

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный  
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Краснодар  
КубГАУ  
2020

**УДК 621.7.014.2(075.8)**

**ББК 30.121**

**С64**

**Р е ц е н з е н т ы :**

**Е. И. Винеvский** – д-р техн. наук, профессор  
(зав. лабораторией машинных агропромышленных технологий  
ВНИИТТИ);

**Б. Ф. Тарасенко** – д-р техн. наук, профессор  
(Кубанский государственный аграрный университет)

**К о л л е к т и в а в т о р о в :**

В. А. Дробот, А. Д. Гумбаров, Ф. В. Кремянский,  
А. С. Брусенцов, В. В. Ванжа

**С64 Сопротивление материалов** : учеб. пособие / В. А. Дробот  
[и др.]. – Краснодар : КубГАУ, 2020. – 173 с.

**ISBN 978-5-907294-90-5**

В учебном пособии изложены теоретические основы, а также практические указания по выполнению расчетно-проектировочных работ. Приводится методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определения положения опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности.

Издание предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 Агроинженерия, 20.03.02 Природооудстройство и водопользование.

**УДК 621.7.014.2(075.8)**

**ББК 30.121**

© Дробот В. А., Гумбаров А. Д.,  
Кремянский Ф. В.,  
Брусенцов А. С,  
Ванжа В. В., 2020

© ФГБОУ ВО «Кубанский  
государственный аграрный  
университет имени  
И. Т. Трубилина», 2020

**ISBN 978-5-907294-90-5**

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебное пособие содержит все основные темы курса сопротивления материалов. В пособии рассматриваются основные понятия курса, сжатие и растяжение материалов, работа деформации, критерии прочности и предельных напряженных состояний материалов, касательные напряжения, расчет на прочность, теория напряженного состояния, основные законы упругих свойств материалов, жесткость и прочность при кручении, сдвиги и изгибы, температурные напряжения, расчет конструкций по предельной нагрузке и т. д. Изложены теоретические основы, а также указания по выполнению расчетно-проектировочных работ. Приводится методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определения положения опасных сечений, а также подбора сечений из условия прочности.

Издание предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 Агроинженерия, 20.03.02 Природоостройство и водопользование.

# 1 ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

## 1.1 Основные принципы и гипотезы науки о сопротивлении материалов

Сопротивление материалов представляет собой один из разделов механики твердого деформируемого тела.

Сопротивление материалов – это наука о принципах и методах расчета частей машин и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Под прочностью элемента конструкции понимают его способность воспринимать внешние нагрузки в процессе эксплуатации не разрушаясь. Расчет на прочность преследует цель подобрать наименьшие поперечные размеры элементов конструкций, исключая возможность разрушения под действием заданных нагрузок.

Под жёсткостью элемента конструкции понимают его способность сохранять свои размеры и, следовательно, форму в процессе эксплуатации. Расчет на жесткость связан с определением деформаций конструкций.

Понятие устойчивости представляет собой способность элемента конструкции сохранять под действием эксплуатационных нагрузок свою первоначальную форму равновесия.

В отличие от других разделов механики твердого деформируемого тела (теории упругости и пластичности) сопротивление материалов стремится решать свои задачи наиболее простыми и доступными в инженерной практике методами, используя различные приближенные методы, упрощающие гипотезы, пригодность которых проверена экспериментально.

Исследование реальных элементов конструкций начинается с расчетной схемы, выбор которой заключается в устранении второстепенных факторов, незначительно влияющих на работу конструкции, схематизации рассматриваемого объекта.

С геометрической стороны это приводит к тому, что основным объектом расчёта в сопротивлении материалов явля-

ется стержень (брус) (рисунок 1.1). Это тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной.

Чаще других в сопротивлении материалов рассматриваются призматические стержни с прямолинейной осью, реже – стержни с переменным сечением и стержни с криволинейной осью.

Стержни, образованные путем последовательного поворота сечений вокруг оси, называются естественно закрученными (примером служит сверло).

Осью стержня называется линия, проходящая через центры тяжести всех последовательно проведенных поперечных сечений.

Сечение стержня плоскостью, перпендикулярной его оси, называют поперечным сечением.

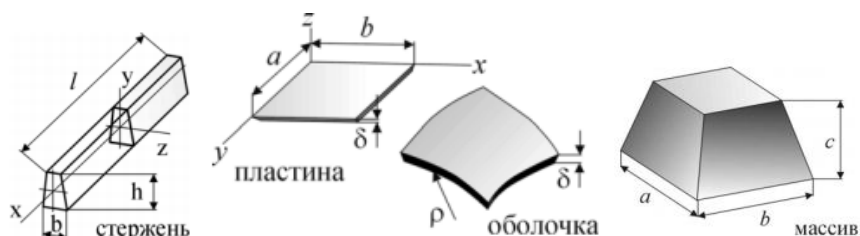


Рисунок 1.1 – Расчетные объекты

Стержни, у которых толщина стенки значительно меньше габаритных размеров поперечного сечения, называются тонкостенными.

Пластинка представляет собой тело, один из размеров которого (толщина) значительно меньше двух других (длины и ширины) (рисунок 1.1).

Искривленная пластинка, т. е. тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями с расстоянием между ними, значительно меньшим других размеров, называется оболочкой (рисунок 1.1).

Массив – тела, у которых все три размера одинакового порядка (рисунок 1.1).

В сопротивлении материалов применяются следующие основные принципы:

1. Принцип сохранения начальных размеров (принцип отвердевания). Согласно этому принципу форма тела под действием внешних сил меняется несущественно. Это позволяет при составлении уравнений равновесия исходить из начальных размеров тела. Принцип отвердевания не применим при наличии в теле больших перемещений.

2. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). В соответствии с этим принципом действие некоторой совокупности сил эквивалентно сумме независимых действий этих сил. Этот принцип позволяет рассматривать действие каждой силы независимо, т. е. предполагая остальные силы отсутствующими. Условием применения принципа независимости действия сил является предположение о том, что деформации в теле малы по сравнению с его размерами.

3. Принцип Сен-Венана. Согласно этому принципу в точках тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, напряжения мало зависят от способа приложения нагрузок. Этот принцип позволяет отвлекаться от конкретного способа приложения внешних нагрузок и реакций опор.

Для облегчения решения вопросов инженерной практики в сопротивлении материалов прибегают к схематизации свойств материалов и пользуются рядом допущений:

1. Материалы предполагаются идеально упругими.

Это означает, что после снятия внешних нагрузок тело восстанавливает исходные размеры и, следовательно, форму.

Из этой гипотезы следует независимость окончательной деформации тела от порядка приложения внешних нагрузок.

2. Материалы считаются изотропными.

Согласно этой гипотезе в данной точке тела материал обладает одинаковыми свойствами по всем направлениям.

3. Материалы являются однородными.

Принятие этой гипотезы означает, что свойства материала считаются одинаковыми во всех точках тела.

4. Материал тела предполагается сплошным.

Эта гипотеза предлагает рассматривать материал тела как непрерывную среду до деформации, а также в процессе деформации и после неё. Следствием принятия этой гипотезы является непрерывность функций координат, описывающих перемещение точек тела.

## **1.2 Внешние и внутренние силы**

Внешние силы обусловлены взаимодействием тела с другими телами. Они подразделяются на поверхностные и объёмные.

Объёмные силы (вес тела, силы инерции) приложены ко всем точкам тела и, следовательно, распределены непрерывно по его объёму.

Поверхностные силы (опорные реакции, тросовые подвески, распределённые нагрузки) приложены к поверхности тела.

Распределёнными нагрузками являются приложенные непрерывно на протяжении некоторой площади или длины. Величина распределённой нагрузки, приходящаяся на единицу площади или длины, называется интенсивностью распределённой нагрузки.

Сосредоточенной называется сила, распределённая по весьма малой площади тела и ее принято считать приложенной в точке.

Различают нагрузки статические и динамические.

Статические нагрузки нарастают очень медленно от нуля до своего конечного значения и затем остаются постоянными.

К динамическим относятся ударные и повторно-переменные нагрузки. Последние при условии, что частота их изменения соизмерима с частотой собственных колебаний тела (конструкции).

Внутренними силами называют силы упругого взаимодействия одной части тела с другой, обусловленные действием внешних сил. Постоянные взаимодействия между частицами тела в расчет не принимаются.

Внутренние силы сопротивляются стремлению внешних сил отделить одну часть тела от другой или изменить форму тела.

Для определения внутренних сил применяют метод сечений. Суть этого метода состоит в следующем. Изучаемый стержень мысленно рассекают плоскостью на две части. Далее рассматривают равновесие одной из частей (любой) под действием внешних сил, приложенных к этой части, и внутренних сил взаимодействия с отброшенной частью (рисунок 1.2). Это позволяет определить равнодействующую внутренних сил и их интенсивность.

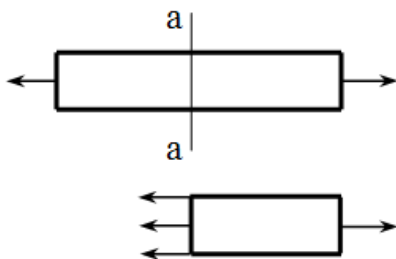


Рисунок 1.2 – Метод сечений

Равнодействующую внутренних сил называют усилием, а величину внутренней силы, приходящуюся на единицу площади сечения – напряжением в данной точке сечения.

В зависимости от характера системы внешних сил, приложенных к стержню, возможны следующие случаи деформации стержня:

1. Внешние силы приводятся к силе, направленной по оси стержня (рисунок 1.3). В этом случае стержень испытывает растяжение или сжатие.



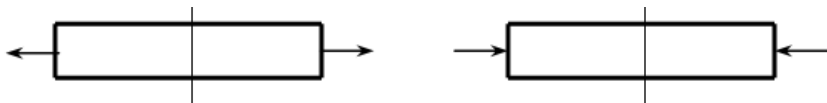


Рисунок 1.3 – Деформация растяжения или сжатия

2. Внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня (рисунок 1.4). Внутренние силы в этом случае приводятся тоже к паре, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня. Стержень под действием этих двух пар испытывает кручение.

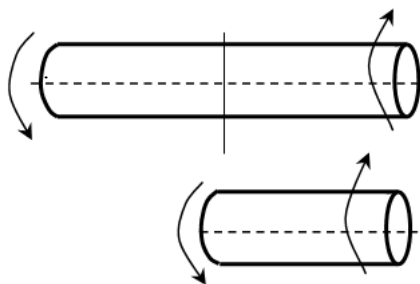


Рисунок 1.4 – Деформация кручения

3. Внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, в которой лежит ось стержня (рисунок 1.5).

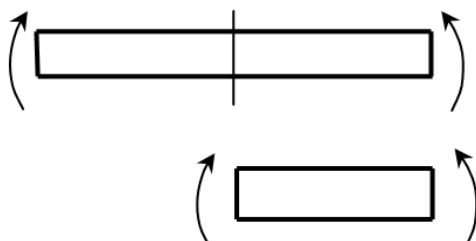


Рисунок 1.5 – Деформация изгиб

Внутренние силы в этом случае приводятся тоже к паре, действующей в той же плоскости. Стержень под действием этих двух пар подвергается изгибу.

### 1.3 Понятие о напряжениях и деформациях

Пусть в окрестности некоторой точки  $O$  сечения стержня выделена элементарная площадка  $\Delta F$  (рисунок 1.6).

Пусть величина внутренней силы, действующей по площадке, равна  $\Delta P$ .

Тогда  $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = p$  – полное напряжение в точке  $O$ .

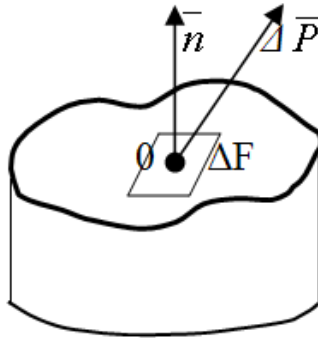


Рисунок 1.6 – Рассматриваемое сечение

Полное напряжение можно разложить на две компоненты (рисунок 1.7).

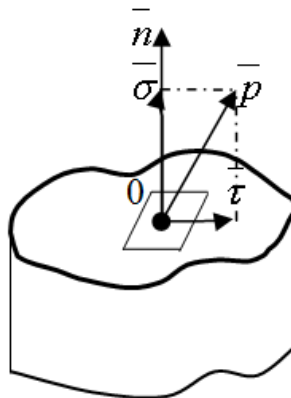


Рисунок 1.7 – Проекции полного напряжения

Проекция полного напряжения  $\bar{p}$  на нормаль  $\bar{n}$  к сечению  $\sigma = p \cos(\bar{p}, \bar{n})$  называется нормальным напряжением.

Проекция полного напряжения  $\bar{p}$  на плоскость площадки  $\tau = p \sin(\bar{p}, \bar{n})$  называется касательным напряжением.

Между полным напряжением и его компонентами существует очевидная связь:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2. \quad (1.1)$$

Напряжения  $\tau$  и  $\sigma$  впредь будем считать скалярными величинами, так как их направления заведомо известны.

Внешние силы, приложенные к телу, вызывают изменения его геометрической формы (деформации).

Перемещения точек тела вдоль прямых линий называются линейными деформациями. Если в теле до деформации расстояние между двумя точками равнялось  $dx$  (рисунок 1.8а), а после деформации стало равным  $dx+du$ , то  $du$  представляет собой абсолютную линейную деформацию, а  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$  – относительную линейную деформацию по направлению оси  $x$ .

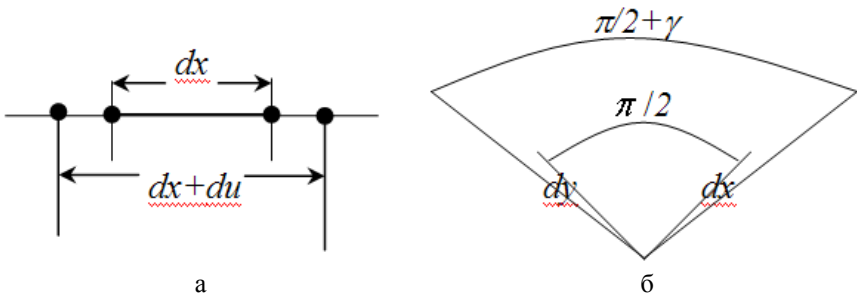


Рисунок 1.8 – Деформации тела

Повороты линий и плоскостей в теле называются угловыми деформациями. Если в теле до деформации два отрезка  $dx$  и

$du$  располагались под углом  $\pi/2$  (рисунок 1.8, б), а после деформации этот угол стал равным  $\pi/2 \pm \gamma$ , то величина  $\gamma$  представляет собой угловую деформацию.

В связи с малостью угловых деформаций при вычислениях полагают  $\gamma = tg\gamma$ .

Деформации, исчезающие после удаления внешних нагрузок, называются упругими, а деформации, остающиеся в теле – пластическими (остаточными).

### **Контрольные вопросы**

1. Виды деформаций.
2. Упругие деформации. Пластические деформации.
3. Внутренние силы, их определение (метод сечений).
4. Виды напряжений.

## 2 ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### 2.1 Усилия в поперечном сечении стержня

Центральным растяжением (или центральным сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только продольная сила  $N$ , а все остальные усилия равны нулю.

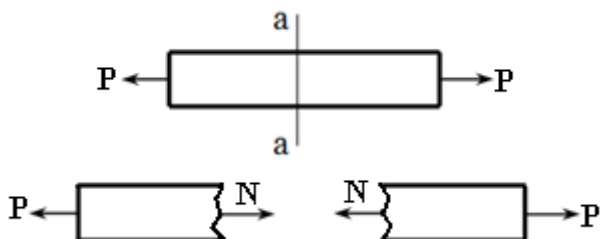


Рисунок 2.1 – Центральное растяжение стержня

Продольная сила представляет собой равнодействующую внутренних сил в поперечном сечении стержня. Она определяется из условий равновесия отсеченной части стержня и численно равна сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.

При растяжении продольная сила направлена от сечения и считается положительной. При сжатии она направлена к сечению и считается отрицательной.

Эпюра продольных сил  $N$  представляет собой график величин этих усилий для всех поперечных сечений стержня.

### 2.2 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии)

При растяжении-сжатии стержня с постоянными поперечными размерами в любом поперечном сечении возникают нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению и равные:

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

где  $N$  – усилие в опасном сечении стержня, Н;  
 $F$  – площадь опасного сечения стержня, м<sup>2</sup>.

Относительная продольная деформация, как отмечалось выше, определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.2)$$

где  $l$  – первоначальная длина стержня, м;  
 $\Delta l$  – абсолютное удлинение (укорочение), м.

Под действием осевых нагрузок стержень получает также относительную поперечную деформацию

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta v}{v}, \quad (2.3)$$

где  $v$  – первоначальный поперечный размер, м;  
 $\Delta v$  – абсолютное изменение поперечного размера, м.

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной называется коэффициентом поперечной деформации (или коэффициентом Пуассона):

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Коэффициент Пуассона характеризует упругие свойства материалов в поперечном направлении при растяжении или сжатии.

Коэффициент Пуассона величина безразмерная, и его значение для различных материалов заключено в пределах  $0 < \mu \leq 0,5$ .

Объемная деформация стержня характеризуется относительным изменением объема:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}, \quad (2.5)$$

где  $V$  – первоначальный объем стержня,  $\text{м}^3$ ;  
 $\Delta V$  – конечный объем,  $\text{м}^3$ .

Объем стержня при растяжении увеличивается, при сжатии уменьшается. Когда  $\mu = 0,5$ , объем стержня при растяжении или сжатии остается неизменным.

Зависимость между напряжениями и относительными продольными деформациями выражается законом Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (2.6)$$

где  $E$  – коэффициент пропорциональности, называемый модулем продольной упругости (модуль Юнга), МПа

Модуль продольной упругости характеризует упругие свойства материалов в продольном направлении при растяжении или сжатии.

Коэффициент поперечной деформации  $\mu$ , наряду с модулем продольной упругости  $E$ , представляют собой постоянные для каждого материала величины, характеризующие его упругие свойства.

Абсолютное удлинение стержня постоянного сечения при постоянном по длине значении продольной силы определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}. \quad (2.7)$$

Произведение  $E \cdot F$  называется жесткостью сечения при растяжении-сжатии.

Если стержень имеет несколько участков с различными значениями продольной силы или площади поперечного сече-

ния, то удлинение стержня определяется путем суммирования удлинений участков.

После определения удлинений соответствующих участков стержня легко найти перемещение любого сечения вдоль оси стержня.

### 2.3 Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальной энергией упругой деформации называется энергия, накопленная в теле вследствие его упругой деформации под действием внешних сил.

Потенциальная энергия ( $U$ , Н·м) численно равна работе внешних сил, приложенных к телу, и при статическом растяжении или сжатии и постоянных  $N$  и  $F$  по длине стержня может быть определена по формуле:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot F}, \quad (2.8)$$

или

$$U = \frac{\Delta l^2 \cdot E \cdot F}{2 \cdot l}. \quad (2.9)$$

Удельной потенциальной энергией деформации ( $u$ ,  $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3}$ ) называется потенциальная энергия, отнесенная к единице объема стержня:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}. \quad (2.10)$$

### 2.4 Механические характеристики материалов

В инженерной практике различают два вида материалов: хрупкие, которые разрушаются при весьма малых остаточных деформациях, и пластичные, которые разрушаются после появления значительных остаточных деформациях. Однако та-



кое деление является условным. Один и тот же материал в зависимости от характера и условий нагружения, температуры и скорости деформирования может вести себя и как пластичный, и как хрупкий. Поэтому правильнее говорить о пластичном или хрупком состоянии материала.

Основные механические характеристики пластичных материалов определяются при испытаниях на растяжение стандартных образцов.

В процессе испытания мы получаем кривую зависимости между нагрузкой ( $P$ ) и абсолютным удлинением ( $\Delta l$ ), называемую машинной диаграммой растяжения образца.

Диаграмм напряжений строится на основании машинной диаграммы растяжения, отражает зависимость между напряжением ( $\sigma$ ) и относительными удлинениями ( $\varepsilon$ ) и для пластичных материалов имеет такое же очертание, но отличается масштабом.

На рисунке 2.2 изображена диаграмма напряжений для мягкой стали в координатах  $\sigma$  и  $\varepsilon$ . На диаграмме показаны характерные ординаты, называемые пределами:

– *предел пропорциональности* ( $\sigma_{\text{мп}}$ , точка А) – наибольшее напряжение, при котором еще сохраняется линейный закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha, \text{ или } \sigma = E\varepsilon, \quad (2.11)$$

где  $E = \operatorname{tg} \alpha$  – так называемый модуль продольной упругости.

– *предел текучести* ( $\sigma_m$ , точка В) – напряжение, при котором деформации растут при почти постоянной нагрузке. Для материалов, не имеющих площадки текучести, за величину предела текучести принимают  $\sigma_{0,2}$  – напряжение, при котором остаточное относительное удлинение  $\varepsilon$  достигает 0,2 %.

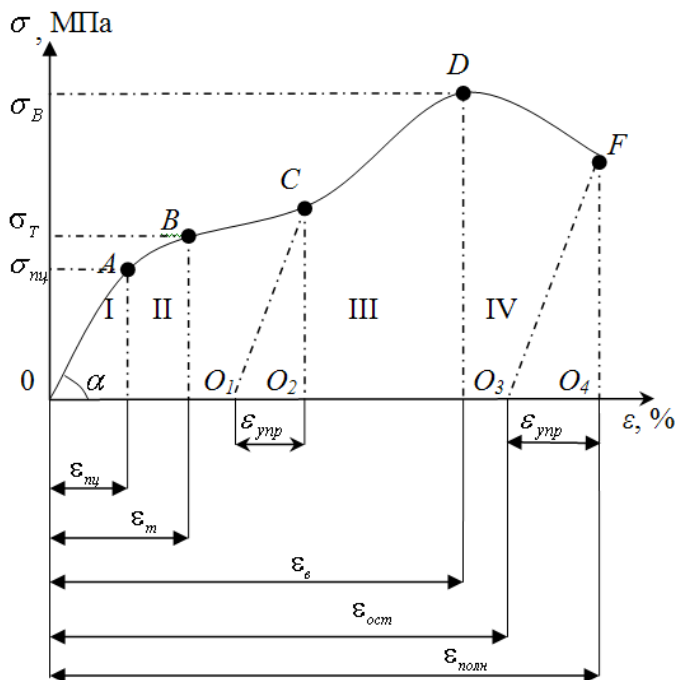


Рисунок 2.2 – Диаграмма напряжений для малоуглеродистой стали

– *предел прочности или временное сопротивление* ( $\sigma_B$ , точка D) – напряжение, вызываемое наибольшей нагрузкой на образец.

– *предел упругости* ( $\sigma_y$ ) – напряжение, при котором остаточные деформации незначительны (не более 0,001–0,03 %). Практически можно считать, что  $\sigma_y$  совпадает с  $\sigma_{\text{нп}}$  (точка A).

Кроме того, диаграмму (рисунок 2.2) можно разделить на условные зоны: I – зона пропорциональности, II – зона текучести, III – зона прочности, IV – зона местной текучести.

Диаграмма на рисунке 2.2 даёт условные напряжения, так как они вычислены как отношение нагрузки к первоначальной площади сечения образца. В связи с этим участок DF диаграммы не отражает истинного изменения напряжений.

Если построить диаграмму истинных напряжений, относя нагрузку к текущей площади сечения образца, то на участке  $DF$  истинные напряжения будут расти, за счет резкого уменьшения площади сечения образца в месте разрыва. В остальном обе диаграммы почти совпадают. Можно показать, что ординаты этих диаграмм связаны зависимостью

$$\sigma_{ист} = \sigma(1 + \varepsilon), \quad \sigma \leq \sigma_B. \quad (2.12)$$

Следует заметить, что высокие  $\sigma_{ист}$  в точке  $F$  не могут характеризовать прочность материала, так как они развиваются в процессе разрушения образца. Отсюда, логично считать напряжение  $\sigma_B$  (точка  $D$ ) пределом прочности.

На диаграмме показан закон разгрузки (линия  $CO_1$ ). При повторном нагружении диаграмма пойдет по этой же линии и предел пропорциональности повышается (*явление наклёпа*).

Таким образом, относительная продольная деформация  $\varepsilon$  состоит из упругой деформации  $\varepsilon_{упр}$ , которая исчезает после разгрузки, и пластической  $\varepsilon_{пл}$ , которая сохраняется после разгрузки (остаточная деформация). Остаточная деформация в момент разрыва  $\varepsilon_{ост}$  служит характеристикой пластичности материала.

Следует иметь в виду, что у пластичных материалов механические характеристики при растяжении и сжатии совпадают.

У хрупких же материалов сопротивление сжатию, как правило, значительно выше, чем растяжению.

Допускаемым напряжением  $\sigma_{доп}$  для данного элемента конструкции называют наибольшее безопасное для его эксплуатации напряжение. Основанием для назначения допускаемого напряжения служат характеристики материала и требования к эксплуатации.

Так, для элементов конструкции (сооружения), изготовленных из пластических материалов и не терпящих остаточных деформаций в процессе эксплуатации, допускаемое напряжение подчиняют условию

$$\sigma \leq \frac{\sigma_m}{n}. \quad (2.13)$$

Для хрупких материалов (чугун, бетон, камни) за основание для определения допускаемых напряжений принимается предел прочности, поэтому

$$\sigma \leq \frac{\sigma_B}{n}. \quad (2.14)$$

В этих формулах  $n > 1$  – коэффициент безопасности (запаса прочности). Эта величина учитывает неточное определение эксплуатационных нагрузок, несовершенство расчетных схем, случайные отклонения в характеристиках материалов и в условиях эксплуатации.

Для многих стандартных деталей и элементов типовых конструкций и сооружений величины  $n$  нормированы на основании инженерного опыта. В иных случаях при выборе  $n$  конструктор руководствуется собственным опытом и инженерной интуицией. После выбора  $n$  и назначения  $\sigma_{\text{пр}}^-$  условие прочности элемента конструкции записывают в виде  $\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{пр}}^-$ . Сечение элемента, в котором  $\sigma = \sigma_{\text{max}}$  называют опасным сечением.

Условие прочности растянутого или сжатого стержня выглядит:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{F} \leq \sigma. \quad (2.15)$$

## 2.5 Методика расчета статически неопределимых систем

Задачи, в которых все реакции связей определяются из условий равновесия, называются статически определимыми. Если число неизвестных реакций связей превышает число уравнений равновесия, задача становится статически неопределимой.

*Статически неопределимой* называется такая система, которая не может быть рассчитана при помощи одних только уравнений статики, так как имеет лишние связи. Для расчета таких систем составляются дополнительные уравнения, учитывающие деформации системы.

Статически неопределимые системы обладают рядом характерных особенностей:

1. Статически неопределимые конструкции являются более жесткими, чем соответствующие статически определимые, так как имеют дополнительные связи.

2. В статически неопределимых системах возникают меньшие внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определимыми системами при одинаковых внешних нагрузках.

3. Нарушение лишних связей в статически неопределимой системе не всегда приводит к разрушению, в то время как потеря связи в статически определимой системе делает ее геометрически изменяемой.

4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, т.е. фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы.

5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.

6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий.

Основными *методами расчета* статически неопределимых систем являются:

1. *Метод сил*. Здесь в качестве неизвестных рассматриваются усилия – силы и моменты.

2. *Метод перемещений*. Неизвестными являются деформационные факторы – углы поворотов и линейные смещения.

3. *Смешанный метод*. Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.

4. *Комбинированный метод*. Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратносимметричную составляющую – методом сил.

Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

Для решения статически неопределимых систем необходимо составить дополнительные уравнения. Таких уравнений должно быть столько, какова степень статической неопределимости.

Степенью статической неопределимости называется разность между числом искомых неизвестных усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые для данной системы можно составить ( $S = m - n$ ). Для решения статически неопределимых задач к уравнениям равновесия добавляют условия совместности деформаций, являющиеся уравнениями, связывающими между собой деформации или перемещения отдельных частей тела. В алгоритме решения данных задач присутствуют три стороны решения. **Статическая сторона** задачи, в которой для определения неизвестных опорных реакций записываем уравнения статики, т. е. проецируем все

имеющиеся силы и реакции на оси координат, а также записываем уравнение моментов для данной системы если это возможно.

Так как в статически неопределимых задачах неизвестных больше чем уравнений статики, то нам нужно составить столько уравнений сколько и неизвестных реакций нужно найти. Для этого используется *геометрическая сторона* задачи (условия совместности деформаций). Нужно рассматривать схему деформирования системы (а именно систему до и после деформации одновременно). Затем либо с помощью подобия треугольников, либо с помощью любого другого геометрического выражения должны составить уравнения изменения длины участка системы до и после деформации.

Имея столько уравнений сколько и неизвестных, наступает следующий момент – *физическая сторона* задачи. С помощью физических формул, таких как Закон Гука, определяем изменения длины  $l_1$  и  $l_2$ :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}.$$

С учетом уравнения совместности деформаций приравняем значения удлинений. Решая совместно уравнения равновесия и уравнение совместности деформаций, находим усилия в стержнях.

## Контрольные вопросы

1. Продольная (нормальная) сила и ее эпюра.
2. Определение перемещений при растяжении (сжатии).
3. Модуль продольной упругости. Модуль поперечной упругости.
4. Закон Гука при растяжении (сжатии).
5. Напряжения в поперечных сечениях бруса при растяжении (сжатии). Расчет на прочность при растяжении (сжатии).
6. Учет собственного веса при растяжении (сжатии).

## 3 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ

### 3.1 Напряженное состояние в точке тела

Мерой интенсивности внутренних сил, распределенных по сечениям, служат напряжения – усилия, приходящиеся на единицу площади сечения. Через произвольную точку  $O$  тела проведем секущую площадь с нормалью  $\nu$ . Выделим в окрестности точки  $O$  малую площадку  $\Delta F$  (рисунок 3.1). Пусть  $\Delta P$  – равнодействующая внутренних сил, действующих на эту площадку.

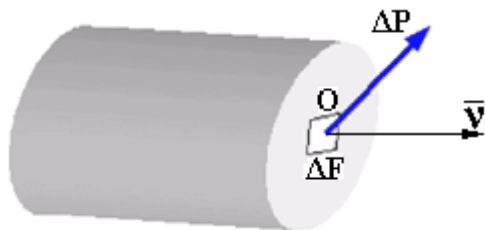


Рисунок 3.1 – Равнодействующая внутренних сил, действующих на площадке

Значение внутренних сил, приходящихся на единицу площади  $\Delta F$  рассматриваемой площадки, будет равно:

$$p_{\nu} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}. \quad (3.1)$$

Величина  $p_{\nu}$  называется полным напряжением в точке  $O$  на площадке  $\Delta F$ .

Единица напряжения – паскаль;  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Так как реальные значения напряжений будут выражаться очень большими числами, то следует применять кратные значения единиц, например, МПа (мегапаскаль);  $1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10^6 \text{ Н/м}^2$ .



Напряжения, как и силы, являются векторными величинами. В каждой точке сечения тела полное напряжение  $p_v$  можно разложить на две составляющие (компоненты) (рисунок 3.2):

1) составляющую, нормальную к плоскости сечения. Эта составляющая называется нормальным напряжением обозначается  $\sigma$  ;

2) составляющую, лежащую в плоскости сечения. Эта составляющая обозначается  $\tau$  и называется касательным напряжением. Касательное напряжение в зависимости от действующих сил может иметь любое направление в плоскости сечения. Для удобства  $\tau$  представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей. Принятые обозначения напряжений показаны на рисунке 3.2.

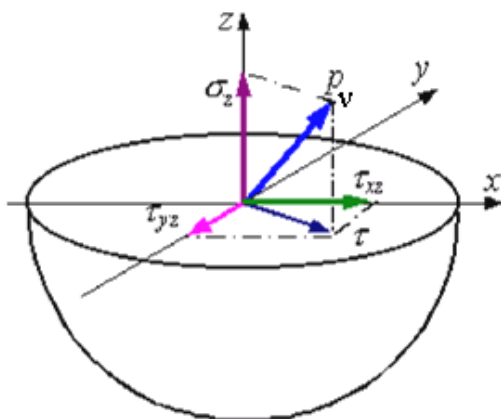


Рисунок 3.2 – Разложение вектора полного напряжения

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий какой координатной оси параллельно данное напряжение. Растягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным.

Обозначения касательных напряжений имеют два индекса: первый из них указывает, направление действия касательного напряжения (т. е. какой оси параллельно само напряже-

ние), а второй – ориентацию площадки (т. е. какой оси параллельна нормаль к рассматриваемой площадке). Касательные напряжения на площадках с внешней нормалью, совпадающей с положительным направлением оси координат, считаются положительными, если они направлены тоже по оси координат. На противоположных площадках правило знаков для касательных напряжений противоположно, т. е. касательные напряжения положительны, если они направлены против оси координат.

Так как направления компонент мы связали с осями координат, то впредь компоненты напряжений можно считать скалярными величинами.

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рисунке 3.3. Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела называется напряженным состоянием в данной точке.

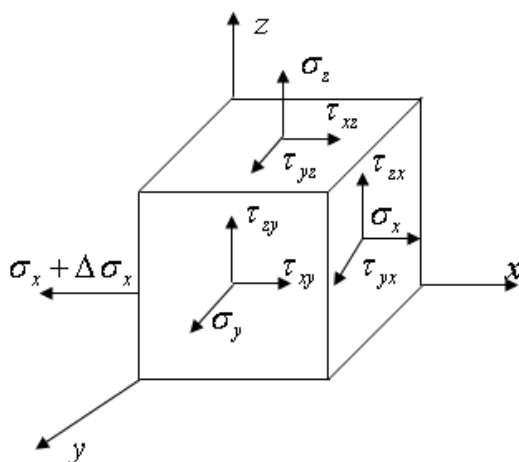


Рисунок 3.3 – Система напряжений в точке

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. Нормальное

напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости сечения.

На невидимых гранях куба все компоненты напряжений имеют приращения в виде частных дифференциалов. Например, на левой грани:

$$\begin{aligned}
 \sigma + \Delta\sigma_x, & \quad \Delta\sigma_x = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \cdot dx; \\
 \tau_{yx} + \Delta\tau_{yx}, & \quad \Delta\tau_{yx} = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} \cdot dx; \\
 \tau_{zx} + \Delta\tau_{zx}, & \quad \Delta\tau_{zx} = \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} \cdot dx.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Аналогичные выражения можно записать для нижней и тыльной граней куба.

Из условий равновесия куба вытекает закон парности касательных напряжений, который формулируется следующим образом: составляющие касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, равны по величине и противоположны по знаку, то есть либо обе направлены к ребру, либо обе направлены от ребра:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \tag{3.3}$$

С учетом закона парности число независимых компонент напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, снижается до шести:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Эти шесть компонент при случайном выборе осей полностью характеризуют напряженное состояние в точке.

Компоненты напряжений принято записывать в виде матрицы и называть тензором напряжений:

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

В теории упругости доказано, что через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки, а также действующие на них нормальные напряжения называются главными.

Главными напряжениями являются для данной точки экстремальными. Их принято обозначать  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , причем:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

В теории упругости показано также, что по площадкам, делящим пополам углы между главными площадками, действуют максимальные касательные напряжения. Их называют главными касательными напряжениями. Через главные нормальные напряжения они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2} \cdot \sqrt{\sigma_1 - \sigma_3} \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_2 - \sigma_3} \cdot \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1} \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_3 - \sigma_1} \cdot \sqrt{\sigma_3 - \sigma_2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными касательными напряжениями имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{31} &= \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1)\end{aligned}$$

(3.6)

### 3.2 Виды напряженного состояния

В зависимости от значений главных напряжений различают три вида напряженного состояния.

1. Линейное напряженное состояние – когда два главных напряжения равны нулю (растяжение или сжатие в одном направлении) (рисунок 3.4).

Пусть известно:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \sigma_1 = \frac{N}{F}.$$

Полное напряжение по наклонному сечению с площадью  $F_\alpha$  равно:

$$\begin{aligned}p_\alpha &= \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos\alpha = \sigma_1 \cdot \cos\alpha, \\ F_\alpha &= \frac{F}{\cos\alpha}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Нормальная и касательная составляющие полного напряжения:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha, \quad (3.8)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sigma_1 \cdot \sin 2\alpha. \quad (3.9)$$

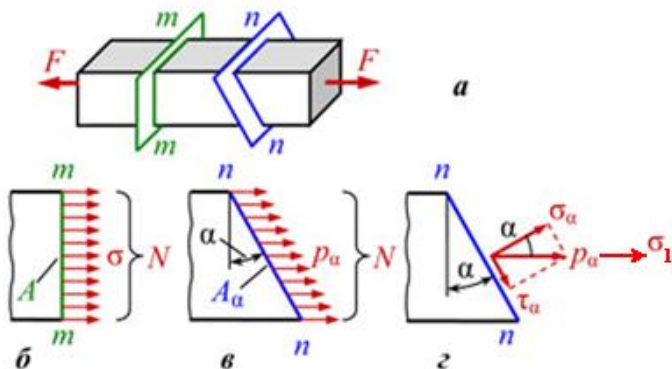


Рисунок 3.4 – Компоненты напряжения при линейном напряженном состоянии

Экстремальные значения нормального напряжения:

- при  $\alpha = 0^\circ$  имеем максимальное напряжение, равное  $\sigma_\alpha = \sigma_1$  (главная площадка перпендикулярна оси элемента);
- при  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение напряжения, равное  $\sigma_\alpha = 0$  (главная площадка параллельна оси элемента).

Экстремальные значения касательного напряжения:

- при  $\alpha = 45^\circ$  имеем максимальное касательное напряжение, равное  $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}$ ;
- при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение касательного напряжения, равное  $\tau_\alpha = 0$  (главные площадки).

## 2. Плоское напряженное состояние

Напряженное состояние называется плоским или двухосным, если одно из трех главных напряжений равно нулю (рисунок 3.5).

Пусть:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0.$$

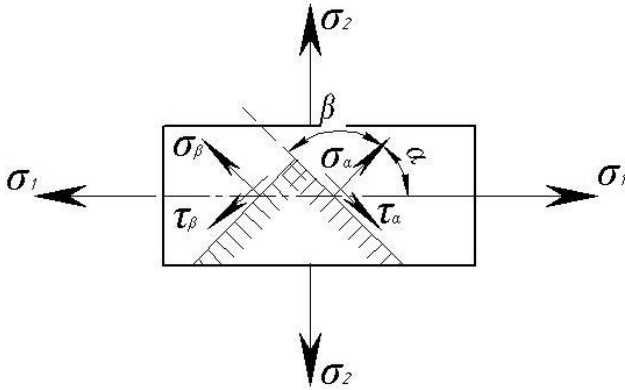


Рисунок 3.5 – Компоненты напряжения при плоском напряженном состоянии

При заданных значениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением главного напряжения  $\sigma_1$ , определяется по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha, \quad (3.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.11)$$

– при  $\alpha = 0^\circ$  имеем максимальное напряжение, равное

$$\sigma_\alpha = \sigma_1;$$

– при  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение напряжения, равное  $\sigma_\alpha = \sigma_2$ ;

– при  $\alpha = 45^\circ$  имеем максимальное касательное напряжение, равное  $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ;

– при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$  имеем минимальное значение касательного напряжения, равное  $\tau_\alpha = 0$ .

В случае, когда  $\sigma_2 > 0$ , наибольшее и наименьшее из всех касательных напряжений будут иметь место на площадках, наклоненных под углом в  $45^\circ$  к плоскости напряжений, и равны:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1}{2}. \quad (3.12)$$

Напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, связаны между собой следующей зависимостью:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (3.13)$$

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (3.14)$$

При заданных значениях нормальных ( $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ) и касательных ( $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ ) напряжений на взаимно перпендикулярных площадках элемента (рисунок 3.6) напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением  $\sigma_x$ , определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_x + \sigma_y + \frac{1}{2} \sigma_x - \sigma_y \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.15)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_x - \sigma_y \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (3.16)$$

Главные напряжения в этом случае равны:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{\sigma_x - \sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3.17)$$

Угол наклона главной площадки  $\alpha$  определяется по формулам:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.18)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}. \quad (3.19)$$

В эти формулы напряжения подставляются со своими знаками.

Если при этом оказывается, что  $\operatorname{tg} 2\alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$  больше нуля (положителен), то угол  $\alpha$  отсчитывается от направления  $\sigma_x$



по ходу часовой стрелки, если же  $\operatorname{tg} 2\alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$  меньше нуля (отрицателен), то угол отсчитывается против часовой стрелки. Наибольшее и наименьшее касательное напряжения действуют на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.20)$$

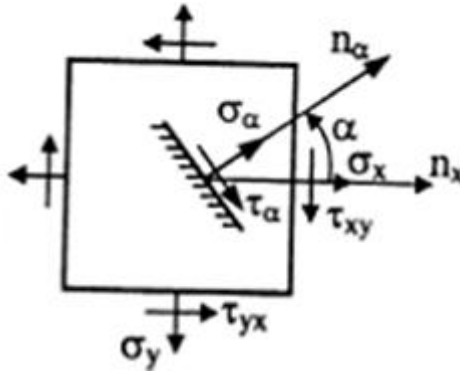


Рисунок 3.6 – Напряжения на площадке с нормалью, составляющей угол  $\alpha$  с направлением  $\sigma_x$

3. Объемное напряженное состояние наблюдается, когда все три главных напряжения отличны от нуля (рисунок 3.7).

При наличии трех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рисунок 3.7) нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью  $n$ , составляющей углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  с направлениями соответствующих главных напряжений, определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3, \quad (3.21)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}{2\sigma_\alpha}. \quad (3.22)$$

На площадках, равнонаклоненных к трем главным напряжениям, нормальное и касательное напряжения называются октаэдрическими и равны:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (3.23)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}. \quad (3.24)$$

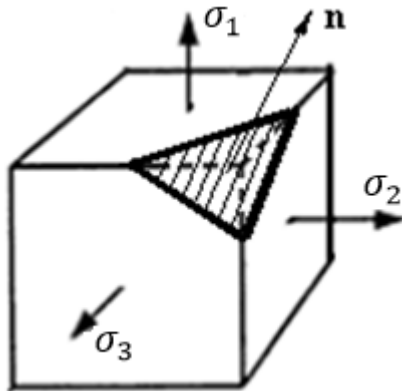


Рисунок 3.7 – Объемное напряженное состояние

### 3.3 Деформации при сложном напряженном состоянии. Связь между напряжениями и деформациями

Связь между линейными упругими деформациями и нормальными напряжениями в направлении этих деформаций выражается обобщенным законом Гука.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x) \right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (3.26)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль упругости при сдвиге, МПа.

Главные деформации, т. е. относительные линейные деформации по направлению главных напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Угловые деформации по главным направлениям равны нулю.

Объемная деформация  $\theta$  (относительное изменение объема) может быть выражена так:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.28)$$

Видно, что изменение объема зависит только от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Если принять, что среднее напряжение равно:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

В этом случае мы получим:

$$\Theta = \frac{3}{E} \frac{1-2\mu}{3} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{K}, \quad (3.29)$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  – модуль объемной деформации.

### 3.4 Теории прочности

Наиболее известные в сопротивлении материалов теории прочности:

первая теория прочности – «Теория наибольших нормальных напряжений».

вторая теория прочности – «Теория наибольших деформаций».

третья теория прочности – «Теория наибольших касательных напряжений».

четвертая теория прочности (энергетическая) – «Теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения».

теория прочности Мора – «Теория предельных напряжённых состояний (иногда говорят – V теория прочности)».

Из всех вышеперечисленных теорий прочности наиболее полной, точной и всеобъемлющей является теория Мора. Все её положения были проверены экспериментально. Она подходит как для проверки прочности хрупких материалов (чугун, бетон, кирпич), так и для проверки на прочность пластичных материалов (низкоуглеродистая сталь). Теория наибольших нормальных напряжений и теория наибольших деформаций подходит только для прочностного анализа хрупких материалов, причём только для каких-то определённых условий нагружения, если требовать повышенную точность расчёта. Вот поэтому первые две теории прочности сегодня применять не рекомендуется. Результаты теории наибольших касательных напряжений и теории наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения можно получить в некоторых частных случаях нагружения при применении теории Мора.

В зависимости от условий нагружения материал может находиться в различных механических состояниях: упругом,

пластическом и в состоянии разрушения. Под предельным подразумевают такое напряженное состояние, при котором происходит качественное изменение свойств материала – переход от одного механического состояния к другому. Для пластических материалов предельным считается напряженное состояние, соответствующее заметным остаточным деформациям, а для хрупких – такое, при котором начинается разрушение материала.

При линейном напряженном состоянии предельное значение единственного в этом случае главного напряжения может быть непосредственно определено из опыта ( $\sigma_T$  – для пластических материалов и  $\sigma_B$  – для хрупких). Поэтому оценка прочности в этом частном случае проста. В случае сложного напряженного состояния (объемного или плоского) при оценке прочности необходимо учитывать наличие двух или трех отличных от нуля главных напряжений. При этом опасное состояние материала зависит не только от величин главных напряжений, но и от соотношений между ними.

Из-за невозможности экспериментального определения критериев опасного состояния материала при сложном напряженном состоянии пользуются гипотезами, формулирующими условия перехода материала в опасное состояние. На основании таких гипотез построены теории прочности. Эти теории исходят из предпосылок о том, что сложное и линейное напряженные состояния считаются эквивалентными (по прочности), если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся опасными. Поэтому оценка прочности материала при любом напряженном состоянии основывается на результатах опытов при простом растяжении (сжатии), и исследуемое напряженное состояние сравнивается с линейным. Для материалов с выраженной пластичностью за опасное (предельное) состояние принимается такое, при котором начинают развиваться остаточные деформации. Для материалов, нахо-

дящихся в хрупком состоянии, опасным считается такое состояние, которое предшествует началу появления трещин.

Общая запись условия прочности при сложном напряженном состоянии имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\text{пр}}$  – расчетное или приведенное напряжение при сложном напряженном состоянии.

Формулы приведенных напряжений устанавливаются теориями прочности в зависимости от принимаемых гипотез.

*Первая теория прочности* (теория наибольших нормальных напряжений) основана на гипотезе о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии. Приведенные напряжения при объемном напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq \sigma, \sigma_1 \leq \sigma \text{ или } \sigma_3 \leq \sigma. \quad (3.30)$$

Первая теория прочности подтверждается опытами только при растяжении хрупких материалов и лишь в тех случаях, когда все три главные напряжения не однозначны и различны по величине.

*Вторая теория прочности (теория наибольших относительных удлинений)* исходит из гипотезы о том, что разрушение связано с величиной наибольших относительных удлинений. Следовательно, опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшая по модулю относительная линейная деформация достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

По этой теории, при  $\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_1$ , условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq \sigma, \sigma_1 - \mu \sigma_2 + \sigma_3 \leq \sigma. \quad (3.31)$$

Вторая теория, как и первая, недостаточно подтверждается опытами. Это объясняется тем, что не учтены особенности строения реальных тел. Первая и вторая теории прочности отображают хрупкое разрушение путем отрыва (в первой это связывается с  $\sigma_{\text{max}}$ , во второй – с  $\epsilon_{\text{max}}$ ). Поэтому эти теории рассматриваются только как грубое приближение к действительной картине разрушения.

*Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)* предполагает, что появление опасного состояния обусловлено наибольшими касательными напряжениями.

Условие прочности можно записать следующим образом:

$$\tau_{\text{max}} \leq \tau \text{ или } \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma, \quad (3.32)$$

где  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{пр}}$  – приведенное (расчетное) напряжение по третьей теории прочности.

Третья теория прочности отображает наступление текучести в материале, а также разрушение путем сдвигов. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию при условии, что главные напряжения имеют разные знаки.

*Четвертая теория прочности или энергетическая теория прочности (теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения)* исходит из предпосылки о том, что количество потенциальной энергии формоизменения, накопленной к моменту наступления опасного состояния (текучести материала), одинаково как при сложном напряженном состоянии, так и при простом растяжении.

Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{пр}} \leq \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2 \text{ } ^2 + \sigma_2 - \sigma_3 \text{ } ^2 + \sigma_3 - \sigma_1 \text{ } ^2} \leq \sigma. \quad (3.33)$$

Четвертая теория прочности отображает наступление текучести. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, имеющими одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии.

*Теория прочности Мора (теория предельных состояний)* исходит из предположения, что прочность материалов в общем случае напряженного состояния зависит от величины и знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений. Учитывая это предположение, любое напряженное состояние можно изобразить кругом Мора (рисунок 3.8), построенным на главных напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

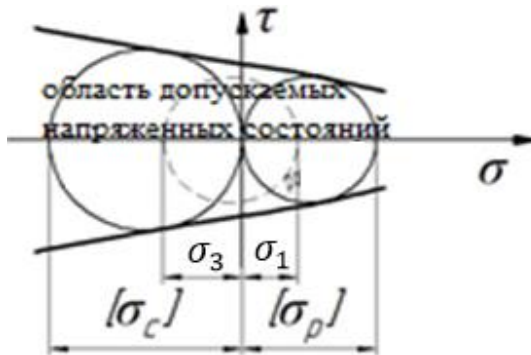


Рисунок 3.8 – Круги напряжений Мора

Если для какого либо материала известны данные о его опасных состояниях при различных соотношениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , то изображая каждое опасное состояние при помощи круга Мора, получим семейство таких предельных кругов. Вычертив их общую огибающую, получим область прочности. Но получение действительной огибающей предельных кругов для всевозможных напряженных состояний неосуществимо. В практических приложениях предельную огибающую заменяют касательной к кругам растяжения и сжатия.

Для получения допустимого напряженного состояния необходимо построить круги Мора по значениям  $\sigma$ , полу-



ченным на основании опытов на одноосное растяжение и сжатие.

Для выяснения вопроса о прочности в некоторой точке тела строят круг напряжений по действующим в этой точке  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Если круг будет расположен между прямыми, то материал имеет избыточную прочность, а если будет пересекать эти прямые, то материал имеет недостаточную прочность. Круг, касающийся прямых, характеризует состояние, которое является допусаемым.

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \leq \sigma, \quad (3.34)$$

где  $k$  – коэффициент неравнопрочности материала.

$$k = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}. \quad (3.35)$$

Для равнопрочных материалов  $k = 1$ . Наилучшие результаты формула дает для смешанных напряженных состояний, когда  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ . Тогда круг Мора располагается между предельными кругами растяжения и сжатия.

Теория рекомендована для материалов различного сопротивления растяжению и сжатию, хрупких материалов.

### Контрольные вопросы

1. Полное напряжение и его составляющие.
2. Что такое напряженное состояние в точке?
3. Закон парности касательных напряжений.
4. Виды напряженного состояния
5. Теории прочности.

## 4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

### 4.1 Основные понятия и определения

Деформации и напряжения в брусе существенно зависят от размеров и формы его поперечных сечений. Поэтому во всех расчетных формулах обязательно присутствуют геометрические характеристики этих сечений. При одноосном растяжении и сжатии такой характеристикой является площадь сечения. В теории кручения и изгиба используются более сложные геометрические характеристики, так как в этих случаях напряжения и деформации зависят не только от площади, но и от формы сечения.

На рисунке 4.1 изображено произвольное сечение, отнесенное к некоторой системе координат  $(x, y)$ , где:  $F$  – величина площади сечения;  $dF$  – элементарная часть этой площади;  $x, y$  – координаты элементарной площадки;  $\rho$  – радиус-вектор;  $C$  – центр тяжести площади сечения.

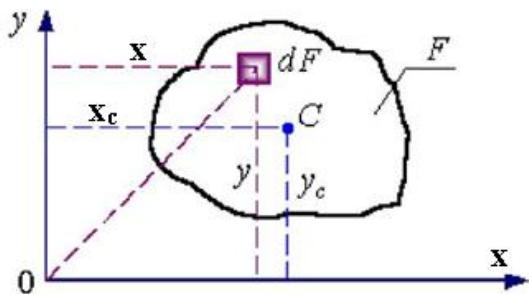


Рисунок 4.1 – К определению геометрических характеристик сечения

Площадь  $F$ , ограниченная произвольной кривой, определяется по формуле:

$$F = \int_F dF, \text{ м}^2. \quad (4.1)$$

Статические моменты площади  $F$  относительно осей  $X$  и  $Y$  определяются по формулам:

$$S_y = \int_F x \cdot dF, \quad S_x = \int_F y \cdot dF. \quad (4.2)$$

Размерность статического момента сечения –  $[m^3]$ .

Если известна величина площади  $F$  и координаты ее центра тяжести, то  $S_x$ ,  $S_y$  определяются по формулам:

$$S_y = F \cdot x_c, \quad S_x = F \cdot y_c. \quad (4.3)$$

Отсюда, если известна площадь и статические моменты, то координаты центра тяжести площади  $F$  определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (4.4)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Центр тяжести сечения лежит на оси симметрии сечения. Если сечение имеет хотя бы две оси симметрии, то центр тяжести лежит на пересечении этих осей.

Для сложного сечения, состоящего из  $n$  простейших фигур, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (4.5)$$

где  $x_i, y_i$  и  $F_i$  – координаты центров тяжести и площади сечений отдельных фигур.

Осевые моменты инерции площади  $F$  определяются по формулам:

$$I_y = \int_F x^2 \cdot dF, \quad I_x = \int_F y^2 \cdot dF. \quad (4.6)$$

Центробежный момент инерции площади  $F$  определяется по формуле:

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (4.7)$$

Полярный момент инерции (относительно начала координат) площади  $F$  определяется по формуле:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \cdot dF. \quad (4.8)$$

Так как  $\rho^2 = y^2 + z^2$ :

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (4.9)$$

Размерность моментов инерции –  $[м^4]$ .

Осевые моменты инерции всегда можно представить как произведения площади фигуры на квадраты некоторых вспомогательных величин, имеющих размерность длины и называемых радиусами инерции. Следовательно, радиусы инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$  определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. \quad (4.10)$$

Осевые и полярный моменты инерции, представляющие собой пределы сумм положительных величин, всегда положительны. Центробежный момент инерции может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю, так как координаты  $x$  и  $y$  входят в его выражение в первых степенях.

#### 4.2 Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть известны осевые  $I_{x_c}, I_{y_c}$  и центробежный  $I_{xy}$  моменты инерции сечения относительно его центральных осей и требуется определить моменты инерции  $I_x, I_y, I_{xy}$  того же сечения относительно осей  $X$  и  $Y$ , параллельных данным центральным (рисунок 4.2). Тогда согласно рисунка 4.2 и формулам (4.6) и (4.7) в принятых выше обозначениях имеем:

$$I_x = I_{x_c} + 2 \cdot y_c \cdot S_{x_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.11)$$

$$I_y = I_{y_c} + 2 \cdot x_c \cdot S_{y_c} + x_c^2 \cdot F, \quad (4.12)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + y_c \cdot S_{y_c} + x_c \cdot S_{x_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. \quad (4.13)$$

Учитывая, что относительно центральных осей статические моменты  $S_{x_c}, S_{y_c}$  равны нулю, получаем следующую зависимость между моментами инерции при переходе от центральных осей к любым параллельным осям:

$$I_x = I_{x_c} + y_c^2 \cdot F, \quad (4.14)$$

$$I_y = I_{y_c} + x_c^2 \cdot F, \quad (4.15)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + x_c \cdot y_c \cdot F. \quad (4.16)$$

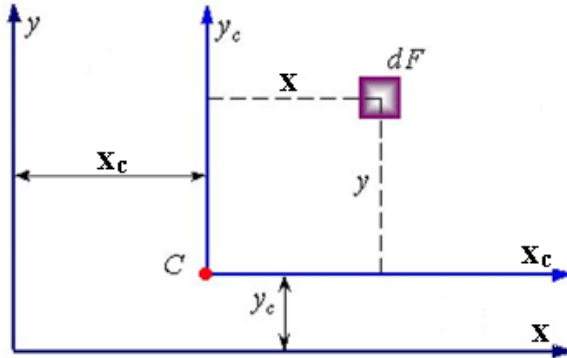


Рисунок 5.2 – Параллельный перенос осей

При переходе от нецентральных осей к также нецентральным в формулах перехода (4.11) – (4.13) должны быть сохранены слагаемые с  $S_x$  и  $S_y$ . Из формул (4.14) – (4.16) видно, что наименьшее значение имеют осевые моменты инерции относительно центральных осей сечения, так как величины  $y_c^2 F$  и  $x_c^2 F$  всегда положительны. Центробежный момент при переходе от центральных осей к нецентральным в зависимости от знака произведения координат  $x_c$  и  $y_c$  может увеличиваться или уменьшаться.

### 4.3 Моменты инерции простейших фигур

В расчетной практике часто встречаются сечения в виде простейших фигур (прямоугольников, кругов, треугольников и т. п.) или их комбинаций. При вычислении моментов инерции таких фигур обычно пользуются заранее выведенными расчетными формулами. Рассмотрим некоторые из простых фигур.

Прямоугольник и параллелограмм (рисунок 4.3). Выделим элементарную полоску площадью  $dF = bdy$  и подставим это значение  $dF$  под знак интеграла (4.6):

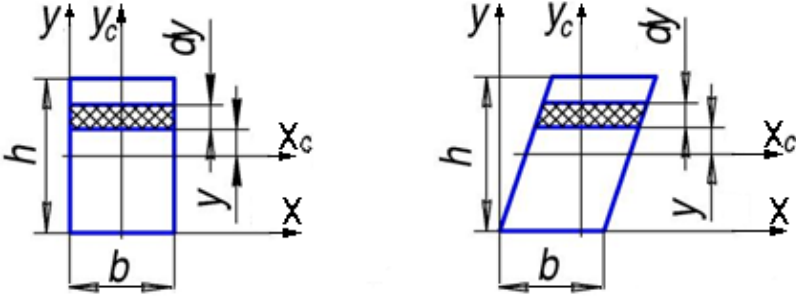


Рисунок 4.3 – К определению основных геометрических характеристик прямоугольника и параллелограмма

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Следовательно, момент инерции прямоугольника и параллелограмма с основанием  $b$  и высотой  $h$  относительно центральной оси, параллельной основанию равен:

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.17)$$

Моменты инерции этих фигур относительно осей, проходящих через основание, находим по формуле (4.14):

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{bh^3}{3}. \quad (4.18)$$

Моменты инерции прямоугольника относительно осей  $y_C$  и  $Y$  вычисляются по формулам (4.17) и (4.18), где  $b$  заменяется на  $h$ , а  $h$  на  $b$ :

$$I_{y_C} = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.19)$$

$$I_Y = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{hb^3}{3}. \quad (4.20)$$

Треугольник с основанием  $b$  и высотой  $h$  (рисунок 4.4). Разобьем треугольник на элементарные полоски, параллельные его основанию. Площадь такой полоски:

$$dF = b_y \cdot dy = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy.$$

Тогда момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание равен:

$$I_x = \int_0^h b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot y^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.21)$$

Подсчитывая по формулам переноса момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию, получаем:

$$I_{x_C} = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{b}{h} \cdot (hy^2 - y^3) \cdot dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.22)$$



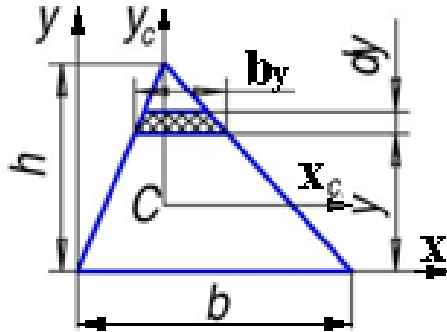


Рисунок 4.4 – К определению основных геометрических характеристик треугольника

Круг и полукруг диаметра  $d$  (рисунок 4.5). Подсчитываем сначала полярный момент инерции круга. Для этого выделим в сечении окружностями радиуса  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  элементарное кольцо площадью  $dF = 2\pi\rho d\rho$  и вычислим  $I_\rho$  по формуле (4.8):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (4.23)$$

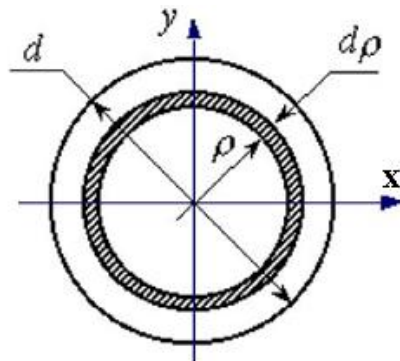


Рисунок 4.5 – К определению основных геометрических характеристик круга

Обычно размеры круглого сечения выражают через диаметр  $d$  и подсчитывают  $I_p$  по формуле:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (4.24)$$

Осевые моменты инерции круга найдем с помощью соотношения (4.9). В силу симметрии круга  $I_x = I_y$ , для осевых моментов инерции круга получаем выражение:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.25)$$

Центральные оси  $x$  и  $y$  делят круг на четыре совершенно одинаковые части с равными моментами инерции относительно этих осей. Следовательно, моменты инерции круга и полукруга относительно осей  $x$  и  $y$  должны быть равны соответственно учетверенным и удвоенным моментам инерции относительно тех же осей одной четверти круга. Из сказанного следует, что моменты инерции полукруга относительно оси симметрии  $x$  и оси  $y$ , проходящей через его основание (рисунки 4.6), будут одинаковы и равны половине момента инерции круга:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{128}, \quad (4.26)$$

а момент инерции относительно центральной оси  $x_c$ :

$$I_{x_c} = \frac{\pi d^4}{256}. \quad (4.27)$$

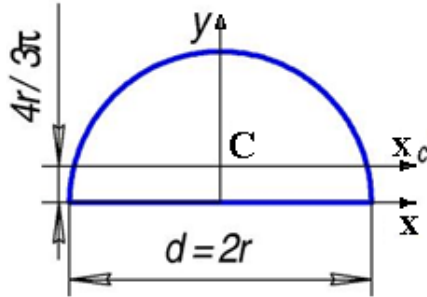


Рисунок 4.6 – К определению основных геометрических характеристик полукруга

#### 4.4 Вычисление моментов инерции сложных фигур

Всякую сложную фигуру обычно можно разбить на ряд простейших фигур, моменты инерции которых относительно их центральных осей известны. Применяв формулы переноса осей инерции, можно определить момент инерции сложной фигуры, алгебраически суммируя моменты инерции простых фигур относительно общей оси – центральной оси сложной фигуры.

Например, осевой момент инерции толстостенного кольца с внешним диаметром  $D$  и внутренним  $d$  (рисунок 4.7) относительно любой центральной оси может быть найден как разность моментов инерции большого и малого кругов:

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4), \quad (4.28)$$

где  $\alpha = d/D$  – коэффициент полости.

Полярный момент инерции кольца находится аналогично:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4). \quad (4.29)$$

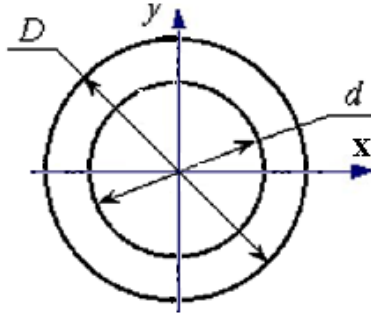


Рисунок 4.7 – Толстостенное кольцо

#### 4.5 Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Предположим, что задана система осей координат и известны моменты инерции  $I_x, I_y$  и  $I_{xy}$  фигуры относительно этих осей. Повернем оси координат на некоторый угол  $\alpha$  против часовой стрелки и определим моменты инерции той же фигуры относительно новых осей координат  $u$  и  $v$ .

Из рисунка 4.8 следует, что координаты какой-либо точки в обеих системах координат связаны между собой соотношениями:

$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha;$$

$$v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha.$$

Момент инерции:

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.30)$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.31)$$

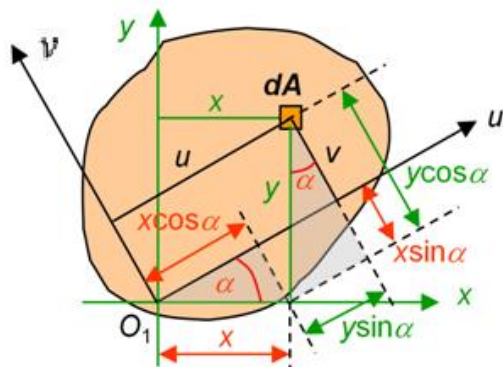


Рисунок 4.8 – Поворот координатных осей

Центробежный момент инерции:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (4.32)$$

Из полученных уравнений видно, что:

$$I_u + I_v = I_x + I_y,$$

т. е. сумма осевых моментов инерции при повороте осей координат остается величиной постоянной. Поэтому, если относительно какой-либо оси момент инерции достигает максимума, то относительно перпендикулярной ей оси он имеет минимальное значение.

#### 4.6 Главные оси и главные моменты инерции

Из формул (4.30) – (4.32) видно, что при повороте осей координат центробежный момент инерции меняет знак, и, следовательно, существует такое положение осей, при котором центробежный момент равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль, называются главными осями, а главные оси, проходящие через центр тяжести сечения – главными центральными осями инерции сечения.

Моменты инерции относительно главных осей инерции сечения называются главными моментами инерции сечения и обозначаются через  $I_1$  и  $I_2$ , причем  $I_1 > I_2$ . Обычно, говоря о главных моментах, подразумевают осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции.

Предположим, что оси  $u$  и  $v$  главные. Тогда:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (4.33)$$

Уравнение (4.33) определяет положение главных осей инерции сечения в данной точке относительно исходных осей координат. При повороте осей координат изменяются также и осевые моменты инерции.

Главные оси инерции являются осями, относительно которых осевые моменты инерции сечения достигают экстремальных значений.

Для упрощения вычисления главных моментов инерции применяют формулу:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (4.34)$$

Знак плюс перед радикалом соответствует большему  $I_1$ , а знак минус – меньшему  $I_2$  из моментов инерции сечения.

Если моменты инерции сечения относительно главных осей одинаковы, то все оси, проходящие через ту же точку сечения, являются главными и осевые моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы:  $I_u = I_v = I_y = I_x$ . Этим

свойством обладают, например, квадратные, круглые, кольцевые сечения.

#### 4.7 Моменты сопротивления площади сечения

Осевым моментом сопротивления площади сечения  $F$  относительно данной оси называется отношение момента инерции площади относительно этой же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (4.35)$$

Размерность момента сопротивления –  $[M^3]$ . Отношение полярного момента инерции площади сечения к наибольшему радиусу-вектору этой площади, называется полярным моментом сопротивления:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}. \quad (4.36)$$

Для прямоугольника:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, W_y = \frac{hb^2}{6}. \quad (4.37)$$

Для круга:

$$W_x = W_y = W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3, W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (4.38)$$

#### Контрольные вопросы

1. Статические моменты сечения.
2. Определение положения центра тяжести сечения сложной формы.
3. Моменты инерции сечения простейших фигур.
4. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.
5. Вычисление моментов инерции сложных сечений.

## 5 КРУЧЕНИЕ

### 5.1 Общие понятия

Кручением называется деформация стержня, возникающая при действии внешних пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня.

Стержень, работающий на кручение, называют валом.

Моменты внешних пар называют скручивающими моментами и обозначают  $M$ .

Внутренние силы в поперечных сечениях при кручении приводятся к одному силовому фактору – крутящему моменту и обозначают  $M_k$ .

В соответствии с методом сечений крутящий момент в произвольном сечении стержня равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к отсеченной части вала (правой или левой).

Эпюра – графическое изображение изменения крутящего момента по длине стержня.

### 5.2 Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечений. Закон Гука при кручении

Теория кручения стержней основана на следующих предположениях:

- ось стержня после деформации остается прямой;
- расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными, т. е. удлинения (укорочения) волокон отсутствуют;
- поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса после деформации (гипотеза плоских сечений);
- радиусы поперечных сечений, поворачиваясь на некоторый угол  $\varphi$ , остаются прямыми.



Справедливость этих допущений подтверждена экспериментальными и точными решениями, полученными методами теории упругости.

Таким образом, при кручении возникают только касательные напряжения  $\tau$ , прямо пропорциональные расстоянию от центра до точки сечения и направленные перпендикулярно радиусу – вектору  $\rho$  (расстоянию от центра сечения до рассматриваемой точки) данной точки. В центре сечения касательные напряжения равны нулю, а у поверхности имеют максимальное значение.

Величину касательных напряжений можно найти интегрированием моментов по площади сечения стержня (рисунок 5.1).

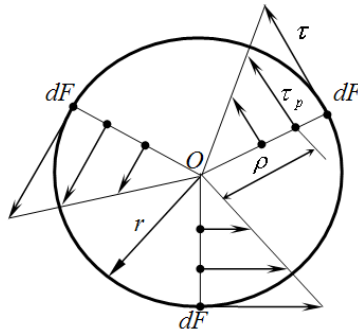


Рисунок 5.1 – Эпюра касательных напряжений при кручении

Усилие, приложенное к элементарной площадке  $dF$ , равно  $dP = \tau_\rho dF$ , а его момент относительно центра сечения равен:

$$dM_k = \tau_\rho \cdot \rho \cdot dF . \quad (5.1)$$

Крутящий момент  $M_k$  можно найти как интеграл, пространственный по площади сечения,

$$M_k = \int_F \tau_\rho \rho \cdot dF. \quad (5.2)$$

Рассматривая напряжённое состояние в сечении вала как чистый сдвиг, можно воспользоваться законом Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (5.3)$$

где  $\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$  – угол сдвига на поверхности вала  $\rho = r$ , а  $\frac{d\varphi}{dx}$  – производная от угла закручивания вала по его длине (относительный угол закручивания).

В точке, находящейся на расстоянии  $\rho$  от центра, относительный угол закручивания равен:

$$\gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Формула (5.3) для напряжений в этой точке получит вид

$$\tau_\rho = \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.4)$$

Подставляя эту формулу в (5.2) и вынося за знак интеграла постоянные при интегрировании величины, получим:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = M_k. \quad (5.5)$$

Обозначим  $\int_F \rho^2 dF = J_\rho$ . Сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до центра сечения, является геометрической характеристикой данного сечения и называется полярным моментом инерции сечения.

В частности, для круга

$$J_\rho = \int_0^r 2\pi \cdot \rho \cdot \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}.$$

Из (5.5) после подстановки  $J_p$  найдем относительный угол закручивания  $\theta$  :

$$G \frac{d\varphi}{dx} \cdot J_p = M k ;$$
$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M k}{G \cdot J_p} . \quad (5.6)$$

Далее подстановкой (5.6) в (5.4) найдем закон распределения  $\tau$  по радиусу при кручении круглого стержня:

$$\tau_\rho = \frac{M k}{J_p} \cdot \rho . \quad (5.7)$$

Наибольшего значения напряжения достигают у поверхности вала (для вала круглого сплошного сечения):

$$\tau_{\max} = \frac{M k}{J_p} \cdot r .$$

Эту формулу принято записывать в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M k}{W_p} , \quad (5.8)$$

где  $W_p = \frac{J_p}{r}$  – момент сопротивления сечения при кручении.

$$\text{Для круга } W_p = \frac{\pi r^3}{2} .$$

### 5.3 Расчет брусев на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности вала (или участка вала) при кручении (с  $M = \text{const}$  по длине вала) имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]. \quad (5.9)$$

Для круглого стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_k}{\pi \cdot r^3} \leq [\tau].$$

Допускаемое напряжение как и при чистом сдвиге следует принимать равными  $[\tau] = (0,55 \div 0,60) [\sigma]$ . Здесь  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение при растяжении.

На практике величина  $[\tau]$  для сталей в зависимости от сорта стали и характера нагрузки колеблется в пределах  $20 \div 100$  МПа.

Как известно, при кручении происходит взаимный поворот соседних сечений и угол этого поворота  $\varphi$  называется углом закручивания. При расстоянии между сечениями, равном  $l$ , угол закручивания будет равен:

$$\varphi = \int_0^l \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot J_p} dx, \quad (5.10)$$

где  $\frac{d\varphi}{dx}$  – относительный угол закручивания.

Если  $M_k = const$  по длине участка, то

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}. \quad (5.11)$$

Величину  $GJ_p$  называют жесткостью при кручении. Она отражает влияние геометрии сечения и упругих свойств материала на деформируемость вала.

Полный угол закручивания вала можно получить алгебраическим суммированием углов закручивания на участках. Ве-

личина полного угла закручивания необходима для проверки вала на жесткость. Условие жесткости круглого вала при кручении имеет вид:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq [\varphi]_{\text{доп}}, \quad (5.12)$$

где  $[\varphi]_{\text{доп}}$  – допускаемый угол закручивания вала.

Практикой разработаны следующие допустимые пределы для оптимального угла закручивания:

- в обычных условиях эксплуатации  $[\varphi]_{\text{доп}} = 0,3 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  ;
- при переменных нагрузках  $[\varphi]_{\text{доп}} = 0,25 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  ;
- при ударных нагрузках  $[\varphi]_{\text{доп}} = 0,15 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  .

Очевидно, что для вала (или участка вала) с постоянным по длине  $M_k$  , условию жесткости (5.12) можно придать следующий вид:

$$\theta_{\text{max}} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq [\theta]_{\text{доп}}. \quad (5.13)$$

Таким образом, размеры вала необходимо определять из условия прочности и условия жесткости.

### **Контрольные вопросы**

1. Определение напряжений при кручении.
2. Определение деформаций при кручении.
3. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при кручении.
4. Расчет на жесткость при кручении.

## 6 ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

### 6.1 Понятие о деформации изгиба.

#### Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечный изгиб стержня возникает при действии на него сил, перпендикулярных его оси лежащих в плоскости симметрии стержня, или пар сил, плоскости которых проходят через ось. Стержень при таком нагружении принято называть балкой.

Деформация изгиба состоит в том, что ось балки искривляется, поперечные сечения балки наклоняются друг к другу, волокна балки удлиняются с выпуклой стороны и укорачиваются с вогнутой. Слой, в котором волокна не меняют своей длины, называется нейтральным слоем. Прямая, по которой нейтральный слой пересекается с поперечным сечением, называется нейтральной осью.

Балка воспринимает давление от других элементов конструкции и передает их на опоры. Эти давления и реакции опор являются внешними силами балки (нагрузками).

Существующие опоры балок, при всем многообразии их конструкций, относятся к одному из трёх видов: шарнирно-неподвижная опора, шарнирно-подвижная опора и защемление.

Шарнирно-неподвижная опора ( $A$ , рисунок 6.1) позволяет опорному сечению свободно поворачиваться вокруг шарнира  $A$ , но не допускает перемещения этого сечения вдоль оси. Опора этого вида в ответ на нагружение балки порождает две неизвестные реакции  $N_A$  и  $H_A$ .

Шарнирно-подвижная опора ( $B$ , рисунок 6.1) в отличие от неподвижной допускает осевое перемещение опорного сечения и потому порождает только одну неизвестную (по величине) реакцию  $R_B$ .

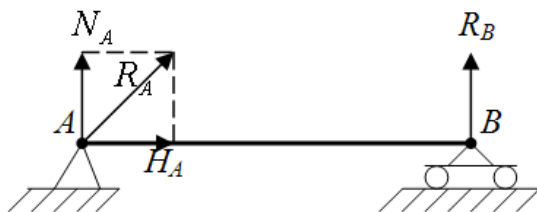


Рисунок 6.1 – Шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опоры

Защемление (рисунок 6.2) получается из шарнирно-неподвижной опоры уничтожением шарнира и, следовательно, не допускает никаких перемещений опорного сечения. Защемление порождает три неизвестных реакции: силы  $N_A$ ,  $H_A$  и опорный момент  $M_A$ .

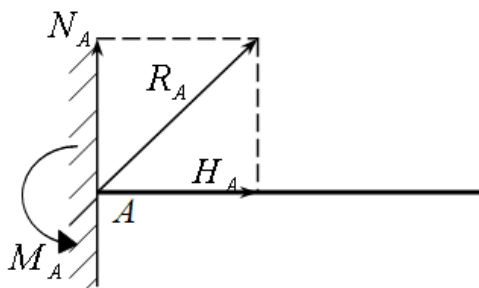


Рисунок 6.2 – Защемление

Устройство опор балок далеко не всегда соответствует схемам, приведенным выше. Чтобы отнести опору к тому или иному виду, надо установить – допускает ли её устройство хотя бы небольшой поворот или перемещение. При этом надо иметь в виду, что деформации балок весьма малы.

Для определения напряжений в сечениях балки необходимо уметь выражать внутренние силы (усилия) в любом сечении через внешние силы.

При изгибе балки в любом её поперечном сечении возникают элементарные касательные и нормальные усилия, которые приводятся к силе  $Q$  и паре с моментом  $M$ .

Сила  $Q$  складывается из элементарных касательных усилий и называется поперечной силой.

Для выражения силы  $Q$  через внешние силы применяют метод сечений. Рассекают балку на две части плоскостью и рассматривают равновесие левой отсечённой части.

Поперечная сила  $Q$  численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на плоскость самого сечения.

Поперечная сила в сечении считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена вверх, а справа – вниз, и отрицательна в противоположном случае (рисунок 6.3).

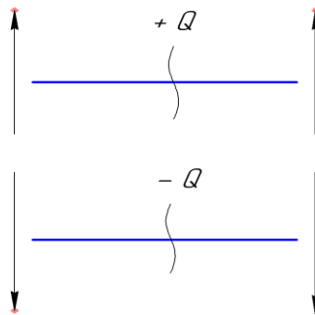


Рисунок 6.3 – Определение знака поперечной силы

Момент внутренних сил  $M$  складывается из моментов элементарных нормальных усилий и называется изгибающим моментом.

Изгибающий момент  $M$  в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно поперечной оси сечения.

Изгибающий момент принято считать положительным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вниз или стремится повернуть левую часть балки по направлению хода часовой стрелки, а правую часть против хода часовой стрелки и отрицательным, если внешняя нагрузка изгибает балку вы-



пуклостью вверх или стремится повернуть левую часть балки против хода часовой стрелки, а правую часть по направлению хода часовой стрелки.

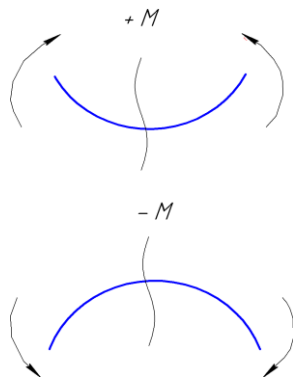


Рисунок 6.4 – Определение знака изгибающего момента

Графики распределения перерезывающих сил и изгибающих моментов по длине балки называются эпюрами.

При построении эпюры  $Q$  и  $M$  балку разбивают на участки, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил и окончания действия распределенных нагрузок.

На каждом участке берут произвольное сечение и составляют аналитические выражения для  $Q$  и  $M$ , которые справедливы в пределах рассматриваемого участка.

Для построения эпюры на данном участке достаточно получить две точки – в начале и в конце участка. Подставив в найденные выражения  $Q$  и  $M$  абсциссу начала и конца участка, определяют их величины.

Положительные значения  $Q$  и  $M$  откладывают вверх от оси эпюры, отрицательные вниз.

Эпюра  $M$  получается построенной со стороны сжатых волокон.

Ниже для примера построены эпюры  $Q$  и  $M$ .

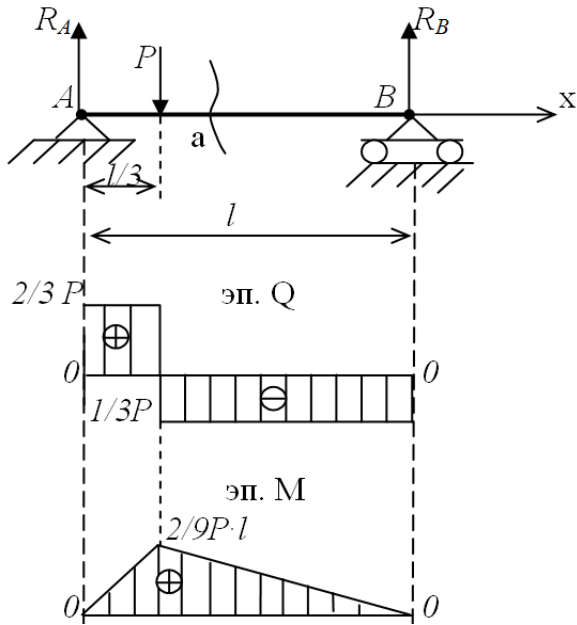


Рисунок 6.5 – Эпюры Q и M для заданной балки

Реакции опоры:

$$\sum M_A = 0. \quad R_B l - P \cdot l/3 = 0,$$

$$R_B = P/3.$$

$$R_B + R_A = P,$$

$$R_A = 2/3 P.$$

В сечении  $x=a$ .

$$Q_a = R_a - P = -1/3 P$$

или

$$Q_a = -R_B = -1/3 P.$$

$$M_a = \frac{2}{3} P \frac{1}{3} l = \frac{2}{9} Pl \quad \text{или} \quad M_a = \frac{1}{3} P \frac{2}{3} l = \frac{2}{9} Pl.$$

Между изгибающим моментом  $M$ , поперечной силой  $Q$  и интенсивностью распределённой нагрузки  $q$  установлены (Д. И. Журавским) следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ}{dx} = -q, \quad \text{или} \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} = -q. \quad (6.1)$$

Проверку эпюр  $Q$  и  $M$  осуществляют на основании правил, вытекающих из дифференциальных зависимостей:

- на участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  ограничена горизонтальной прямой, а эпюра  $M$  – наклонной прямой;

- на участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра  $Q$  ограничена прямой наклоненной линией, а эпюра  $M$  – параболой;

- на участках балки с положительной  $Q$  момент возрастает, а на участках, где  $Q$  отрицательна – убывает;

- в сечениях, где  $Q$  меняет знак, изгибающий момент имеет экстремальное значение. Если  $Q$  меняет знак с «+» на «-», то момент максимален, если с «-» на «+», то минимален;

- в сечении, где приложена сосредоточенная сила на эпюре  $Q$  будет «скачек» на величину и в направлении приложенной силы, а на эпюре  $M$  – излом графика;

- в сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M$  получается «скачек» на величину момента. Если момент действует по часовой стрелке – «скачек» вверх, если против часовой стрелки – вниз;

- если на участке поперечная сила равна нулю, то эпюра  $M$  ограничена горизонтальной прямой.

## 6.2 Нормальные напряжения при изгибе

Если система внешних сил, приложенных к балке, приводится к парам сил, то есть поперечные силы в сечениях отсут-

ствуют, то деформация балки называется чистым изгибом (рисунок 6.6). При чистом изгибе в сечениях балки действуют только нормальные напряжения  $\sigma$ , которые приводятся к изгибающему моменту  $M$ .

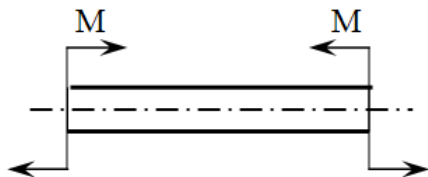


Рисунок 6.6 – Пример чистого изгиба

Практически чистый изгиб осуществим только при условии, что собственный вес балки мал по сравнению с внешними нагрузками.

В основу теории чистого изгиба положены следующие предположения (допущения):

1. При чистом изгибе плоские поперечные сечения остаются плоскими (гипотеза плоских сечений).
2. Продольные волокна друг на друга не давят и испытывают простое линейное растяжение или сжатие.
3. Деформации волокон и, следовательно, нормальные напряжения изменяются только по высоте сечения (по ширине сечения остаются постоянными).

Кроме того, следует иметь в виду следующие ограничения:

1. Балка имеет плоскость симметрии, и все внешние силы лежат в этой плоскости.
2. Материал балки подчиняется закону Гука, причём модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.
3. Соотношения между размерами балки обеспечивают условия плоского изгиба, при котором ось балки остаётся в плоскости действия внешних сил.

Для отыскания нормальных напряжений при изгибе применяют метод сечений.

Балку, подвергающуюся чистому изгибу парами  $M$ , разрежем сечением 1-1 на две части и рассмотрим равновесие одной части, например, левой (рисунок 6.7).

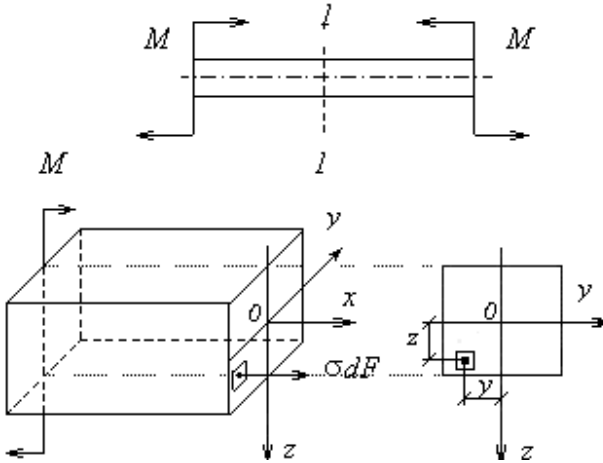


Рисунок 6.7 – Сечение балки при чистом изгибе

Плоскость координат  $xoy$  совместим с нейтральным слоем, положение которого пока неизвестно. Ось  $z$  направим вниз по линии пересечения плоскости симметрии с плоскостью сечения 1-1.

Для равновесия пространственной системы сил можно записать шесть известных уравнений статики. В данном случае три из них по очевидным причинам обращаются в тождества:

$$\sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M_x = 0. \quad (6.2)$$

Остальные три приводят к следующим результатам:

$$\sum X = 0, \int_F \sigma dF = 0, \quad (6.3)$$

$$\sum M_y = 0, \int_F \sigma z dF = M, \quad (6.4)$$

$$\sum M_z = 0, \int_F \sigma y dF = 0. \quad (6.5)$$

Однако найти  $\sigma$  из этих уравнений невозможно, пока неизвестен закон распределения  $\sigma$  по высоте сечения, и неизвестно положение нейтральной оси. Для решения этих вопросов рассмотрим деформацию балки. Выделим элемент балки длиной  $dx$  и установим его вид после деформации (рисунок 6.8).

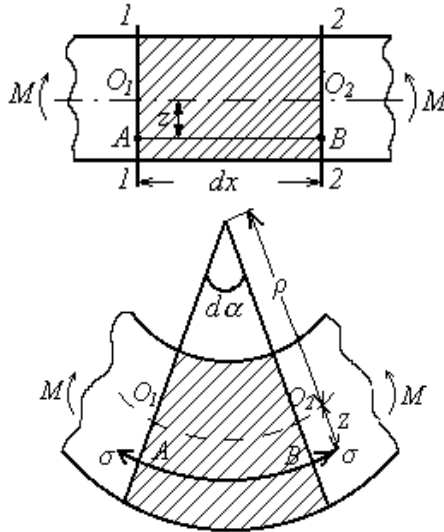


Рисунок 6.8 – Элемент балки, подверженный действию внешнего изгибающего момента

Найдём удлинение волокна  $AB$  лежащего на расстоянии  $z$  от нейтрального слоя. Первоначальная длина  $l$  волокна  $AB$  равна  $O_1O_2$ , или  $l = \rho d\alpha$ , где  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя.

После деформации длина волокна измеряется по дуге  $AB$  и будет равна:

$$l + \Delta l = (\rho + z) \cdot d\alpha.$$

Отсюда абсолютное и относительное удлинения,  $\Delta l$  и  $\epsilon$ , равны:

$$\Delta l = (\rho + z) \cdot da - \rho \cdot da = z \cdot da;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon = \frac{z}{\rho}. \quad (6.6)$$

Таким образом, относительные удлинения волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.

Исходя из гипотезы об отсутствии давления волокон друг на друга и закона Гука, заключаем, что каждое волокно испытывает простое растяжение (сжатие) под действием нормальных напряжений

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \text{ или } \sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \quad (6.7)$$

На нейтральной оси (при  $z = 0$ )  $\sigma = 0$ . При переходе в сжатую зону ( $z < 0$ )  $\sigma$  меняют знак вместе с  $z$  (становятся сжимающими). Наибольшего значения  $\sigma$  достигают при  $z = z_{max}$ , то есть в крайних волокнах (рисунок 6.9).

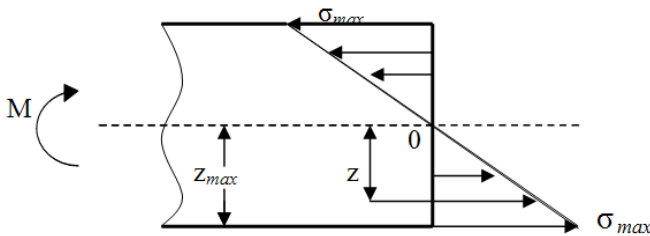


Рисунок 6.9 – Эпюра нормальных напряжений при изгибе

Подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.3) и получим:

$$\int_F \sigma dF = \int_F \frac{E}{\rho} z dF = 0.$$

При  $\frac{E}{\rho} = const$  имеет место  $\int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F z dF = 0.$

Следовательно,

$$\int_F z \cdot dF = S_y = 0. \quad (6.8)$$

Этот интеграл ( $S_y$ ) является статическим моментом площади сечения относительно нейтральной оси  $y$ . Его равенство нулю означает, что нейтральная ось является центральной (проходит через центр тяжести сечения).

Таким образом, положение нейтральной оси и нейтрального слоя вполне определено.

Подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.5) и получим:

$$\begin{aligned} \int_F \sigma \cdot y \cdot dF &= \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot z \cdot dF = 0, \\ \int_F y \cdot z \cdot dF &= J_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Этот интеграл ( $J_{yz}$ ) называется центробежным моментом инерции относительно осей  $y$  и  $z$ . Для сечения, симметричного относительно оси  $z$  он равен нулю.

Этим подтверждается, что соблюдены требования плоского изгиба о наличии плоскости симметрии балки и расположении внешних сил в этой плоскости.

Заметим, что оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называются главными осями инерции сечения.

Наконец, подставим  $\sigma$  (6.7) в уравнение (6.4) и получим:

$$\begin{aligned} \int_F \sigma \cdot z \cdot dF &= M, \quad \frac{E}{\rho} \int_F z^2 \cdot dF = M, \\ \frac{E}{\rho} &= \frac{M}{J_y}, \end{aligned} \quad (6.10)$$



где  $J_y = \int_F z^2 dF$  – осевой момент инерции площади сечения

относительно оси  $y$  (сумма произведений площадок  $dF$  на квадраты их расстояний до оси  $y$ ).

Подставим (6.10) в (6.7) и получим формулу для вычисления  $\sigma$  при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \quad (6.11)$$

Индекс  $y$  опущен, так как  $J$  всегда вычисляется относительно нейтральной оси сечения.

Из (6.10) можно записать  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ .

Отсюда следует, что произведение  $EJ$  характеризует способность балки сопротивляться искривлению (изгибу) в зависимости от формы и размеров сечения и материала балки. Величину  $EJ$  называют жесткостью балки при изгибе.

Формулу максимальных напряжений в сечении балки:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J} z_{max}$$

принято записывать в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}, \quad (6.12)$$

где  $W = \frac{J}{z_{max}}$  – осевой момент сопротивления сечения.

В итоге из (6.11) следует, что нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию от точки до нейтральной оси и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.

Для проверки прочности балки по нормальным напряжениям необходимо найти опасное сечение, в котором  $M = M_{\max}$ . Тогда условие прочности по нормальным напряжениям можно записать в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \quad (6.13)$$

Если материал балки неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо составить два условия прочности:

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]_p \quad \text{и} \quad \sigma_{сж} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]_{сж} \quad (6.14)$$

Из условия прочности следует, что осевой момент сопротивления  $W$  характеризует влияние формы и размеров сечения балки на её прочность.

### 6.3 Касательные напряжения при изгибе

Рассмотрим общий случай прямого изгиба, когда в сечениях балки наряду с изгибающими моментами  $M$  действуют также перерезывающие силы  $Q$ , к которым приводятся касательные напряжения  $\tau$ . Относительно  $\tau$  сделаем следующие предположения:

- 1) направления  $\tau$  параллельны силе  $Q$ , которая является их равнодействующей;
- 2) касательные напряжения на площадках, расположенных на равных расстояниях от нейтральной оси равны между собой.

В теории упругости доказано, что эти предположения (предложенные Д. И. Журавским) вполне приемлемы для балок прямоугольного сечения.

Выясним закон распределения  $\tau$  по высоте сечения. Для этого, выделим сечениями  $m$  и  $n$  элемент балки длиной

$dx$ , отсечём его нижнюю часть плоскостью  $PP_1$ , параллельной нейтральному слою, и рассмотрим равновесие отсечённого элемента (рисунок 6.10).

Фасадные грани отсечённого элемента свободны от напряжений. На грани, параллельной нейтральному слою, в соответствии с законом парности действуют:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Их равнодействующая равна  $\tau_{xz} b dx$ .

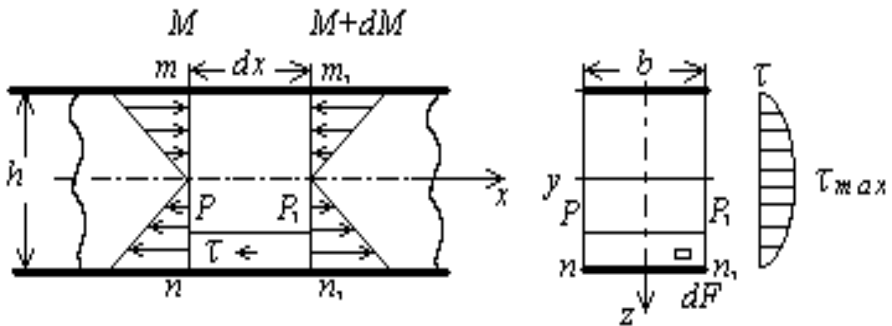


Рисунок 6.10 – Касательные напряжения при изгибе, эпюра касательных напряжений

Напряжения на  $\tau_{zx}$  на боковых гранях элемента (в сечениях  $mn$  и  $m_1n_1$ ) в рассмотрение не входят, как перпендикулярные оси  $x$ .

Нормальные напряжения на левой грани элемента (в сечении  $mn$ ) на площадке  $dF$  создают усилие:

$$\sigma \cdot dF = \frac{M \cdot z}{J} \cdot dF. \quad (6.15)$$

Сумма этих усилий по площади грани равна:

$$\int_{z_1}^{h/2} \frac{M \cdot z}{J} dF, \quad (6.16)$$

где  $z_1$  – расстояние от нейтрального слоя до плоскости  $PP_1$ .

Аналогично, на правой грани элемента (в сечении  $m_1n_1$ ) действует суммарное осевое усилие:

$$\int_{z_1}^{h/2} \frac{M + dM}{J} \cdot z \cdot dF. \quad (6.17)$$

Усилия  $\tau_{xz} \cdot b \cdot dx$  и усилия (6.16), (6.17) должны удовлетворять уравнению равновесия отсечённого элемента:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \text{ или} \\ \tau_{xz} \cdot b \cdot dx &= \int_{z_1}^{h/2} \frac{M + dM}{J} \cdot z \cdot dF - \int_{z_1}^{h/2} \frac{M}{J} \cdot z \cdot dF, \text{ откуда} \\ \tau_{xz} &= \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{bJ} \int_{z_1}^{h/2} z \cdot dF. \end{aligned}$$

В этом уравнении  $\frac{dM}{dx} = Q$ , а  $\int_{z_1}^{h/2} z \cdot dF = S_y^0$  – статический момент площади отсечённой части сечения относительно нейтральной оси.

В итоге для вычисления касательных напряжений при прямом изгибе получается следующая формула (формула Журавского):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^0}{J \cdot b}. \quad (6.18)$$

Из (6.18) следует, что закон распределения  $\tau$  по высоте сечения определяется законом изменения  $S_y^0$  от координаты  $z$ .

Для прямоугольного сечения  $dF = b \cdot dz$  и

$$S_y^0 = \int_{z_1}^{h/2} b \cdot z \cdot dz = \left. \frac{b \cdot z^2}{2} \right|_{z_1}^{h/2} = \frac{b}{8} (h^2 - 4 \cdot z_1^2).$$

Момент инерции площади прямоугольного сечения относительно нейтральной оси  $y$  равен:

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

После подстановки в (6.18) выражений  $S_y^0$  и  $J$  для прямоугольной балки получаем:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{b \cdot h} \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2}\right). \quad (6.19)$$

Отсюда следует, что  $\tau$  изменяются по высоте сечения по параболическому закону (рисунок 6.10). Максимум  $\tau$  достигают в точках нейтральной оси ( $z=0$ ), а у краёв сечения ( $z=\pm h/2$ ) они обращаются в нуль.

При выводе формулы для  $\tau$  мы использовали закон для  $\sigma$ , полученный при чистом изгибе. Правомерность такого подхода объясняется весьма слабым влиянием  $\tau$  на картину чистого изгиба.

Действие касательных напряжений порождает сдвиг, который заставляет сечения балки искривляться. Однако пока поперечная сила остается постоянной по длине, искривление всех сечений получается одинаковым и не влияет на деформации растяжения (или сжатия) продольных волокон.

В случае, когда на балку действует распределённая нагрузка, и величина поперечной силы непрерывно меняется по длине балки, искривление поперечных сечений также не оказывает существенного влияния на деформации продольных волокон от действия изгибающего момента.

Рассмотрим условие прочности материала по касательным напряжениям.

Следует иметь в виду, что чаще всего балка прямоугольного сечения, в которой нормальные напряжения ниже допускаемых, оказывается недогруженной по касательным напряжениям.

Однако в частном случае, когда при большой поперечной силе изгибающий момент невелик, величина касательных напряжений может определять требуемые размеры балки.

Условие прочности балки по касательным напряжениям в общем случае имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}^0}{J \cdot b(z)} \leq [\tau]. \quad (6.20)$$

где  $Q_{\max}$  – поперечная сила в опасном сечении;

$S_{\max}^0$  – максимальное значение статического момента, определяющее  $\tau_{\max}$  по высоте сечения;

$b(z)$  – ширина сечения в том слое, для которого вычисляются напряжения.

В частном случае, для балки прямоугольного сечения условие прочности балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{b \cdot h} \leq [\tau]. \quad (6.21)$$

#### 6.4 Определение перемещений при изгибе

При изгибе ось балки искривляется, а поперечные сечения перемещаются поступательно и поворачиваются вокруг нейтральных осей, оставаясь при этом нормальными к изогнутой продольной оси (рисунок 6.11). Деформированная (изогнутая) продольная ось балки называется *упругой линией*, а поступательные перемещения сечений, равные перемещениям  $y = y_C$  их центров тяжести сечений – *прогибами балки*.

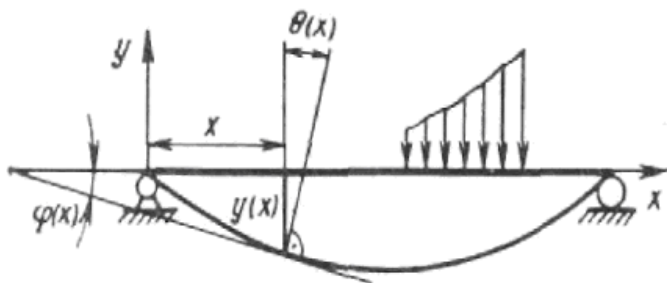


Рисунок 6.11 – Деформации балки при изгибе

Между прогибами  $y$  и **углами поворота** сечений  $\Theta$  существует определенная зависимость. Из рисунка 6.11 видно, что угол поворота сечения  $\Theta$  равен углу  $\varphi$  наклона касательной к упругой линии ( $\Theta$  и  $\varphi$  углы с взаимноперпендикулярными сторонами). Но согласно геометрическому смыслу первой производной  $y' = \text{tg } \Theta$ . Следовательно,  $\text{tg } \Theta = \text{tg } \varphi = y'$ .

При малых деформациях связь между прогибами и углами поворота упрощается и принимает вид  $\Theta = y'$ , форму упругой линии можно описать приближенным дифференциальным уравнением упругой линии балки:

$$y'' = \pm \frac{M_z}{EI_z}. \quad (6.22)$$

Выбор знака в правой части (9.4) определяется направлением координатной оси  $y$ .

Интегрируя уравнение (6.22), находим сначала углы поворота сечений:

$$y' = \Theta = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1, \quad (6.23)$$

а после второго интегрирования – прогибы балки:

$$y = \int dx \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1 x + C_2. \quad (6.24)$$

Данный метод называют методом непосредственного интегрирования. Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. На участках с различными аналитическими выражениями для изгибающих моментов дифференциальные уравнения упругой линии также различны. Интегрирование этих уравнений при  $n$  участках дает  $2n$  произвольных постоянных. Для их определения к граничным условиям на опорах добавляются условия равенства прогибов и углов поворота на стыке двух смежных участков балки.

Кроме способов определения перемещений сечений балок, основанных на интегрировании дифференциального уравнения упругой линии, существуют более удобные для практических целей энергетические методы. Одним из них является способ определения прогибов и углов поворотов сечений при упругих деформациях балок с помощью интеграла Мора. Этот интеграл может быть получен различными путями, и, в частности, исходя из условия равенства работы внешних сил  $A$  и потенциальной энергии  $U$ , накопленной в деформированной балке.

Интеграл Мора для определения прогибов и углов поворота сечений балок имеет вид:

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z \overline{M}_z^1}{EI_z} dx, \quad (6.25)$$

где  $M_z \overline{(\quad)}$  – изгибающий момент в текущем сечении балки от заданной нагрузки;

$M_z^1 \overline{(\quad)}$  – изгибающий момент в том же сечении от единичной силы, если ищется прогиб, и единичного момента, если ищется угол поворота сечения.

В 1924 г. А. Н. Верещагин предложил простой графоаналитический прием вычисления интеграла Мора в случаях, когда эюра  $M_z^1 \overline{(\quad)}$  или  $M_z \overline{(\quad)}$  ограничена прямыми линиями.



По существу это прием графоаналитического вычисления определенного интеграла от произведения двух функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , из которых одна, например  $\varphi(x)$ , линейная, т. е. имеет вид:

$$\varphi(x) = kx + b.$$

Рассмотрим участок балки, в пределах которого эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки ограничена одной прямой линией  $M_z^1 = kx + b$ , а изгибающий момент от заданной нагрузки изменяется по некоторому произвольному закону  $M_z$  (рисунок 6.12).

Тогда в пределах этого участка:

$$\int_l M_z \cdot M_z^1 dx = \int_l M_z \cdot (kx + b) dx = k \int_l x \cdot M_z dx + b \int_l M_z dx.$$

Второй интеграл представляет собой площадь  $\omega$  эпюры  $M_z$  на рассматриваемом участке, а первый – статический момент этой площади относительно оси  $y$  и поэтому равен произведению площади  $\omega$  на координату ее центра тяжести  $x_c$ . Таким образом,

$$\int_l M_z \cdot M_z^1 dx = \omega \cdot (kx_c + b).$$

Здесь  $kx_c + b$  – ордината  $y_c$  эпюры  $M_z^1$  под центром тяжести площади  $\omega$ . Следовательно,

$$\int_l M_z \cdot M_z^1 dx = \omega \cdot y_c. \quad (6.26)$$

Произведение  $\omega y_c$  будет положительным, когда  $\omega$  и  $y_c$  расположены по одну сторону от оси эпюры, и отрицательным, если они находятся по разные стороны от этой оси.

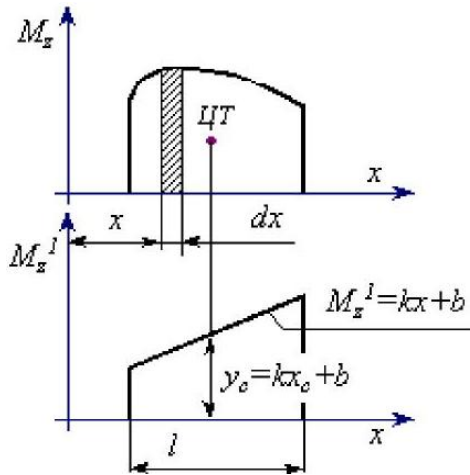


Рисунок 6.12 – Перемножение эпюр способом Верещагина

Итак, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади  $\omega$  одной эпюры на ординату  $y_c$  второй (обязательно линейной) эпюры, взятой под центром тяжести площади  $\omega$ .

Важно всегда помнить, что такое «перемножение» эпюр возможно лишь на участке, ограниченном одной прямой той эпюры, с которой берется ордината  $y_c$ . Поэтому при вычислении перемещений сечений балок способом Верещагина интеграл Мора по всей длине балки надо заменить суммой интегралов по участкам, в пределах которых эпюра моментов от единичной нагрузки не имеет изломов. Тогда:

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z \cdot M_z^1}{EI_z} dx = \sum_1^n \frac{\omega \cdot y_c}{EI_z}. \quad (6.27)$$

Более сложные эпюры изгибающих моментов допустимо разбивать на простейшие фигуры, площади  $\omega_i$  и координаты  $y_{ci}$  которых известны, а затем находить произведение  $\omega y_c$  для такой сложной эпюры суммированием произведений площадей  $\omega_i$  ее частей на соответствующие им координаты  $y_{ci}$ .

Если обе эпюры  $M_z$  и  $M_z^1$  линейные, конечный результат их перемножения не зависит от того, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или, наоборот, площадь второй на ординату первой.

Для практического вычисления перемещений по способу Верещагина надо:

1) построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (основная эпюра);

2) снять с балки заданную нагрузку (но сохранить опоры) и приложить в сечение, перемещение которого ищется, в направлении этого перемещения единичную силу, когда ищется прогиб, или единичную пару, если искомым является угол поворота;

3) построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки (единичная эпюра);

4) разбить эпюры от заданных нагрузок на отдельные площади  $\omega_i$  и вычислить ординаты  $y_{ci}$  единичной эпюры под центрами тяжести этих площадей;

5) составить произведение  $\omega_i y_{ci}$  и просуммировать их.

## 6.5 Расчет статически неопределимых балок и плоских рам методом сил

Расчет статически неопределимых систем рассмотрим на примере.

При расчете статически неопределимых рам методом сил коэффициенты  $\delta_{11}; \delta_{12}; \dots$  и свободные члены  $\Delta_{1P}; \Delta_{2P}; \dots$  канонических уравнений для прямолинейных элементов с по-

стоянной жесткостью вычисляются по способу Верещагина по формуле:

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\omega \cdot \eta}{E \cdot I}, \quad (6.28)$$

где  $\omega$  – площадь нелинейной эпюры изгибающих моментов;  
 $\eta$  – ордината линейной эпюры изгибающих моментов под центром площади  $\omega$ .

Вычисление по формуле 6.28 производят на участках, на каждом из которых одна из эпюр должна быть прямолинейна (рисунок 6.13). В тех случаях, когда обе эпюры прямолинейны, можно умножить площадь одной из них на ординату другой, расположенную под центром тяжести первой.

Для заданной статически неопределимой рамы с элементами постоянной жесткости  $E \cdot I$  построить эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$  и подобрать номер двутавра при  $\bar{\sigma} = 160 \text{ МПа}$ .

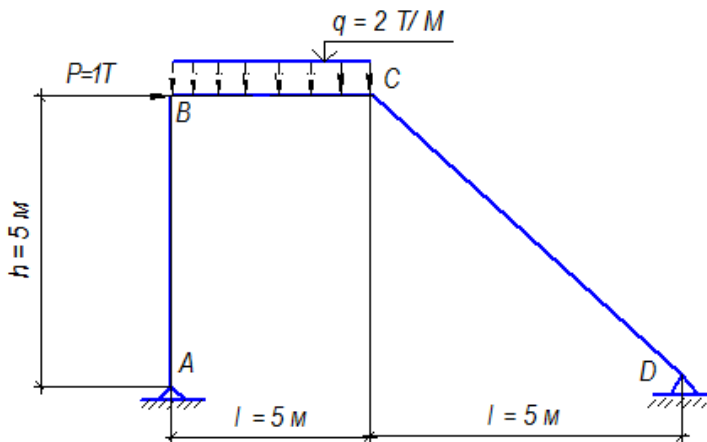


Рисунок 6.13 – Схема рассматриваемой статически неопределимой рамы

1. Устанавливаем степень статистической неопределимости:

$$S = 3 \cdot n - m, \quad (6.29)$$

где  $n$  – число замкнутых контуров в раме;

$m$  – число одиночных шарниров.

При  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $S = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ . Рама один раз статически неопределима, то есть содержит одну дополнительную связь.

2. Выбираем основную систему путем устранения горизонтальной связи в опоре  $D$ . Вертикальную связь отбросить нельзя, т.к. в этом случае оставшиеся три опорных стержня пересекаются в одной точке  $A$ , и система будет мгновенно изменяемой. Взамен отброшенной связи к основной системе прикладывают силу  $X_1$ , заменяющую действие удаленной связи.

3. Составляем каноническое уравнение, которое выражает условие равенства нулю суммарного горизонтального перемещения точки  $D$  от заданной нагрузки и от неизвестной силы  $X_1$ :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{iP} = 0. \quad (6.30)$$

Для вычисления перемещений, входящих в уравнение в виде коэффициента  $\delta_{11}$ , при неизвестном и свободном (грузового) члена необходимо построить для основной системы эпюры изгибающего момента от силы  $\bar{X}_1 = 1$  и от заданной нагрузки. Обозначим их  $M_P$  и  $\bar{M}_1$ .

4. При построении эпюры  $\bar{M}_1$  ординаты откладываем со стороны сжатого волокна. При вычислении моментов в сечениях пользуемся обычным правилом знаков, считая положи-

тельным момент левых сил, направленный против хода часовой стрелки. Выражения  $Q$ ,  $M$  и  $N$  для произвольных сечений не записываем. Ограничиваемся вычислением внутренних усилий в узлах и местах экстремума, а затем проводим линии эпюр, используя дифференциальные зависимости.

Для построения эпюры  $M_p$  загрузим основную систему заданной нагрузкой (рисунок 6.14).

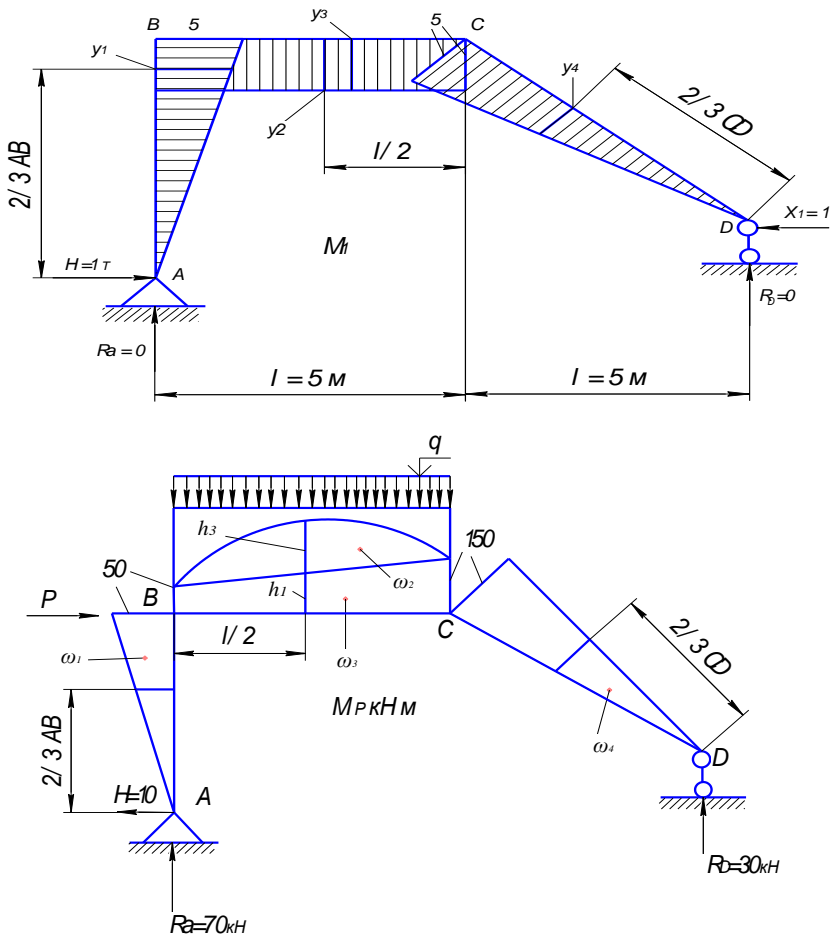


Рисунок 6.14 – Эпюры моментов от единичной силы  $\bar{M}_1$  и от заданных

сил  $M_p$

5. Вычисляем перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{iP}$  по способу Верещагина. Для определения перемещения  $\delta_{11}$  умножим площади  $\omega$  на ординаты  $u$ , взятые из одной и той же эпюры  $\bar{M}_1$ :

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 7,08 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (41,7 + 125 + 59,2) = \frac{225,9}{EI}.\end{aligned}\quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{iP} &= -\frac{1}{EI} \left( \frac{5 \cdot 50}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 62,5 \cdot 5 \cdot 5 + 100 \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 7,08 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 \right) = \\ &= -\frac{1}{EI} (417 + 1040 + 2500 + 177) = -\frac{5727}{EI}.\end{aligned}\quad (6.32)$$

6. Определим неизвестную силу.

Подставляя найденные значения из (6.31) и (6.32) в уравнение (6.30), получим:

$$X_1 = \frac{-\Delta_{iP}}{\delta_{11}} = \frac{-572,7}{225,9} = 25,4 \text{ кН}.$$

После определения неизвестных усилий, определение реакций и построение эпюр внутренних силовых факторов производится как в обычной статически определимой системе.

7. Строим окончательные эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$ .

Окончательную эпюру моментов получим путем непосредственного построения. Для этого к основной системе прикладываем найденное неизвестное усилие  $X_1$  и заданную нагрузку (рисунок 6.15).

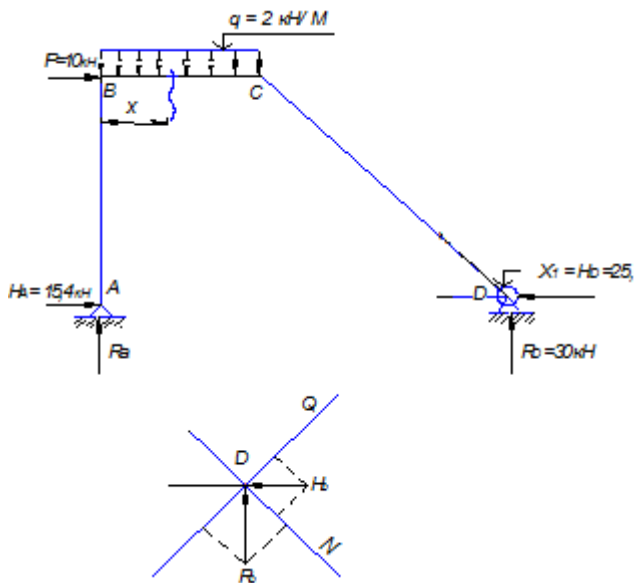


Рисунок 6.15 – Основная система

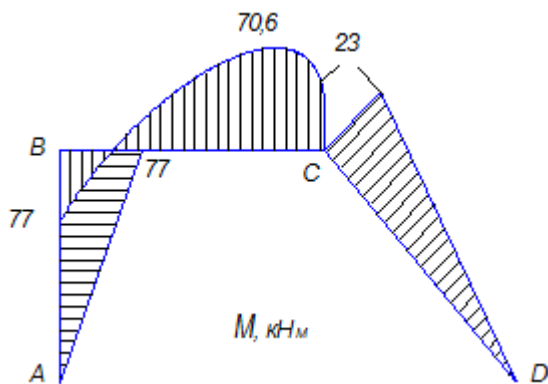


Рисунок 6.16 – Эпюра  $M$ , кНм

Строим эпюру  $Q$



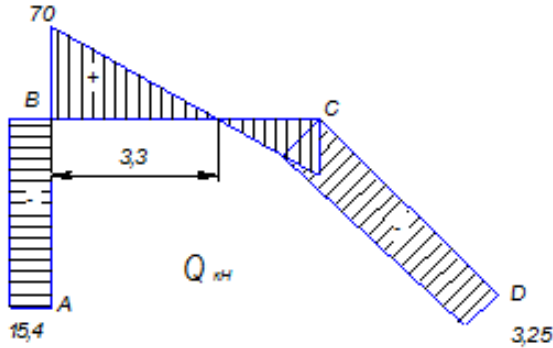


Рисунок 6.17 – Эпюра  $Q$ , кН

Строим эпюру  $N$

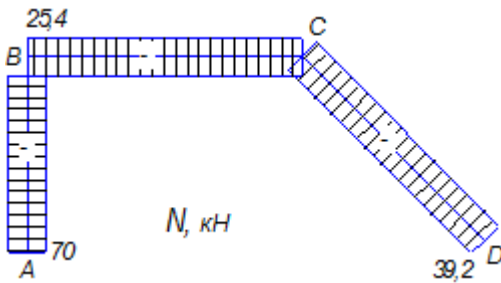
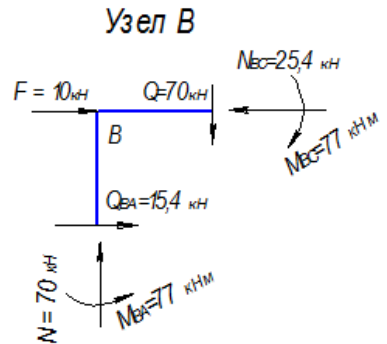


Рисунок 6.18 – Эпюра  $N$ , кН



8. Проверяем правильность построения эпюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$ , проверяем условие равновесия деформации.

Статистическая проверка состоит в том, что любой узел, вырезанный из нагруженной рамы, должен находиться в равновесии под действием сил и моментов, заменяющих действие отброшенных элементов. Если к рассмотренному узлу приложены внешние силы и моменты, то они также входят в уравнение равновесия.

Статистическая проверка является необходимой, но недостаточной, так как проверка правильности построения эпюр по известным значениям лишних неизвестных усилий не дает оснований для суждения о правильности самих величин. Общим контролем является проверка выполнения условий деформации. Т.к. в заданной статически неопределимой системе перемещения по направлению отброшенной связи равно нулю, то произведение окончательной эпюры изгибающих моментов на эпюру от единичного усилия должно равняться нулю.

Перемножим эпюры  $M$  и  $\bar{M}_1$ , получим перемещение по направлению отброшенной связи.

9. Подберем сечение элементов рамы.

Расчет на прочность производим только по нормальным напряжениям. По эпюрам  $M$  и  $N$  устанавливаем опасное сечение.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{A} \leq \sigma_{\text{доп}}.$$

При подборе сечения вначале, пренебрегая действием продольной силы и учитывая только действие изгибающего момента, по пониженному допускаемому напряжению определим момент сопротивления. Затем определим расчетное напряжение учитывая и продольную силу:

### Контрольные вопросы

1. Внутренние силовые факторы при изгибе.
2. Дифференциальные зависимости при изгибе.
3. Величина нормальных напряжений при изгибе. Касательные напряжения при изгибе.
4. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям при изгибе.

## 7 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 7.1 Общие положения

Сложным сопротивлением называются виды нагружения, при которых в поперечных сечениях одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов.

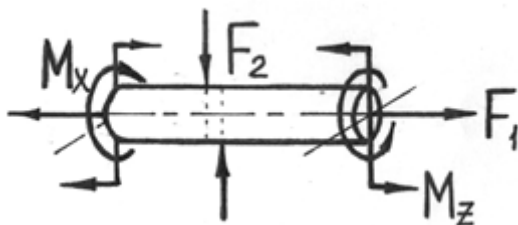


Рисунок 7.1 – Пример нагружения стержня при сложном сопротивлении

Сложный вид деформации можно рассматривать как сумму простых видов, изученных ранее (растяжение, изгиб, кручение), при которых в сечениях элементов конструкций возникал только один внутренний силовой фактор: нормальная сила  $N$  – при растяжении (рисунок 7.2, а), крутящий момент  $M_x$  – при кручении (рисунок 7.2, б), изгибающий момент  $M_z$  – при чистом изгибе (рисунок 7.2, в). Эти виды нагружения (растяжение, изгиб, кручение) являются простыми.

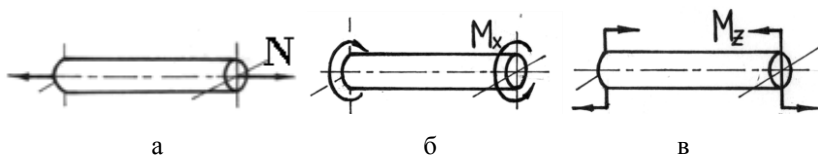


Рисунок 7.2 – Примеры простых видов деформации

Основные соотношения, полученные для них, приведены в таблице 7.1

Но при сложном сопротивлении должен быть применен принцип независимости действия сил (частный случай прин-

ципа суперпозиции или наложения, применяемый в механике деформируемого твердого тела).

Таблица 7.1 – Основные соотношения, полученные для различных видов нагружения

| Виды нагружения | Напряжения  | Деформации                                     |
|-----------------|---|--|
| Растяжение      | $\sigma = \frac{N}{F}$ Условие прочности:<br>$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq \sigma$                 | $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$       |
| Кручение        | $\tau = \frac{M_k}{J_\rho} \rho$ Условие прочности:<br>$\tau_{max} = \frac{M_{k max}}{W_\rho} \leq \tau$    | $\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_\rho}$ |
| Изгиб           | $\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$ Условие прочности:<br>$\sigma_{max} = \frac{M_{x max}}{W_x} \leq \sigma$ | $E \cdot I_x \cdot y'' = M_x$                  |

Напомним формулировку принципа независимости действия сил: напряжение (деформация) от группы сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности. Он справедлив, если функция и аргумент связаны линейной зависимостью. В задачах механики материалов и конструкций становится неприменимым, если:

- напряжения в какой-либо части конструкции от одной из сил или группы сил превышают предел пропорциональности  $\sigma_{nc}$ ;

- деформации или перемещения становятся настолько большими, что нарушается линейная зависимость между ними и нагрузкой.

Например, дифференциальное уравнение изгиба стержня является нелинейным и вытекающая из него зависимость прогиба  $f$  от нагрузки  $P$  для консольной балки, изображенной на рисунке 7.3, а, также является нелинейной (рисунок 7.3, б). Однако, если прогибы балки невелики ( $f \ll l$ ) настолько, что  $(dv/dz)^2 \ll 1$  (так как  $dv/dz \approx f/l$ ), то дифференциальное уравнение изгиба становится линейным (как видно из рисунка 7.3, б, начальный участок зависимости  $P$  от  $f$ , описываемый этим уравнением, также является линейным).

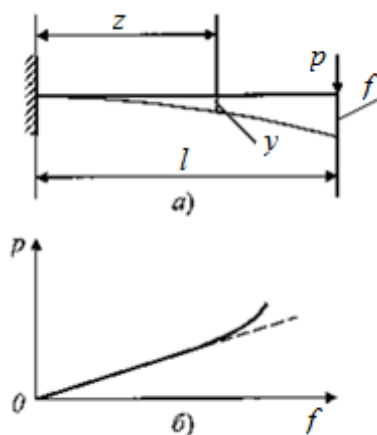


Рисунок 7.3 – Модели изгиба балки:

а – расчетная схема; б – линейное и нелинейное сопротивление

Задачи на сложное сопротивление решаются следующим образом. Определяются напряжения и деформации при действии простейших видов деформации, составляющих сложное сопротивление, а затем полученные результаты суммируют, используя при необходимости теории прочности.

На практике одновременное действие всех силовых факторов встречается крайне редко. Чаще приходится иметь дело с более простыми комбинациями нагружений – косой или пространственный изгиб, внецентренное растяжение или сжатие и изгиб с кручением.

## 7.2 Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу

Косым называют изгиб, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в сечении, не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса (при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения) (рисунок 7.4).

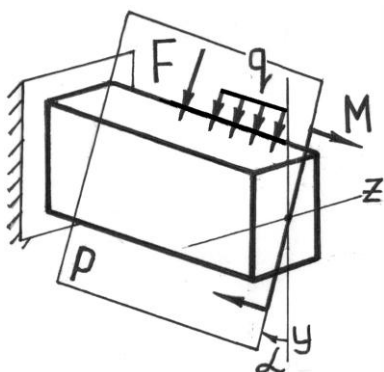


Рисунок 7.4 – Брус, подверженный действию косоого изгиба

При косом изгибе изогнутая ось представляет собой плоскую кривую, и плоскость, в которой она расположена, не совпадает с плоскостью действия нагрузки.

При пространственном изгибе нагрузка приложена в разных плоскостях, деформированная ось является пространственной кривой.

## 7.3 Определение внутренних усилий при косом изгибе

При косом изгибе в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние усилия:  $M_z$ ,  $M_y$  – изгибающие моменты и  $Q_y$ ,  $Q_z$  – поперечные (перерезывающие) силы. Это легко показать мысленно, рассекая стержень и определяя внутренние усилия при косом изгибе консольной балки под действием сосредоточенной силы  $F$  на свободном конце (рисунок 7.5):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0; & \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Q_y = F \cdot \cos \alpha; & \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot \sin \alpha \cdot x; \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow Q_z = F \cdot \sin \alpha; & \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = F \cdot \cos \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

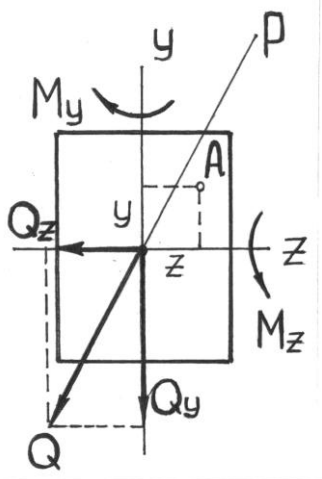


Рисунок 7.5 – Внутренние усилия при косом изгибе стержня

Правило знаков для внутренних усилий: изгибающие моменты – положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы  $zOy$ ; поперечные силы – положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается почасовой стрелке.

Таким образом, косой изгиб может быть представлен как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции.

Для определения полного изгибающего момента  $M$  и полной поперечной силы  $Q$  при косом изгибе достаточно определить внутренние усилия для каждого из плоских изгибов в отдельности (то есть  $Q_y$ ,  $M_z$  и  $Q_z$ ,  $M_y$ ), а затем найти их векторную сумму:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}.$$

## 7.4 Определение напряжений при косом изгибе

Если разложить внешние силы по главным осям инерции  $x$  и  $y$ , то получим две системы сил  $P_x$  и  $P_y$  каждая из которых вызывает прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно  $M_y$  и  $M_x$  (рисунки 7.6, 7.7). Применяя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения  $\sigma$  (рисунок 7.7) определим как алгебраическую сумму напряжений от  $M_x$  и  $M_y$ :

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x$$

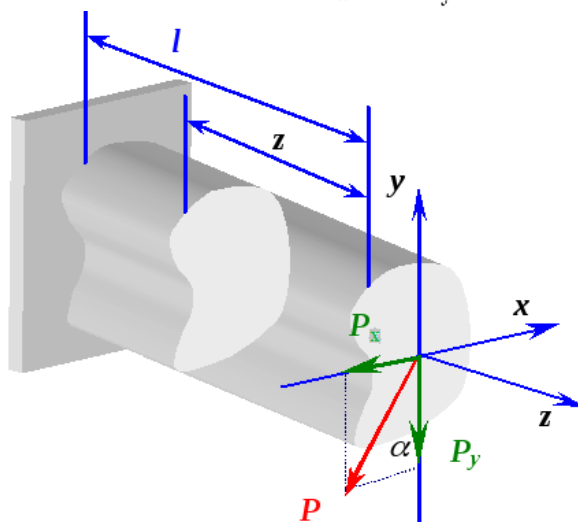


Рисунок 7.6 – Расчетная модель косоуго изгиба бруса

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, слагаемые будем определять по модулю, а знаки ставить по смыслу.

Таким образом, расчет на косоуго изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету на два прямых изгиба с последующим алгебраическим суммированием напряжений.



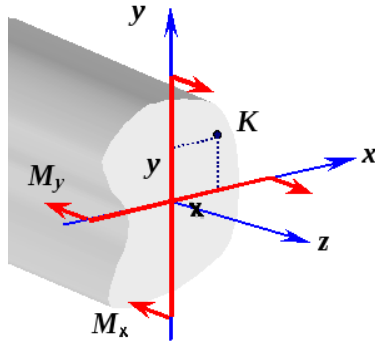


Рисунок 7.7 – Связь нормального напряжения с внутренними изгибающими моментами

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки (рисунок 7.8) с равными по модулю и максимальными одноименными координатами  $|x_A| = x_B = x_C = |x_D| = x_{\max}$  и  $|y_A| = y_B = y_C = |y_D| = y_{\max}$  напряжения в этих точках будут равны:

$$\sigma_{A,B,C,D} = \pm \frac{M_x}{J_x} y_{\max} \pm \frac{M_y}{J_y} x_{\max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

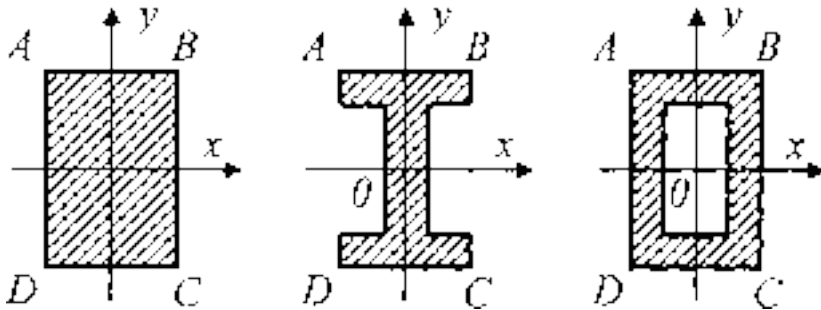


Рисунок 7.8 – Симметричные варианты сечений

Слагаемые в этом выражении рекомендуется определять по модулю, а знаки ставить по смыслу. Например, на рисунке 7.9 верхний ряд знаков «+» и «-» соответствует напряже-

ниям от  $M_x$ , а нижний ряд – от  $M_y$ , и напряжения в этих точках будут равны:

$$\sigma_A = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_B = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_D = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

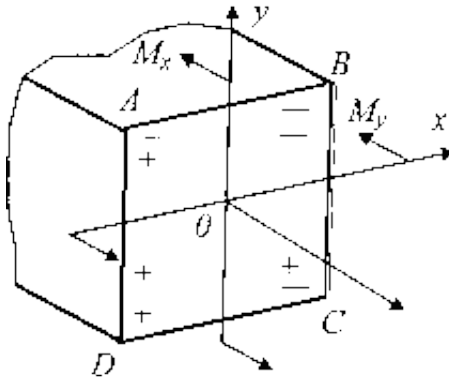


Рисунок 7.9 – Расстановка знаков от действия моментов

Условие прочности для балок из пластичного материала с указанным типом сечений запишется в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Касательные напряжения от поперечных сил, если нельзя воспользоваться формулой Журавского, допустимо не учитывать.

При проведении расчетов на прочность условие прочности составляется для опасной точки поперечного сечения, т.е. для точки, в которой нормальные напряжения достигают максимальных значений. Самой нагруженной точкой в сечении

произвольной формы является точка, наиболее удаленная от нейтральной линии, разделяющей растянутую и сжатую зоны сечения.

В связи с этим, большое значение приобретают вопросы, связанные с определением положения нейтральной линии.

Положив  $\sigma = 0$ , получим уравнение нейтральной линии:

$$\pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = 0 .$$

Так как напряжения в точках поперечного сечения будут пропорциональными расстояниям от нейтральной линии, то  $\sigma_{\max}$  будут возникать в наиболее удаленных от нее точках.

Силовая плоскость – это плоскость действия результирующего момента  $M_{рез}$  (рисунок 7.10),  $\varphi$  – угол наклона силовой плоскости к вертикали.

$$M_{рез} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} ,$$

$$tg\varphi = \frac{M_y}{M_x} ,$$

$$tg\alpha = -tg\varphi \cdot \frac{J_x}{J_y} . \quad (7.1)$$

Свойства нейтральной линии:

1) если  $J_x \neq J_y$ , то  $\alpha \neq \varphi$ , т. е. силовая плоскость и нейтральная линия не являются перпендикулярными;

2) если  $J_x = J_y$ , то из (7.1) следует, что  $tg\alpha = -tg\varphi$ , то есть нейтральная линия и силовая плоскость перпендикулярны. В этом случае стержень испытывает плоский изгиб (примерами таких стержней являются стержни с сечением – круг, кольцо, квадрат);

3) знак «минус» в формуле (7.1) указывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты.

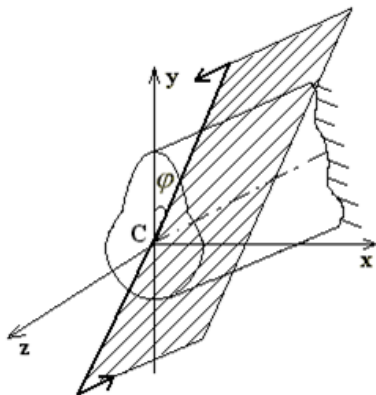


Рисунок 7.10 – Силовая плоскость

Для определения опасных точек сечения следует построить касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. Точки касания и будут являться опасными (точки *A* и *B* на рисунке 7.11).

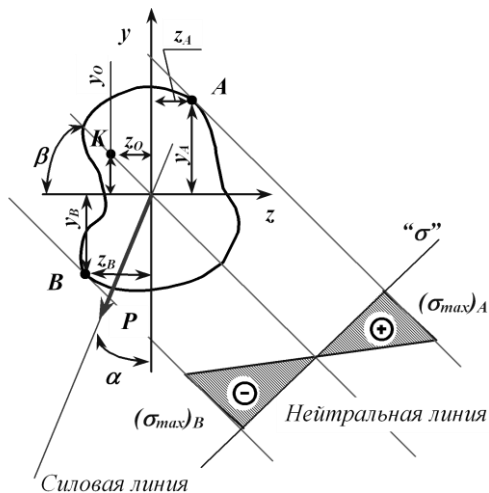


Рисунок 7.11 – Положение нейтральной линии при косом изгибе

Для некоторых сечений (прямоугольник, двутавр, швеллер и т. п.) наиболее напряженные точки расположены в углах этих сечений, т. е. их можно найти без определения положения нейтральной линии (рисунок 7.12).

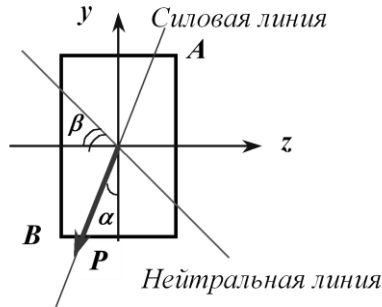


Рисунок 7.12 – Положение нейтральной линии и опасных точек сечения при косом изгибе для прямоугольника

Условия прочности составляют в зависимости от свойств того материала, из которого изготовлен элемент конструкции (брус).

Для хрупкого материала используют два условия прочности – для опасной точки, где имеет место растяжение (для нашего случая точка  $A$  на рисунке 7.11), и для точки, где имеет место сжатие (точка  $B$ ):

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A \leq \sigma_p^-$$

$$|\sigma_{\max}^c| = \frac{M_z}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B \leq \sigma_c^-$$

Необходимость использования двух условий прочности для хрупкого материала объясняется разными механическими свойствами материала при растяжении и сжатии. Хрупкий материал плохо сопротивляется растяжению и хорошо – сжатию.

Для пластичного материала, который одинаково сопротивляется и растяжению, и сжатию, используют одно условие прочности для точки поперечного сечения, где имеют место максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \leq [\sigma] ,$$

где  $z$  и  $y$  – координаты данной точки.

При расчетах на прочность касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегают, т.к. их влияние незначительно.

### 7.5 Определение перемещений при косом изгибе

Перемещения при косом изгибе определяют по принципу независимости действия сил, т. е. рассчитывают прогибы  $\Delta_z$  и  $\Delta_y$  в направлении главных осей, а величину полного прогиба в любом сечении балки получают геометрическим суммированием:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_z^2 + \Delta_y^2} .$$

Например, для балки, изображенной на рисунке 7.13, прогиб конца консоли определится следующим образом:

$$\Delta_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{P \cos \alpha}{3EJ_z} l^3 ,$$

$$\Delta_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{P \sin \alpha}{3EJ_y} l^3 ,$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_z^2 + \Delta_y^2} .$$

Направление полного перемещения ( $\operatorname{tg} \varphi$ ) определится величиной отношения  $\Delta_z/\Delta_y$  (рисунок 7.13):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta_z}{\Delta_y} = \frac{P \sin \alpha \cdot 3EJ_z}{3EJ_y P \cos \alpha} = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha .$$

Направление полного прогиба при косом изгибе перпендикулярно нейтральной линии и не совпадает с направлением внешней силы (рисунок 7.13).

При косом изгибе (впрочем, как и при остальных видах нагружения) имеем три задачи расчета на прочность:

- 1) проверка прочности;
- 2) подбор сечения [определить  $W_z$  (размеры сечения), при заданном отношении  $W_z/W_y$ ];
- 3) проверка по несущей способности (определить  $M$ ).

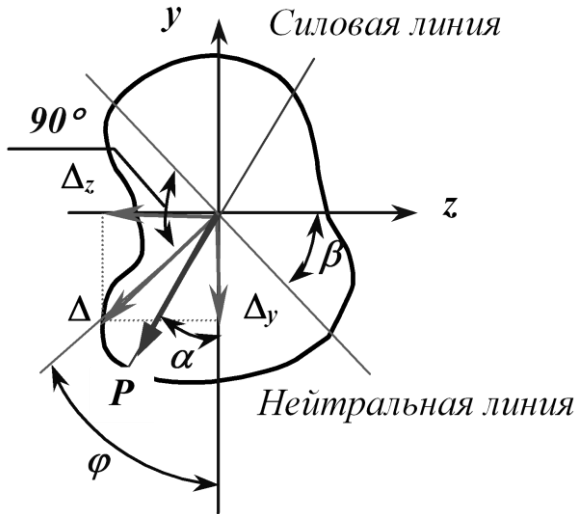


Рисунок 7.13 – Перемещение при косом изгибе

Порядок проверки прочности балки, работающей в условиях косоугольного или пространственного изгиба, тот же, что и для

балки, работающей при плоском поперечном изгибе. Для этого необходимо:

- построить эпюры внутренних усилий (изгибающих моментов). Для построения эпюр внутренних усилий раскладываем нагрузку на вертикальную и горизонтальную составляющие. Вертикальная составляющая вызывает изгиб относительно горизонтальной оси  $y$ , горизонтальная – относительно оси  $z$ ;

- выбрать опасные сечения – это сечения, где имеет место наиболее неблагоприятное сочетание изгибающих моментов;

- в опасных сечениях найти опасные точки – точки с максимальными нормальными напряжениями;

- записать условие прочности в этих точках. Из условия прочности либо подобрать размеры поперечного сечения, либо найти допустимую нагрузку, либо просто сделать вывод о возможности безопасной эксплуатации конструкции.

## 7.6 Внецентренное сжатие или растяжение

Вторым практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид нагружения довольно распространен в технике, так как в реальной ситуации почти невозможно приложить растягивающую нагрузку точно в центре тяжести.

Внецентренным растяжением-сжатием называется случай, когда равнодействующая сил, приложенных к отброшенной части стержня, направлена параллельно оси стержня, но не совпадает с этой осью (рисунок 7.14).

Внецентренное растяжение (сжатие) испытывают короткие стержни. Все сечения являются равноопасными, поэтому нет необходимости в построении эпюр внутренних силовых факторов.





Рисунок 7.14 – Пример внецентренного растяжения (сжатие)

Представим, что после проведения разреза равнодействующая  $P$  сил, действующих на отброшенную часть и приложенная к оставшейся, проходит через точку с координатами  $(x_p; y_p)$  в главных центральных осях поперечного сечения (рисунок 7.15).

Приведем силу  $P$  в центр тяжести сечения, т. е. направим вдоль оси стержня (сила  $N$ ). При этом появятся две пары сил  $M_{x_c}$  и  $M_{y_c}$  относительно главных центральных осей (рисунок 7.16).

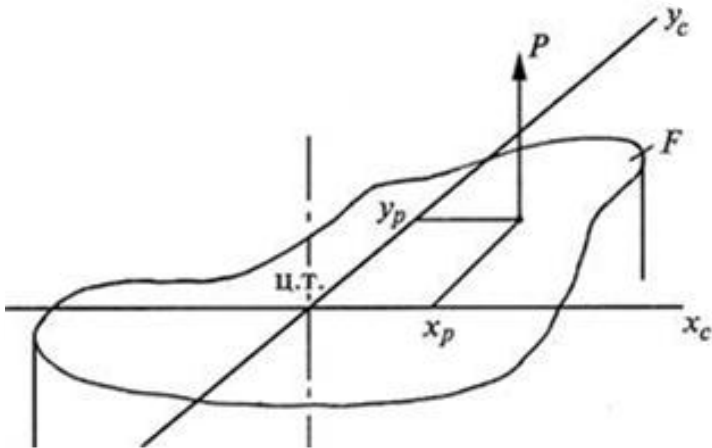


Рисунок 7.15 – Сечение стержня при внецентренном растяжении

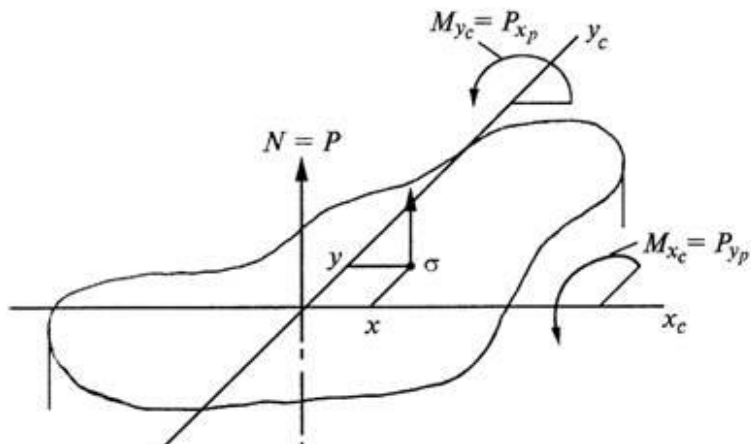


Рисунок 7.16 – Приведение действующей силы к центру тяжести сечения

Таким образом, в поперечном сечении стержня при внецентренном растяжении и сжатии возникают три внутренних силовых фактора: нормальная сила  $N$  и два изгибающих момента  $M_{x_c}$  и  $M_{y_c}$  относительно главных центральных осей поперечного сечения.

Для вычисления нормального напряжения в поперечном сечении в окрестности точки с произвольными координатами  $x, y$  воспользуемся принципом независимости действия сил. Будем вычислять нормальное напряжение от каждого внутреннего силового фактора в отдельности и результат сложим:

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} + \frac{M_{x_c}}{J_{x_c}} y + \frac{M_{y_c}}{J_{y_c}} x. \quad (7.2)$$

По этой формуле можно вычислять нормальные напряжения в точках поперечного сечения стержня при совместном действии осевой силы и двух изгибающих моментов. В нашем случае все три внутренних силовых фактора зависят от внецентренно приложенной силы  $P$  (рисунок 7.16). Подставив соответствующие выражения в (7.2), получим:

$$\sigma_{(y)} = \frac{P}{F} + \frac{P y_p y}{J_{x_c}} + \frac{P x_p x}{J_{y_c}}.$$

Вынесем величину нормального напряжения при осевом растяжении  $\sigma = P/F$  за скобки:

$$\sigma_{(y)} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y F}{J_{x_c}} + \frac{x_p x F}{J_{y_c}} \right).$$

Введем понятие о радиусе инерции относительно оси  $U$ :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} \quad \text{– такое расстояние от оси } U \text{ до условной точки, где сосредоточена вся площадь сечения.}$$

Тогда момент инерции можно найти по формуле:

$$J_u = i_u^2 F. \tag{7.3}$$

Применив (7.3) в выражении  $\sigma_{(y)}$ , получим:

$$\sigma_{(y)} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x}{i_{y_c}^2} \right). \tag{7.4}$$

Мы получили формулу нормальных напряжений в поперечном сечении при внецентренном растяжении или сжатии. Если сила растягивающая, то перед скобкой ставится знак плюс, если сила сжимающая, то ставится – минус.

В этой формуле координаты точки, где определяются напряжения входят в первой степени. Следовательно, если величины напряжений откладывать в масштабе в виде аппликат перпендикулярно плоскости поперечного сечения, то концы этих отрезков будут лежать на плоскости, наклоненной к плоскости поперечного сечения. Будем называть эту плоскость плоскостью напряжений. Известно, что две наклонен-

ные плоскости пересекаются по линии. В нашем случае в точках этой линии  $\sigma = 0$  – это нулевая линия, которая описывается уравнением:

$$1 + \frac{y_p y}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x}{i_{y_c}^2} = 0. \quad (7.5)$$

Анализируя (7.5) можно сделать вывод, что нейтральная линия при внецентренном растяжении и сжатии не проходит через центр тяжести, а отсекает на главных центральных осях отрезки  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$ . Полагая последовательно в (7.5)  $x = 0$  и  $y = 0$ , получим:

$$a_{x_c} = -\frac{i_{y_c}^2}{x_p}; \quad (7.6)$$

$$a_{y_c} = -\frac{i_{x_c}^2}{y_p}.$$

Из формул (7.6) следуют некоторые закономерности, связывающие положения полюса (т. е. точки приложения силы) и нейтральной линии, которые удобно использовать для анализа решения задачи. Перечислим самые важные из этих закономерностей:

- нейтральная линия всегда расположена в квадранте, противоположном тому, в котором находится полюс (рисунок 7.17);

- если полюс находится на одной из главных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси;

- если полюс приближается к центру тяжести сечения, то нейтральная линия удаляется от него;

- если полюс движется по прямой линии, то нейтральная линия поворачивается вокруг неподвижной точки.

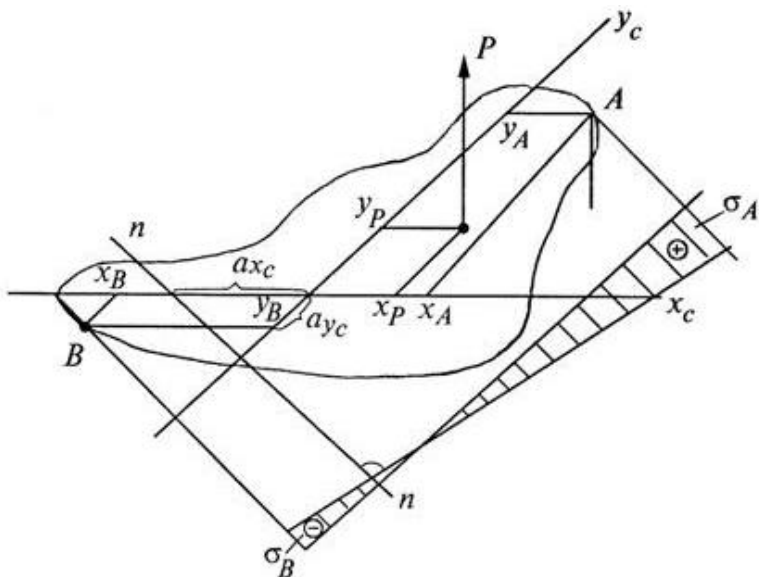


Рисунок 7.17 – Положение нейтральной линии

Для сечений со сложным контуром знание положения нулевой линии очень важно. Вспоминая про понятие плоскость напряжений, можно утверждать, что наибольшие по величине нормальные напряжения возникают в точках поперечного сечения наиболее удаленных от нулевой линии. Если взглянуть на плоскость напряжений вдоль нулевой линии, то она будет видна в виде линии соединяющей аппликаты напряжений, то есть в виде эпюры напряжений, отложенной от линии перпендикулярной нулевой линии (рисунок 7.17).

Наибольшее растягивающее нормальное напряжение возникает в точке  $A$ :

$$\sigma_A = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_P y_A}{i_{x_c}^2} + \frac{x_P x_A}{i_{y_c}^2} \right) > 0, \quad (7.7)$$

а наибольшее сжимающее нормальное напряжение возникает в точке  $B$ :

$$\sigma_B = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y_B}{i_{x_c}^2} + \frac{x_p x_B}{i_{y_c}^2} \right) < 0. \quad (7.8)$$

Таким образом, при внецентренном растяжении кроме растягивающих нормальных напряжений в поперечном сечении могут возникнуть и сжимающие. При внецентренном сжатии – наоборот.

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{\max}| = F \left[ \frac{1}{F} + \frac{y_p y_1}{J_x} + \frac{z_p z_1}{J_y} \right] \leq [\sigma].$$

Хрупкий материал обладает различными свойствами в условиях растяжения и сжатия – плохо сопротивляется растяжению и хорошо сжатию, условия прочности составляю для двух точек: где действуют максимальные растягивающие (точкаА) и максимальные сжимающие (точкаВ) напряжения:

$$\sigma_{p \max} = \sigma_A = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_A + \frac{M_z}{J_z} y_A \leq [\sigma_p], \quad (7.9)$$

$$|\sigma_{c \max}| = \sigma_B = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} z_B - \frac{M_z}{J_z} y_B \leq [\sigma_c].$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.)  $y_1 = y_{\max}$  и  $z_1 = z_{\max}$ . Поэтому формула упрощается, и мы имеем:

$$|\sigma_{\max}| = F \left[ \frac{1}{F} + \frac{y_p}{W_x} + \frac{z_p}{W_y} \right] \leq [\sigma] .$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

### 7.7 Ядро сечения при внецентренном сжатии

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон), весьма желательно добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы  $P$  слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом ядре сечения. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы  $P$ , не вызывая в сечении напряжений разного знака.

На рисунке 7.18 поясняется данное определение ядра сечения.

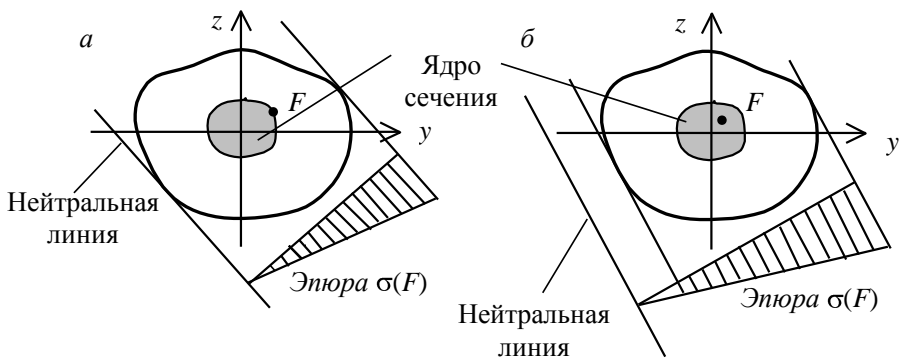


Рисунок 7.18 – Ядро сечения произвольного сечения

При приложении силы  $P$  в точке на границе ядра сечения с координатами  $(x_я; y_я)$  нулевая линия будет касательной к контуру поперечного сечения в точке  $B$  (рисунок 7.19) и отсекает на главных центральных осях отрезки  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$ .

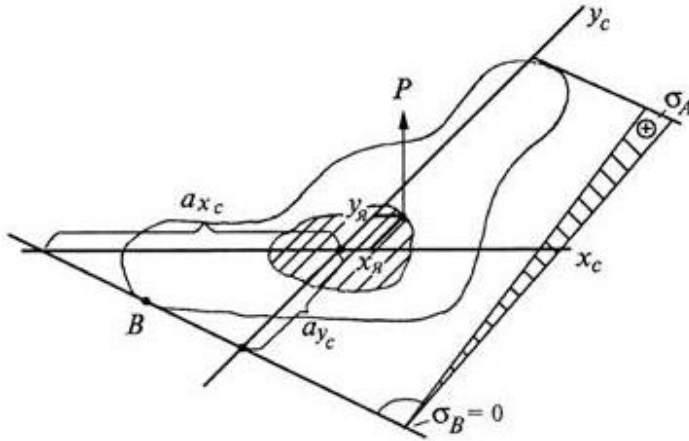


Рисунок 7.19 – Положение нейтральной линии при приложении силы на границе ядра сечения

Применяя (7.6), получим:

$$x_я = -\frac{i_{y_c}^2}{a_{x_c}}; \quad (7.10)$$

$$y_я = -\frac{i_{x_c}^2}{a_{y_c}}.$$

Формулы (7.10) описывают алгоритм вычисления координат точек границы ядра сечения:

1) проводится касательная к контуру поперечного сечения и определяются отрезки  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$ ;

2) по формуле (7.10) определяются координаты  $x_я$  и  $y_я$ .

Такая процедура проводится со всеми касательными. Для сложного криволинейного контура, чем больше будет прове-



дено касательных, тем точнее будет найден контур ядра сечения.

Можно доказать, что если касательная будет вращаться вокруг угла контура сечения, если он есть, то соответствующая точка на контуре ядра будет перемещаться по прямой линии, соединяющей точки ядра соответствующие крайним положениям касательных.

Таким образом, если контур поперечного сечения представляет собой многоугольник, то контур ядра сечения тоже будет иметь форму многоугольника, но необязательно с тем же количеством углов (их может быть меньше).

Для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

Для круглого сечения радиуса  $r$  очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса  $r_0$ . Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось  $Oy$  расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда:

$$a_y = r; a_z = \infty; Z_{я} = r_0 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{\pi \cdot r^4}{4 \cdot \pi \cdot r^2}}{r} = -\frac{r}{4}.$$

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения.

Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура  $ABCD$ , описанного около двутавра (рисунок 7.20,  $a$ ). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами.

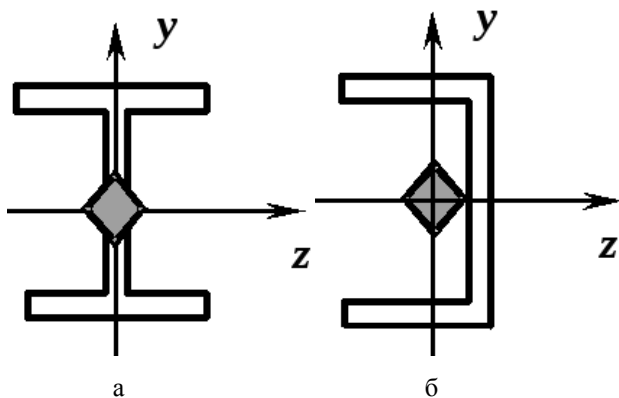


Рисунок 7.20 – Ядро сечения:

а – для двутавра; б – для швеллера

Для швеллера, как и для двутавра, точки 1, 2, 3, 4 контура ядра (рисунок 7.20, б) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника  $ABCD$ .

### 7.8 Совместное действие изгиба с кручением

Силы, действующие на валы (давление на зубья шестерен, натяжение ремней, собственный вес вала и шкивов и т. п.), вызывают в поперечных сечениях валов следующие внутренние силовые факторы:  $M_{кр} = M_x, M_y, M_x, Q_y, Q_z$ . Таким образом, в любом поперечном сечении одновременно возникают нормальные напряжения от изгибов в двух плоскостях, а также касательные напряжения от кручения и поперечных сил.

Для расчета вала в первую очередь необходимо установить опасные сечения. С этой целью должны быть построены эпюры изгибающих моментов  $M_y, M_z$  и крутящего момента  $M_{кр}$ .

Нагрузки, действующие на вал, разлагаем на составляющие вдоль координатных осей, а затем строим эпюры изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  в двух взаимноперпендикулярных плоскостях.

При изгибе вала круглого или кольцевого сечения в каждом из его сечений имеет место прямой изгиб под действием результирующего изгибающего момента (рисунок 7.21)

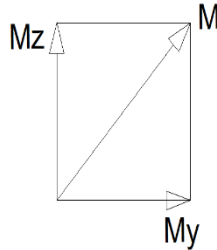


Рисунок 7.21 – Направление результирующего изгибающего момента

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (7.11)$$

Направление вектора результирующего момента определим, вычислив угол  $\alpha$  между вертикальной осью  $Z$  и  $M$  из  $\tan \alpha = \frac{M_y}{M_z}$ .

Вектор момента  $M$  в разных сечениях может иметь различные направления, в силу чего даже при отсутствии распределенных нагрузок эпюра  $M$  может быть криволинейной. Это позволяет строить эпюры  $M$  упрощенным способом, несколько завышая значения суммарного изгибающего момента  $M$  на участках между переломами эпюры: величины суммарного изгибающего момента  $M$  вычисляют лишь для тех сечений, в которых на эпюрах  $M_y$  и  $M_z$  есть переломы. Эти величины откладывают в масштабе по одну сторону от оси на эпюру  $M$  и соединяют кривой линией.

Далее строим эпюру  $M_{кр} = M_x$  и ищем опасные сечения, в которых одновременно велики  $M$  и  $M_{кр}$ . Сопоставляя эпюры, построенные в одном масштабе, находим опасные сечения. Далее в опасном сечении нужно найти опасные точки.

Определим положение нейтральной линии и строим эпюры нормальных напряжений от результирующего изгибающего момента  $M$ , которые изменяются пропорционально расстоянию точек от нейтральной линии. Очевидно, опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии, в которых одновременно и нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}, \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}. \quad (7.12)$$

При изгибе с кручением элемент в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии. Главные напряжения определяем по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Заметим, что в данном случае сложного напряженного состояния влиянием касательных напряжений от поперечных сил пренебрегаем, так как они значительно меньше касательных напряжений, вызванных кручением.

Для проверки прочности элемента, выделенного у опасной точки, нужно, выбрав соответствующую теорию прочности, воспользоваться одной из формул для определения эквивалентного напряжения, например, по четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.14)$$

Подставляя значение  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  и учитывая, что  $W_{\rho} = 2W$  получим:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \frac{\sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (7.15)$$

Числитель этой формулы представляет собой приведенный момент, действие которого эквивалентно совместному действию трех моментов (согласно принятой теории прочности). Следовательно, в случае необходимости подобным же образом можно получить формулы для приведенных моментов и по другим теориям прочности.

Нетрудно заметить, что теперь условия прочности можно заменить одной простой формулой:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W} \leq [\sigma]. \quad (7.16)$$

Таким образом, при совместном действии изгиба с кручением стержни круглого сечения рассчитывают на изгиб от приведенного момента  $M_{\text{прив}}$ .

На практике часто встречаются стержни некруглого сечения, подверженные действию крутящих и изгибающих моментов. При загрузении такого бруса, например, системой сил, вызывающих в сечении изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящий  $M_{\text{кр}}$ , расчет проводят по следующей схеме. Внешние силы раскладывают на составляющие, приводя их к оси вала. Для нахождения опасного сечения строят эпюры  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{\text{кр}}$ .

Установив по эпюрам опасное сечение находят опасную точку в нем, для чего строят эпюры напряжений от всех силовых факторов.

В случае, когда  $\sigma_{\text{max}}$  от изгиба не совпадают с  $\tau_{\text{max}}$  от кручения, для выявления одной опасной точки приходится рассматривать сочетание напряжений в нескольких точках. Обычно бывает достаточно трех точек: одной из угловых, одной посередине длинной и одной посередине короткой сторон прямоугольника.

Обычно касательные напряжения от поперечных сил малы и ими можно пренебречь.

Эквивалентные напряжения согласно IV теории прочности и теории Кулона—Мора равны:  
в точке середине длинной стороны

$$\sigma_{\text{ЭКВ IV}} = \sqrt{\frac{M_x}{W_x}}^2 + 3 \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2}}^2 \leq [\sigma], \quad (7.17)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ M}} = \frac{1-m}{2} \frac{M_x}{W_x} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\frac{M_x}{W_x}}^2 + 4 \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2}}^2 \leq [\sigma]; \quad (7.18)$$

в точке середине короткой стороны

$$\sigma_{\text{ЭКВ IV}} = \sqrt{\frac{M_y}{W_y}}^2 + 3 \gamma \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2}}^2 \leq [\sigma], \quad (7.19)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ M}} = \frac{1-m}{2} \frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\frac{M_y}{W_y}}^2 + 4 \gamma \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2}}^2 \leq [\sigma]. \quad (7.20)$$

Таким образом, наиболее опасная точка определяется только в результате вычисления эквивалентных напряжений во всех трех точках. При этом в каждом конкретном случае положение наиболее опасной точки зависит от соотношения моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{\text{кр}}$ .

## Контрольные вопросы

1. Косой изгиб. Внецентренное сжатие.
2. Напряжения при косом изгибе.
3. Что такое силовая плоскость?
4. Свойства нейтральной линии.
5. Изгиб с кручением.

## 8 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 8.1 Общие положения

Под устойчивостью упругого тела понимают его способность сохранять состояние равновесия при внешних относительно малых воздействиях (возмущениях).

Упругое равновесие тела называют неустойчивым, если тело, будучи выведенным из него, в исходное состояние не возвращается.

Между этими двумя состояниями существует переходное (критическое) состояние, при котором тело находится в безразличном равновесии. Это означает, что тело может сохранять исходное состояние, но может и потерять его при незначительном воздействии.

Устойчивость формы равновесия тела зависит от величины приложенных к нему нагрузок. Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости исходной формы равновесия тела, называется критической ( $P_{кр}$ ).

Можно утверждать, что приложение критической нагрузки равносильно разрушению конструкции. Неустойчивая форма равновесия неминуемо будет утрачена, и деформации (напряжения) неограниченно возрастут.

Таким образом, при расчёте на устойчивость  $P_{кр}$  подобна разрушающей нагрузке при расчёте на прочность.

Следует иметь в виду, что потеря устойчивости (и разрушение) может наступить при напряжениях, существенно меньших тех, которые допускаются по условию прочности.

Задачу об устойчивости сжатого упругого стержня называют задачей Эйлера.

Представим себе, что под действием осевой силы стержень изогнулся – его ось отклонилась от прямолинейной формы равновесия (рисунок 8.1). Пусть отклонения оси стержня малы, и напряжения не превышают предела пропорциональности.

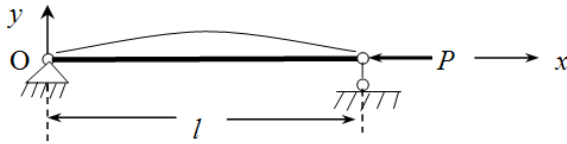


Рисунок 8.1 – Стержень под действием осевой силы

Вертикальные составляющие опорных реакций, очевидно, равны нулю. Поэтому изгибающий момент в произвольном сечении стержня будет равен:

$$M = -P \cdot y, \quad (8.1)$$

где  $y$  – прогиб стержня в данном сечении, а знак минус означает, что момент соответствует отрицательной кривизне оси стержня.

Для вывода дифференциального уравнения изогнутой оси стержня рассмотрим выражение:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py. \quad (8.2)$$

Под  $EJ$  следует понимать минимальную жесткость стержня. Именно в этой плоскости следует ожидать искривление оси стержня.

Пусть  $EJ = const$  вдоль оси стержня, тогда, положив:

$$\frac{P}{EJ} = k^2. \quad (8.3)$$

Приведём дифференциальное уравнение (8.2) к виду:

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (8.4)$$

Решением этого уравнения будет:

$$y = A \sin kx + B \cos kx, \quad (8.5)$$



Коэффициенты  $A$  и  $B$  находятся из граничных условий для функции, т. е. из условий закрепления концов стержня.

На левом конце  $x = 0, y = 0$ , следовательно  $B = 0$ .

На правом конце  $x = l, y = 0$ , что даёт  $A \sin kl = 0$ , следовательно,  $A = 0$  или  $kl = \pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Однако при  $A = 0$  решение является тривиальным – оно соответствует прямолинейной форме стержня. По той же причине следует отбросить корень  $kl = 0$ .

Таким образом, изогнутая ось является синусоидой с уравнением:

$$y = A \sin kx, \text{ где } k = \frac{\pi n}{l}. \quad (8.6)$$

Подстановка  $k$  в (8.3) из (8.6) приводит к формуле Эйлера:

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (8.7)$$

Формула Эйлера (8.7) выражает нагрузку, способную удержать в равновесии слегка искривленный стержень. Теоретически эта нагрузка имеет целый ряд значений ( $n = 1, 2, 3$ ). Каждому значению  $n$  соответствует своя форма упругой линии (рисунок 8.2).

Однако с практической точки зрения интересно знать наименьшее значение силы  $P$ , поэтому следует принять  $n = 1$ , тогда:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (8.8)$$

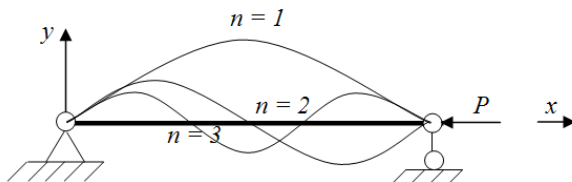


Рисунок 8.2 – Форма упругой линии при различных значениях  $n$

Этому значению критической силы соответствует изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (8.9)$$

Значениям критической силы высших порядков соответствуют упругие линии с двумя, тремя и т. д. полуволнами (рисунки 2). Однако, как показывают исследования, эти формы равновесия неустойчивы. Кроме того, при нарастании осевой сжимающей силы в первую очередь реализуется форма равновесия с одной полуволной.

Из уравнения упругой линии (8.9) следует, что при  $x = \frac{l}{2}$  прогиб балки равен:  $y = y_{\max} = A$ .

Таким образом,  $A$  – это прогиб стержня посередине его длины. Поскольку равновесие стержня возможно при любом малом отклонении от прямолинейной формы, то величина  $A$  остается неопределённой. Однако прогиб  $A$  должен быть настолько мал, чтобы правомерным было применение дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (8.2).

Подставим в формулу (8.8) для критической силы  $J = i^2 F$ , разделим её на площадь поперечного сечения стержня  $F$  и получим формулу критических напряжений:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \quad \text{или} \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2}.$$

Введём величину  $\lambda = \frac{l}{i}$  – гибкость стержня. Она играет важную роль в проверке стержней на устойчивость. В итоге формула для  $\sigma_{кр}$  получит вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (8.10)$$

Формула Эйлера получена для стержня с шарнирным опиранием его концов. Для других случаев опирания критическую силу можно получить тем же путём. В результате получается обобщённая формула:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (8.11)$$

где  $\mu$  – коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

$\mu l$  – приведенная длина стержня.

Формула  $\sigma_{кр}$  (8.10) также может быть обобщена на другие случаи закрепления. Достаточно ввести в её знаменатель приведенную гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}.$$

Значения  $\mu$  для различных условий опирания стержня приводятся в справочной литературе. Ниже приведены некоторые из них:

–  $\mu = 2$  при одном защемлённом и другом свободном конце;

–  $\mu = \frac{1}{2}$  при двух защемлённых концах;

–  $\mu = 0,7$  при защемлении на одном конце и подвижном шарнире на другом;

–  $\mu = 1$  при шарнирном опирании обоих концов.

Из формулы (8.10) следует, что критические напряжения для стержня из данного материала с модулем  $E$  не зависят от прочности материала. Поэтому, для достаточно гибкого стального стержня ( $\lambda > 100$ )  $\sigma_{кр}$  оказываются ниже предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$  и определяют, таким образом, несущую способность стержня при сжатии.

Однако у стальных стержней с гибкостью меньше предельной ( $\lambda < 100$ )  $\sigma_{кр}$  могут превышать  $\sigma_{нц}$ .

Опыты показали, что короткие стержни ( $\lambda = 30 \div 40$ ) теряют несущую способность из-за потери прочности материала при сжатии, а не потери устойчивости формы.

Стержни средней гибкости, наиболее широко применяемые на практике, по данным опытов теряют несущую способность из-за потери устойчивости формы, но при напряжениях  $\sigma_{нц} < \sigma_{кр} < \sigma_0$ .

Для проверки на устойчивость таких стержней применение формулы (8.10) не только принципиально недопустимо, но и крайне опасно по своим последствиям.

Для стержней, теряющих устойчивость за пределом упругости Ф. С. Ясинским предложена следующая эмпирическая формула:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (8.12)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, зависящие от материала.

Они подобраны так, чтобы при  $\lambda = \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}}$  напряжения  $\sigma_{кр}$  равнялись  $\sigma_{нц}$ , а при малых  $\lambda$  напряжения  $\sigma_{кр}$  мало отличались от опасных напряжений  $\sigma_0$ . Существуют таблицы значений коэффициентов  $a$  и  $b$  для различных материалов, составленные по экспериментальным данным.

Таблица 8.1 – Коэффициенты формулы Ясинского, МПа

| Материал         | $a$  | $b$  |
|------------------|------|------|
| Сталь Ст.3       | 310  | 1,14 |
| Сталь Ст.5       | 464  | 3,62 |
| Кремнистая сталь | 589  | 3,82 |
| Дерево           | 29,3 | 0,19 |

## 8.2 Основное условие устойчивости

Очевидно, что практически  $\sigma_{кр}$  в сжатом стержне допускать нельзя – следует назначать некоторый запас устойчивости. Тогда допускаемое напряжение в расчётах на устойчивость будет выражаться формулой:

$$[\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}.$$

Коэффициент запаса устойчивости всегда несколько выше коэффициента запаса прочности. Этим компенсируются неизбежные на практике отклонения: начальной формы стержня, реальных свойств материала и способа приложения силы от принятых в расчёте.

Таким образом, условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$\sigma \leq [\sigma]_{уст}, \quad (8.13)$$

где  $\sigma$  – действующие в стержне сжимающие напряжения.

Можно связать допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}$$

с допускаемым напряжением на прочность:

$$[\sigma]_{пр} = \frac{\sigma_0}{n_0}.$$

Из их отношения следует:

$$[\sigma]_{уст} = \varphi \cdot [\sigma]_{пр}, \quad (8.14)$$

где  $\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_0} \frac{n_0}{n_y}$  – коэффициент продольного изгиба,

учитывающий уменьшение допускаемого напряжения на прочность.

Очевидно, что график зависимости  $\varphi$  от  $\lambda$  в некотором масштабе является графиком  $\sigma_{кр}$  от  $\lambda$ . Иначе говоря, для любого материала можно составить график или таблицу значений  $\varphi$  в функции от гибкости  $\lambda$ . Тогда, при известном модуле  $E$  и гибкости  $\lambda$ , коэффициент  $\varphi$  определяют из таблицы и условие устойчивости (8.13) с учётом (8.14) записывают в виде:

$$\frac{P}{\varphi F} \leq \bar{\sigma}_c. \quad (8.15)$$

Эта формула при проверочном расчёте стержня на устойчивость не требует отыскания критических напряжений.

В проектировочном расчёте площадь сечения стержня  $F$  подбирают методом последовательных приближений. Суть метода состоит в следующем. Задаются значением  $\varphi$  в первом приближении ( $\varphi = \varphi_1$ ) и по условию (8.15) находят площадь сечения  $F$ , а затем гибкость  $\lambda$ . По значению  $\lambda$  находят фактическое значение  $\varphi'_1$ .

В качестве второго приближения для  $\varphi$  берут значение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

Расчёт ведётся до достижения незначительного отличия  $\varphi_i$  от  $\varphi'_i$ .

Например, для стойки, составленной из двух двутавров с шарнирно закрепленными концами, соединённых планками (рисунок 8.3), действует сжимающая сила  $F = 500 \text{ кН}$ .

Материал – сталь Ст 3 ГОСТ 380–71. Основное допускаемое напряжение на сжатие  $\bar{\sigma}_c = 160 \text{ МПа}$ .

Выполним подбор сечения стойки из условия устойчивости (номер двутавра).

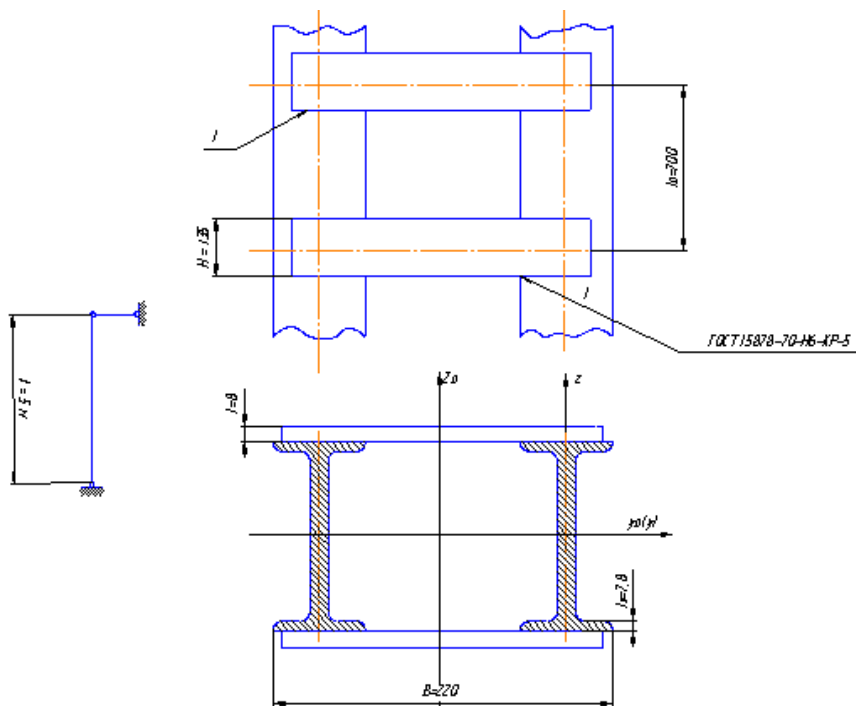


Рисунок 8.3– Расчетная схема на устойчивость

*Подбор сечения стойки из условия устойчивости*

Условие устойчивости стержня имеет вид:

$$\frac{F}{\varphi \cdot A} \leq \sigma_{\text{сж}}^{\text{н}}$$

где  $\varphi$  – коэффициента продольного изгиба;

$F$  – сжимающая сила, кН;

$A$  – площадь поперечного сечения стойки, м<sup>2</sup>;

$\sigma_{\text{сж}}^{\text{н}}$  – допускаемое напряжение, МПа.

При проектировочном расчете (подбор потребного сечения стержня) задача решается методом последовательных приближений. Выбираем в первом приближении  $\varphi_1 = 0,5$  из

интервала  $0 < \varphi < 1$  и определяем требуемую площадь поперечного сечения стержня в первом приближении.

1. Первое приближение  $\varphi_1 = 0,5$

Находим требуемую площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot \sigma_{сж}} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По сортаменту прокатной стали ГОСТ 8239-72 подбираем двутавр № 22,  $A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $I_y = 2790 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $i_y = 0,0922 \text{ м}$ .

Определяем гибкость стойки по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

где  $\lambda$  – гибкость стойки;

$\mu$  – коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

$l$  – длина стойки, м;

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции, м.

Для определения  $i_{\min}$  необходимо знать минимальные моменты инерции поперечного сечения стойки. При увеличении расстояния между двутаврами момент инерции сечения стойки  $I_{Z_0}$  относительно оси  $Z_0$  будет увеличиваться, а относительно оси  $Y_0$  изменяться не будет и останется равным  $I_{Y_0} = 2I_y$ , где  $I_y$  – момент инерции сечения одной ветви стойки относительно центральной оси двутавра. Поэтому в каче-



стве минимального момента инерции поперечного сечения стойки принимается  $I_y$ , тогда:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2790 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 32,8 \cdot 10^{-4}}} = 0,092 \text{ м}.$$

Полученное значение совпадает с табличным значением  $i_y = 0,0922 \text{ м}$ , поэтому вычислять его не надо. Для стойки, составленной из углов или тонкостенного стержня, гибкость определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,092} = 54,3.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:  $\lambda = 50$  соответствует  $\varphi = 0,89$ ,  $\lambda = 60$  соответствует  $\varphi = 0,86$ .

Интерполируя получим:

$$\varphi_1 = \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot 5,7 + 0,86 = 0,8771.$$

Вычислим напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1 \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,8771 \cdot 65,6 \cdot 10^{-4}} = 87 \text{ МПа}.$$

Материал значительно недогружен.

*2. Второе приближение. Приняв:*

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,8771}{2} = 0,688.$$

Искомая площадь

$$A = \frac{F}{\varphi_2 \cdot \Gamma_{сж}} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,688 \cdot 160 \cdot 10^6} = 45,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Подбираем двутавр № 18,  $A = 23,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $i_y = 0,074 \text{ м}$ .

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,074} = 67,4.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi'_2 = \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 2,6 + 0,81 = 0,823.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi'_2 \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,823 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4}} = 130 \text{ МПа}.$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160 - 130}{160} \cdot 100 = 18,8 \% > 1 \%, \text{ что недопустимо.}$$

3. Третье приближение

$$\varphi_3 = \frac{0,688 + 0,823}{2} = 0,755.$$

Искомая площадь

$$A = \frac{500 \cdot 10^3}{0,755 \cdot 160 \cdot 10^6} = 41,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По таблице ГОСТ 8239-72 получаем двутавр № 18.

В дальнейших расчетах принимаем двутавр № 16,  
 $A = 20,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $I_y = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $I_z = 58,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  
 $i_y = 0,0657 \text{ м}$ ,  $i_z = 0,017 \text{ м}$ ,  $B = 0,081 \text{ м}$ .

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,0657} = 76.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi_3 = \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 4 + 0,75 = 0,774.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{500 \cdot 10^3}{0,774 \cdot 40,4 \cdot 10^{-4}} = 159,9 \text{ МПа}$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160 - 159,9}{160} \cdot 100 = 0,0625 \% < 1 \%$$

Окончательно принимаем для стойки двутавра № 16.

### **Контрольные вопросы**

1. Критическая сила. Формула Эйлера.
2. Четыре способа закрепления концов сжатого стержня. Пределы применимости формулы Эйлера.
3. Формула Ясинского.
4. Методика расчета сжатого стержня на устойчивость.

## 9 ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

До сих пор мы рассматривали действие статически приложенных нагрузок, которые либо не изменяются во времени, либо скорость их изменения настолько мала, что возникающими при этом ускорениями можно пренебречь. Но в инженерной практике часто приходится сталкиваться с быстро изменяющейся нагрузкой, например, при движении поезда по мосту, или падении груза на плиту перекрытия. Воздействие, при котором нельзя пренебречь величиной сил инерции и вызванных ими напряжений и деформаций называется динамическим.

Принято различать следующие виды динамических воздействий:

1. Возникающие при ускоренном (замедленном) движении.
2. Возникающие при ударе.
3. Возникающие при повторно-переменном (циклическом) воздействии.

### 9.1 Ускоренное движение

Рассмотрим задачу, в которой груз весом  $G = m \cdot g$  ускоренно поднимается вверх на тросе, перекинутом через блок (рисунок 9.1) силой, обеспечивающей ускоренное (ускорение –  $a$ ) движение. Величину этой силы обозначим как  $P_{\text{дин}}$ .

Допустим, что трос невесом, или вес его пренебрежимо мал по сравнению с весом груза. Если груз движется ускоренно вверх, то сила инерции  $P_{\text{ин}} = m \cdot a$  направлена вниз. Составим уравнение равновесия:

$$G + P_{\text{ин}} = P_{\text{дин}}$$

или

$$m \cdot g + m \cdot a = m \cdot g \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = P_{\text{дин}}$$

или

$$G \cdot \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = P_{\text{дин}}$$

Здесь вес груза  $G$  можно считать статической величиной, т. е.  $G = P_{ст}$ , тогда:

$$P_{ст} \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right) = P_{дин}. \quad (9.1)$$

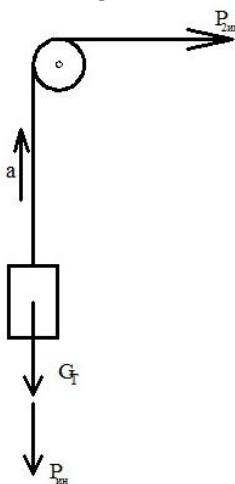


Рисунок 9.1 – Ускоренное движение груза

Величина, стоящая в скобках, преобразует статическую силу в динамическую и называется коэффициентом динамичности:

$$k_{дин} = 1 + \frac{a}{g}. \quad (9.2)$$

Теперь любую величину: динамические напряжения, динамические деформации и т.д. можно определить через ее статическую величину, измененную в коэффициент динамичности раз:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot k_{дин}, \quad (9.3)$$

$$\Delta \ell_{дин} = \Delta \ell_{ст} \cdot k_{дин}. \quad (9.4)$$

Практически любая задача динамического расчета сводится к определению коэффициента динамичности.

## 9.2 Расчет на удар

С явлением удара приходится иметь дело в том случае, когда скорость рассматриваемого элемента конструкции или соприкасающихся с ним частей в очень короткий промежуток времени изменяется на конечную величину. Получающиеся при этом большие ускорения (замедления) приводят к возникновению значительных инерционных сил, действующих в направлении, противоположном направлению ускорений, т.е. в направлении движения тела. В случае падающего груза величина силы удара (динамической силы  $P_{\text{дин}}$ ) может быть определена как:

$$P_{\text{дин}} = m \cdot a_{(t)}, \quad (9.5)$$

где  $m$  – масса падающего груза;

$a_{(t)}$  – ускорение падающего груза после соприкосновения его с препятствием.

Однако определение силы удара таким образом весьма затруднительно, так как не известно время соударения, т. е. время, в течение которого скорость движущегося тела снижается от своего максимального значения в момент соприкосновения с ударяемым телом (начало удара) до нуля после деформации последнего (конец удара). В связи с указанными трудностями, определяя напряжения в элементах упругих систем, вызываемые действием ударных нагрузок (динамические напряжения), в инженерной практике обычно пользуются так называемым энергетическим методом, основанным на законе сохранения энергии. Согласно этому методу полагают, что при соударении движущихся тел уменьшение запаса кинетической энергии их равно увеличению потенциальной энергии деформации соударяющихся упругих тел.

Вывод расчетных формул для определения динамических напряжений проведем на примере простейшей системы (рисунок 9.2), состоящей из вертикально расположенного упругого

призматического стержня с жесткостью  $c = \frac{EA}{l}$  и некоторого груза  $Q$ . Полагаем при этом, что удар неупругий в том смысле, что при соударении падающий груз не отскакивает от стержня, а движется вместе с ним, и, следовательно, в стержне не возникают упругие волны. Кроме того, данная система обладает одной степенью свободы. Рассмотрим два случая:

1) груз прикладывается к стержню статически, т. е, нагрузка медленно нарастает от нуля до своего максимального значения (рисунок 9.2, а) и сжимает стержень на величину  $\delta_{ст}$ ;

2) груз падает с некоторой высоты  $H$ , ударяя по стержню, создает в нем сжатие  $\delta_{д} > \delta_{ст}$  (рисунок 9.2, б).

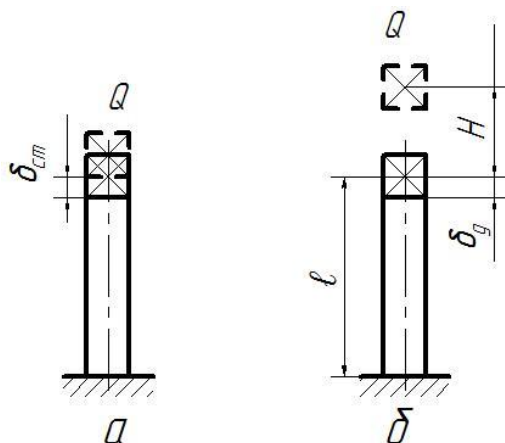


Рисунок 9.2 – Пример соударения вертикально расположенного стержня и груза

Изменение деформации при ударном действии нагрузки  $Q$  по сравнению с деформацией при статическом приложении той же нагрузки может быть охарактеризовано коэффициентом динамичности  $k_{дин} = \frac{\delta_{д}}{\delta_{ст}}$ , откуда динамическую деформацию через статическую можно выразить формулой:

$$\delta_{д} = \delta_{ст} \cdot k_{дин}. \quad (9.6)$$

Учитывая линейную связь между напряжением и деформацией, а также принимая одинаковыми модули упругости при статическом и ударном действии нагрузки, что с достаточной степенью точности подтверждается экспериментом, по аналогии с последней формулой можно установить связь между статическим и динамическим напряжениями формула 9.3, где  $\sigma_{ст} = \frac{Q}{F}$  напряжение, возникающее в стержне при сжатии силой, равной весу падающего груза.

Чтобы использовать формулу, нужно определить коэффициент динамичности. При этом будем исходить из общепринятого в теории удара допущения, что связь между усилиями и деформациями сохраняется одной и той же как при статической, так и при динамической нагрузках.

Изменение кинетической энергии падающего груза численно равно работе, совершенной им при падении и деформировании стержня:

$$T = Q \cdot (H + \delta_d), \quad (9.7)$$

где  $H$  – высота падения груза, м.

Потенциальную энергию деформации упругого тела при ударе, накопленную за счет уменьшения потенциальной энергии падающего тела можно представить формулой:

$$U_{дин} = \frac{1}{2} P_{дин} \cdot \delta_{дин} = \frac{C \delta_{дин}^2}{2}. \quad (9.8)$$

Пользуясь законом сохранения энергии и пренебрегая потерями энергии, вызываемыми местными пластическими деформациями при соударении тел, а также инерцией массы ударяемого стержня, можно записать:

$$T = U_{дин}, \text{ тогда } \frac{C \delta_{дин}^2}{2} = Q(H + \delta_d).$$

Имея в виду, что  $\delta_{ст} = \frac{Q}{c}$ , уравнение можно представить так:



$$\delta_{\text{дин}}^2 - 2 \delta_{\text{ст}} \delta_{\text{дин}} - 2 \delta_{\text{ст}} \cdot H = 0.$$

Отсюда можно определить динамическую деформацию:

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + 2H\delta_{\text{ст}}}.$$

Поскольку знак «минус» в этой формуле не соответствует физической стороне рассматриваемой задачи, следует сохранить знак «плюс».

Вынеся из-под корня и затем за скобки значение  $\delta_{\text{ст}}$  находим выражение для коэффициента динамичности:

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} \right),$$

т. е.

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}. \quad (9.9)$$

Если  $H=0$ , т. е. сила прикладывается внезапно, при падении с нулевой высоты то, согласно выражению, (минимальный) коэффициент динамичности при ударе равен двум ( $k_{\text{дин}}=2$ ).

Имея в виду, что  $H = \frac{v^2}{2g}$  ( $v$  – скорость падающего груза в начале удара), коэффициент динамичности можно представить формулой:

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{\text{ст}}}}. \quad (9.10)$$

$$\text{Усилие при ударе: } P_{\text{дин}} = P_{\text{ст}} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} \right).$$

Изложенная приближенная теория расчета на удар имеет определенные пределы применения. Они обусловлены скоро-

стью падающего груза к моменту удара и жесткостью конструкции, что выражается в формулах отношением  $\frac{2H}{\delta_{ст}}$ .

Так, если  $\frac{2H}{\delta_{ст}} < 100$ , то ошибка расчета не превышает 10 %.

Учет массы ударяемой конструкции расширяет пределы применения приближенной теории. Из анализа формул видно, что при равномерно распределенных напряжениях, одинаковых во всех сечениях стержня, величина динамических напряжений зависит не только от площади  $F$  его поперечного сечения, как это имеет место в случае действия статической нагрузки в статически определимых системах, но и от длины  $\ell$  и модуля упругости  $E$  материала стержня, т. е. можно сказать, что динамические напряжения в стержне при ударе зависят как от объема, так и от качества его материала. При этом чем больше объем упругого стержня, подвергающегося удару (чем больше «энергоемкость» стержня), тем меньше динамические напряжения, а чем больше модуль упругости материала стержня, тем динамические напряжения больше.

Если ударяемое тело имеет массу, которой нельзя пренебречь, и она распределена по длине элемента, то формула коэффициента динамичности имеет вид:

$$k_{дин} = 1 + \frac{2H}{\delta_{ст}(1+\alpha\cdot\beta)}, \quad (9.11)$$

где  $\beta$  – коэффициент, зависящий от соотношения масс

$$\text{ударяемого тела и груза, } \beta = \frac{m_{элем}}{m_{груза}},$$

$\alpha$  – коэффициент, учитывающий форму ударяемого элемента, т. е. распределение его массы. Например, для стержня постоянного по длине сечения (рисунок 9.2) –  $\alpha = \frac{1}{3}$ ;

для стержня переменного сечения по длине (рисунок 9.3) –

$$\alpha = \frac{A_1}{A_1+A_2 + \frac{A_1 \cdot A_2}{A_1 \cdot A_2}};$$

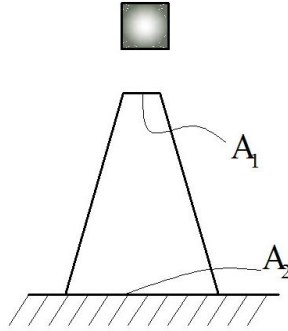


Рисунок 9.3 – Стержень переменного сечения

для консольной балки (рисунок 9.4) –  $\alpha = \frac{2+4\eta-\eta^2-6\eta^3+3\eta^4}{105\eta^2(1-\eta)^2}$ ;

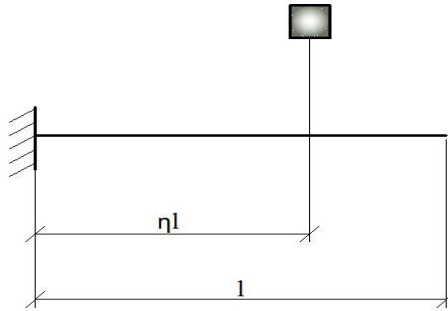


Рисунок 9.4 – Консольная балка

для балки на двух опорах (рисунок 9.5) –  $\alpha = \frac{105-105\eta+35\eta^2-2\eta^3}{140\eta^2}$ .

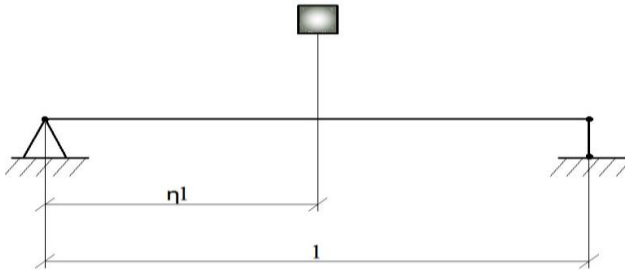


Рисунок 9.5 – Балка на двух опорах

До сих пор предполагалось, что стержни, подвергаемые действию удара, по всей длине имеют одинаковые сечения. Именно для таких стержней справедливо все сказанное о роли объема стержня при оценке динамических напряжений.

Картина оказывается несколько иной в стержнях, отдельные участки которых имеют различную площадь поперечного сечения. В этом случае (рисунок 9.6, а) наибольшее номинальное напряжений в стержне (без учета концентрации) будет в месте наименьшей площади ( $F_2$  в месте выточки). Зависит оно, как известно, от деформативности всего стержня, а не только его ослабленной части.

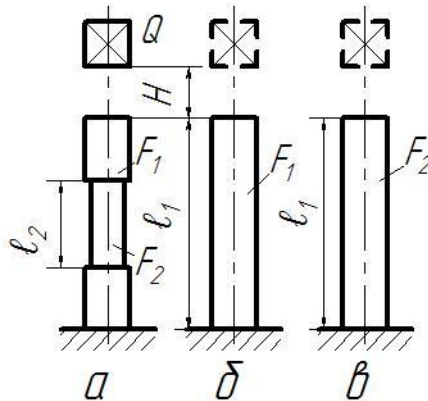


Рисунок 9.6 – Стержни с различной площадью поперечного сечения на отдельных участках

Понизить динамические напряжения в этом случае можно двумя путями: 1) увеличением поперечного сечения в месте выточки (рисунок 9.6, б); 2) уменьшением площади поперечного сечения утолщенной части стержня (рисунок 9.6, в) и, следовательно, повышением податливости всего стержня в целом, что приводит к снижению максимальных динамических напряжений в месте выточки. Если изготовить весь стержень постоянного диаметра, равного диаметру выточки ( $d_2$ ), то при этом существенно увеличится деформативность стержня, а, следовательно, уменьшится динамическое напря-

жение. Таким образом, снижение напряжений при ударе может быть достигнуто увеличением объема путем уничтожения выточки т. е. выравниванием напряжений по различным сечениям, или уменьшением объема материала за счет уменьшения площади утолщенной части, что приводит к увеличению деформативности.

Результаты проведенного анализа имеют существенное практическое значение. Прежде всего, этот анализ показывает, что характер сопротивления стержней удару качественно резко отличается от сопротивления их статической нагрузке. При статическом сжатии утолщение одной части стержня не вызывает изменения напряжений в сечениях другой части; при ударе оно повышает их. Местное уменьшение площади поперечного сечения на небольшой длине стержня резко повышает напряжение.

Для снижения напряжений надо стремиться главным образом к увеличению податливости стержня путем увеличения его длины, добавления буферной пружины, замены материала другим, с более низким модулем упругости, выравнивания площадей поперечного сечения с целью получить все участки стержня одинаковой минимальной площади сечения. Вот почему, конструируя стержни, работающие на удар, надо добиваться постоянной площади сечения по всей их длине. Местные утолщения допустимы лишь на небольших участках длины; местные выточки небольшой протяженности крайне нежелательны. Если при таких условиях сконструировать достаточно прочный стержень не удастся, необходимо удлинить его или равномерно увеличить его площадь. Условие прочности при ударе для пластичных материалов имеет вид:

$$(\sigma_{\text{дин}})_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{дин}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{дин}}}. \quad (9.12)$$

Величина коэффициента запаса при динамических нагрузках несколько выше, чем при статическом воздействии, и равна  $n_{\text{дин}} = 2$ .

### Расчет на удар при изгибе

Максимальные динамические напряжения при ударном изгибе могут быть определены по формуле:

$$\sigma_{\text{мах дин}} = \sigma_{\text{ст мах}} \cdot k_{\text{дин}},$$
$$k_{\text{дин}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}},$$

где  $H$  – высота падения груза, м;

$Q$  – вес падающего груза, Н;

$f_{\text{ст}}$  – статический прогиб в месте удара, зависящий от схемы нагружения и условий опирания.

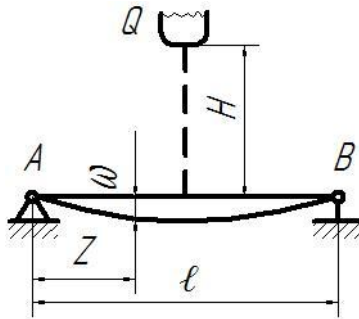


Рисунок 9.7 – Схема к расчету на удар при изгибе

В случае удара посередине балки с изгибной жесткостью  $EJ$  сечения (рисунок 9.7) получим  $f_{\text{ст}} = \frac{Q\ell^3}{48EJ}$ ;  $\sigma_{\text{ст мах}} = \frac{M}{W} = \frac{Q\ell}{4W}$ , а максимальные динамические напряжения в этом случае будут:

$$\sigma_{\text{мах дин}} = \sigma_{\text{ст мах}} \cdot k_{\text{дин}} = \frac{Q\ell}{4W} \cdot \frac{1}{1 + \frac{96HEJ}{Q\ell^3}}.$$

### 9.3 Механические свойства материалов при ударе

Для проверки способности материала сопротивляться ударным нагрузкам применяют особый вид испытаний ударным изгибом – определение ударной вязкости надрезанных

образцов. Эти испытания проводят на маятниковых копрах (рисунок 9.8). На рисунке 9.9 показаны применяемый при испытании образец и направление удара бойка маятника. Разность высот положения маятника до и после удара позволяет вычислить работу, израсходованную на разрушение образца.

Ударной вязкостью материала называется величина работы разрушения образца, отнесенная к площади его поперечного сечения в месте надреза.

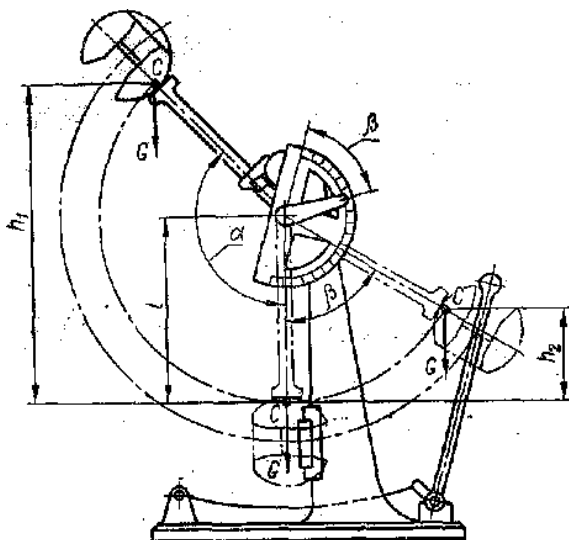


Рисунок 9.8 – Маятниковый копер

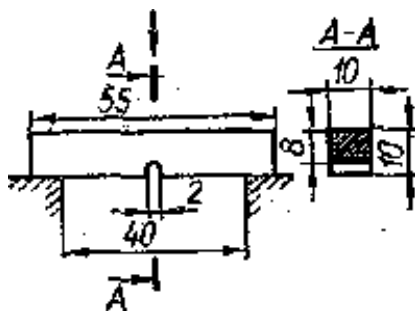


Рисунок 9.9 – Образец для испытаний с указанием направления удара маятника

Хотя данные об ударной вязкости не могут быть использованы при расчете на прочность, но они позволяют оценить особое качество металла – его склонность к хрупкости при динамических нагрузках в условиях сложного напряженного состояния в области надреза и решить вопрос о применимости того или иного материала для данных условий работы. Именно в таких условиях работают многие детали машин, имеющие отверстия, канавки для шпонок, разные входящие углы и т. п. Низкая ударная вязкость служит основанием для браковки материала. Стали, применяемые для изготовления деталей, работающих при динамических нагрузках, должны иметь ударную вязкость  $a_k$  не менее 8 – 10 кгс·м/см<sup>2</sup>. Ударная вязкость одной и той же стали зависит от ее структуры, причем зависимость эту при статических испытаниях обнаружить невозможно. Стали, имеющие почти одинаковые пластические свойства при статических испытаниях, могут сильно отличаться по ударной вязкости.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое динамическое воздействие?
2. Выражение для определения коэффициента динамичности.
3. Условие прочности при ударе для пластичных материалов.
4. Динамическое напряжение в случае расчета на удар при изгибе.
5. Ударная вязкость материала и что она характеризует.



## 10 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

### 10.1 Понятие об усталостной прочности

Циклические нагрузки – это нагрузки, меняющиеся во времени.

Явление потери прочности при циклических нагрузках называется усталостью.

Усталость – процесс постепенного накопления поврежденный материала под действием переменных напряжений, приводящий к образованию трещин и разрушению.

Способность материала элемента конструкции сопротивляться усталостному разрушению, называется выносливостью или усталостной прочностью.

Предел выносливости – наибольшее напряжение цикла, при котором материал не разрушаясь может выдержать заданное число циклов, называемое базой  $N_G$ .

–  $N_G = 10^7$  циклов – черные металлы;

–  $N_G = 10^8$  циклов – цветные металлы, легированные сплавы.

Долговечность – число циклов изменения напряжений до начала разрушения.

### 10.2 Характеристики циклического изменения напряжений

Переменные во времени напряжения в деталях машин могут быть получены самыми разными способами.

Рассмотрим, как изменяются нормальные напряжения в точке А консольного вращающего вала (рисунок 10.1), нагруженного силой  $P$  неизменной по величине и направлению.

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (10.1)$$

$$y = \frac{d}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t, \quad (10.2)$$

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t = \sigma_a \cdot \sin \omega t. \quad (10.3)$$

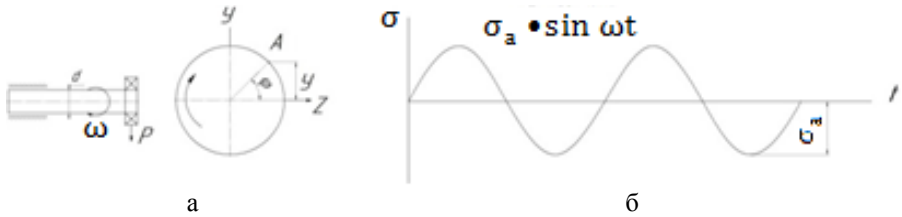


Рисунок 10.1 – Схема вала, нагруженного силой P (а), изменение напряжения по времени (б)

При нагружении вала дополнительной осевой силой P (рисунок 10.2), напряжение в точке A будет равно:

$$\sigma_A = \frac{P_1}{F} + \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \omega t, \quad (10.4)$$

$$\sigma_A = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin \omega t. \quad (10.5)$$

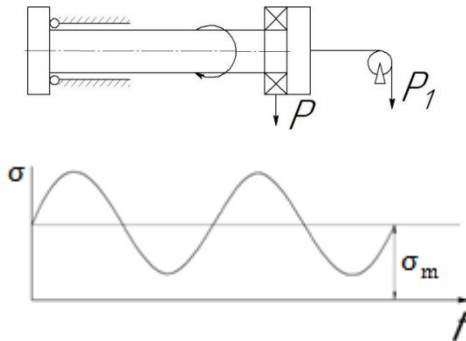


Рисунок 10.2 – Изменение напряжения, при нагружении вала осевой силой

Циклическим напряжением называется совокупность всех последовательных значений напряжений за один период их изменения.

Опытами установлено, что усталостная прочность определяется только наибольшим и наименьшим напряжениями цикла и не зависит от закона изменения внутри цикла (рисунок 10.3).

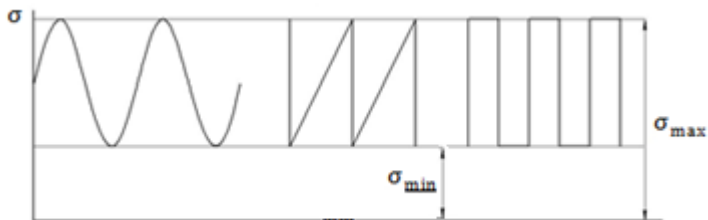


Рисунок 10.3 – Равновесные циклы

Циклы напряжений характеризуются следующими параметрами:

– амплитуда цикла –  $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$ ;

– постоянное или среднее напряжение цикла –  $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$ ;

– размах цикла – удвоенная величина амплитуды цикла;

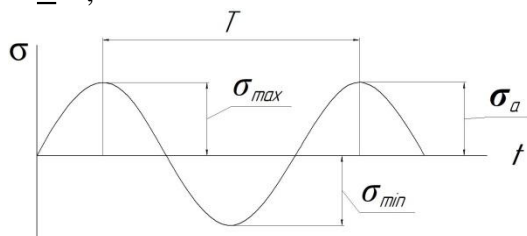
– коэффициент асимметрии цикла (необходимо учитывать знак напряжений) –  $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ ;

– характеристика цикла –  $\rho = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}$ .

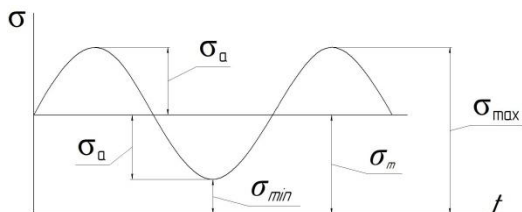
Циклы, имеющие одинаковые  $R$  называются подобными.

Различают следующие виды циклов:

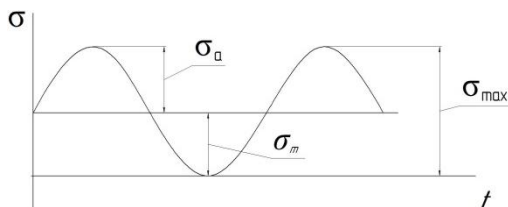
а) симметричный цикл  $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \sigma_a$ ,  $\sigma_m = 0$ ,  $R = -1$ ,  $\rho = \pm\infty$ ;



б) асимметричный цикл  $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$ ,  $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$ ,  $0 < R > 1$ ,  $0 < \rho > 1$ ;



в) пульсирующий цикл  $\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2}$ ,  $\sigma_{min} = 0$ ,  $R = 0$ ,  $\rho = +1$ .



### 10.3 Механика усталостного разрушения

Усталостный процесс связан с неравномерной упругопластичной деформацией поликристаллических структур. Поэтому при изучении физической природы процесса усталостного разрушения металлы необходимо рассматривать не как сплошную, однородную среду, а как микро или макроскопически неоднородную. Конструкционные стали и другие сплавы представляют мелкокристаллическую структуру, кристаллы которой имеют произвольную ориентировку и обладают анизотропией. При деформировании напряженные состояния для отдельных кристаллов могут существенно отличаться. Поэтому уже на ранних стадиях деформирования возникают пластические деформации отдельных кристаллов.

Циклическое изменение напряжений приводит к накоплению пластических деформаций, что вызывает упрочнение (наклеп) кристаллов. При определенном уровне напряжения способность кристаллов к дальнейшему упрочнению исчерпывается. Нарушается их прочность, образуется микротрещина по одной из плоскостей скольжения. По достижении

накопления повреждений критического значения возникает макротрещина и процесс дальнейшего циклического разрушения определяется ее развитием. Окончательное хрупкое разрушение произойдет тогда, когда трещина достигнет критической величины.

Трещина вызывает уже в упругой стадии резкую неравномерность: переход от линейного к плоскому и объемному напряженному состоянию. У дна трещины возникает объемное напряженное состояние (рисунок 10.4).

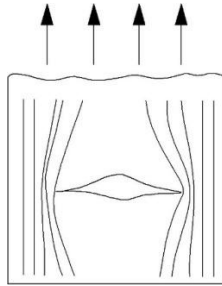


Рисунок 10.4 – Развитие трещины при циклическом изменении напряжений

Силовой поток, перерезанный трещиной как бы обтекает ее и вызывает концентрацию напряжений на концах трещины. Образование трещины связано с касательными ( $\tau$ ), а ее развитие с нормальными ( $\sigma$ ) напряжениями.

Трещины усталости располагаются, как правило, по направлениям, перпендикулярным к наибольшим нормальным напряжениям (рисунок 10.5).

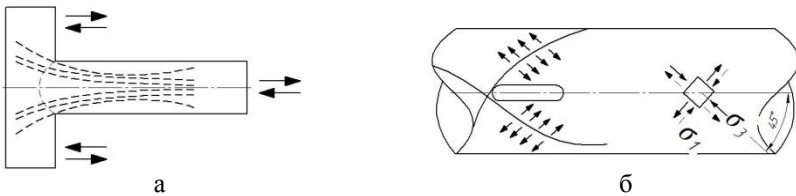


Рисунок 10.5 – Усталостное разрушение:  
а – болта; б – шейки коленчатого вала

## *Прорастание усталостных трещин в поле траекторий нормальных напряжений*

Представление о процессе развития трещины в зависимости от числа циклов перемены напряжений ( $N$ ) дает график (рисунок 10.6).

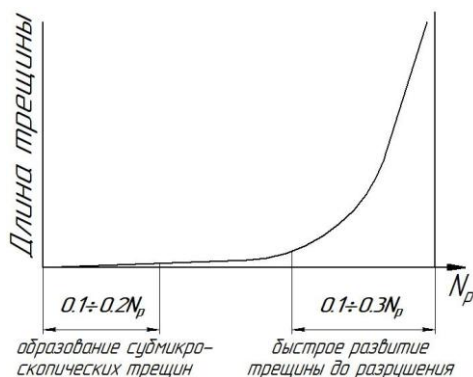


Рисунок 10.6 – График зависимости длины трещины от числа циклов перемены напряжений

Макроскопическая поверхность усталостного излома имеет две основные зоны: I – зона, образовавшаяся от циклического распространения трещины и имеющая мелкозернистый сглаженный характер; II – зона, возникшая при быстро протекающем окончательном разрушении – «долоте», имеющая крупнозернистый характер хрупкого излома.

Форма и соотношение площадей, занятых усталостной трещиной и окончательным изломом, зависит от формы сечения элемента, способа его циклического нагружения, наличия концентрации напряжений, а также от влияния среды.

### *Обнаружение трещин в производственных условиях*

Деталь погружают на некоторое время в горячее масло, затем промывается ацетоном и покрывается слоем сухого ме-

ла или талька. Масло, проникшее в трещину, обнаруживает ее в виде темной полосы на белой поверхности.

Известен магнитный контроль. Деталь покрывается тонким слоем масла со взвешенными в нем железными опилками и помещается в магнитное поле. Опилки концентрируются в зоне трещины. Кроме того, известны акустический и ультразвуковой способы.

На практике так же применяют следующие методы:

- магнитный;
- флуоресцентный;
- травления детали кислотой;
- смачивания поверхности детали керосином с последующей меловой обмазкой;
- гидравлический;
- пневматический;
- нагрева детали;
- проверки электрической прочности детали.

Выбор того или иного метода дефектов обуславливается конфигурацией и материалом детали, а также вероятным расположением дефекта.

#### **10.4 Кривая усталости. Предел выносливости**

Опыты показывают, что усталостная трещина возникает только в том случае, если циклические напряжения превышают определенную границу – предел выносливости.

Пределом выносливости называется наибольшее напряжение цикла, при котором материал не разрушается выдержав заданное число циклов напряжения ( $N_6$ ), называемое базой. Обозначается  $\sigma_R$ ,  $\tau_R$ . Это основная механическая характеристика выносливости материала. Определяется только экспериментально при симметричном цикле, как наиболее опасном для материала (имеет самое низкое значение). Для испытаний используют машины, в которых образец круглого сечения нагружается или как консоль – силой на конце или как шар-

нирно опертая балка – симметрично расположенными равными силами. При каждом обороте образца будут возникать напряжения растяжения и сжатия.

Испытания ведут в такой последовательности. Берут 8-10 образцов диаметром 7-10 мм с полированной поверхностью. Первый образец нагружают до значений  $\sigma_1$ . Выдержав  $N_1$  циклов он разрушается. По координатам  $\sigma_1$  и  $N_1$  на диаграмме зависимости « $\sigma - N$ » (рисунок 10.7) наносится точка 1. Затем испытывают второй образец при меньшем напряжении  $\sigma_2$ . Естественно, что он разрушается после большего числа циклов  $N_2$ . Получают точку 2 на диаграмме.

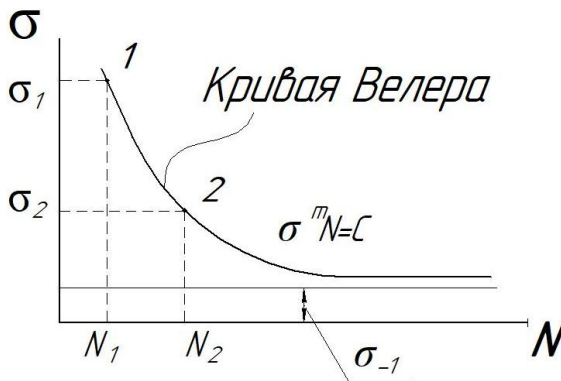


Рисунок 10.7 – Диаграмма зависимости « $\sigma - N$ »

Наконец, для какого-то из образцов мы не получим излома даже при очень большом числе циклов. Это напряжение будет близким к  $\sigma_R$ . Кривая характерна тем, что, начиная с некоторого напряжения идет практически горизонтально.

Как показывает опыт, образец из углеродистой стали, выдержав  $10^7$  циклов, может выдержать их неограниченное число. Поэтому  $N$ равное  $10^7$  ( $N = 10^7$ ) есть база испытаний. Для аналитического описания зависимости  $\sigma$  от  $N$  чаще всего применяют выражение степенного типа:

$$\sigma^m \cdot N = C, \quad (10.6)$$



где  $m$  – число измерений;  
 $C$  – постоянная величина.

Параметры  $m$  и  $C$  различны для левой и правой части. Часто кривую строят в логарифмических координатах (рисунок 10.8). В итоге получаем уравнение ниспадающей ветви:

$$m \cdot \log \sigma + \log N = C. \quad (10.7)$$

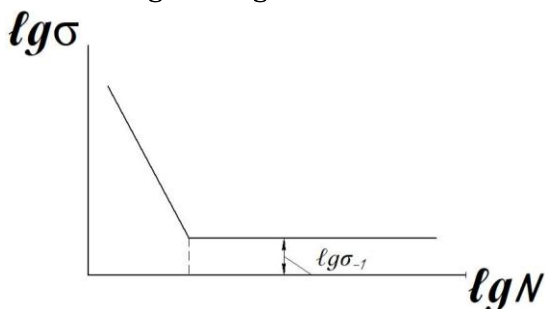


Рисунок 10.8 – Диаграмма зависимости « $\sigma - N$ » в логарифмических координатах

### 10.5 Практические меры борьбы с усталостью металла

1. Применение более однородных металлов с мелкозернистой структурой.
2. Придание детали таких очертаний, при которых была бы исключена концентрация напряжений (рисунок 10.9).

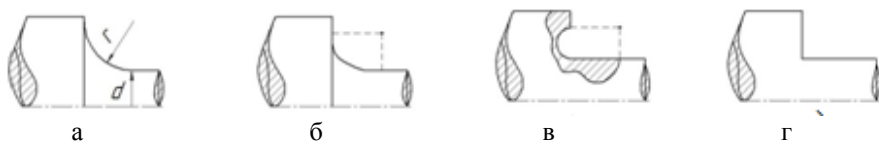


Рисунок 10.9 – Варианты очертаний деталей:

- а – галтель кругового профиля; б – галтель эллиптического профиля;  
 в – галтель эллиптического профиля с поднутрением;  
 г – переход под прямым углом

Изменение кривизны галтели приводит к уменьшению  $K_\sigma$  ( $K_T$ ) на 15–20 %.

При наличии деталей, установленных напрессовкой, концентрация напряжений зависит от жесткости около мест сопряжения и величины натяга.

Например, при выполнении кольцевой канавки (рисунок 10.10) вокруг места посадки детали с натягом,  $K_\sigma$  снижается в 1,5 раза.

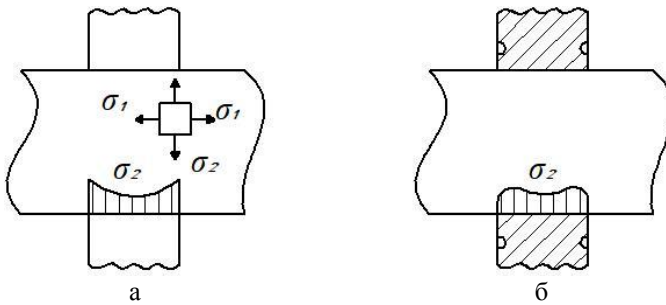


Рисунок 10.10 – Пример изменения концентрации напряжений в напрессованных деталях:

а – без дополнительных элементов; б – разгрузка зоны концентрации напряжений с помощью выполнения кольцевой канавки

Ослабление концентрации напряжений около поперечных круговых отверстий при растяжении происходит при удалении материала и понижении жесткости зон около них (рисунок 10.11, а).

Аналогичный эффект достигается введением в зоны концентрации напряжений материала с более низким модулем упругости. Запрессовка медного кольца в стальную пластину приводит к уменьшению касательных напряжений в 1,5 раза,  $\alpha_\sigma = 3$  (рисунок 10.11, б).

3. Тщательная обработка поверхности детали, вплоть до полировки.

4. Применение специальных технологических методов, повышающих предел выносливости – цементирование, азотирование, наклепка роликами, обдувка дробью и т.д.

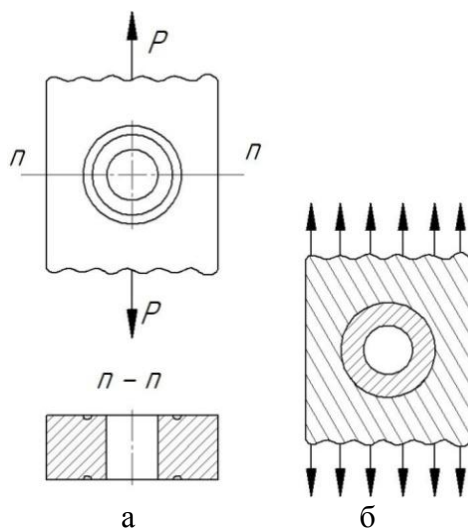


Рисунок 10.11 – Пример сечений круговых отверстий, в которых выполнено ослабление концентрации напряжений:  
 а – ослабление концентрации напряжений удалением материала;  
 б – ослабление концентрации напряжений введением в зоны концентрации напряжений материала с более низким модулем упругости

Чем лучше металл, чем выше его предел прочности ( $\sigma_B$ ), тем более тщательной обработки он требует.

### Контрольные вопросы

1. Дать понятие: циклические нагрузки, усталости, предел выносливости.
2. Циклические напряжения.
3. Параметры, характеризующие циклы напряжений.
4. Определение критической величины трещины.
5. Практические меры борьбы с усталостью металла.

## 11 РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В технике широко применяются элементы конструкции, которые с точки зрения их расчета на прочность могут быть отнесены к оболочкам (цистерны, цилиндры и гильзы двигателей, воздушные и газовые баллоны, купола в зданиях).

Оболочкой называется тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других.

К тонкостенным относят оболочки, у которых толщина стенок меньше одной двадцатой наименьшего радиуса ( $\frac{\delta}{R} \leq \frac{1}{20}$ ).

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной.

В сопротивлении материалов рассматривают расчет оболочек, срединная поверхность которых является поверхностью вращения, а нагрузка симметрична относительно оси оболочки. Для упрощения расчетов тонкостенных симметричных сосудов полагают, что нормальные напряжения по толщине оболочки распределены равномерно и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Элемент, выделенный из оболочки, находится в условиях двухосного напряженного состояния.

### 11.1 Напряжения в симметричных оболочках по безмоментной теории

Двумя парами меридиальных и нормальных конических сечений выделим из оболочки (рисунок 11.1) элемент ( $dS_1 \times dS_2$ ) (рисунок 11.2). По граням элемента действуют напряжения:  $\sigma_m$  – продольное (меридиональное) и  $\sigma_t$  – поперечное (широтное, окружное). Касательные напряжения на этих гранях отсутствуют в силу симметрии оболочки и нагрузки.

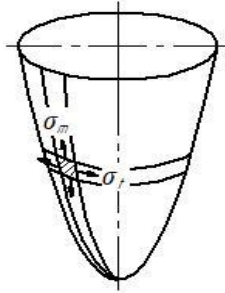


Рисунок 11.1 – Рассматриваемая оболочка

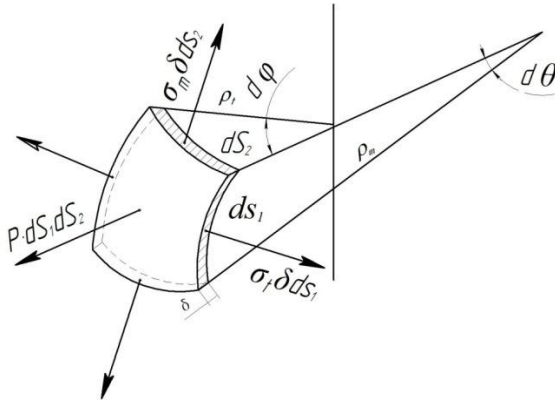


Рисунок 11.2 – Вырезанный элемент

В сечениях выделенного элемента действуют погонные усилия:

$$\sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \text{ и } \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1.$$

К внутренней стенке элемента приложена нагрузка в виде давления, перпендикулярного к поверхности элемента (рисунок 11.3). Проектируя все силы, на нормаль к поверхности элемента, получим:

$$p \cdot dS_1 \cdot dS_2 - 2 \cdot \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - 2 \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0, \quad (11.1)$$

В следствии малости углов  $d\varphi$  и  $d\theta$  имеем:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} = \frac{dS_2}{2 \cdot \rho_t} \quad \text{и} \quad \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} = \frac{dS_1}{2 \cdot \rho_m}.$$

Подставляем полученные выражения в уравнение (11.1):

$$p \cdot dS_1 \cdot dS_2 - \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_1 \cdot \frac{dS_2}{\rho_t} - \sigma_m \cdot \delta \cdot dS_2 \cdot \frac{dS_1}{\rho_m} = 0,$$

или

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}. \quad (11.2)$$

Уравнение (11.2) носит название уравнение Лапласа.

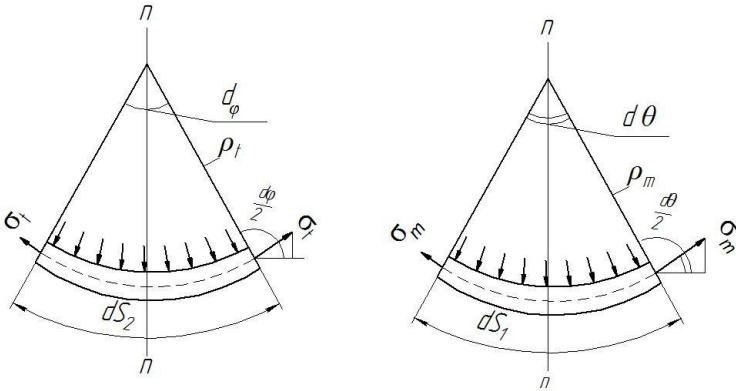


Рисунок 11.3 – Схема распределения нагрузки по стенкам элемента

Для определения двух неизвестных необходимо еще одно уравнение – уравнение равновесия зоны (уравнение зоны).

Для оболочки можно составить еще одно уравнение равновесия, для определения  $\sigma_m$  (в тех случаях, когда  $\rho_t \neq \infty$ ). Напишем уравнение равновесия всех сил, действующих на часть оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рисунок 11.4). Вертикально вниз действует сила давления

(равная  $p \cdot \pi \cdot r^2$ ), вес жидкости ( $Q_{ж}$ ), вес части резервуара ( $Q_p$ ). Тогда условие равновесия имеет вид:

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha - p \cdot \pi \cdot r^2 - Q_{ж} - Q_p = 0.$$

Откуда получаем уравнение равновесия зоны (или уравнение зоны):

$$\sigma_m = \frac{p \cdot r}{2 \cdot \delta \cdot \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_p}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha}. \quad (11.3)$$

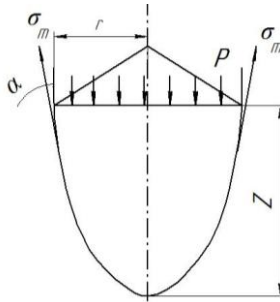


Рисунок 11.4 – Оболочка, отсеченная коническим нормальным сечением

Так как напряженное состояние является двухосным, для расчета на прочность необходимо использовать одну из теорий прочности.

*Примеры определения напряжений в тонкостенных сосудах*

1. Сферический сосуд под действием внутреннего давления  $p$  (рисунок 11.5).

По условию полной симметрии:  $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$ ,  $\rho_t = \rho_m = R$ . Подставляем данные условия в выражение (11.2) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} &= \frac{p}{\delta}, \\ \frac{2 \cdot \sigma}{R} &= \frac{p}{\delta}, \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{p \cdot R}{2 \cdot \delta}, \text{ или } \sigma = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta}$$

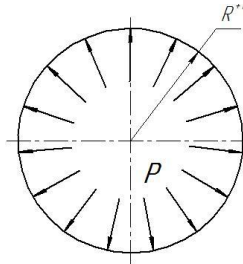


Рисунок 11.5 – Сферический сосуд под действием внутреннего давления  $p$

Условие прочности по III и IV теориям прочности приводятся к виду:

$$\sigma = \sigma_r = \sigma_m = \sigma_t = \sigma_{\text{Э III}} = \sigma_{\text{Э IV}} = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta} \leq \sigma . \quad (11.4)$$

2. Цилиндрический сосуд, находящийся под действием внутреннего давления (рисунок 11.6).

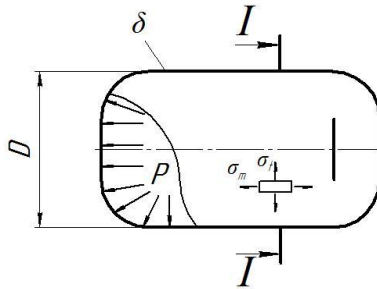


Рисунок 11.6 – Цилиндрический сосуд, находящийся под действием внутреннего давления

Согласно условиям  $\rho_t = R$ ,  $\rho_m = \infty$ . После подстановки в выражение (11.2) получим уравнения для напряжения в продольном направлении:



$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{\delta} \text{ или } \sigma_t = \frac{p \cdot R}{\delta} \text{ или } \sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot \delta}.$$

Для определения  $\sigma_m$  (рисунок 11.7) составим условие равновесия части сосуда в виде суммы проекций сил на ось сосуда. Получим уравнения для определения напряжений в поперечном направлении:

$$p \cdot \pi \cdot R^2 = \sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \delta, \text{ или } \sigma_m = \frac{p \cdot R}{2 \cdot \delta}, \text{ или } \sigma_m = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta}.$$

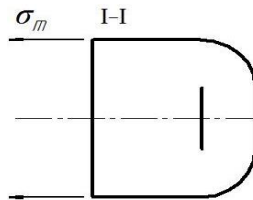


Рисунок 11.7 – Сечение цилиндрического сосуда плоскостью I-I

Напряжения в продольных сечениях цилиндрического сосуда вдвое больше, чем напряжение в поперечных сечениях. При одинаковых диаметрах и давлении напряжения в цилиндрическом сосуде вдвое больше, чем в сферическом.

В рассмотренных примерах имеем двухосное напряженное состояние ( $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_m$ ,  $\sigma_3 = 0$ ).

Условие прочности имеет вид:

$$- \text{ по III теории прочности } \sigma_{\text{ЭIII}} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot \delta} \leq \sigma_p,$$

$$- \text{ по IV теории прочности } \sigma_{\text{ЭIV}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{p \cdot D}{\delta} \leq \sigma_p.$$

## 11.2 Распорные кольца в оболочках

Если сопряжение отдельных частей резервуара осуществляется плавно, то меридиональные напряжения  $\sigma_m$  будут одинаковыми для обеих частей. Если же в месте перехода от одной формы оболочки к другой имеется перелом, то меридио-

нальные напряжения в этом месте для обеих частей оболочки различны (рисунок 11.8).

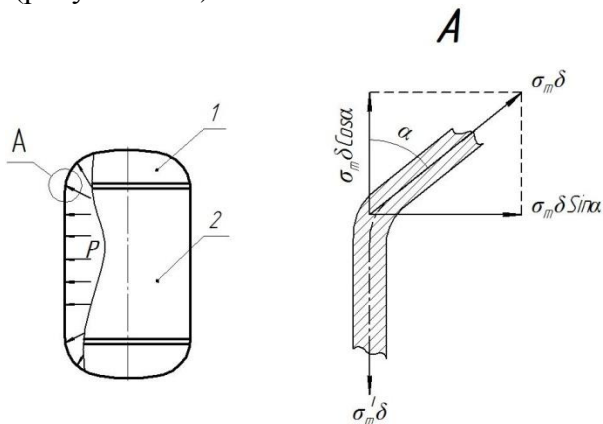


Рисунок 11.8 – Резервуар с указанием усилий в месте сопряжения отдельных частей:

1 – крышка; 2 – цилиндрическая часть

Вертикальная составляющая усилия в крышке –  $\sigma_m \cdot \delta \cdot \cos \alpha$  уравнивается усилием в цилиндрической части сосуда –  $\sigma_m' \cdot \delta$ . Горизонтальная составляющая усилия остается не уравновешенной и вызывает изгиб оболочки. Для предотвращения изгиба оболочки ставятся кольца жесткости.

Кольцо жесткости оказывается загруженным равномерно распределенной радиальной нагрузкой (рисунок 11.9):

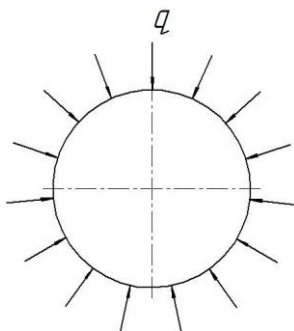


Рисунок 11.9 – Распределение нагрузки по кольцу жесткости

$$q = \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha, \quad (11.5)$$

где  $q$  – равномерно распределенная радиальная нагрузка, кг/см.

В поперечных сечениях кольца возникает продольная сила  $N$  (рисунок 11.10).

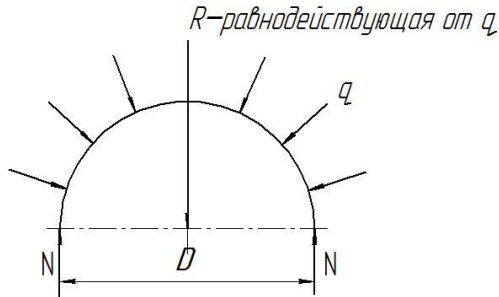


Рисунок 11.10 – Продольная сила, возникающая в поперечном сечении кольца

Если равнодействующая распределенной радиальной нагрузки равна:

$$R = q \cdot D, \quad (11.6)$$

то продольная сила равна:

$$N = \frac{R}{2} = \frac{q \cdot D}{2}. \quad (11.7)$$

или

$$N = \frac{D}{2} \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha. \quad (11.8)$$

Условие прочности в данном случае имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{D}{2F} \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha \leq \sigma, \quad (11.9)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения кольца,  $\text{м}^2$ .

Выражение (11.9) представляет собой проверочный расчет.

При проектировочном расчете может быть найдена площадь поперечного сечения кольца:

$$F \geq \frac{D \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \sigma}, \quad (11.10)$$

но согласно выражению (4)

$$\sigma_m = \frac{p \cdot D}{4 \cdot \delta},$$

тогда

$$F \geq \frac{p \cdot D^2 \cdot \sin \alpha}{8 \cdot \sigma}.$$

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется оболочкой?
2. Уравнение равновесия зоны.
3. Определение напряжений в тонкостенных сосудах.
4. Для чего необходимы кольца жесткости?
5. Условие прочности при рассмотрении колец жесткости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии изложены теоретические основы расчета силовых факторов, возникающих в сечении стержня при различных видах его нагружения.

Рассмотрены основы расчета по определению продольной силы в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении-сжатии; усилий, возникающих в стержнях статически неопределимых систем; внутренних силовых факторов при срезе, сдвиге и кручении; поперечной силы и изгибающего момента при прямом поперечном изгибе; сжатых стержней на устойчивости выносливость; на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени.

Каждый раздел содержит контрольные вопросы, которые помогут обучающемуся понять степень усвоения данного материала. Данные вопросы могут быть использованы для контроля знаний при аттестации обучающихся.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян, К. А. Динамика ракет [Текст] / К. А. Абгарян, И. М. Рапопорт. – М. : Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. Абрамович, С. Ф. Динамическая прочность судового оборудования [Текст] / С. Ф. Абрамович, Ю. С. Крючков. – Л. : Судостроение, 1967. – 512 с.
3. Авдонин, А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций [Текст] / А. С. Авдонин. – М. : Машиностроение, 1969. – 402 с.
4. Александров, А. В. Соппротивление материалов [Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 1995. – 560 с.
5. Ананьев, И. В. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование [Текст] / И. В. Ананьев, П. Г. Тимофеев. – М. : Машиностроение, 1965. – 526 с.
6. Ананьев, И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем [Текст] / И. В. Ананьев. – Гостехиздат, 1946. – 223 с.
7. Арсенин, В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции [Текст] / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1966. – 368 с.
8. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков. – 3-е изд. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
9. Балабух, Л. И. Строительная механика ракет [Текст] / Л. И. Балабух, Н. А. Алфутов, В. И. Усюкин. – М. : Высшая школа, 1984. – 391 с.
10. Бельский З. А. Конструкция летательных аппаратов [Текст] / З. А. Бельский, И. П. Власов, В. Н. Зайцев; под ред. С. Н. Кана. – М. : Оборонгиз, 1963. – 709 с.
11. Беляев, Н. М. Соппротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.

12. Биргер, И. А. Прочность. Устойчивость. Колебания. В 3 т. Т. 3 [Текст] / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.

13. Бредихин, Б. А. Сопротивление материалов [Текст] / Б. А. Бредихин. – 2-е изд., испр. и доп. – Краснодар : КубГАУ, 2006. – 206 с.

14. Булгаков, Б. В. Колебания [Текст] / Б. В. Булгаков. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 890 с.

15. Бычков, Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций [Текст] / Д. В. Бычков. – М. : Госстройиздат, 1962. – 475 с.

16. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, П. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.

17. Гевондян, Т. А. Приборы для измерения и регистрации колебаний [Текст] / Т. А. Гевондян, Л. Т. Киселев. – М. : Машгиз, 1962. – 467 с.

18. Дарков, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 4-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1975. – 654 с.

19. Кочетов, В. Т. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособие / В. Т. Кочетов, А. Д. Павленко, М. В. Кочетов. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 544 с.

20. Маделунг, Э. Математический аппарат физики [Текст] / Э. Маделунг. – М. : Физматгиз, 1961. – 620 с.

21. Пановко, Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем [Текст] / Я. Г. Пановко. – М. : Физматгиз, 1960. – 193 с.

22. Пархиловский, И. Г. Автомобильные рессоры [Текст] / И. Г. Пархиловский. – М. : Машиностроение, 1978. – 232 с.

23. Писаренко, Г. С. Колебание упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале [Текст] : монография / Писа-

ренко Георгий Степанович. – Киев : Наукова думка, 1970. – 380 с.

24. Серенсен, С. В. Динамика машин для испытаний на усталость [Текст] / С. В. Серенсен. – М. : Машиностроение, 1967. – 460 с.

25. Снитко, Н. К. Строительная механика [Текст] / Н. К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1980. – 431 с.

26. Сопротивление материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, В. А. Агаев, А. Л. Квитка [и др.]. – 5-е изд, перераб. и доп. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.

27. Сорокин, Е. С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях [Текст] / Е. С. Сорокин // Научное сообщение ЦНИПС. – М. : Госстройиздат, 1954. – Вып. 15. – С. 76.

28. Теории подобия и размерностей. Моделирование [Текст] / П. М. Алабужев, В. Б. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б. А. Шеховцов. – М. : Высшая школа, 1968. – 208 с.

29. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 514 с.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ.....  | 3  |
| 1 ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ.....   | 4  |
| 1.1 Основные принципы и гипотезы науки<br>о сопротивлении материалов.....                            | 4  |
| 1.2 Внешние и внутренние силы.....   | 7  |
| 1.3 Понятие о напряжениях и деформациях.....   | 10 |
| 2 ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....   | 13 |
| 2.1. Усилия в поперечном сечении стержня.....  | 13 |
| 2.2 Напряжения и деформации при растяжении<br>(сжатии).....  | 13 |
| 2.3 Потенциальная энергия упругой деформации.....  | 16 |
| 2.4 Механические характеристики материалов.....  | 16 |
| 2.5 Методика расчета статически неопределимых<br>систем .....  | 21 |
| 3 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО<br>И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ.....                                    | 24 |
| 3.1 Напряженное состояние в точке тела.....  | 24 |
| 3.2 Виды напряженного состояния.....   | 29 |
| 3.3 Деформации при сложном напряженном<br>состоянии. Связь между напряжениями<br>и деформациями..... | 34 |
| 3.4 Теории прочности.....  | 36 |
| 4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ<br>ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....  | 42 |
| 4.1 Основные понятия и определения.....  | 42 |
| 4.2 Зависимость между моментами инерции<br>относительно параллельных осей.....                       | 45 |
| 4.3 Моменты инерции простейших фигур.....  | 46 |
| 4.4 Вычисление моментов инерции сложных фигур..  | 51 |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.5 | Изменение моментов инерции при повороте осей координат.....                                  | 52  |
| 4.6 | Главные оси и главные моменты инерции.....   | 53  |
| 4.7 | Моменты сопротивления площади сечения.....   | 55  |
| 5   | КРУЧЕНИЕ.....  | 56  |
| 5.1 | Общие понятия.....   | 56  |
| 5.2 | Напряжения при кручении брусьев сплошного и кольцевого сечений. Закон Гука при кручении..... | 56  |
| 5.3 | Расчет брусьев на прочность и жесткость при кручении.....                                    | 59  |
| 6   | ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ.....  | 62  |
| 6.1 | Понятие о деформации изгиба. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.....                 | 62  |
| 6.2 | Нормальные напряжения при изгибе.....  | 67  |
| 6.3 | Касательные напряжения при изгибе.....   | 74  |
| 6.4 | Определение перемещений при изгибе.....  | 78  |
| 6.5 | Расчет статически неопределимых балок и плоских рам методом сил.....                         | 83  |
| 7   | СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....   | 91  |
| 7.1 | Общие положения.....   | 91  |
| 7.2 | Расчет балки, подверженной косому или пространственному изгибу.....                          | 94  |
| 7.3 | Определение внутренних усилий при косом изгибе.....  | 94  |
| 7.4 | Определение напряжений при косом изгибе.....   | 96  |
| 7.5 | Определение перемещений при косом изгибе.....  | 102 |
| 7.6 | Внецентренное сжатие или растяжение.....   | 104 |
| 7.7 | Ядро сечения при внецентренном сжатии.....   | 111 |
| 7.8 | Совместное действие изгиба с кручением.....  | 114 |
| 8   | УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....  | 119 |

|  |     |
|--|-----|
| 8.1 Общие положения.....   | 119 |
| 8.2 Основное условие устойчивости.....   | 125 |
| 9 ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ.....   | 132 |
| 9.1 Ускоренное движение.....   | 132 |
| 9.2 Расчет на удар.....  | 134 |
| 9.3 Механические свойства материалов при ударе....                                     | 142 |
| 10 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ<br>НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ<br>ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ..... | 145 |
| 10.1 Понятие об усталостной прочности.....   | 145 |
| 10.2 Характеристики циклического изменения<br>напряжений.....                          | 145 |
| 10.3 Механика усталостного разрушения.....   | 148 |
| 10.4 Кривая усталости. Предел выносливости.....  | 151 |
| 10.5 Практические меры борьбы с усталостью<br>металла.....                             | 153 |
| 11 РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК.....   | 156 |
| 11.1 Напряжения в симметричных оболочках<br>по безмоментной теории.....                | 156 |
| 11.2 Распорные кольца в оболочках.....   | 161 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....  | 165 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....   | 166 |

Учебное издание

**Дробот** Виктор Александрович,  
**Гумбаров** Анатолий Дмитриевич,  
**Кремянский** Франтишек Владиславович и др.

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

*Учебное пособие*

В авторской редакции

Подписано в печать 00.00.2020. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Усл. печ. л. – 10,4. Уч.-изд. л. – 8,1.

Тираж 100 экз. Заказ № .

Типография Кубанского государственного  
аграрного университета.

350044, г. Краснодар, ул. Калинина, 13