транспортных издержек на единицу груза:

A = (120; 130; 60; 40)

B= (140; 140; 70)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Вариант 20

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 9

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 200 | 110 | 140 | 100 |
| 1 | 160 | 5 | 2 | 4 | 3 |
| 2 | 120 | 2 | 6 | 5 | 6 |
| 3 | 150 | 6 | 5 | 6 | 3 |

## Вариант 21

Решить транспортную задачу со следующими условиями :

Таблица 10

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| | | 160 | 180 | 110 |
| 1 | 130 | 3 | 3 | 9 |
| 2 | 170 | 7 | 3 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 150 | 8 | 4 | 6 |

**Вариант 22**

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 11

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 150 | 250 | 80 | 120 |
| 250 | 4 | 4 | 3 | 6 |
| 180 | 5 | 6 | 2 | 5 |
| 120 | 1 | 8 | 6 | 5 |
| 150 | 9 | 7 | 5 | 8 |

**Вариант 23**

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 4

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 30 | 30 | 10 | 50 |
| 30 | 3 | 4 | 7 | 4 |
| 50 | 2 | 7 | 5 | 2 |
| 20 | 8 | 3 | 2 | 7 |
| 20 | 8 | 5 | 4 | 6 |

**Вариант 24**

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 5

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 65 | 55 | 80 | 40 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 5 | 4 | 13 | 9 |
| 30 | 2 | 7 | 9 | 8 |
| 50 | 9 | 7 | 11 | 7 |
| 70 | 1 | 6 | 1 | 1 |

## Вариант 25

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 6

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 250 | 500 | 350 | 450 |
| 800 | 6 | 3 | 7 | 4 |
| 320 | 6 | 7 | 6 | 3 |
| 100 | 2 | 4 | 3 | 6 |
| 500 | 8 | 3 | 5 | 9 |

## Вариант 26

Решить транспортную задачу. А – вектор мощностей поставщиков, В – вектор мощностей потребителей, С – матрица транспортных издержек на единицу груза:

$$A = (400;\ 250;\ 250;\ 200)$$
$$B = (300;\ 500;\ 300)$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Вариант 27

Решить транспортную задачу со следующими условиями

Таблица 9

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 200 | 110 | 140 | 100 |
| 1 | 160 | 5 | 2 | 4 | 3 |
| 2 | 120 | 2 | 6 | 5 | 6 |
| 3 | 150 | 6 | 5 | 6 | 3 |

## Вариант 28

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 10

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| | | 160 | 180 | 110 |
| 1 | 130 | 3 | 3 | 9 |
| 2 | 170 | 7 | 3 | 5 |
| 3 | 150 | 8 | 4 | 6 |

## Вариант 29

Решить транспортную задачу со следующими условиями:

Таблица 11

| Мощности поставщиков | Мощности потребителей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 150 | 250 | 80 | 120 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 250 | 4 | 4 | 3 | 6 |
| 180 | 5 | 6 | 2 | 5 |
| 120 | 1 | 8 | 6 | 5 |
| 150 | 9 | 7 | 5 | 8 |

## Вариант 30

Решить транспортную задачу. A – вектор мощностей поставщиков, B – вектор мощностей потребителей, C – матрица транспортных издержек на единицу груза:

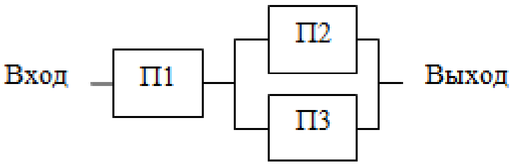
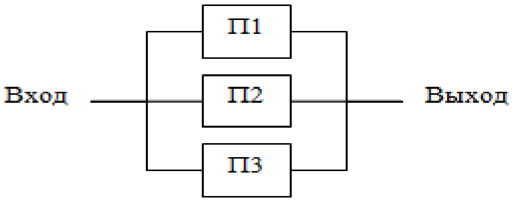
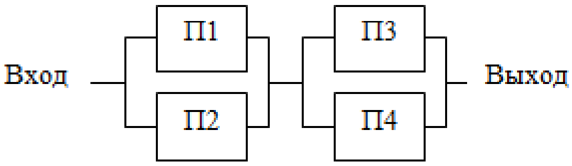
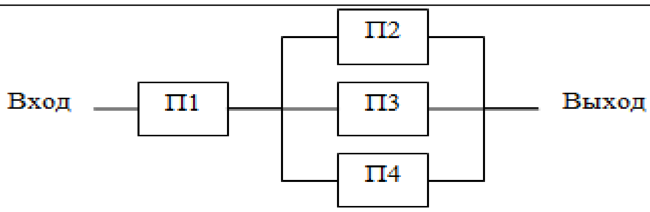
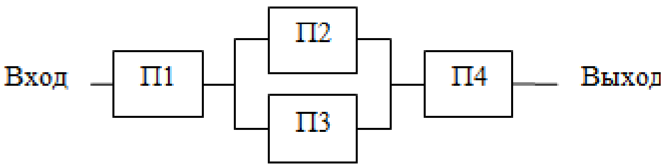
$$A = (120;\ 130;\ 60;\ 40)$$

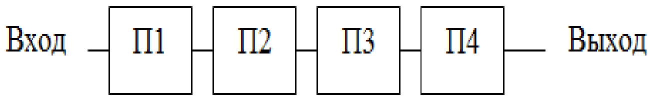
$$B = (140;\ 140;\ 70)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приложение Г

Варианты кейс-заданий к методу Монте-Карло

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th>Вид схемы соединения приборов в системе контроля качества продукции</th><th>Значение P1</th><th>Точное значение вероятности P отказа системы (используется для контроля правильности расчетов)</th></tr>
<tr><td>1, 19</td><td rowspan="3">
</td><td>0,1</td><td>0,109</td></tr>
<tr><td>2, 20</td><td>0,2</td><td>0,0232</td></tr>
<tr><td>3, 21</td><td>0,3</td><td>0,363</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">
</td><td>0,3</td><td>0,027</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,4</td><td>0,064</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,5</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>7, 22</td><td rowspan="3">
</td><td>0,3</td><td>0,1719</td></tr>
<tr><td>8, 23</td><td>0,2</td><td>0,0719</td></tr>
<tr><td>9, 24</td><td>0,4</td><td>0,2944</td></tr>
<tr><td>10, 25</td><td rowspan="3">
</td><td>0,4</td><td>0,4384</td></tr>
<tr><td>11, 26</td><td>0,3</td><td>0,3189</td></tr>
<tr><td>12, 27</td><td>0,2</td><td>0,2064</td></tr>
<tr><td>13, 28</td><td rowspan="3">
</td><td>0,1</td><td>0,1981</td></tr>
<tr><td>14, 29</td><td>0,2</td><td>0,3859</td></tr>
<tr><td>15, 30</td><td>0,3</td><td>0,5541</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 |   | 0,1 | 0,3439 |
| 17 | | 0,2 | 0,5904 |
| 18 | | 0,05 | 0,1855 |

Огняник Александр Васильевич
Трубилин Евгений Иванович
Самурганов Евгений Ерманекосович
Цыбулевский Валерий Викторович

Учебное издание

**МОДЕЛИРОВАНИЕ В АГРОИНЖЕНЕРИИ**

**Практикум**

Практикум

В авторской редакции

Дизайн обложки -

Подписано в печать 20.12.2019. Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. – 56,73. Уч.-изд. л. – 4,15.
Тираж … экз. Заказ № … .
Типография Кубанского государственного
аграрного университета.
350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13