В.Г. Григулецкий, В.Н. Гетман, В.Д. Гунько

РУКОВОДСТВО
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ №1 И №2 ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов-заочников 1 курсов

инженерных факультетов КГАУ

Краснодар

В.Г Григулецкий, В.Н. Гетман, В.Д. Гунько

РУКОВОДСТВО

К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ №1 И №2 ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов-заочников 1 курсов инженерных факультетов КубГАУ

Краснодар 2014

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В соответствии с учебным планом студенты-заочники инженерно-технических специальностей сельскохозяйственных вузов выполняют по курсу высшей математики четыре контрольных работы. На внешней обложке тетради следует указать специальность, курс, группу, фамилию, имя, отчество, полный учебный шифр и дату отправления работы в институт.

Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными и аккуратными. Для замечаний преподавателя нужно на каждой странице оставлять поля.

Вариант контрольной работы определяет преподаватель.

Перед выполнением каждой контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы рекомендуемой литературы и может воспользоваться решением типовых примеров, содержащихся в настоящем руководстве.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Определители и их свойства

Определение 1. Определителем второго порядка называется число, записанное в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ - элементы определителя.

Каждый элемент определителя имеет двойной индекс. Первый нумерует строку, второй - столбец, на пересечении которых находится этот элемент.

Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 7$$

Определение 2. Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a$$

Например:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Определение 3. Минором M_{ik} элемента a_{ik} определителя Δ называется определитель порядка на единицу меньше, который получается из данного определителя, если вычеркнуть ту строчку и тот столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ik} (i-я строка и k-й столбец).

Например:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik} определителя Δ называется число $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$. Т. к. сомножитель $(-1)^{i+k}$ равен либо +1, когда $i+k$ - четное число, либо -1, когда $i+k$ - нечетное число, то, следовательно, алгебраическое дополнение либо совпадает с минором, либо отличается от последнего только знаком.

Например: $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -1$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = -1$$

Укажем основные свойства определителей, позволяющие упрощать их вычисление.

Свойство 1. Определитель не изменится, если заменить все его строки соответствующими столбцами.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Свойство 2. Определитель не изменится если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы параллельной строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

С помощью этого свойства можно добиться того, что любая строка (столбец) определителя Δ будет состоять из одних нулей, за исключением одного элемента.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Элементы первой строки умножили на -2 и сложили с соответствующими элементами второй строки и результат записали на месте второй строки. Затем первую строку умножили на -3 и сложили с последней строкой. Результат записали на месте третьей строки.

Свойство 3. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{21} + 3\cdot A_{31} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

С помощью свойства 3 можно определить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{22} + a_{13}\cdot A_{33} + a_{14}\cdot A_{44} =$$

$$= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Следствие 1. Если какая-либо строка (столбец) определителя Δ состоит из нулей, за исключением одного элемента, то определитель равен произведению этого отличного от нуля элемента на его алгебраическое дополнение.

Например:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Это еще один способ вычисления определителей.

§2. Решение линейных систем по формулам Крамера

Рассмотрим систему трех линейных уравнении с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных, который назовем главным определителем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{2}$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Замечание 1. Если $\Delta = 0$, то система (1) либо не имеет решении, либо имеет бесконечно много решении. В любом случае пользоваться формулами (2) нельзя.

Замечание 2. По формулам Крамера можно решать и системы n линейных уравнении с n неизвестными ($n = 2, 3, 4, \ldots$).

Пример. *Решить по формулам Крамера систему:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Составим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$ *Этот определитель вычислен ранее.*

Составим и вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Т. к. $\Delta \neq 0$, *то система имеет единственное решение*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{2} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1$$

§3. Матрицы и действия над ними

<u>*Определение 1.*</u> Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ где числа a_{ij} называются элементами матрицы.

Эта матрица имеет m строк и n столбцов. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n. При $m \neq n$ - прямоугольная размера $m \times n$.

Квадратная матрица A имеет определитель, который обозначим ΔA.

Если $\Delta A \neq 0$, то матрица A называется невырожденной (неособенной). Если $\Delta A = 0$, то матрица называется вырожденной (особенной).

<u>Замечание.</u> Несмотря на внешнее сходство в написании квадратной матрицы и определителя, следует помнить, что это совершенно разные математические объекты. Определитель - это число, которое можно вычислить по определенному правилу, а матрица - это таблица чисел и фраза "вычислить матрицу" лишена смысла.

Две матрицы A и B считаются равными, если:

1) они одинакового размера;

2) на одинаковых местах находятся одинаковые элементы.

Матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной матрицей третьего порядка.

0 - матрица - это матрица, все элементы которой нули.

Введем следующие операции над матрицами:

а) умножение матрицы на число;

б) сложение (вычитание) матриц;

в) умножение матриц.

а) Для того, чтобы умножить матрицу A на число λ нужно каждый элемент этой матрицы умножить на λ.

Например:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\ \lambda=2,\ \text{тогда}\ 2A=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Очевидно, что любую матрицу можно умножать на любое число.

б) Для того, чтобы сложить (вычесть) две матрицы, нужно сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц.

Очевидно, что складывать (вычитать) можно только матрицы одинакового размера.

Например:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Тогда $$A+B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

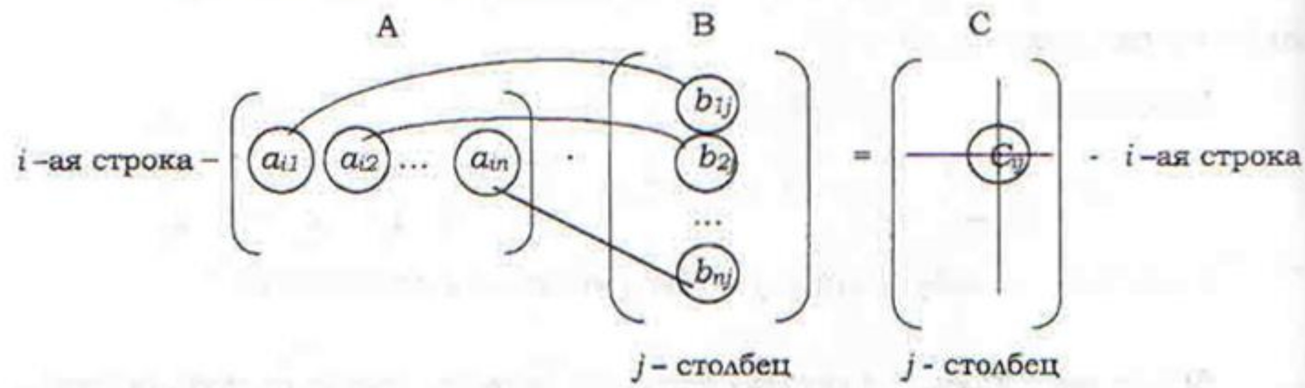
в) Умножение матриц проводится по правилу "строка на столбец". Сразу же отметим, что умножать можно только такие матрицы, у которых число столбцов первой равно числу строк второй.

Пусть даны матрица A размера $m \times n$ и матрица В размера $n \times k$.

Тогда матрица $C = A \cdot B$ будет иметь размер $m \times k$ и элемент c_{ij} этой матрицы равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Т.е. $$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Схематически это выглядит так



Пример. *Пусть* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Тогда

$$\underset{[2\times 3]}{C = A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}\underset{[3\times 2]}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}=\underset{[2\times 2]}{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Причем, элементы матрицы C получены следующим образом:

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{33}=2\cdot 2+1\cdot 0+0\cdot 1=4$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{33}=2\cdot 1+1\cdot(-1)+0\cdot 2=1$$

$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=(-1)\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 1=-1$$

$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=(-1)\cdot 1+2\cdot(-1)+1\cdot 2=-1$$

Следует помнить, что, вообще говоря, $A\cdot B\neq B\cdot A$. *В нашем примере матрицы* $A\cdot B$ *и* $B\cdot A$ *даже разного размера.*

§4. Обратная матрица.
Решение линейных систем матричным способом

Пусть дана квадратная неособенная $(\Delta A\neq 0)$ матрица A. Обратной называется такая матрица A^{-1}, что $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, где E - единичная матрица.

Это определение обратной матрицы. Находится же обратная матрица по следующей схеме:

$$\text{Пусть } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{тогда } A=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta A} & \frac{A_{21}}{\Delta A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta A} & \frac{A_{22}}{\Delta A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta A} & \frac{A_{2n}}{\Delta A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta A} \end{pmatrix}$$

Внимание! На месте *i*-й строки обратной матрицы A^{-1} находится алгебраические дополнения элементов *i*-го столбца матрицы А, деленные на определитель.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \textit{ Найти } A^{-1}.$$

1. Находим определитель матрицы А.

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \text{ - этот определитель вычислен в § 1.}$$

Т.к. $\Delta A\neq 0$, *то обратная матрица* A^{-1} *существует.*

2.Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3$$

3. Тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Проверка $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1}$$

Введем следующие матрицы:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица системы

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ - матрица - столбец свободных членов

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица - столбец неизвестных

Тогда, и это легко показать, систему (1) можно записать в виде матричного уравнения $A\cdot X=B$. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1} (Предполагается, что A^{-1} существует), получим

$$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}B \quad \text{или } X=A^{-1}B \tag{2}$$

Пример. *Решить систему матричным способом*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

Введем матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Тогда систему можно записать в виде уравнения $AX = B$, откуда $X = A^{-1} B$. Матрица A^{-1} найдена ранее:

Тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$

Значит $X=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$

А это значит, что $x_1=1, x_2=0, x_3=-1.$

§5 Решение линейных систем методом Гаусса

Метод Гаусса - это метод последовательного исключения неизвестных. Преимущество этого метода, по сравнению с рассмотренными ранее, заключается в том что:

1) Методом Гаусса можно решать и такие системы, где число уравнений не совпадает с числом неизвестных;
2) Можно решать и такие системы, главный определитель которых равен нулю.

Поясним смысл этого метода на системе

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0, & (1)\\ 2x_1-x_2+x_3=1, & (2)\\ 3x_1+2x_2+2x_3=1. & (3)\end{cases}$$

Выберем в качестве основного такое уравнение, в котором коэффициент перед неизвестным x_1 равен 1. В данном случае это уравнение (1). Если такого уравнения нет, то можно любое уравнение, содержащее неизвестное x_1, разделить почленно на коэффициент при x_1.

Первый шаг: Умножим первое уравнение на (-2) и складываем со вторым. Результат записываем на месте второго уравнения. Умножаем первое уравнение на (-3) и складываем с третьим. Результат записываем на месте третьего уравнения. В итоге приходим к системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, & (1') \\ -3x_2 - x_3 = 1, & (2') \\ -x_2 - x_3 = 1. & (3') \end{cases}$$

Второй шаг: Из уравнений (2') и (3') по тем же соображениям выбираем основное. Можно уравнение (3') умножить на (-1) и поменять местами (2') и (3') Получили:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 3 и сложим с последним. Результат запишем на месте последнего. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Теперь легко находятся все неизвестные:

$$x_3 = -1, x_2 = 0, x_1 = 1.$$

Решая систему методом Гаусса, мы оперируем с коэффициентами при неизвестных. Поэтому, на практике, удобнее преобразовывать не систему, а расширенную матрицу системы - т.е. матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членах.

Запишем и преобразуем расширенную матрицу системы :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Сравните преобразование системы и преобразование расширенной матрицы.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Переход от одной матрицы к другой записываем при помощи знака эквивалентности.

По этой матрице легко восстановить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \quad\quad x_2 + x_3 = -1, \\ \quad\quad\quad 2x_3 = -2. \end{cases}$$

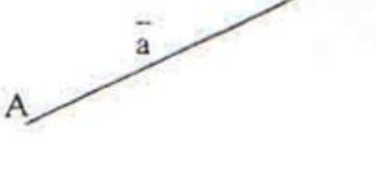
которая решается элементарно: $x_3 = -1, x_2 = 0, x_1 = 1$.

§6 Векторная алгебра

Величины, с которыми мы сталкиваемся, можно разбить на два класса: скалярные и векторные.

Скалярной называют такую величину, для полной характеристики которой достаточно указать ее числовое значение. Это, например, масса, время, температура и т.д.

Векторными называют такие величины, для определения которых кроме числовых значений необходимо указать и их направления в пространстве. К числу таких величин относятся скорость, сила, ускорение и т.д.



Геометрический вектор изображается в виде направленного отрезка и обозначается $\overline{AB}$ или $\bar{a}$.

Длина отрезка, изображающего вектор, это модуль вектора, который будем обозначать $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

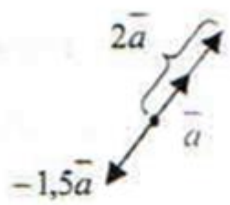
Два вектора считаются равными, если:

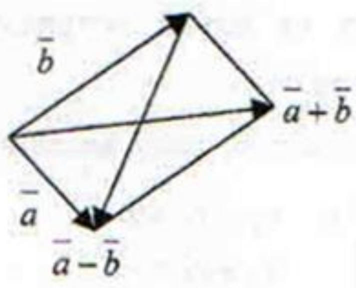
1) они имеют одинаковые модули:

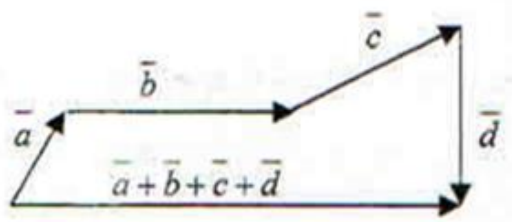
2) они параллельны;

3) направлены в одну и ту же сторону.

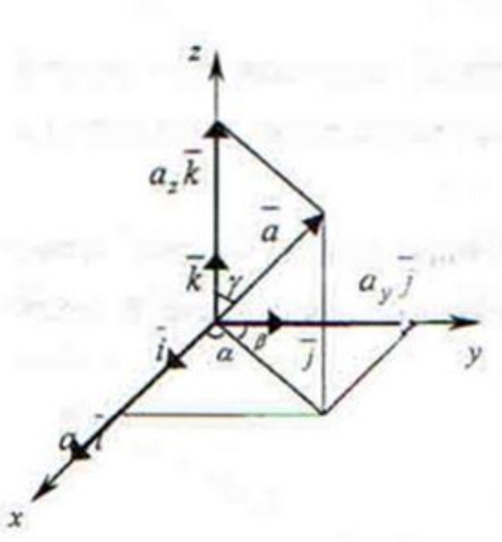
Напомним основные операции с геометрическими векторами.







Вектор, отнесенный к прямоугольной системе координат OXYZ может быть представлен в виде $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$. Такое представление вектора $\overline{a}$ называется его разложением по осям координат или разложенном по ортам.



Здесь a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\overline{a}$ на соответствующие оси координат. Их называют координатами вектора $\overline{a}$.

$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси. При этом будем писать $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$.

Векторы $a_x\bar{i}, a_y\bar{j}, a_z\bar{k}$ называются составляющими (компонентами) вектора $\bar{a}$.

Направление вектора $\bar{a}$ определяется углами α, β, γ, образованными им с осями OX, OY, OZ. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами и определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Если: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

В координатной форме алгебраические операции над векторами выглядят так:

Если $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$$

§7. Скалярное и векторное произведения двух векторов. Смешанное произведение трех векторов

1. Скалярное произведение.

Определение:

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число (скаляр), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$$

Свойства:

Свойство 1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$

Свойство 2. $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$

$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0$

Свойство 3. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2\Rightarrow|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$

Свойство 4. Если $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то

$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$

Свойство 5. $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$ или в координатной форме:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

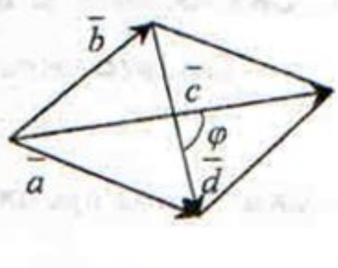
Свойство 6. Условие перпендикулярности двух векторов:

$\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ или в координатной форме:

$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0$

Свойство 7. $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$

Пример: *Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах* $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ *и* $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$.



Сделаем схематичный чертеж

$\bar{a}=(2;\,1;\,1),\quad \bar{b}=(1;\,2;\,-1)$

Очевидно $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=(3;\,3;\,0)$

$\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}=(1;\,-1;\,2)$

Пусть φ *-угол между диагоналями. Тогда*

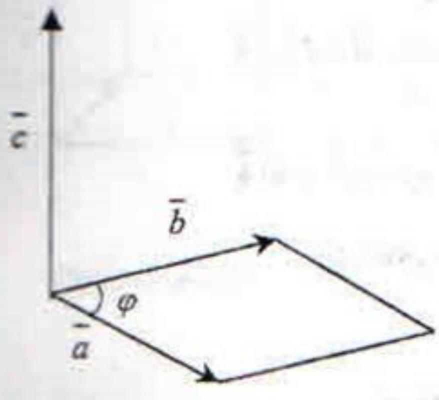
$$\cos\varphi=\frac{\bar{c}\cdot\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}\frac{3\cdot1+3\cdot(-1)+0\cdot2}{\sqrt{3^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{0}{\sqrt{18}\sqrt{16}}=0$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

Замечание: Т. к. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, *то данный параллелограмм - ромб.*

2. Векторное произведение.

<u>Определение</u>: Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет следующим условиям:



1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, т.е. модуль вектора с численно равен площади параллелограмма, построенной на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2), $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$, т. е. вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, в которой расположены векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3) Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - правая, т.е. такая же как у векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Свойства:

<u>Свойство 1</u>. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

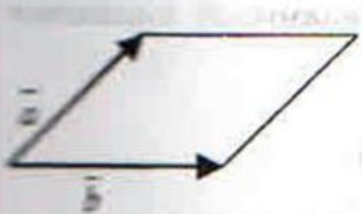
<u>Свойство 2</u>. $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} \qquad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i} \qquad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$

<u>Свойство 3</u>. Если $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

<u>Свойство 4</u>. Условие параллельности двух векторов $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0 \text{ или в координатной форме } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$



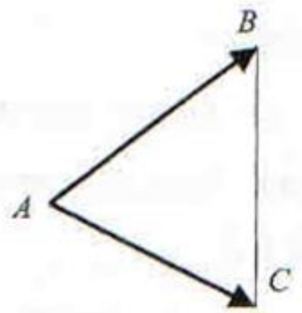
<u>Свойство 5</u>. Площадь параллелограмма построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S_{пар.} = |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Площадь треугольника построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S_{тр.} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Пример: *Найти площадь ΔABC, если A = (2; 1; -1), B = (1; 2; -2), C = (3; 1; 2)*
Сделаем схематический чертеж



$$\overline{AB} = (-1;\ 1;\ -1)$$
$$\overline{AC} = (1;\ 0;\ 3)$$
$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$$
$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

3. Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Составим векторное произведение первых двух. Получим вектор $\bar{u} = \bar{a} \times \bar{b}$. Умножим этот вектор скалярно на вектор $\bar{c}$. Получим скаляр $\bar{u} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Произведение $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ *называется смешанным произведением трех векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Свойства:

Свойство 1. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$, т.е. знаки векторного и скалярного произведения можно менять местами. Поэтому в дальнейшем будем обозначать смешанное произведение $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Свойство 2. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$, т.е. при циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется.

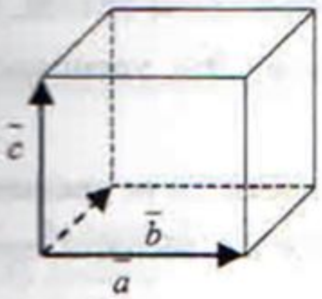
Свойство 3. При перестановке двух любых сомножителей смешанное произведение меняет только знак:

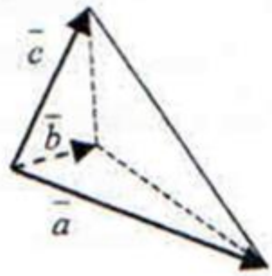
$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}$, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$ и т.д.

Свойство 4. Пусть $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\bar{c} = (c_x; c_y; c_z)$, тогда

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

<u>***Свойство 5***</u>. Объем параллелепипеда и пирамиды, построенных на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ находится по формулам:





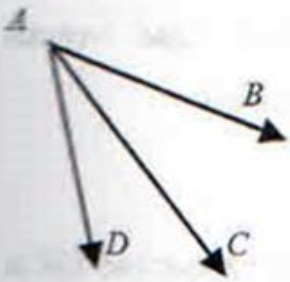
$$V_{пар} = \pm \bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$$

$$V_{пир} = \pm \frac{1}{6} \bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$$

<u>***Свойство 6***</u>. Условие компланарности трех векторов: $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\bar{c} = (c_x; c_y; c_z)$:

$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = 0$ или в координатной форме $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$

Пример. *Показать, что точки A (1; 1; 1), B (0: 2; 1), C (1; -1; 3) и D (2: -1:2) лежат в одной плоскости.*



Построим векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Их координаты легко найти:

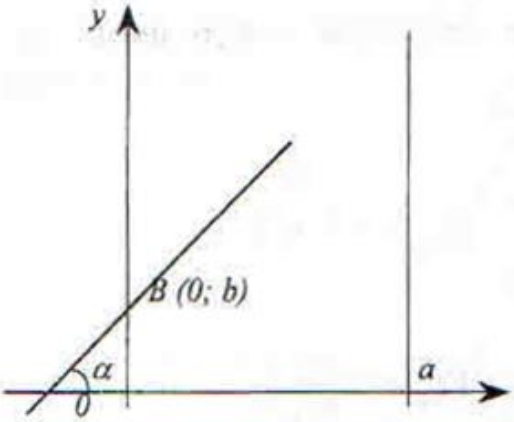
$\overline{AB}$ = (-1; 1; 0), $\overline{AC}$ = (0; -2; 2), $\overline{AD}$ = (1; -2; 1).

Вычислим смешанное произведение:

$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ *Значит, эти векторы лежат в одной плоскости и, поэтому, точки A, B, C, D принадлежат этой плоскости.*

§8. Прямая на плоскости

Пусть на плоскости в системе *XOY* задана невертикальная прямая, образующая с осью *OX* угол α и пересекающая ось *OY* в точке *B (0; b)*. Заметим, что угол отсчитывается против часовой стрелки от положительного направления оси *OX*.

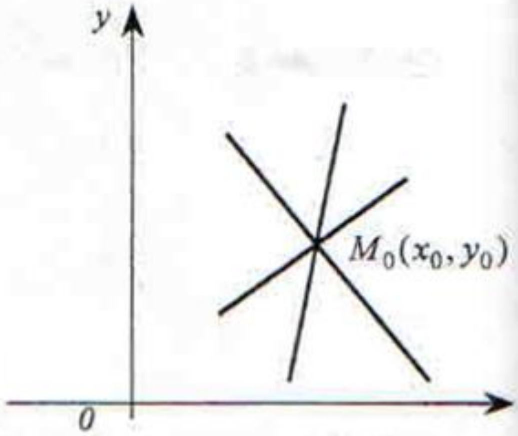


Тогда уравнение такой прямой имеет вид:

$$y = kx + b,$$

где $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой, b - начальная ордината прямой. Это уравнение с угловым коэффициентом.

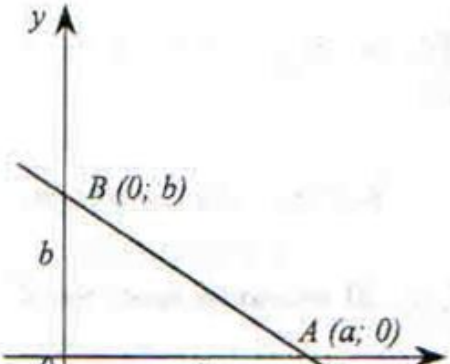
Если прямая вертикальная, то ее уравнение можно записать $x = a$, где a - абсцисса точки пересечения прямой с осью OX.



Если прямая, угловой коэффициент которой k, проходит через т. $M_0(x_0, y_0)$, то ее уравнение имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

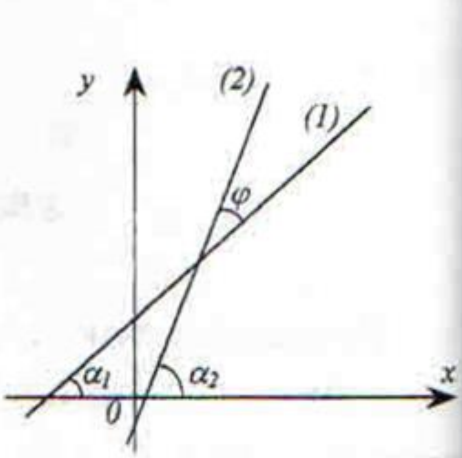
Часто это уравнение называют уравнением пучка прямых, имея ввиду при этом, что через фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ проходят различные прямые с разными угловыми коэффициентами.



Прямая, проходящая через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если прямая отсекает на осях координат OX и OY отрезки a и b соответственно, то ее уравнение имеет вид: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



И, наконец, общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Пусть имеются две прямые:

$$y_1 = k_1 x + b_1 \qquad (1)$$
$$y_2 = k_2 x + b_2 \qquad (2)$$

Тогда угол φ между ними находится по формуле:

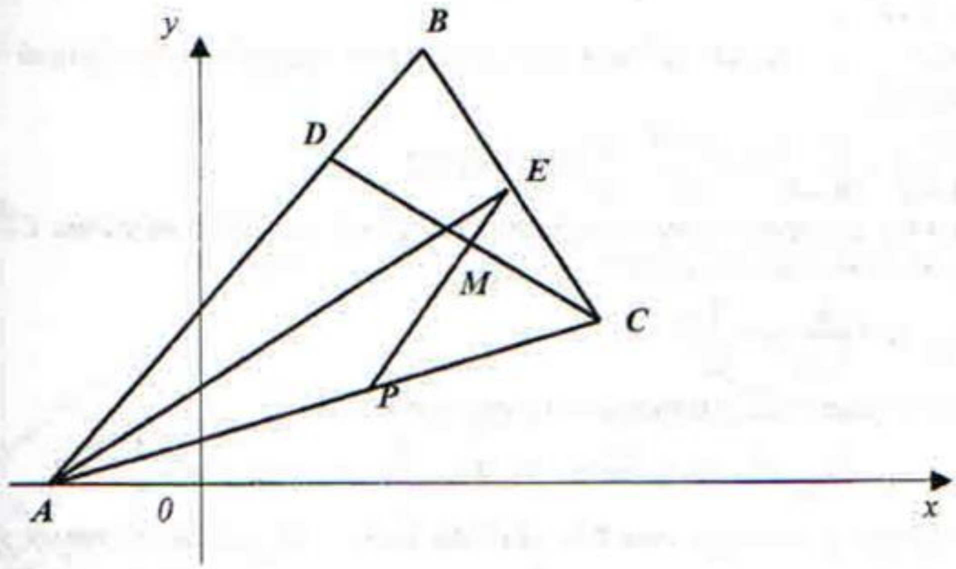
$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

Условие параллельности двух прямых $k_2 = k_1$ и условие их перпендикулярности $k_1 = -\frac{1}{k_1}$.

Задача II. *Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-2; 0), B(2; 8), C(6;4). Найти:*

1) *длину стороны AB;*
2) *уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;*
3) *внутренний угол B;*
4) *уравнение медианы AE;*
5) *уравнение и длину высоты CD;*
6) *уравнение прямой, проходящей через т. E параллельно стороне AB и точку M ее пересечения с высотой CD.*

Сделать чертеж.



1) Длину стороны AB найдем как расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Поэтому $AB = \sqrt{(2+2)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

2) Уравнение стороны AB найдем как уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$т.е.\ \frac{x+2}{6-2}=\frac{y-0}{8-0}\Rightarrow\frac{x+2}{4}=\frac{y}{8}\Rightarrow y=2x+4$$

Значит, $k_{AB}=2$

Аналогично получим уравнение стороны BC:

$$\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-8}{4-8}\Rightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{y-8}{-4}\Rightarrow y=-x+10$$

Значит, $k_{BC}=-1.$

3). Внутренний угол B треугольника ABC находим как угол между сторонами AB и BC:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\Rightarrow tgB=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{BC}\cdot k_{AB}}=\frac{-1-2}{1+(-1)\cdot 2}=3$$

$$\varphi=arctg3$$

4). Сначала найдем координаты точки E как середины отрезка BC:

$$x=\frac{x_2+x_1}{2}\Rightarrow x_B=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+6}{2}=4$$

$$y=\frac{y_2+y_1}{2}\Rightarrow y_B=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{8+4}{2}=6$$

Значит, E (4; 6).

Уравнение медианы AE найдем как уравнение прямой, проходящей через две данные точки A и E:

$$\frac{x+2}{4+2}=\frac{y-0}{6-0}\Rightarrow\frac{x+2}{6}=\frac{y}{6}\Rightarrow y=x+2$$

5) Используя условие перпендикулярности стороны AB и высоты CD, найдем угловой коэффициент высоты CD:

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{2}.$$

Теперь воспользуемся уравнением пучка прямых:

$$y-y_C=k_{CD}(x-x_C),\ т.е.\ \ y-4=-\frac{1}{2}(x-6)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+7.$$

Чтобы найти длину высоты CD, найдем точку D, решив систему уравнений AB и CD:

$$\begin{cases}y=2x+4\\ y=-\frac{1}{2}x+7\end{cases}\Rightarrow 2x+4=-\frac{1}{2}x+7\Rightarrow x=\frac{6}{5},y=\frac{32}{5}.$$

Значит, $D\left(\frac{6}{5};\frac{32}{5}\right).$

Найдем длину высоты CD как расстояние между точками C и D.

$$CD=\sqrt{\left(\frac{6}{5}-6\right)^2+\left(\frac{32}{5}-4\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{12}{5}\sqrt{5}.$$

б) Уравнение прямой EP напишем в виде:

$$y - y_E = k_{EP}(x - x_E)$$

Так как прямые EP и AB параллельны, то . Поэтому, получили

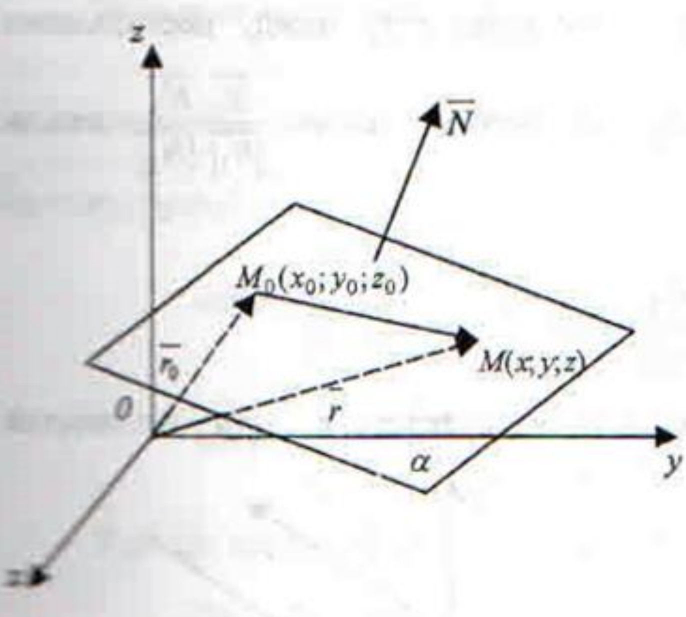
y-6=2(x-4)=>y=2x-2.

Чтобы получить точку M пересечения прямых EP и CD, нужно решить систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2 = -\frac{1}{2}x + 7 \Rightarrow x = \frac{18}{5}, y = \frac{26}{5}.$$

Значит, $M\left(\frac{18}{5};\frac{26}{5}\right)$.

§9. Плоскость. Прямая в пространстве

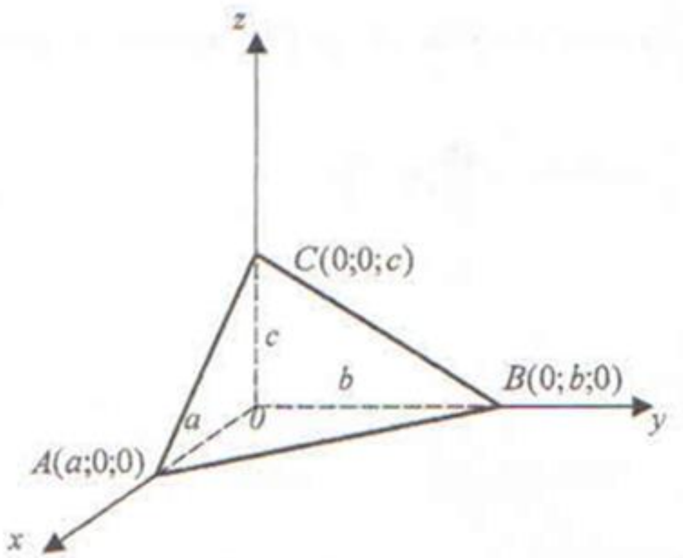


Пусть плоскость α перпендикулярна некоторому вектору $\overline{N} = (A,B,C)$, который называется нормальным вектором.

Точка $M(x;y;z)$ - произвольная точка плоскости α, а $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - некоторая фиксированная точка этой плоскости. Векторы $\overline{r}$ и $\overline{r_0}$ - радиус-векторы точек M и M_0 соответственно.

Тогда $\overline{r} \cdot \overline{N} + D = 0$ - это векторное уравнение плоскости. В координатной форме оно выглядит $Ax + By + Cz + D = 0$. Это общее уравнение плоскости.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно к вектору $\overline{N}=(A,B,C)$.



$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ - уравнение плоскости в отрезках на осях.

Пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой. Тогда уравнение такой плоскости имеет вид:

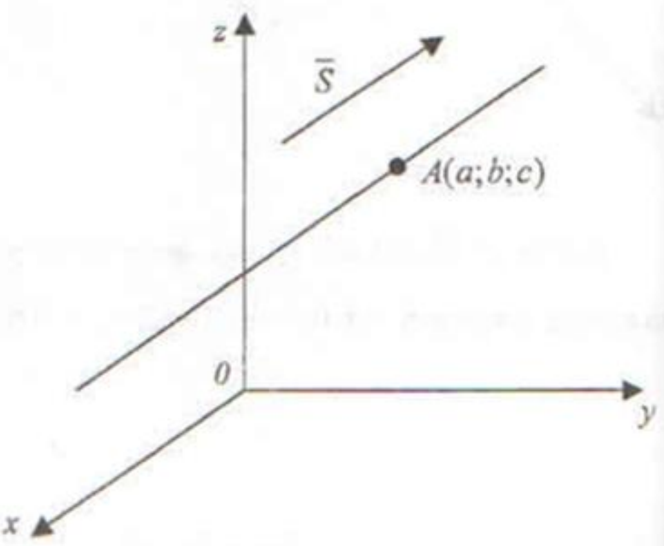
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Пусть даны две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Очевидно, двугранный угол между ними равен углу между нормальными векторами $\overline{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Поэтому $\cos\varphi=\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|}$ или в координатной форме:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Отсюда легко получить условие перпендикулярности двух плоскостей $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ и условие их параллельности: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.



Пусть прямая, параллельная вектору $\overline{S}=(m;n;p)$, проходит через т. $A(a;b;c)$.

Тогда уравнения прямой

имеют вид $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}$, которые называются каноническими уравнениями прямой, а вектор $\overline{S}=(m;n;p)$ - направляющий вектор прямой.

От канонических уравнений прямой легко перейти к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = pt + c \end{cases}$$

Если прямая проходит через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то ее уравнения имеют вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

И, наконец, прямая может быть задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Угол φ между двумя прямыми $\dfrac{x-a_1}{m_1}=\dfrac{y-b_1}{n_1}=\dfrac{z-c_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-a_2}{m_2}=\dfrac{y-b_2}{n_2}=\dfrac{z-c_2}{p_2}$ определяем как угол между их направляющими векторами $\overline{S}_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{S}_2=(m_2;n_2;p_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right|\cdot\left|\overline{S_2}\right|}$$ или в координатной форме:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

Угол α между прямой $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$

определяется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Условие параллельности прямой и плоскости сводится к условию перпендикулярности нормального вектора плоскости $\overline{N} = (A, B, C)$ и направляющего вектора прямой $\overline{S} = (m; n; p)$.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости - это условие параллельности нормального вектора $\overline{N} = (A, B, C)$ и направляющего вектора $\overline{S} = (m; n; p)$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Пример. *Найти угол между прямыми.*

$$\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}, \ (1) \qquad и \qquad \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}, \ (2)$$

Решение: Каждая из прямых (1) и (2) задана общими уравнениями, как линия пересечения двух плоскостей. В качестве направляющего вектора прямой (1) можно взять вектор $\overline{S_1} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, где $\overline{N_1}$ = (4; 1; -1) и $\overline{N_2}$ = (0; 1; -1) - нормальные векторы плоскостей, линия пересечения которых и есть первая прямая. Точно также можно определить направляющий вектор прямой (2):

$\overline{S_2} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, *где $\overline{N_1}$ = (3; -2; 0) и $\overline{N_2}$ = (3; 0; -1).*

$$\overline{S_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}, \qquad \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$$

Угол между этими прямыми:

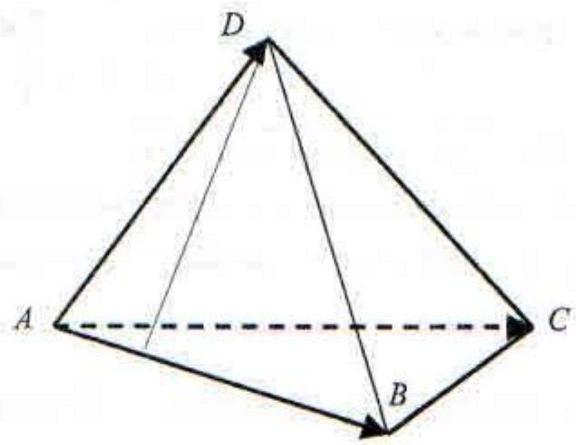
$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{|\overline{S_1}| \cdot |\overline{S_2}|} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{20}{21}$$

Задача III. *Даны координаты вершин пирамиды ABCD: A(-1; 1; 1), B(1; 2; 3), C(2;1;0), D(0;-1;2).*

Требуется:

1) *Записать векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в системе орт $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и найти модули этих векторов;*

2) *Найти угол между векторами* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$;
3) *Найти проекцию вектора* $\overline{AD}$ *на вектор* $\overline{AB}$;
4) *Найти площадь грани ABC;*
5) *Найти объем пирамиды ABCD;*
6) *Составить уравнение ребра AC;*
7) *Составить уравнение грани ABC;*
8) *Сделать схематический чертеж.*



1) Координаты вектора $\overline{AB}$, *где* $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ *находятся:*

$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, *т.е.* $\overline{AB}$ *=(1+1; 2 - 1; 3 - 1) или* $\overline{AB}$ *= (2: 1;2).*

Аналогично $\overline{AC}$ *= (3; 0; -1),* $\overline{AD}$ *= (1; -2; 1).*

Поэтому:

$$\overline{AB}=2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k},\ \overline{AC}=3\bar{i}-\bar{k},\ \overline{AD}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}.$$

Модуль вектора $|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. *Поэтому*

$$\overline{AB}=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\overline{AC}=\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{AD}=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$$

2) Угол между векторами $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ *и* $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$ *находится по формуле:*

$$\cos(\bar{a},\bar{b})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Значит $\cos(\overline{AB},\overline{BC})=\dfrac{2\cdot3+1\cdot0+2\cdot(-1)}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{9+0+1}}=\dfrac{4}{3\sqrt{10}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{30}=\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$

3) Известно, что $Пр_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Поэтому $Пр_{\overline{AB}}\overline{AD} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|} = \dfrac{2\cdot1+1\cdot0+2_1}{3} = \dfrac{2}{3}$

4) Площадь грани ABC можно найти как площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, *т.е. по формуле*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Найдем векторное произведение: $\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 8\bar{j} - 3\bar{k}$ *и его модуль* $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2+8^2+(-3)^2} = \sqrt{1+64+9} = \sqrt{74}$.

5) Объем пирамиды, построенной на трех некомпланарных векторах $\bar{a} = (a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b} = (b_x;b_y;b_z)$ *и* $\bar{c} = (c_x;c_y;c_z)$ *находим по формуле:*

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{AB} = (2;1;2)$, $\overline{AC} = (3;0;1)$, $\overline{AD} = (1;-2;1)$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}\times\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1-12-4-3 = -20$$

Значит $V = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$ *(куб.ед.).*

6) Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *имеет вид:* $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Поэтому, подставив координаты точек A (-1; 1; 1) и C (2; 1; 0), получим:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-1}{0-1} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$$

В параметрическом виде это уравнение выглядит:

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 1 \\ z = -t+1 \end{cases}$$

7) Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ *имеет вид:*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставив координаты точек: A(-1; 1; 1), B(1; 2; 3), C(2;1; 0), получим:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 1+1 & 2-1 & 3-1 \\ 2+1 & 1-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(x+1)+8(y-1)-3(z-1)=0$$

$$-x+8y-3z-6=0 \text{ или } x-8y+3z+6=0$$

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите свойства определителей.
2. Как вычисляется определитель второго и третьего порядка?
3. В каком случае система линейных уравнений имеет единственное решение?
4. Как вычислить расстояние между двумя точками?
5. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?
6. Как найти координаты точек пересечения двух линий на плоскости, если известны уравнения этих линий?
7. Как найти угол между двумя прямыми?
8. Напишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей а)через данную точку в заданном направлении; б) через две данные точки.
10. Что такое координаты вектора?
11. Сформулируйте свойства скалярного произведения двух векторов.
12. Как найти координаты вектора, его модуль по координатам?
13. Как найти угол между двумя векторами?
14. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух векторов.
15. Как найти вектор, перпендикулярный двум данным векторам?
16. Как найти площадь треугольника построенного на двух векторах?
17. Как найти объем пирамиды с вершинами в заданных точках?
18. Сформулируйте условие компланарности трех векторов.
19. Как выглядит уравнение плоскости, проходящей: а) через данную точку с заданным нормальным вектором, б) через три данные точки?
20. Как вычислить угол между двумя плоскостями?
21. Напишите уравнение прямой в пространстве.
22. Как найти угол между двумя прямыми в пространстве?
23. Напишите условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
24. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?

Контрольная работа № 1

I. В задачах 1 - 20 решить систему тремя способами:

а) по формулам Крамера;

б) матричным способом;

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 5x+8y-z=-7, \\ x+2y+3z=1, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+4z=31, \\ 5x+y+2z=29, \\ 3x-y+z=10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x-y=5, \\ -2x+y+z=0, \\ 2x-y+4z=15. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 2x-5y-3z=-17, \\ x+y-z=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-y-6z=-1, \\ 3x-2y=8. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x+y+z=6, \\ 3x-y+z=4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-y-3z=3, \\ 3x+4y-5z=8, \\ 2x+7z=17. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+5y+z=-7, \\ 2x-y-z=0, \\ x-2y-z=2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-2y+3z=7, \\ x+3y-2z=0, \\ 2y-z=2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-y-3z=-1, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x-y+3z=7, \\ x+3y-2z=0, \\ 2y-z=2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x + y + 4z = 20, \\ 2x - y - 3z = 3, \\ 3x + 4y - 5z = 8. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 5y - z = 7, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 11x + 3y - z = 2, \\ 2x + 5y - 5z = 0, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

II. В задачах 21 - 40 даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1) длину стороны AB;

2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;

3) внутренний угол B;

4) уравнение медианы AE;

5) уравнение и длину высоты CD;

6) уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и точку M, ее пересечения с высотой CD.

21.	A(1;-1) .	B(4;3) ,	C(5;1)
22.	A(0;-1) .	B(3;3) ,	C(4;1)
23.	A(1;-2) .	B(4;2) ,	C(5;0)
24.	A(2;-2) .	B(5;2) ,	C(6;0)
25.	A(0;0) ,	B(3;4) ,	C(4;2)
26.	A(0;1) .	B(3;5) ,	C(4;3)
27.	A(3;-2) ,	B(6;2) ,	C(7;0)
28.	A(3;-3) ,	B(6;1) ,	C(7;-1)
29.	A(-1;1) ,	B(2;5) ,	C(3;3)
30.	A(4;0) ,	B(7;4) ,	C(8;2)
31.	A(2;2) ,	B(5;6) ,	C(6;4)
32.	A(4;-2) ,	B(7;2) ,	C(8;0)
33.	A(0;2) ,	B(3;6) ,	C(4;4)
34.	A(4;1) ,	B(7;5) ,	C(8;3)
35.	A(3;2) ,	B(6;6) ,	C(7;4)
36.	A(-2;1) ,	B(1;5) .	C(2;3)
37.	A(4;-3) ,	B(7;1) .	C(8;-1)
38.	A(-2;2) ,	B(1;6) ,	C(2;4)
39.	A(5;0) ,	B(8;4) ,	C(9;2)
40.	A(2;3) ,	B(5;7) ,	C(6;5)

III. В задачах 41-60 даны координаты вершин пирамиды ABCD. Требуется:

9) Записать векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в системе орт $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и найти модули этих векторов;

10) Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

11) Найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

12) Найти площадь грани ABC;

13) Найти объем пирамиды ABCD;

14) Составить уравнение ребра AC;

15) Составить уравнение грани ABC.

41	A(1;2;1),	B(-1;5;1),	C(-1;2;7)	D(1;5;9)
42	A(2;3;2),	B(0;6;2),	C(0;3;8)	D(2;6;10)
43	A(0;3;2).	B(-2;6;2),	C(-2;3;8)	D(0;6;10)
44	A(2;1;2),	B(0;4;2),	C(0;1;8)	D(2;4;10)
45	A(2;3;10),	B(0;6;0),	C(0;3;6)	D(2;6;8)
46	A(2;2;1),	B(0;5;1),	C(0;2;7)	D(2;5;9)
47	A(1;3;1),	B(-1;6;1),	C(-1;3;7)	D(1;6;9)
48	A(1;2;2),	B(-1;5;2),	C(-1;2;8)	D(1;5;10)
49	A(2;3.1).	B(0;6;1),	C(0:3:7)	D(2:6.9)
50	A(2;2;2),	B(0;5;2),	C(0:2:8)	D(2;5:10)
51	A(1;2;3),	B(-1;6;2),	C(-1:3;8)	D(1:6;10)
52	A(0;1;2),	B(-2;4;2),	C(-2;1;8)	D(0;4;10)
53	A(0;3;0),	B(-2;6;0),	C(-2;3;6)	D(0;6;8)
54	A(2;1;0).	B(0;4;0),	C(0:1;6)	D(2;4:8)
55	A(0;2;1).	B(-2:5;1).	C(-2:2;7)	D(0;5;9)
56	A(1;1;1),	B(-1;4;1),	C(-1;1;7)	D(1;4;9)
57	A(1;2;0),	B(-1;5;0),	C(-1;2;6)	D(1;5;8)
58	A(0;1;0),	B(-2;4;0),	C(-2;1;6)	D(0;4;8)
59	A(0;1;1),	B(-2;4;1),	C(-2;1;7)	D(0;4;9)
60	A(0;2;0),	B(-2;5;0),	C(-2;2;6)	D(0;5;8)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Функция. Основные понятия и определения

Определение 1. Если каждому значению независимой переменной x поставлено в соответствие определенное значение переменной y, то говорят, что y есть функция от x и пишут $y = f(x)$.

Определение 2. Множество всех тех значений переменной x, при которых функция y имеет определенное значение, называется областью определения этой функции.

Например, область определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ находим из условия:

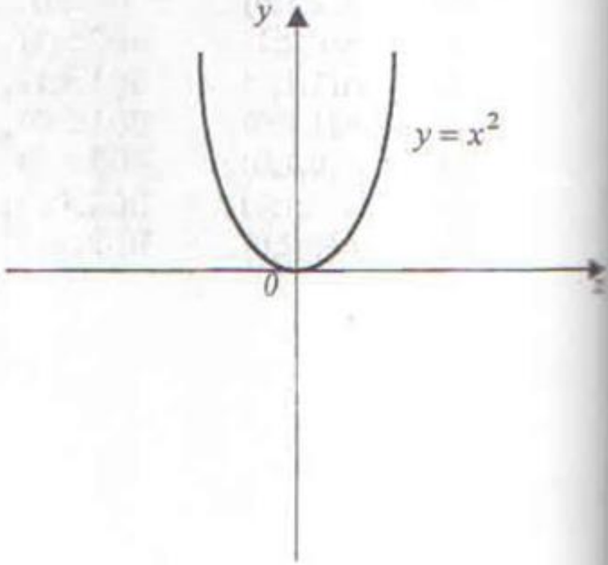
$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$$

т.е. $x \in [-1; 1]$. Значит, функция определена только для значений x, принадлежащих отрезка [-1; 1].

Определение 3. Графиком функции, заданной уравнением $y = f(x)$, называется множество таких точек $M\ (x,\ y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Обычно, график функции - это некоторая линия на плоскости XOY.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения.

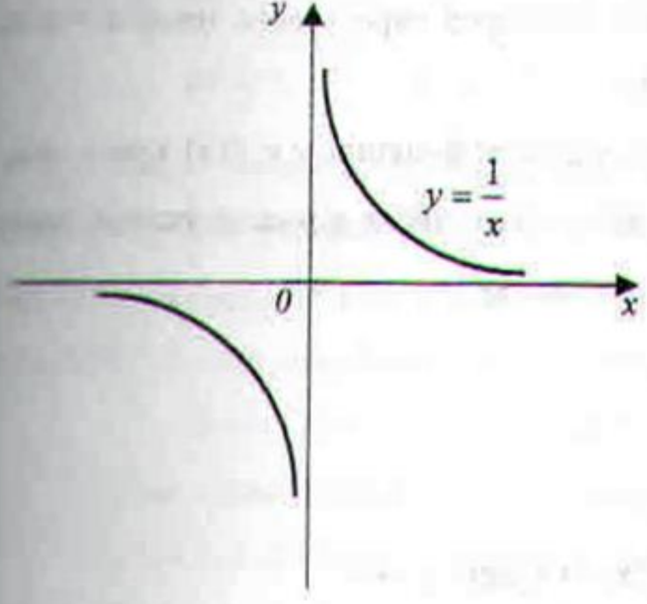


Например: $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$,

т.е. $f(x) = x^2$ - четная функция.

Графики четных функций симметричны относительно оси OY.



Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если $f(-x)=-f(x)$ для любого x из области определения.

Например: $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x),$$

значит $f(x)=\frac{1}{x}$ - нечетная функция.

Графики нечетных функций симметричны относительно начала координат.

§2. Понятие предела

а) Предел переменной величины

Будем рассматривать упорядоченную переменную величину, т.е. такую величину, значения которой можно разделить на предыдущие и последующие.

К числу таких величин относятся числовые последовательности

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Определение 1. Число a называется пределом переменной x, если для любого, как угодно малого положительного числа ε, можно указать такое значение переменной x, что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству

$$|x-a|<\varepsilon$$

При этом говорят «x стремится к a» и пишут $x \to a$ или $\lim x = a$

б) Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ за исключением, быть может, самой этой точки.

Определение 1. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого, как угодно малого, положительного числа ε можно указать такое число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta$$

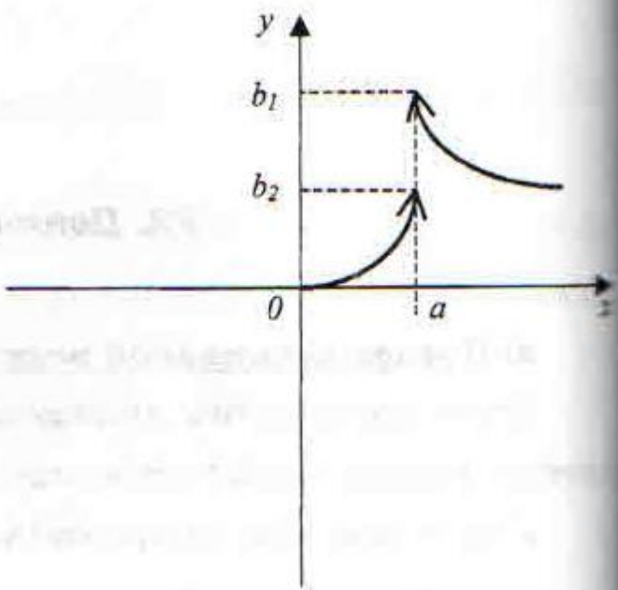
будет выполнятся неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

При этом пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Замечание 1. Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет.

Замечание 2. Может случится так, что при стремлении x к a так, что $x < a$, т.е. слева от точки $x = a$, предел функции $f(x)$ равен числу b_1, а при стремлении x к a справа предел функции $f(x)$ справа равен b_2, причем $b_1 \neq b_2$.



В этом случае говорят, что b_1 - это предел функции $f(x)$ в точке а слева, а b_2 - предел функции справа и пишут

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1 \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = b_2$$

§3. Бесконечно малые и бесконечно большие

Определение 1. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (или $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

Например $\alpha(x)=(x-1)^2$ - бесконечно малая при $x \to 1$

$$\beta(x)=\frac{1000}{x}$$ - бесконечно малая при $x \to \infty$.

Следует помнить, что бесконечно малая это переменная величина, которая в процессе своего изменения принимает значения, меньше как угодно малого наперед заданного положительного числа ε. Вполне возможно, что некоторые значения этой величины и не будут малыми. Так например:

$\beta(1)=1000$, $\qquad\qquad \beta(2)=500$

Справедливы следующие утверждения:

1. Если α и β - бесконечно малые, то $\alpha \pm \beta$ - также бесконечно малая;
2. Если α и β - бесконечно малые, то $\alpha \cdot \beta$ - также бесконечно малая;
3. Произведение величины бесконечно малой на величину ограниченную (например, постоянную) есть величина бесконечно малая.

Определение 2. Бесконечно большой называется такая переменная величина, которая в процессе своего изменения может принимать такие значения, абсолютная величина которых больше любого, как угодно большого числа $N>0$.

Например, $\beta(x)=x^2$ есть бесконечно большая при $x \to \infty$.

Если α - бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha}$ - бесконечно большая и наоборот,

Если β - бесконечно большая, то $\frac{1}{\beta}$ - бесконечно малая.

Чтобы сравнить бесконечно малые величины, находят предел их отношения. При этом:

1) если $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, то α называется бесконечно малой высшего порядка, чем β.

2) если $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, то это значит $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ и β - бесконечно малая высшего порядка по сравнению с α.

3) если $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A \quad (A\neq 0)$, то α и β называются бесконечно малыми одного и того же порядка.

В частности, если $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, то бесконечно малые α и β называются эквивалентными. Тогда пишут $\alpha\sim\beta$.

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую из них (или только одну) заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной. Т.е. если $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$, то $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}$.

§4. Теоремы о пределах.
Примеры вычисления предельных значений функций

Понятие предела относится к числу одних из самых сложных логических понятий математики. Однако, на практике, предельные значения функций находят не по определению предела, а используя теоремы о пределах . Вот они :

1. $\lim c = c \qquad c-const$
2. $\lim(u+v-w)=\lim u+\lim v-\lim w$
3. $\lim(u\cdot v)=\lim u\cdot\lim v$, отсюда $\lim cu = c\lim u$
4. $\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}$, если $\lim v\neq 0$.

Пример. *Найти* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+2x+2}$

Пользуясь указанными теоремами , последовательно получаем :

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+2x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+2)}=\frac{2\lim x\cdot\lim x+3\lim x-\lim 1}{\lim x\cdot\lim x+2\lim x+\lim 2}=\frac{2\cdot 2\cdot 2+3\cdot 2-1}{2\cdot 2+2\cdot 2+2}=\frac{13}{10}$$

Т.е. в этом случае применение теорем о пределах сводится к подстановке вместо x его предельного значения. Поэтому промежуточное преобразование можно опустить. Такое не всегда возможно. Например, нужно вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

Очевидно, предел знаменателя равен 0 , поэтому применять теорему 4 нельзя. Предел числителя также равен 0 , т.е. при $x \to 2$ числитель и знаменатель являются бесконечно малыми. Принято говорить, что имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители. Получим:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{2+2}{2-1} = 4$$

т е. после сокращения сомножителей *(x-2),* мы избавились от неопределенности (раскрыли неопределенность).

Пример. *Найти* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. *Разложить числитель и знаменатель нет возможности. В этом случае нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, т.е. на* $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. *Получим:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}^{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+x-1-x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}^{\left(\frac{0}{0}\right)} = 2\lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = 2\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\frac{1}{1+1} = 1$$

В некоторых случаях для раскрытия неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ используют так называемый «первый замечательный предел»:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}^{\left(\frac{0}{0}\right)} = 1$$

При $\alpha \to 0$ числитель $\sin\alpha$ и знаменатель α есть бесконечно малые. Т.к. предел их отношения равен 1 , то они являются эквивалентными бесконечно малыми, т.е. $\sin\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\left(\frac{0}{0}\right)=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\left(\frac{0}{0}\right)=3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{0}{0}\right)=3\cdot 1=3$$

Второй способ. Т.к. при $x\to 0$, $\sin 3x \sim 3x$, то (см.§3):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}3=3$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

Иногда этот предел называют первым замечательным пределом .

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *. Т.к. при $x\to 0$, $\sin 3x\sim 3x$, $tg 2x\sim 2x$, то*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Пример. *Найти* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-1}$

При $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, т.е являются бесконечно большими. Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. *Для того чтобы ее раскрыть, нужно разделить почленно числитель и знаменатель на старшую степень x , т.е. на x^2 и учесть, что если $x\to\infty$, то $\dfrac{1}{x}\to 0$, $\dfrac{1}{x^2}\to 0$. (см §3).*

Тогда $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

Замечание 1. Неопределенности $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$ сводятся либо к неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, либо $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Замечание 2. Неопределенность (1^∞) раскрывается с помощью второго

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ или в другой записи

$$\lim_{\alpha\to\infty}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$$ где e (читается число e) - иррациональное число

$$e = 2{,}71828182845...$$

Приближенно $e \approx 2{,}72$.

Т.к. в предлагаемой контрольной работе таких задач нет, то и не будем их рассматривать.

Замечание 3. Логарифмы по основанию e называются натуральными логарифмами и обозначаются $\ln b = \log_e b$.

Задача. Найти указанные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$ а) $x_0 = 2$, б) $x_0 = 1$, в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x tg 2x}{\sin^2 3x}$

Решение:

1) а) $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3} = \frac{2\cdot 2+3\cdot 2-5}{2^2+2\cdot 2-3} = \frac{9}{5}$$

б) $$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$$

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$2x^2+3x-5=0 \qquad x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{-3\pm 7}{4},$$

$x_1 = -\dfrac{5}{2}$, $x_2 = 1$. Поэтому $2x^2+3x-5 = 2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)(x-1)$

$$x^2+2x-3=0 \qquad x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2},$$

$x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Значит $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}^{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)}{(x-1)(x+3)}^{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+5}{x^2+3}=\dfrac{7}{4}$.

$$\text{в)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=2$$

Здесь числитель и знаменатель дроби почленно разделили на x^2 и учли, что при $x\to\infty$, $\dfrac{1}{x}\to 0$, $\dfrac{1}{x^2}\to 0$.

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{xtg2x}{\sin^2 3x}$$

Имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Т.к. при $x\to 0$, $sin3x \sim 3x$, $tg2x \sim 2x$, поэтому $\sin^2 3x \sim 9x^2$ и получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xtg2x}{\sin^2 3x}^{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x2x}{9x^2}^{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$$

§ 5. Непрерывность функции

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Итак, функция $f(x)$ будет непрерывна в точке x_0, если выполнены следующие требования:

1) Она определена в этой точке, т.е. существует значение $f(x_0)$;

2) Существуют (конечны) оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

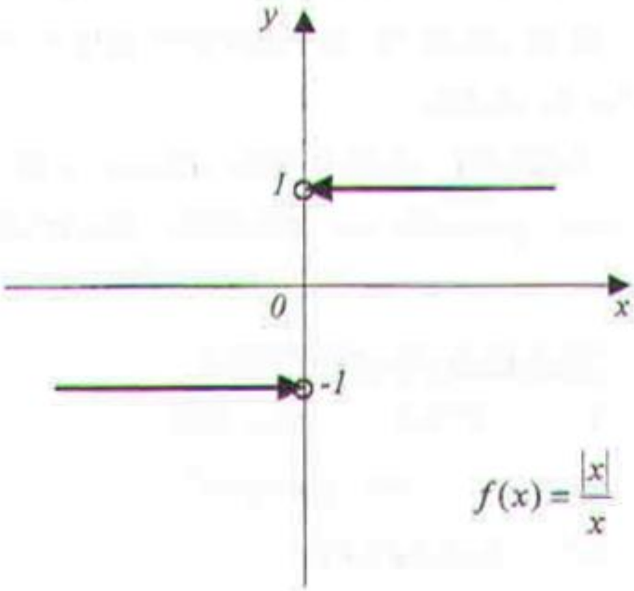
3) Эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

Если нарушается хоть одно из этих условий, то говорят, что в точке x_0 функция имеет разрыв, а сама эта точка называется точкой разрыва. В зависимости от того, какие именно условия нарушены, различают разрыв I рода (конечный разрыв) и II рода (бесконечный разрыв).

Если в точке x_0 оба односторонних предела существуют, но не равны между собой, или даже равны, но не равны значению функции в этой точке, то это разрыв I рода. Например,

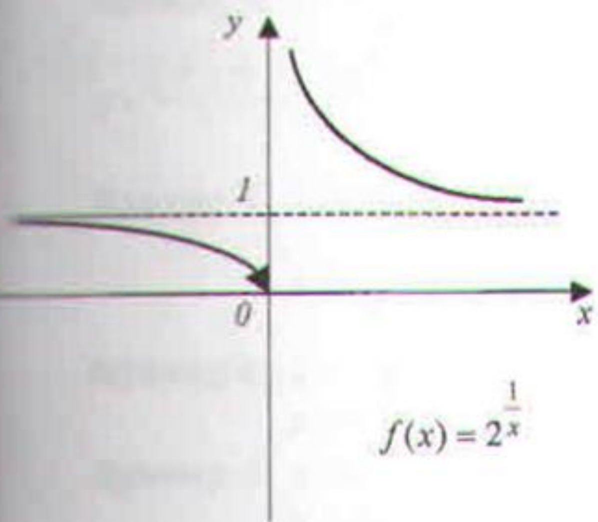
$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & при\ x > 0 \\ -1, & при\ x < 0 \end{cases}$$



В точке $x_0 = 0$ функция не определена. Существуют оба односторонних предела

$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = 1$,

но они не равны между собой.



Если в точке x_0 не существует (бесконечен) хотя бы один из односторонних пределов, то это разрыв второго рода.

Например: $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

В точке $x_0 = 0$ функция не определена.

$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$,

Определение 2. Функция $y = f(x)$ непрерывная в каждой точке $[a;\ в]$, называется непрерывной на этом отрезке.

§6. Производная функции

Определение. Производной функции $y=f(x)$ в данной точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Если в данной точке x существует предел, стоящий в правой части равенства (1), то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке.

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в ней, но не наоборот.

Операция нахождения производной называется дифференцированием. На практике производные находят по таблице производных.

Таблица производных

I $\quad (C)'=0 \qquad C$ - const

II $\quad (u+v-w)'=u'+v'-w'$

III $\quad (u\cdot v)'u'v+uv'$

IV $\quad (Cu)'=Cu'$

1. $\quad \left(u^n\right)'=nu^{n-1}u'$

2. $\quad \left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$

$\quad \left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$

3. $\quad (\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

4. $\quad (\sin u)'=\cos u\cdot u'$

5. $\quad (\cos u)'=-\sin u\cdot u'$

6. $\quad (\mathrm{tg}u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

8. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{u^2+1}$

9. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{u^2+1}$

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Таблица производных записана для сложных функций. Имеется в виду, что u - некоторая функция от x и производная берется по переменной x.

Примеры нахождения производных.

Пример 1. $y = x^3 + 2x^2 - 3\sin x + 5$

$$y' = (x^3)' + (2x^2)' - 3(\sin x)' - (5)' = 3x^2 + 2\cdot 2x - 3\cos x = 3x^2 + 4x - 3\cos x$$

Пример 2. $y = x^2 \sin x$ (по формуле III)

$$(y)' = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x$$

Пример 3. $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ (по формуле IV)

$$y' = \frac{(x^3+1)'x^2 - (x^3+1)(x^2)'}{x^4} = \frac{3x^2x^2 - (x^3+1)2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3-2}{x^3}$$

Пример 4. $y = \ln(1-x^2)$ (по формуле 3)

$$y' = \frac{(1-x^2)'}{1-x^2} = \frac{-2x}{1-x^2}$$

Пример 5. $y = \sin(3x-2)$ (по формуле 4)

$$y' = \cos(3x-2)(3x-2)' = 3\cos(3x-2)$$

Пример 6. $y = \sin^2 3x$ (по формуле 1)

$$y' = 2\sin 3x(\sin 3x)' = 2\sin 3x\cos 3x(3x)' = 3\cdot 2\sin 3x\cos 3x = 3\sin 6x$$

Пример 7. $y = \sqrt[3]{1-2x^3} = (1-2x^3)^{\frac{1}{3}}$ (по формуле 1)

$$y' = \frac{1}{3}(1-2x^3)^{\frac{1}{3}-1}(1-2x^3)' = \frac{1}{3}(1-2x^3)^{-\frac{2}{3}}(-6x^2) = \frac{-6x^2}{3\sqrt[3]{(1-2x^3)^2}} = \frac{-2x^2}{\sqrt[3]{(1-2x^3)^2}}$$

Пример 8. $y = 2^x \cdot x^2$ (по формуле III)

$$y' = \left(2^x\right)' x^2 + \left(2^x\right)\left(x^2\right)' = 2^x \ln 2 \cdot x^2 + \left(2^x\right)\left(x^2\right)' = 2^x\left(2x + x^2 \cdot \ln 2\right)$$

Пример 9. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}} = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-1\right) - \ln\left(x^2+1\right)\right]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1} - \frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{2x}{x^4-1}$$

Задача 2. *Найти производные y', пользуясь правилами и формулами дифференцирования.*

а) $y = \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)^3$ *б)* $y = \dfrac{x^2 + e^x}{\sqrt{1-2x^2}}$

в) $y = 3^{\sin x} \arcsin 3x$ *г)* $y = \ln\cos 4x$

Решение.

а) $y = \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)^3$

Это сложная степенная функция вида $y = u^n$, *где* $u = \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)$, $n=3$.
Применяем формулу (1).

$$y' = 3\left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)^2\left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)' = 3\left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)^2\left(6x^2 - 3\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= 3\left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)^2 2\left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 6\left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\right)^2 \cdot \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

б) $y = \dfrac{x^2 + e^x}{\sqrt{1-2x^2}}$

Сначала применяем формулу (IV). При нахождении производной $\sqrt{1-2x^2}$ *будем использовать частный случай формулы (1):* $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$y' = \frac{\left(x^2+e^x\right)'\sqrt{1-2x^2} - \left(x^2+e^x\right)\left(\sqrt{1-2x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-2x^2}\right)^2} = \frac{\left(2x+e^x\right)\sqrt{1-2x^2} - \left(x^2+e^x\right)\frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}}{1-2x^2} =$$

$$= \frac{\left(2x+e^x\right)\sqrt{1-2x^2} + 2x\left(x^2+e^x\right)}{\left(1-2x^2\right)\sqrt{1-2x^2}}$$

в) $y = 3^{\sin x}\arcsin 3x$

Используем формулу (3)

$$y' = \left(3^{\sin x}\right)'\arcsin 3x + 3^{\sin x}\cdot\left(\arcsin 3x\right)' = 3^{\sin x}\cdot\ln 3\cdot\cos x\cdot\arcsin 3x + 3^{\sin x}\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= 3^{\sin x}\left(\ln 3\cdot\cos x\cdot\arcsin 3x + \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\right)$$

г) $y = \ln\cos 4x$

Это сложная логарифмическая функция вида $y = \ln u$, *где* $u = \cos 4x$

Применяем формулу (3):

$$y' = \frac{(\cos 4x)'}{\cos 4x} = \frac{-\sin 4x(4x)'}{\cos 4x} = -4\frac{\sin 4x}{\cos 4x} = -4\,\mathrm{ctg}\,4x$$

Если функциональная зависимость между аргументом x и функцией y задана не непосредственно в виде y = f (x), а через третью переменную t:

$$\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases}$$

то говорят, что функция заданна параметрически, где t - параметр. Например :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

Если можно исключить параметр t, то получим явное или неявное задание функции. В нашем примере можно перейти к неявному заданию функции: $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Производную функции, заданную параметрически, находят по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

т.к. $y'_t = a\cos t$, $x'_t = -a\sin t$, $y_x = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}\,t$.

Как мы видим, производная функции y = f (x) вообще говоря, также является функцией, зависящей от x. Поэтому ее можно дифференцировать еще раз.

Определение. Производной второго порядка (второй производной) называется производная от первой производной:

$$y'' = (y')' \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Аналогично определяются производные более высоких порядков. Вообще:

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, где $y^{(n)}$ - производная n-го порядка.

Пример. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{x^3}{3} + 2x$. *Найти* y'''.

Последовательно находим:

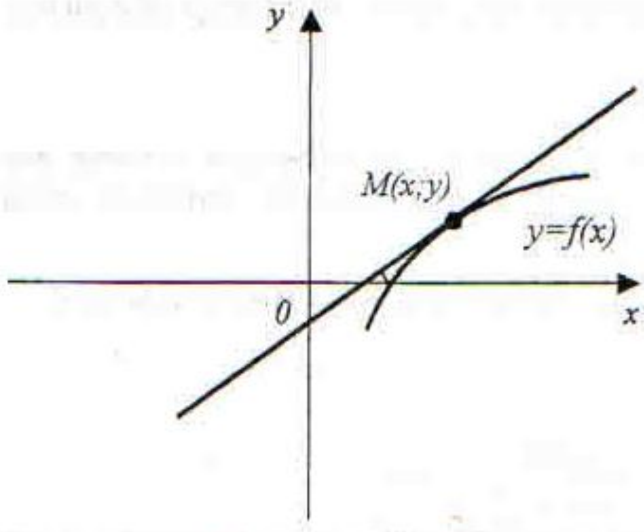
$$y' = x^4 - x^2 + 2,\ \ y'' = 4x^3 - 2x,\ \ y''' = 12x^2 - 2.$$

Пусть функция $S = S(t)$ определяет путь, пройденный материальной точкой за время t. Тогда производная $S'(t)$ - это мгновенная скорость движения, а $S''(t)$ - ускорение.

$$v = S'(t) = \frac{dS}{dt}$$

$$a = S''(t) = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Вообще, производная функции $y = f(x)$ имеет смысл скорости изменения функции. В этом и заключается физический смысл производной.



Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в т.M равен значению производной этой функции в данной точке:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k$$

В этом и заключается геометрический смысл производной.

Задача 3. *Задан закон $S(t)$ изменения пути движения материальной точки. Требуется найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0.*

$S(t) = 3t^4 - 2t^3 + t - 1 \qquad t_0 = 2$

Решение: Значение скорости и ускорения в данный момент времени являются соответственно значениями в этот момент первой и второй производных $S'(t)$ и $S''(t)$.

$S'(t) = 12t^3 - 6t^2 + 1 \qquad V(2) = S'(2) = 73$ *(ед. скорости)*

$S''(t) = 36t^2 - 12t \qquad a(2) = S''(2) = 120$ *(ед. скорости)*

§ 7. Дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Ее производная y' по определению равна

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

откуда

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, т.е. $dy = y'\Delta x$.

Так как дифференциал независимой переменной равен ее приращению, т.е.

$dx = \Delta x$, то

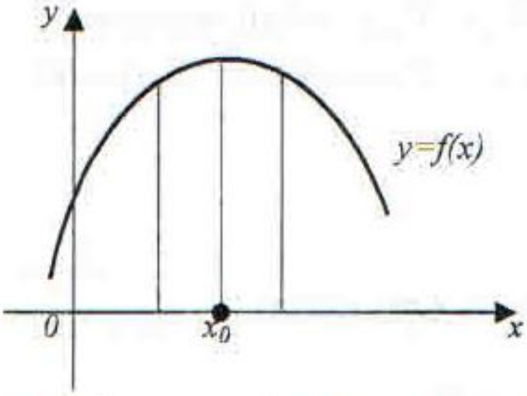
$dy = y'dx$.

По этой формуле находят дифференциал функции.

Например: *$y = x^2$, $dy = 2xdx$, т.е. для того, чтобы найти дифференциал функции, нужно ее производную умножить на дифференциал аргумента.*
Приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, причем равенство тем точнее, чем меньше Δx.
$dy \approx \Delta y$
Это равенство используется в приближенных вычислениях значений функций

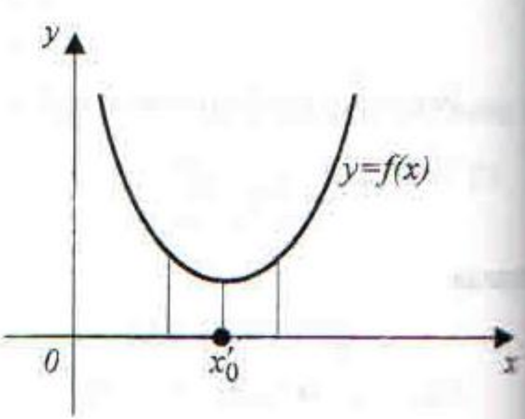
§8. Исследование функций с помощью производной

а) Экстремум функции



Определение 1. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если значение ее в этой точке больше, чем в любой близлежащей, т.е. если $f(x_0) > f(x)$, где точка x - достаточно близкая точка к x_0.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке x'_0, если ее значение в этой точке меньше, чем в любой близлежащей, т.е. $f(x'_0) > f(x)$, где точка x - достаточно близкая точка к точке x'_0.



Замечание. Минимумы и максимумы функции называются экстремумами. Понятие экстремума является локальным, т.е. относится к окрестности определенных точек.

Исследуя функцию на экстремум, проверяют необходимое и достаточные условия.

Необходимым условием экстремума является равенство нулю ее производной y' (или ее несуществование). Достаточные условия могут быть в разных видах; в частности это изменение знака производной при переходе через критическую точку.

Предлагается следующий алгоритм исследования функции на экстремум.

1. Находим область определения функции .

2. Находим производную y'.

3. Находим критические точки (точки, в которых $y' = 0$ или не существует

[illegible] внутри области определения.

4. Определяем знаки производной слева и справа от каждой критической точки. Если производная при переходе через критическую точку слева направо меняет знак с "+" на "-", то в этой критической точке функция имеет максимум . Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с "-" на "+", то в этой точке функция имеет минимум .

5. Находим y_{max} и y_{min}.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$

1. Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, т.е.

$$D(y) = \{x \in (-\infty; +\infty)\}$$

2. Находим производную

$$y' = x^3 - 3x^2$$

3. Находим критические точки. Для этого решаем уравнение

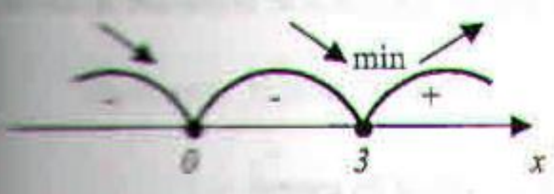
$$y' = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-3) = 0$$

отсюда $x_1 = 0 \quad x_2 = 3$.

Точек, в которых производная y' не существует, нет.

Т.е. критических точек только две: $x_1 = 0 \quad x_2 = 3$. К этим точкам нужно относится так: если функция $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$ имеет экстремум, то он может быть только в этих точках (а может и не быть).

4. Проверяем достаточное условие экстремума. Для этого нужно определить знаки производной слева и справа от каждой критической точки.



В промежутках (-∞; 0) и (0; 3) производная отрицательна, значит функция здесь убывает (стрелки вниз). В промежутке (3; +∞) $y' > 0$, значит функция возрастает (стрелка вверх). При переходе через критическую точку $x = 0$ производная знака не меняет, значит в этой точке экстремума нет.

При переходе через критическую точку $x = 3$ производная меняет знак с "-" на "+" , значит в этой точке функция имеет минимум.

5. Находим минимальное значение функции:

$$y_{\min} = y(3) = \frac{81}{4} - 24 = -6\frac{3}{4}$$

Замечание: Иногда удобнее применять достаточное условие экстремума в другом виде:

Если в критической точке x_0 вторая производная положительна, т.е. $y''(x_0) > 0$, то в этой точке функция имеет минимум, если $y'' < 0$, то максимум. Если же $y''(x_0) = 0$, то в точке x_0 экстремума нет .

Действительно : $y''(x) = 3x^2 - 6x$.

$y''(0) = 0$, значит в критической точке $x = 0$ экстремума нет.

$y''(3) = 27 - 18 > 0$, значит в точке $x = 3$ функция имеет минимум.

б) Наибольшие и наименьшие значения функции

Наибольшим значением функции называется самое большое значение, а наименьшим – самое меньшее ее значение.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Эти значения достигаются или в точках экстремума или на концах отрезка.

Отсюда вытекает правило для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a;\ b]$:

1) Находим критические точки, лежащие внутри $[a;\ b]$.

2) Вычисляем значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах $[a;\ b]$.

3) Сравнивая полученные значения, выбираем из них самое большое и самое малое.

Пример. Найти наибольшие и наименьшие значения функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35 \text{ на } [-4\ ;\ 4]$$

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0,$

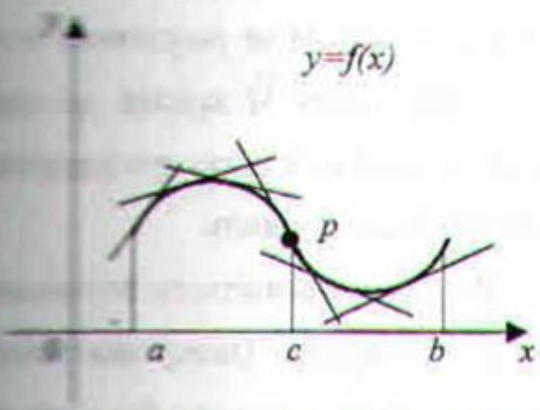
$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$

2) $f(-1) = 40, \qquad f(3) = 8, \qquad f(-4) = -41, \qquad f(4) = 15.$

3) Значит, $f_{наиб} = f(-1) = 40$

$f_{наим} = f(-4) = -41$

в) Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба



Кривая $y = f(x)$ выпукла на интервале $(a; c)$, если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая $y = f(x)$ вогнута на интервале $(c; b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Точка p на кривой, отделяющая ее выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и вогнутость.

1. Находим область определения функции.
2. Находим вторую производную.
3. Находим точки, в которых $y'' = 0$ или не существует (критические точки II рода).
4. Определяем знак y'' слева и справа от каждой критической точки. Тот интервал, в котором $y'' > 0$, кривая вогнута, там где $y'' < 0$ - выпукла.
5. Определяем точки перегиба.

Пример. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой.

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3$$

1. $x \in (-\infty; +\infty)$

2. $y' = x^3 - 3x^2$ $\qquad$ $y'' = 3x^2 - 6x$

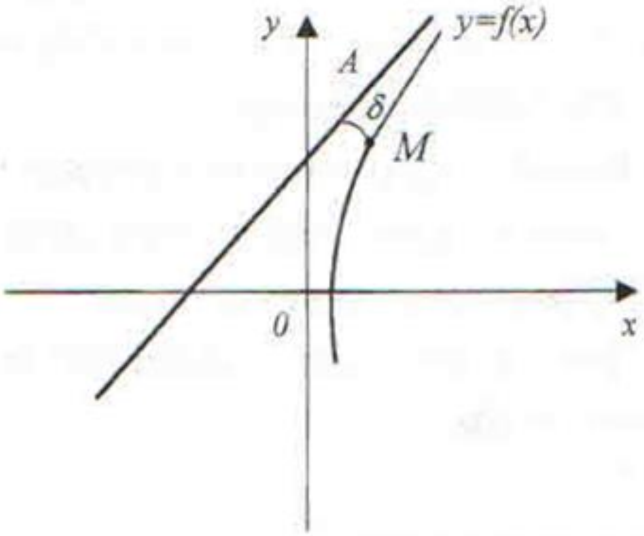
3. $y' = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$.

4. $y'' > 0$ на $(-\infty, 0) \cup (2, \infty) \Rightarrow$ кривая вогнута, $y'' < 0$ на $(0, 2)$ – кривая выпукла.

5. $y(0) = 0, \quad y(2) = -4$

Значит p_1 (0; 0) и p_2 (2; -4) - точки перегиба.

г) Асимптоты графика функции



Прямая A называется асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Различают асимптоты вертикальные и наклонные (невертикальные). Если в точке $x = a$ хотя бы один из односторонних пределов:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$$

или

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = a$ (вертикальная прямая, проходящая через точку $x = a$) есть вертикальная асимптота. Обычно вертикальная асимптота проходит через точку бесконечного разрыва функции $y = f(x)$.

Невертикальная (наклонная) асимптота (если она существует) имеет уравнение:

$$y = kx + b,$$

где $\quad k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x},$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$$

Пример. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$

$x = 0$ – точка разрыва, т.к. в этой точке функция не определена.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2+2x-1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2+2x-1}{x} = -\infty$$

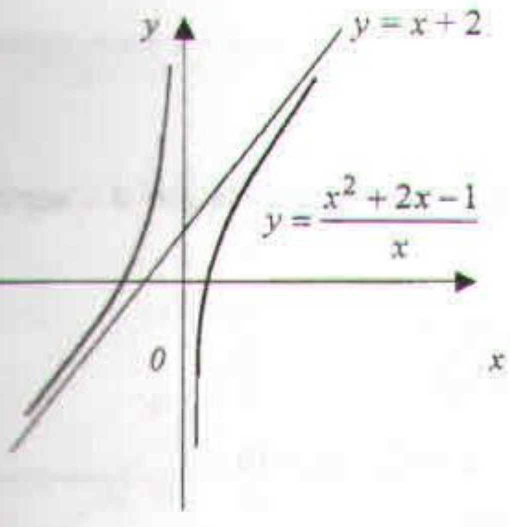
Значит $x = 0$ - вертикальная асимптота.

Наклонная асимптота, если она существует, имеет уравнение $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2}^{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{2x}{x}-\frac{1}{x^2}}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x}^{\frac{\infty}{\infty}} == \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2$$

Значит $y = x + 2$ - наклонная асимптота.



3) Полное исследование функции

Целью полного исследования функции, как правило, является построение ее графика. Предлагается следующая схема:

1. Найти область определения функции .

2. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и ее односторонние пределы в этих точках.

3. Определить интервалы возрастания и убывания функции и экстремумы.

4. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.

5. Найти асимптоты.

6. По результатам исследования построить график функции.

Задача IV . *Исследовать функцию и построить ее график.*

$$y = \frac{x^2+20}{x-4}$$

Решение.

1. Область определения функции:

$$D(y) = \{x \in (-\infty;4) \cup (4;+\infty)\}$$

2. Точка $x = 4$ - точка разрыва. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4-0} y = \lim_{x \to 4-0} \left(\frac{x^2+20}{x-4} \right) = -\infty$$

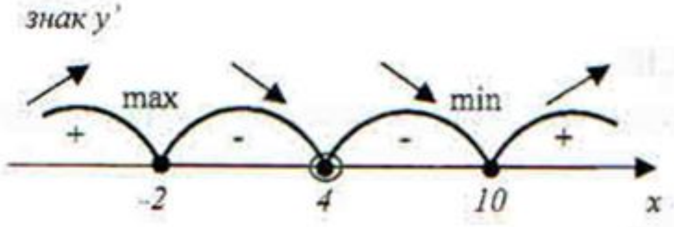
$$\lim_{x \to 4+0} y = \lim_{x \to 4+0} \left(\frac{x^2+20}{x-4} \right) = +\infty$$

Значит $x = 4$ - точка разрыва II рода, поэтому прямая $x = 4$ - вертикальная асимптота.

3. $$y' = \frac{2x(x-4)-(x^2+20)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 10 .$$

В точке $x = 4$ производная не существует



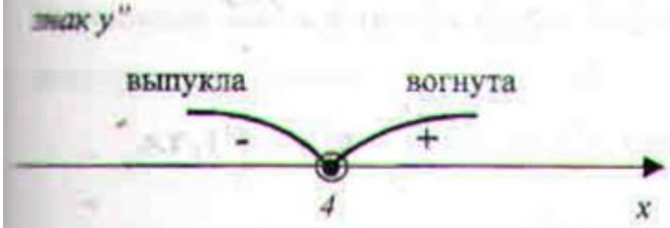
Значит, $y_{max} = y(-2) = -4$

$y_{min} = y(10) = 20.$

В интервалах $(-\infty;-2) \cup (10;+\infty)$ функция возрастаете в интервалах $(-2;4) \cup (4;10)$ - убывает .

4. $$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2-(x^2-8x-20)2(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{36}{(x-4)^3}$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{36}{(x-4)^3} = 0 \;\Rightarrow\;$$ критических точек нет, нет и перегиба.



В точке $x = 4$ - y'' не существует.

В интервале $(-\infty;4)$ - функция выпукла, в интервале $(4;+\infty)$ - вогнута. Тем не менее точек перегиба нет, так как в точке $x = 4$ функция не определена.

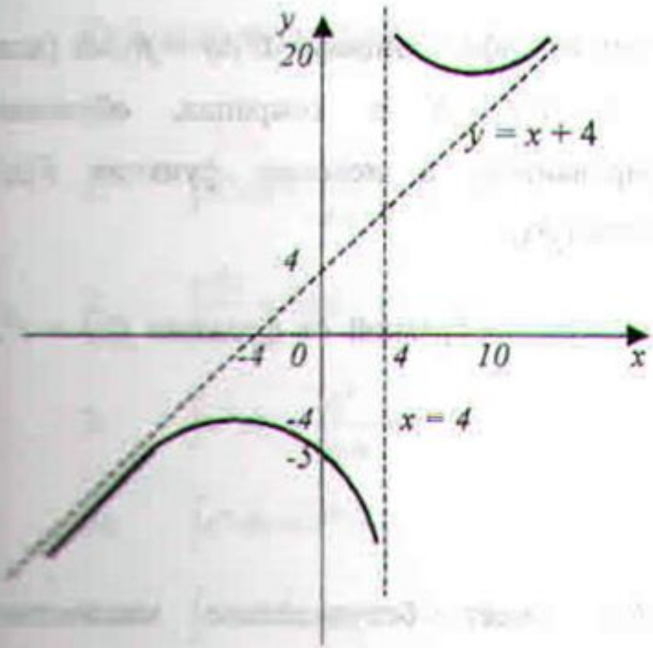
5. Как было установлено ранее $x = 4$ - вертикальная асимптота.

Наклонная асимптота, если она существует, имеет уравнение $y = kx + b$,

где $$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+20}{x^2-4x}^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{4}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+20}{x-4} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+20}{x-4} = 4$$

Значит $y = x + 4$ – наклонная асимптота.



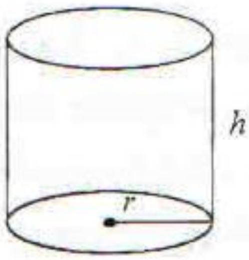
6. График данной функции ось OX не пересекает, а ось OY пересекает в точке $(0; -5)$.

По результатам проведенного исследования строим график функции.

Задача 5. Среди цилиндров, полная поверхность которых равна 6π, найти цилиндр, имеющий наибольший объем.

Решение. Пусть r - радиус основания цилиндра, h - его высота. Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, т.е. это функция двух переменных. По условию $S = 6\pi$, т.е.

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 6\pi \Rightarrow h = \frac{3-r^2}{r}$$



Поэтому $V = \pi r^2 \frac{3-r^2}{r} = \pi(3r - r^3)$, т.е.

$$V = V(r) = \pi(3r - r^3).$$

Найдем максимум этой функции при $r > 0$

$$V'(r) = 3\pi(1-r^2) \qquad V'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

Значит, при $r = 1$ функция $V(r)$ принимает максимальное значение.

$$h = \frac{3-r^2}{r} = 2.$$

§9. Первообразная и неопределенный интеграл

Отыскание функции $F(x)$ по известному ее дифференциалу $dF(x) = f(x)dx$ (или по известной ее производной $F'(x) = f(x)$), т е. операция, обратная дифференцированию, называется интегрированием, а искомая функция $F(x)$ называется первообразной функцией от функции $f(x)$.

Например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной от функции $f(x) = x^2$, т.к.

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 = f(x)$$

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных, которые отличаются друг от друга на постоянное слагаемое: если $F(x)$ - некоторая первообразная от функции $f(x)$ т.е. $F'(x) = f(x)$, то и $F(x) + c$, где c -

const, также является первообразной от $f(x)$ ибо $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$.

Определение. Пусть $F(x)$ - некоторая первообразная от функции $f(x)$. Выражение $F(x) + c$, где c - произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx$$

Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + c$, если $F'(x) = f(x)$ и c - const.

Коротко: неопределенный интеграл - это множество всех первообразных.

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

Свойство 2. $\int[f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm f_2(x)dx$

Свойство 3. $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$

Свойство 4. $\int F'(x)dx = F(x) + c$

Таблица интегралов.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

3a. $\int e^u du = e^u + c$

4. $\int \sin u du = -\cos u + c$

5. $\int \cos u du = \sin u + c$

6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$

7. $\displaystyle\int\frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c$

8. $\displaystyle\int\frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c$

9. $\displaystyle\int\frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

10. $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$

11. $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + c$

§10 Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Интегрирование, которое можно произвести с помощью свойств и таблицы интегралов (после преобразования подынтегральных функций, если это необходимо), будем называть непосредственным интегрированием.

Примеры непосредственного интегрирования.

Пример 1.

$$\int\left(2x^3-3\sqrt{x}+\frac{2}{x}-5\right)dx = 2\int x^3dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int\frac{dx}{x} - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}} + 2\ln|x| - 5x + c = \frac{x^4}{2} - 2x\sqrt{x} + 2\ln|x| - 5x + c$$

Пример 2.

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx = 2\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} + 3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} = 3\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + c$$

Пример 3.

$$\int\left(\frac{2}{x^2+4}+\frac{1}{x^2-9}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x^2+4}+3\int\frac{dx}{x^2-9} =$$
$$= 2\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c$$

Пример 4.

$$\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx = \int\frac{x^4+2x^2+1}{x^3}dx = \int\left(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int x dx + 2\int\frac{dx}{x}+\int x^{-3}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}+2\ln|x|+\frac{x^{-2}}{-2}+c = \frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+c$$

Пример 5.

$$\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx = \int\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right) = \int e^x dx + \int x^{-2}dx = e^x - \frac{1}{x}+c$$

Пример 6.

$$\int\cos(x+3)dx = \int\cos(x+3)d(x+3) = \sin(x+3)+c$$

Здесь использовалось очевидное свойство дифференциала $d(x+3) = dx$, т.е. под знаком дифференциала можно прибавить постоянное слагаемое $d(x+c) = dx$.

Пример 7.

$$\int\frac{dx}{x-1} = \int\frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1|+c$$

Пример 8.

$$\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}\int e^{4x}d4x = \frac{1}{4}e^{4x}+c$$

Пример 9.

$$\int\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx = \int e^{\frac{x}{2}}dx+\int e^{-\frac{x}{2}}dx = 2\int e^{\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}-2\int e^{-\frac{x}{2}}d\left(-\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}+c$$

Пример 10.

$$\int\frac{dx}{1-3x} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(-3x)}{1-3x} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(1-3x)}{1-3x} = -\frac{1}{3}\ln|1-3x|+c$$

Пример 11.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-\frac{1}{2}} d(2x-3) = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2x-3} + c$$

Пример 12.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d2x}{\sqrt{9-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + c$$

Т.е., если под знаком дифференциала функцию умножить на постоянную величину, то все выражение нужно разделить на эту же постоянную:

$$du = \frac{1}{c} d(cu)$$

Пример 13.

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

Здесь использовалась такая операция, как «внесение функции под знак дифференциала»:

$$\cos x dx = d\sin x$$

Т.е., внося функцию под знак дифференциала, мы пишем под знаком дифференциала ее первообразную. Например :

$$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$$

$$e^x dx = d(e^x)$$

$$\frac{1}{x^2+1} dx = d(\operatorname{arctg} x) \qquad \text{и т.д.}$$

Пример 14.

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c$$

Замечание: Последний интеграл можно найти, используя очевидное правило: если в числителе подынтегральной дроби стоит производная знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя. Т.е.

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c$$

Пример 15.

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin x+2}=\ln\left|\sin x+2\right|+c$$

Пример 16.

$$\int\frac{3x^2dx}{x^3-5}=\ln\left|x^3-5\right|+c$$

Пример 17.

$$\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x-5}}=\int\frac{d\sin x}{\sqrt{\sin x-5}}=\int(\sin x-5)^{-\frac{1}{2}}d(\sin x-5)=$$

$$=\frac{(\sin x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{\sin x-5}=c$$

Пример 18.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}=\int\frac{d\ln x}{x\sqrt{1-\ln x}}=\int(1-\ln x)^{-\frac{1}{2}}d\ln x=$$

$$=-\int(1-\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(1-\ln x)=-\frac{(1-\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=-2\sqrt{1-\ln x}+c$$

Пример 19.

$$\int\frac{xdx}{x^4+2}=\int\frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^4+2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^4+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{2}}+c$$

2. Метод подстановки (замена переменной)

Идея этого метода заключается в том, что введя новую переменную, получим интеграл, который легко берется. Как правило, в каждом конкретном интеграле замена переменной (подстановка) подбирается индивидуально. Практически, все из рассмотренных ранее интегралов можно найти методом подстановки. Рассмотрим возможности этого метода на примерах.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{1-3x}$$

Пусть $u = 1-3x$. Продифференцируем обе части:

$$du = -3dx \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{3}du$$

тогда $$\int\frac{dx}{1-3x} = \int\frac{-\frac{1}{3}du}{u} = -\frac{1}{3}\int\frac{du}{u} = -\frac{1}{3}\ln|u| + c = -\frac{1}{3}\ln|1-3x| + c$$

Пример 2.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$$

Пусть $u = 2x-3 \quad \Rightarrow \quad du = 2\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}du,$

тогда $$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \int\frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{u} + c = \sqrt{2x-3} + c$$

Пример 3.

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}$$

Пусть $u = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad du = 2\,xdx \quad \Rightarrow \quad xdx = \frac{1}{2}du,$

тогда $$\int\frac{xdx}{x^2+1} = \int\frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c$$

Пример 4.

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin x+2}$$

Пусть $u = \sin x + 2 \quad \Rightarrow \quad du = \cos xdx,$

тогда $$\int\frac{\cos xdx}{\sin x+2} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sin x+2| + c$$

Пример 5.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$$

Пусть $u = 1 - \ln x \quad \Rightarrow \quad du = -\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{x} = -du$,

тогда $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{1-\ln x} + c$$

Замечание. В некоторых случаях трудно догадаться, какую нужно делать замену.

Так, например, $\int \dfrac{dx}{\sin x}$ следует находить с помощью замены:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} u \quad \Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} u \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2du}{u^2+1}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2u}{u^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2du}{u^2+1}}{\frac{2u}{u^2+1}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

Задача VI. Найти неопределенные интегралы способом подстановки (методом замены переменной).

а) $\int (\ln x)^8 \dfrac{dx}{x}$

Пусть $u = \ln x \quad \overset{d}{\Rightarrow} \quad du = \dfrac{dx}{x}$,

тогда $$\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x} = \int u^8 du = \frac{u^9}{9} + c = \frac{(\ln x)^9}{9} + c$$

б) $\int e^{2x^3+3} x^2 dx$

Пусть $u = 2x^3 + 3 \quad \overset{d}{\Rightarrow} \quad du = 6x^2 dx \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = \dfrac{1}{6} du$,

тогда $$\int e^{2x^3+3} x^2 dx = \int e^u \frac{1}{6} du = \frac{1}{6}\int e^u du = \frac{1}{6} e^u + c = \frac{1}{6} e^{2x^3+3} + c$$

3. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

Интегралы такого вида берутся в два этапа. На первом этапе в числителе выделяется производная от знаменателя, а затем, в знаменателе второго интеграла выделяется полный квадрат.

Пример 1.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = 3\int \frac{x-\frac{1}{3}}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{2}{3}}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+4-\frac{2}{3}}{x^2-4x+8}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{10}{3}}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + c + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + c + 5\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+2^2} = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + 5\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + c$$

Здесь использовалось правило: если числитель подынтегральной дроби - есть производная знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя.

Задача VII. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{5x+2}{x^2+6x+10}dx = 5\int \frac{x+\frac{2}{5}}{x^2+6x+10}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{5}}{x^2+6x+10}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+6-6+\frac{4}{5}}{x^2+6x+10}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx + \frac{5}{2}\int \frac{-\frac{26}{5}}{x^2+6x+10}dx = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| - 13\int \frac{dx}{x^2+6x+9+1} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| - 13\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| - 13\operatorname{arctg}(x+3) + c$$

4. Метод интегрирования по частям

Если подынтегральная функция является произведением степенной и показательной функции (степенной и тригонометрической, степенной и логарифмической, показательной и степенной и т. д.), то такие интегралы следует вычислять по частям, т.е. по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Смысл применения этой формулы заключается в том, что вместо того, чтобы найти $\int u dv$, мы будем находить интеграл $\int v du$, который естественно, должен находиться проще.

Успех интегрирования во многом зависит от того, как в подынтегральном выражении будет выбрано u и dv. Можно указать лишь рецепты (четкого правила нет):

> *В качестве функции u выбирают такую, которая упрощалась бы при дифференцировании, в качестве dv выбирают такое выражение, которое легко интегрируется (хотя возможны и исключения).*

Примеры:

Пример 1.

Выбираем $u = x$, $dv = \sin x dx$,

находим $du = dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$,

тогда $\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$

Пример 2.

Выбираем $u = x^2$, $dv = \cos x dx$,

находим $du = 2x\,dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$,

тогда

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = (см.пр.1) =$$
$$= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + c = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

Т.е. интегрирование по частям проводилось дважды. Очевидно, что в интеграле $\int x^k \cos x dx$ интегрировать по частям нужно k раз.

Задача VIII. Найти интеграл $\int (2x+8)\cos 7x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$.

Положим $u = 2x + 8$, $dv = \cos 7x dx$,

находим $du = 2dx$, $v = \int \cos 7x dx = \frac{1}{7}\sin 7x$,

тогда

$$\int (2x+8)\cos 7x dx = \frac{2x+8}{7}\sin 7x - \int \frac{1}{7}\sin 7x \cdot 2dx =$$

$$= \frac{2x+8}{7}\sin 7x - \frac{2}{7}\int \sin 7x dx = \frac{2x+8}{7}\sin 7x + \frac{2}{49}\cos 7x + c$$

5. Интегрирование дробно - рациональных функций (рациональных дробей)

Функция вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - многочлены степени n и m соответственно, называется дробно-рациональной функцией. В дальнейшем будем называть ее рациональной дробью.

Если $n < m$, то дробь называется правильной, при $n \geq m$ - неправильной.

Например, $\frac{x^2+1}{x^3+2x-1}$; $\frac{1}{x^3+1}$ *- правильные дроби,*

$\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{x^3}{x^3+2x+2}$ *- неправильные.*

Любую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей. Простейшие дроби - это дроби следующих четырех типов:

I $\quad \frac{A}{x-a}$

II $\quad \frac{A}{(x-a)^k}$, где k - целое число, $k \geq 2$

III $\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $p^2-4q<0$

IV $\quad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, где k - целое число, $k \geq 2$

Рассмотрим сначала интегрирование простейших дробей.

I $\quad \frac{A}{x-a}$ $\qquad \int \frac{3}{x-2} = 3\int \frac{d(x-2)}{x-2} = 3\ln|x-2| + c$

В общем виде: $\qquad \int \frac{A}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + c$

II $\quad \dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\quad \displaystyle\int\frac{4}{(x-3)^3}dx = 4\int(x-3)^{-3}d(x-3) = 4\frac{(x-3)^{-2}}{-2}+c = -\frac{2}{(x-3)^2}+c$

В общем виде: $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^k d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+c$

Т.е., интегрирование простейших дробей I и II типов проводится элементарно. Интегрирование простейшей дроби III типа рассмотрено в п.3 § 10.

Простейшая дробь IV типа встречается редко и ее интегрирование довольно громоздкое, поэтому, этот случай рассматривать не будем.

Рассмотрим следующий вопрос: *Как разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей?*

Для того, чтобы правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей, нужно:

1) разложить знаменатель дроби на множители,

2) по виду сомножителей знаменателя определить вид разложения на сумму простейших дробей. При этом возможны три случая:

а) все множители знаменателя линейные и различные. Тогда для каждого множителя следует записать простейшую дробь I типа. Например:

$$\frac{P(x)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2},$$

$$\frac{P(x)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x+3}$$

б) все множители знаменателя линейные, но среди них есть одинаковые. Например:

$$\frac{P(x)}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{P(x)}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}$$

в) среди множителей знаменателя встречается квадратный трехчлен, который нельзя разложить на линейные множители. Например:

$$\frac{P(x)}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{P(x)}{x(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

Замечание: В рассматриваемых примерах A, B, C, ... пока неизвестные коэффициенты (числа). На данном этапе числитель рациональной дроби не "участвует" в определении вида разложения на сумму простейших дробей.

3) привести правую часть к общему знаменателю, сравнить числители и методом неопределенных коэффициентов найти числа A, B, C, ...

Примеры: Разложить на сумму простейших рациональную дробь. Проинтегрировать.

Пример 1.

$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2-3x}=\frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)}=\frac{2x+3}{x(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax-3A+Bx^2+3Bx+Cx^2-Cx}{x(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B+C)x^2+(2A+3B-C)x-3A}{x(x-1)(x+3)}$$

Т.к. знаменатели дробей равны, то должны быть равны и числители, т.е.

$$(A+B+C)x^2+(2A+3Bx-C)x-3A=2x+3.$$

Далее, сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях. Получаем систему:

$$\begin{cases}A+B+C=0\\2A+3B-C=2\\-3A=3\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}A=-1\\B=\dfrac{5}{4}\\C=-\dfrac{1}{4}\end{cases},$$

значит

$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2-3x}=-\frac{1}{x}+\frac{\frac{5}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+3},$$

поэтому

$$\int\frac{2x+3}{x^3+2x^2-3x}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{\frac{5}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+3}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=-\ln|x|+\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C$$

Пример 2.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+2x+1)}=\frac{3x^2+2x+1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

Отсюда

$$(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A=3x^2+2x+1.$$

Значит

$$\begin{cases}A+B=3\\2A+B+C=2\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\\C=-3\end{cases},$$

поэтому

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2},$$

тогда

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\ln|x|+2\ln|x+1|-2\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C=\ln|x|+2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+C=\ln|x|+\ln(x+1)^2+\frac{2}{x+1}+C$$

Пример 3.

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+4A+2C}{x^3+8}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=0 \\ 4A+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{12} \\ B=-\dfrac{1}{12}, \\ C=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Значит

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4},$$

тогда

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\int\left(\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}\right)dx=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{12}\int\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2-6}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{12}\ln\sqrt{x^2-2x+4}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}dx=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{12}\ln\sqrt{x^2-2x+4}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{12}\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-2x+4}}+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$$

Задача IX. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

Отсюда $(A+B)x^2+(-B+C)x+A-C=x$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1, \\ A-C=0 \end{cases}$$

Сложив все три уравнения, получим

$$2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2},$$

тогда

$$B=-\frac{1}{2}, \quad C=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2-1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=$$

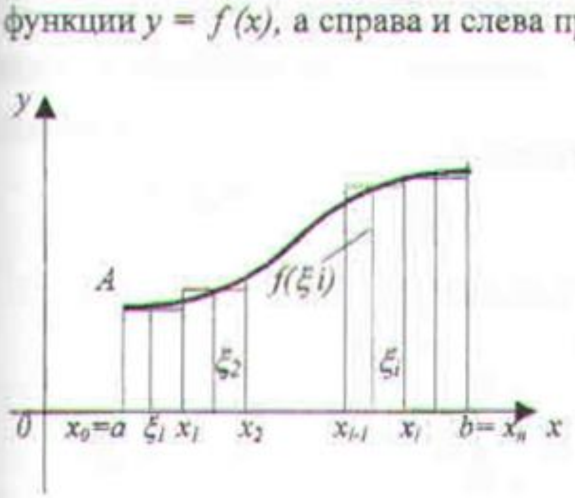
$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{2x-2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-$$

$$-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

§ 11. Определенный интеграл

1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла.

Пусть нужно вычислить площадь криволинейной трапеции, т.е. фигуры, ограниченной снизу отрезком *[a; b]* на оси *OX*, сверху - графиком непрерывной функции $y = f(x)$, а справа и слева прямыми $x = a$ и $x = b$.



Для этого:

1) разобьем отрезок *[a;b]* на *n* частей точками $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n=b$. Через каждую из этих точек проведем вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y=f(x)$. При этом фигура разбилась на полоски, в основании которых лежит элементарный

отрезок $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$);

2) вычислим приближенно площадь каждой из полученных полосок, заменив ее площадью прямоугольника с тем же основанием $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ и высотой $f(\xi_i)$, где точка $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$,

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i ;$$

3) сложив эти площади, получим приближенное значение искомой площади

$$S \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ;$$

4) перейдя к пределу при $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$, получим точное значение площади криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Определение. Предел, стоящий в правой части равенства (1) называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx$$

Таким образом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Замечание. Подразумевается, что этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на n частей, ни от способа выбора точек ξ_i. Числа a и b называются пределами интегрирования (*нижний и верхний*).

Свойства определенного интеграла

Свойство 1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad (c = const)$

Свойство 2. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

Свойство 3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Свойство 4. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Свойство 5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Свойство 6. (Теорема о среднем)

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то внутри этого отрезка найдется такая точка $x = c$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

При вычислении определенного интеграла полезно помнить, что:

а) если $f(x)$ - четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$

б) если $f(x)$ - нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

2. Вычисление определенного интеграла

Пусть $F(x)$ - некоторая первообразная от функции $f(x)$ на $[a;b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

т.е., определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Эта формула называется формулой *Ньютона-Лейбница*.

Примеры:

Пример 1. $\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Пример 2. $\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x}\right)dx = \left(x^2 - \ln|x|\right)\Big|_1^2 = (4 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 3 - \ln 2$

<u>Пример 3.</u> $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2}$

Т.е. вычисление определенного интеграла сводится к нахождению соответствующего неопределенного интеграла (первообразной), поэтому рассмотренные ранее методы интегрирования остаются в силе. Остановимся лишь на некоторых особенностях в интегрировании подстановкой и по частям.

<u>Пример 1.</u> $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Этот интеграл вычисляется с помощью замены:

$x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$ и при $x = 0$ $t = 0$, а при $x = 2$ $t = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - 0) + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$$

<u>Пример 2.</u> $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

Обозначим $\sqrt{x} = t$, тогда при $x = 4$, $t = 2$, при $x = 9$, $t = 3$, $dx = 2tdt$.

Итак,

$$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx = \int\limits_2^3 \frac{t}{t-1}2tdt = 2\int\limits_2^3 \frac{t^2}{t-1}\,dt = 2\int\limits_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 2\int\limits_2^3 \frac{(t+1)(t-1)}{t-1}\,dt +$$

$$+2\int\limits_2^3 \frac{dt}{t-1} = 2\int\limits_2^3 (t+1)dt + 2\int\limits_2^3 \frac{dt}{t-1} = 2\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_2^3 + 2\ln|t-1|\,\Big|_2^3 = 2\left(\frac{9}{2}+3\right) - 2\left(\frac{4}{2}+2\right) =$$

$$= 2\ln 2 - 2\ln 1 = 7 + 2\ln 2$$

Значит, вычисляя определенный интеграл методом подстановки, следует менять пределы интегрирования.

Пример 3. $\int\limits_1^e x\ln x dx$

Этот интеграл следует вычислять по частям, т.е. по формуле

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

Пусть $u = \ln x$, $dv = xdx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$.

Поэтому

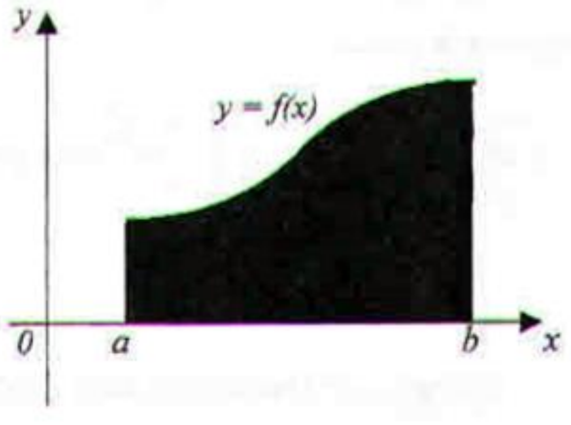
$$\int\limits_1^e x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

3. Приложения определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно вычислить многие геометрические и физические величины. Рассмотрим некоторые из них.

а) Площадь плоской фигуры.



Как мы установили ранее, площадь криволинейной трапеции находится по формуле: $S = \int\limits_a^b f(x)dx$

Если функция, график которой ограничивает криволинейную трапецию, задана в параметрическом виде:

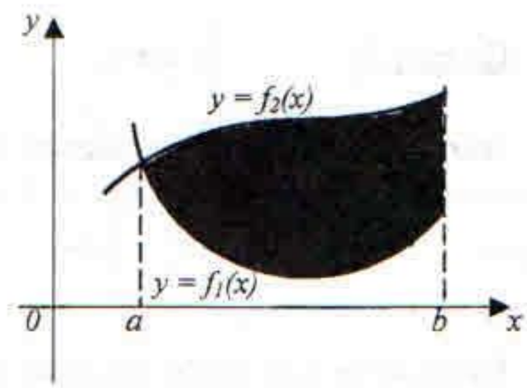
$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

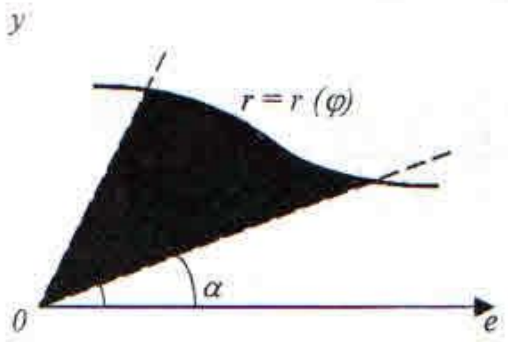
то

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\phi'(t)dt$$

Площадь фигуры, ограниченной снизу графиком функции $y = f_1(x)$, а сверху - графиком функции $y = f_2(x)$, находится по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$





Площадь криволинейного сектора OAB, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

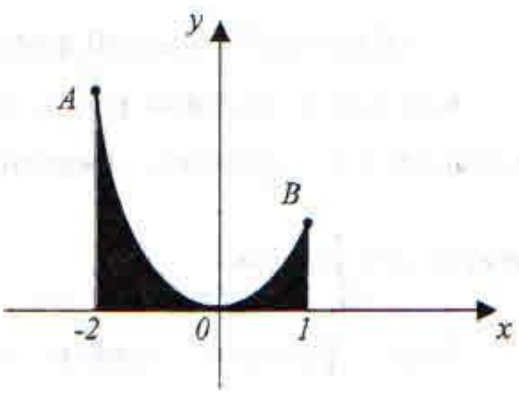
Примеры:

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

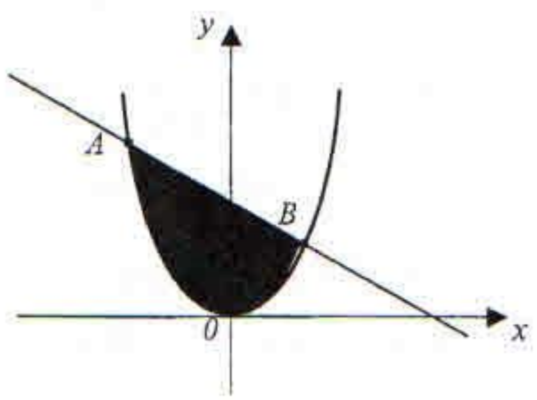
$$y = x^2,\ y = 0,\ x = -2,\ x = 1.$$

Это криволинейная трапеция, поэтому ее площадь равна:

$$S = \int_{-2}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = 3\ (кв.ед.)$$



Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x + y = 2$.



Фигура ограничена снизу параболой $y = x^2$ ($f_1(x) = x^2$), сверху прямой $x+y = 2 \Rightarrow f_2(x) = 2 - x$. Найдем координаты точек пересечения этих линий. Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

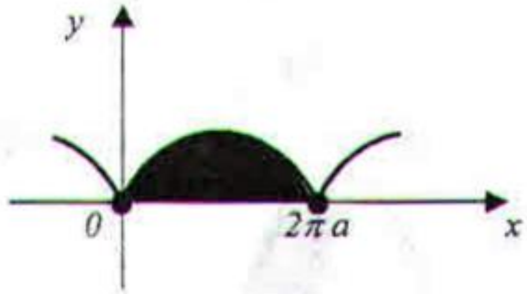
$$y_1 = 4, \quad y_2 = 1$$

Значит, $A\,(-2;\,4)$, $B\,(1;\,1)$, тогда

$$S = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = 4{,}5 \ (\textit{кв.ед.})$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



Кривая задана параметрическими уравнениями, где $\phi(t) = a(t - \sin t)$, $\varphi(t) = a(1 - \cos t)$, причем $0 \le t \le 2\pi$. Значит $\phi'(t) = a(1 - \cos t)$, поэтому

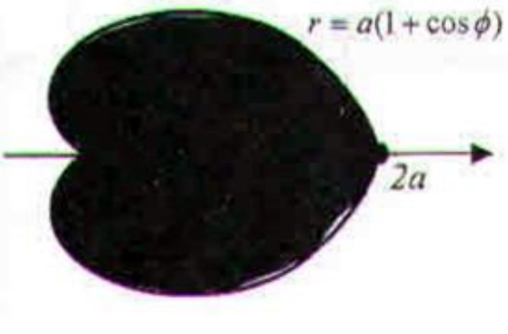
$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} dt - 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 t\Big|_0^{2\pi} - 2a^2 \sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2 (\textit{кв.ед.})$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r = a(1 + \cos\phi).$$



Кривая задана в полярной системе координат: $r = a(1 + \cos\phi)$, $0 \le \phi \le 2\pi$.

Учтем симметрию фигуры, поэтому

$$S=2\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}a^2(1+\cos\phi)^2d\phi=a^2\int\limits_0^{\pi}(1+2\cos\phi+\cos^2\phi)d\phi=a^2\int\limits_0^{2\pi}d\phi+$$

$$+2a^2\int\limits_0^{\pi}\cos\phi d\phi+\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos 2\phi)d\phi=a^2\phi\Big|_0^{\pi}+2a^2\sin\phi\Big|_0^{\pi}+\left(\frac{a^2}{2}\phi+\frac{a^2}{2}\sin 2\phi\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

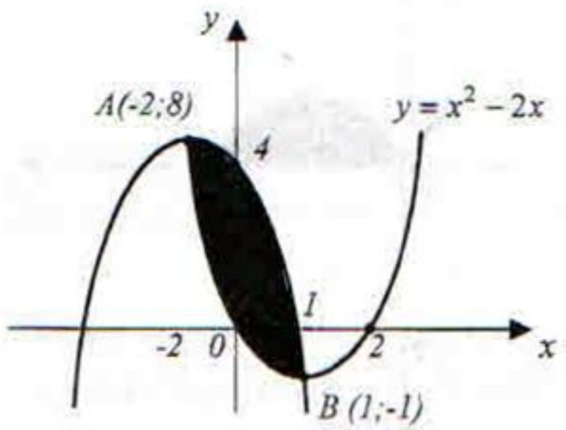
$$=\pi a^2+\frac{\pi a^2}{2}=\frac{3}{2}\pi a^2(кв.ед.)$$

Задача X. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2-2x,$

$y=-x^2-4x+4.$

б) $r=3(1+\sin\phi),\quad \phi=0,\quad \phi=\frac{\pi}{4}.$



а) Фигура ограничена снизу параболой $f_1(x)=x^2-2x$, сверху - параболой $f_2(x)=-x^2-4x+4$.

Чтобы найти точки пересечения парабол, нужно решить систему:

$$\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=-x^2-4x+4 \end{cases}\Rightarrow x^2-2x=-x^2-4x+4\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=-2,\quad y_1=8,$$

$$x_2=1,\quad y_2=-1.$$

Значит, A (-2; 8), B (1; -1), тогда

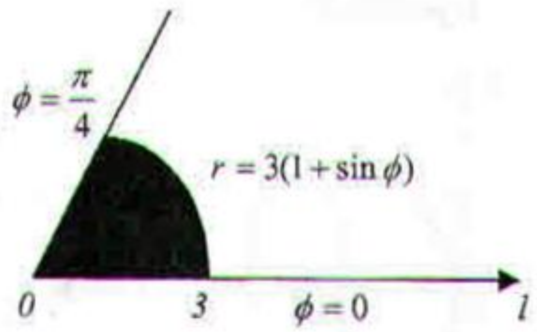
$$S=\int\limits_{-2}^{1}(-x^2-4x+4-x^2+2x)dx=\int\limits_{-2}^{1}(-2x^2-2x+)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{2}{3}-1+4\right)-\left(\frac{16}{3}-4-8\right)=9(кв.ед)$$

б) Фигура ограничена линиями в полярной системе координат:

$\phi = 0, \phi = \frac{\pi}{4}$ - лучи,

$r = 3(1+\sin\phi)$



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 9(1+\sin\phi)^2 d\phi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\sin\phi+\sin^2\phi)d\phi = \frac{9}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\phi d\phi\right) =$$

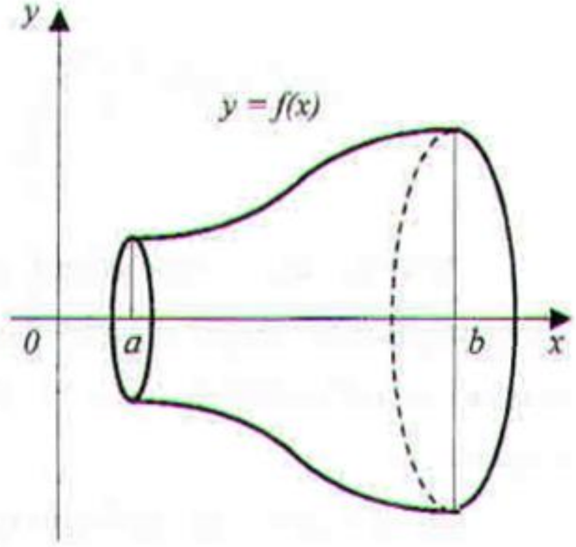
$$= \frac{9}{2}\left(\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\cos\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\phi)d\phi\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{1}{2}\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\sin 2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2} + 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{3\pi}{8} - \sqrt{2} + \frac{7}{4}\right)(\text{кв.ед.})$$

б) Объем тела вращения.

Пусть вокруг оси OX вращается криволинейная трапеция, ограниченная линиями: $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Тогда объем полученного тела вращения можно найти по формуле:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx$$



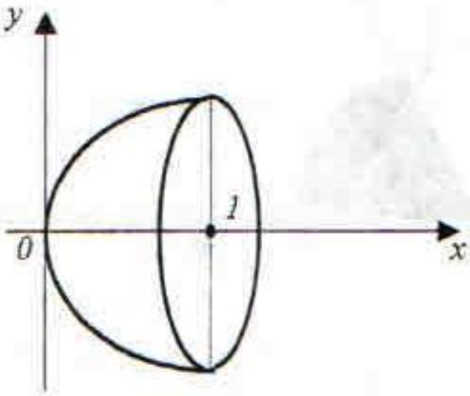
Замечание: Если уравнение кривой задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

то

$$V = \pi\int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\phi'(t)dt$$

Примеры:



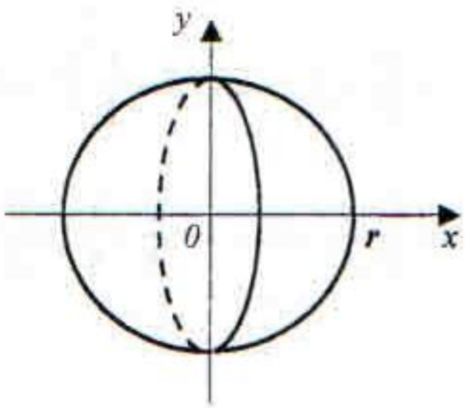
Пример 1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями

$$y^2=2x,\quad y=0,\quad x=1.$$

$$V=\pi\int_0^1 2x\,dx=\pi x^2\Big|_0^1=\pi(\text{куб.ед.})$$

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t. \end{cases}$$



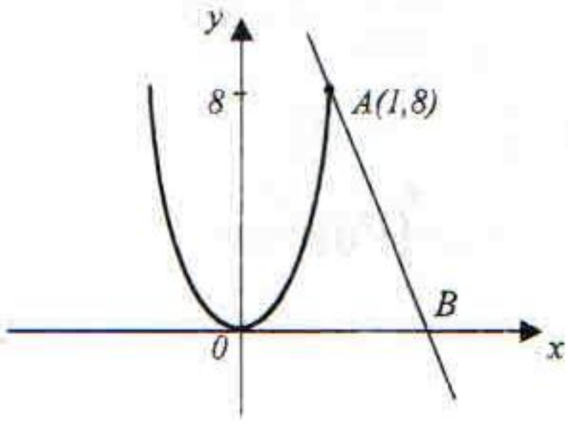
Кривая $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t. \end{cases}$ - это окружность радиуса r с центром в начале координат, заданная параметрически.

Учитывая симметрию фигуры, получим:

$$V=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r^2\sin^2 t(-r\sin t)dt=2\pi r^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,d\cos t=2\pi r^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)d\cos t=$$

$$=2\pi r^3\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=2\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3(\text{куб.ед.})$$

Задача XI. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y=8x^2$ и прямой $y=-6x+14$.



Найдем точки пересечения параболы $y=8x^2$ и прямой $y=-6x+14$. Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} y=-6x+14, \\ y=8x^2 \end{cases} \Rightarrow 8x^2+6x-14=0 \text{ или } 4x^2+3x-7=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=1, \\ x_2=-\dfrac{7}{4} \end{matrix}$$

Первому квадранту соответствует корень $x_1 = 1$, значит $y_2 = 8$. Итак, точка A (1; 8), точка B ($\frac{7}{3}$; 0).

Искомый объем состоит из суммы объема тела, образованного вращением параболы $y = 8x^2$ на отрезке [0; 1], и объема тела, образованного вращением прямой $y = -6x + 14$ на отрезке [1, $\frac{7}{4}$] . Значит,

$$V=V_1+V_2=\pi\int_0^1\left(8x^2\right)^2dx+\pi\int_1^{\frac{7}{3}}(-6x+14)^2dx=\pi\int_0^1 64x^2dx+\pi\int_1^{\frac{7}{3}}\left(36x^2-168x+196\right)dx=$$

$$=\pi\frac{64x^5}{5}\bigg|_0^1+\pi\left(12x^3-84x^2+196x\right)\bigg|_1^{\frac{7}{3}}=\frac{64}{5}\pi+\pi\left(12\frac{323}{27}-84\frac{49}{9}+\frac{1372}{3}\right)-\pi(12-84+196)=$$

$$=\frac{64}{5}\pi+\frac{256}{9}\pi=\frac{1856}{45}\pi(куб.ед.)$$

в) Длина дуги плоской кривой.

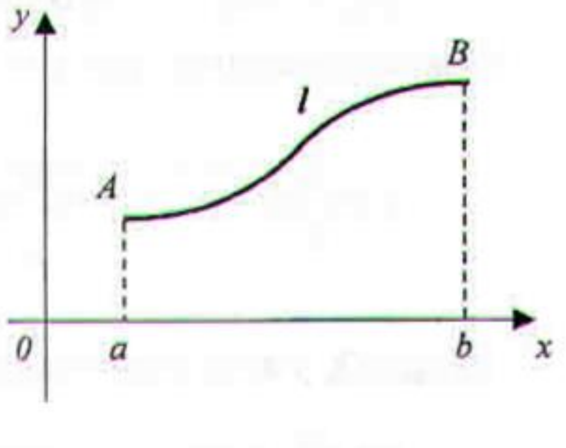
Если на плоскости XOY задана кривая $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, то длина l дуги AB находится по формуле:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases},$$

то $$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\,dt$$



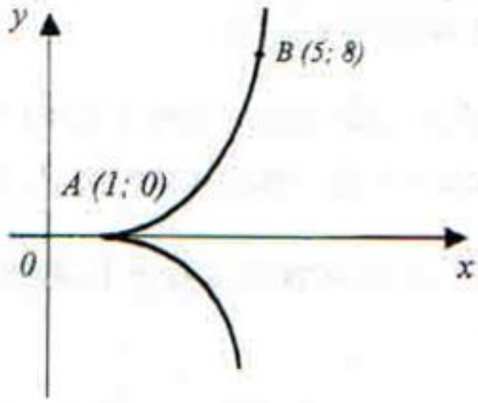
Если кривая задана в полярной системе координат уравнением:

$$r = r(\phi), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

то $\quad l = \int\limits_a^b \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\phi$

Примеры:

Пример 1. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x - 1)^3$ между точками A (1; 0) и B (5; 8).



$$y = \pm(x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$l = \int\limits_1^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^5 \sqrt{9x-5}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{9}\int\limits_1^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}} d(9x-5) = \frac{1}{18}\left.\frac{(9x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^5 =$$

$$= \frac{1}{27}\left[40^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{40\sqrt{40} - 8}{27} = \frac{80\sqrt{10} - 8}{27} = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

Пример 2. Найти длину окружности

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{cases}$$

$$\phi(t) = r\cos t \qquad \phi'(t) = -r\sin t$$

$$\varphi(t) = r\sin t \qquad \varphi'(t) = r\cos t$$

Учитывая симметрию, получим

$$l = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}dt = 4r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4rt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r$$

Пример 3. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\phi)$ *(см. пр.4, п.4 §11)*

$$r = a(1 + \cos\phi) \qquad r' = -a\sin\phi.$$

тогда

$$l = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\phi)^2 + a^2\sin^2\phi d\phi} = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\phi+\cos^2\phi+\sin^2\phi d\phi} =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\phi)}d\phi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\phi}{2}}d\phi = 4a\int_0^{\pi}\sqrt{\cos\frac{\phi}{2}}d\phi = 8a\sin\frac{\phi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$

Задача XII. Найти длину дуги кривой:

а) $y = 1+\ln\sin x \qquad \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$

б) $r = \cos^3\frac{\phi}{3} \qquad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$

Решение:

а) $y = 1+\ln\sin x \qquad y' = \frac{\cos x}{\sin x}$,

тогда

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$$

Последний интеграл следует вычислять с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{t^2+1}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

и при $x = \frac{\pi}{3}, \quad t = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$x = \frac{\pi}{2}, \quad t = 1.$

Поэтому:

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = \ln 3 - \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$$

б) $r=\cos^3\frac{\phi}{3}\quad r'=3\cos^2\frac{\phi}{3}\left(-\sin\frac{\phi}{3}\right)\frac{1}{3}=-\sin\frac{\phi}{3}\cos^2\frac{\phi}{3}$.

Тогда

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^6\frac{\phi}{3}+\sin^2\frac{\phi}{3}\cos^4\frac{\phi}{3}}\,d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^4\frac{\phi}{3}\left(\cos^2\frac{\phi}{3}+\sin^2\frac{\phi}{3}\right)}\,d\phi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{\phi}{3}\,d\phi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos\frac{2}{3}\phi\right)d\phi=\frac{1}{2}\left(\phi+\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\phi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{8}$$

§ 12 Понятие о несобственном интеграле

Интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций называются *несобственными.*

I Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования определяются посредством предельного перехода:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\beta\to\infty}\int_a^{\beta}f(x)dx \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^{b}f(x)dx \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^{c}f(x)dx+\lim_{\beta\to+\infty}\int_c^{\beta}f(x)dx \qquad (3)$$

где c - произвольное число.

II Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами также определяются посредством предельного перехода:

если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, принадлежащей отрезку $[a;\ b]$ и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \qquad (4)$$

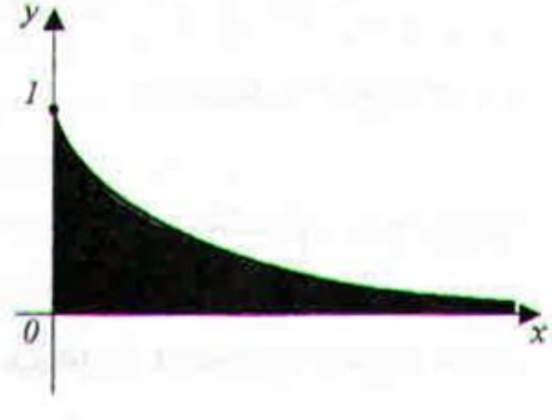
Несобственные интегралы называются сходящимися или расходящимися, смотря по тому, существуют или нет определяющие их пределы соответствующих определенных (собственных) интегралов.

Примеры: Найти следующие несобственные интегралы.

Пример 1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} e^{-x}dx = \lim_{\beta \to +\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\beta} = \lim_{\beta \to +\infty} \left(e^{-\beta} - e^{0}\right) = 1$$

т.е. интеграл сходится. Вычисленному интегралу можно придать смысл площади фигуры, ограниченной снизу осью OX, сверху - графиком функции $f(x) = e^{-x}$, слева - прямой $x = 0$ (ось OY), справа фигура не ограничена.



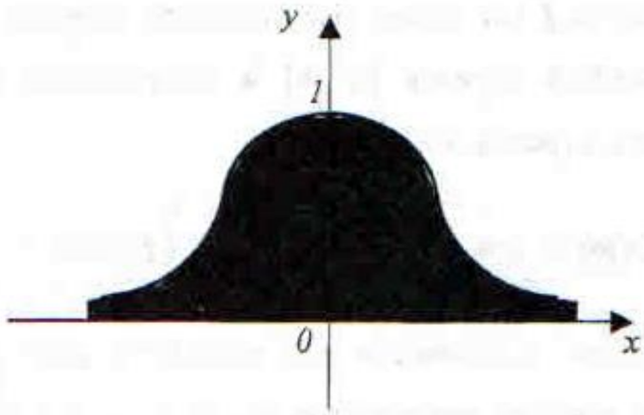
Пример 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

Пользуясь определением (3), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\beta} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 2) + \lim_{\beta \to +\infty} (\operatorname{arctg} \beta - \operatorname{arctg} 0) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Вычисленный интеграл равен площади фигуры:



<u>Пример 3.</u> $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет бесконечный разрыв. Согласно определению (4)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1-\ln\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = -(-\infty) = +\infty$$

т.е. интеграл расходится.

<u>Пример 4.</u> $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Здесь подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, в точке $x = 1$, лежащей внутри [-1; 2], имеет бесконечный разрыв. Поэтому, согласно определению (4) имеем

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{-1}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0} 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1} +$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0} 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2} = 3\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\sqrt[3]{\varepsilon_1}-\sqrt[3]{-2}\right) + 3\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right) = 3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое переменная величина?
2. Сформулируйте определение функции. Что называется областью определения функции.
3. Сформулируйте понятие переменной величины.
4. Дайте определение предела функции.
5. В каком случае функция называется бесконечно малой?
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
7. Дайте определение непрерывности функции в точке.
8. Дайте определение производной.
9. Какой геометрический смысл производной.
10. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$.
11. Какой механический смысл первой и второй производной?
12. Сформулируйте правило вычисления производной сложной функции.
13. Что называется дифференциалом функции и как он находится?
14. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
15. Сформулируйте необходимое и достаточное условия экстремума .
16. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба?
17. Покажите, что график функции $y = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + ax + b$ не имеет точек перегиба, каковы бы ни были числа a и b.
18. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты.
19. Сформулируйте определение первообразной.
20. Каковы основные свойства неопределенного интеграла?
21. Укажите целесообразные подстановки для нахождения интегралов

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \qquad \int e^{\cos x} \sin x dx \qquad \int \sqrt{1 + x^3} x^2 dx$$

$$\int \sin x \cos x dx \qquad \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \int \frac{arctgx}{1 + x^2} dx$$

22. Объясните правило разложения рациональной дроби на простейшие.

23. Дайте определение определенного интеграла.
24. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
25. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
26. Напишите формулу Ньютона - Лейбница.
27. В чем состоит способ подстановки при вычислении определенного интеграла.
28. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?
29. Запишите формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых и полярных координатах.
30. Запишите формулу для вычисления объема тела вращения.
31. Как определяются несобственные интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных функций.

Контрольная работа № 2

В задачах 1 - 20 найти указанные пределы:

1. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4}$ а) $x_0 = 2$ б) $x_0 = -1$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$

2. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4 - x - 3x^2}$ а) $x_0 = -1$ б) $x_0 = 1$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x \cos 3x}$

3. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$ а) $x_0 = 2$ б) $x_0 = -2$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{tg} 3x}{\sin^2 2x}$

4. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{14 - x - 3x^2}$ а) $x_0 = 1$ б) $x_0 = 2$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x \operatorname{tg} 3x}{x^2}$

5. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x + 5}$ а) $x_0 = -2$ б) $x_0 = -1$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}$

6. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{3x - x^2 - 2}$ а) $x_0 = -1$ б) $x_0 = 1$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x \cos 2x}{\sin 3x}$

7. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$ а) $x_0 = 2$ б) $x_0 = -2$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\,\mathrm{tg}\,4x}{\sin^2 6x}$

8. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$ а) $x_0 = 1$ б) $x_0 = 2$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x\,\mathrm{tg}\,4x}{x^2}$

9. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$ а) $x_0 = -2$ б) $x_0 = -1$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}\,5x}$

10. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2+x-4}{4x-x^2-3}$ а) $x_0 = -1$ б) $x_0 = 1$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x\cos 7x}{\sin 2x}$

11. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+x-6}$ а) $x_0 = 2$ б) $x_0 = -2$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x\,\mathrm{tg}\,2x}{\sin^2 3x}$

12. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2-7x+2}{6-x-x^2}$ а) $x_0 = 1$ б) $x_0 = 2$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x\,\mathrm{tg}\,2x}{x^2}$

13. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2-7x-8}{2x^2+5x+3}$ а) $x_0 = -2$ б) $x_0 = -1$ в) $x_0 = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{\mathrm{tg}\,2x}$

14. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{4x^2-3x-1}{5x-x^2-4}$ а) $x_0=-1$ б) $x_0=1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x\cos 8x}{\sin 10x}$

15. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-2x-16}$ а) $x_0=2$ б) $x_0=-2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\,\mathrm{tg}\,4x}{\sin^2 6x}$

16. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2-x-6}{5x-x^2-6}$ а) $x_0=1$ б) $x_0=2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x\,\mathrm{tg}\,3x}{x^2}$

17. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2+8x+7}{3x^2-x-4}$ а) $x_0=-2$ б) $x_0=-1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg}\,3x}$

18. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{5x^2-x-4}{3x-x^2-2}$ а) $x_0=-1$ б) $x_0=1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x\cos 5x}{\sin 8x}$

19. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+3x-2}$ а) $x_0=2$ б) $x_0=-2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x\,\mathrm{tg}\,2x}{\sin^2 4x}$

20. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{3x^2-x-10}{7x-x^2-10}$ а) $x_0=1$ б) $x_0=2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x\,\mathrm{tg}\,2x}{x^2}$

II. В задачах 21 - 40 найти производные функций, пользуясь формулами дифференцирования:

21. а) $y=\left(3x-4\sqrt[3]{x}+2\right)^4$ б) $y=\dfrac{4x+7\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+9x^2}}$

в) $y=\cos 3x e^{\sin x}$ г) $y=\ln \mathrm{arctg}\, 2x$

22. а) $y=\left(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$ б) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$

в) $y=2^{3x}\,\mathrm{tg}\, 2x$ г) $y=\cos\ln 5x$

23. а) $y=\left(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x}\right)^4$ б) $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$

в) $y=e^{\mathrm{tg}\, x}\ln 2x$ г) $y=\cos\sqrt{x^2+3}$

24. а) $y=\left(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4\right)^3$ б) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$

в) $y=2^{8x}\,\mathrm{tg}\, 3x$ г) $y=\arcsin\ln 4x$

25. а) $y=\left(x^5-\sqrt[3]{x}+1\right)^5$ б) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\mathrm{tg}\, x}$

в) $y=e^{\mathrm{ctg}\, x}\sin 4x$ г) $y=\sin\ln 5x$

26. а) $y=\left(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5\right)^2$ б) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$

в) $y=3^{\mathrm{tg}\, x}\arcsin x^2$ г) $y=\ln\sin 6x$

27. а) $y=\left(x^3-4\sqrt[3]{x^3}+2\right)^3$ б) $y=\dfrac{\mathrm{arctg}\, 7x}{2-9x^2}$

в) $y=e^{\mathrm{ctg}\, x}\cos 6x$ г) $y=\sin\ln 2x$

28. а) $y=\left(x^3-2\sqrt[5]{x}+4\right)^4$ б) $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$

в) $y=4^{\cos x}\,\mathrm{arctg}\,2x$ г) $y=\ln\cos 5x$

29. а) $y=\left(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2\right)^3$ б) $y=\dfrac{\cos 6x}{\sin 3x}$

в) $y=e^{x^3}\,\mathrm{tg}\,7x$ г) $y=\arcsin\ln 2x$

30. а) $y=\left(x^4+2\sqrt[5]{x}-1\right)^2$ б) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x^2}}{e^x-\mathrm{ctg}\,x}$

в) $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$ г) $y=\ln\cos 7x$

31. а) $y=\left(3x^5-\dfrac{1}{x^4}+7\right)^3$ б) $y=\dfrac{x^4+\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{4x^5+7}}$

в) $y=5^{\arcsin x}\sin 4x$ г) $y=\mathrm{arctg}\ln 8x$

32. а) $y=\left(2x^4-3\sqrt[4]{x}-1\right)^4$ б) $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{\cos 2x}$

в) $y=5^{\mathrm{arctg}\,x}\sin 4x$ г) $y=\ln\arcsin 3x$

33. а) $y=\left(3x^5+2\sqrt[4]{x}-8\right)^5$ б) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\,x-\cos x}{\sqrt{5x^2+1}}$

в) $y=e^{x^2}\arcsin 2x$ г) $y=\mathrm{arctg}\ln 5x$

34. а) $y=\left(x^3-\dfrac{3}{x^2}+4\right)^2$ б) $y=\dfrac{\sqrt{2-3x^5}}{\sin 2x}$

в) $y=4^{\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{arctg}\,3x$ г) $y=\ln\cos 4x$

35. а) $y=\left(5x^2-3\sqrt[4]{x}-2\right)^3$ б) $y=\dfrac{2^x+\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{4+2x^3}}$

в) $y=e^{\sin x}\arccos 3x$ г) $y=\mathrm{arctg}\ln 7x$

36. а) $y=\left(2x^4+\dfrac{2}{x^3}-7\right)^4$ б) $y=\dfrac{\sqrt{1-7x^5}}{\cos 4x}$

в) $y=5^{6x}\arcsin 5x$ г) $y=\ln\sin 7x$

37. а) $y=\left(3x^2-2\sqrt[4]{x}+5\right)^5$ б) $y=\dfrac{2x^2-\operatorname{tg} x}{\sqrt{6x^2+5}}$

в) $y=e^{\arcsin x}\cos 4x$ г) $y=\operatorname{arctg}\ln 5x$

38. а) $y=\left(x^6+\dfrac{3}{x^4}-8\right)^2$ б) $y=\dfrac{\sqrt{2-5x}}{\sin 3x}$

в) $y=4^{\operatorname{arctg} x}\cos 6x$ г) $y=\ln\arcsin 2x$

39. а) $y=\left(4x^5-3\sqrt[5]{x^2}-7\right)^3$ б) $y=\dfrac{\cos x-4x^3}{\sqrt{8+7x^5}}$

в) $y=e^{\sin x}\arcsin 3x$ г) $y=\sin\ln 7x$

40. а) $y=\left(3x^2-\dfrac{5}{x^3}-7\right)^4$ б) $y=\dfrac{\sqrt{4x^5-2}}{\sin 7x}$

в) $y=2^{\operatorname{arctg} x}\arcsin 2x$ г) $y=\ln\cos 6x$

III. В задачах 41 - 60 закон S (t) изменения пути движения материальной точки. Требуется найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0.

41. $S(t)=2t^4-3t^2+t-2,$ $t_0=2.$

42. $S(t)=3t^4-2t^2-t+1,$ $t_0=1.$

43. $S(t)=4t^4-3t^2-2t-1,$ $t_0=2.$

44. $S(t)=t^4+t^2-3t-1,$ $t_0=1.$

45. $S(t)=2t^4-2t^2+t-2,\qquad t_0=2.$

46. $S(t)=3t^4-t^2+2t+1,\qquad t_0=1.$

47. $S(t)=4t^4-3t^2-t+2,\qquad t_0=2.$

48. $S(t)=2t^4+4t^2-5t-1,\qquad t_0=1.$

49. $S(t)=3t^4+t^2-2t+1,\qquad t_0=2.$

50. $S(t)=4t^4+2t^2-7t-3,\qquad t_0=1.$

51. $S(t)=2t^4-3t^3+t^2-2,\qquad t_0=2.$

52. $S(t)=3t^4-2t^3-t^2+1,\qquad t_0=1.$

53. $S(t)=4t^4-3t^3-2t^2-1,\qquad t_0=2.$

54. $S(t)=t^4+t^3-3t^2+1,\qquad t_0=1.$

55. $S(t)=2t^4-2t^3+t^2-2,\qquad t_0=2.$

56. $S(t)=3t^4-t^3+2t^2+1,\qquad t_0=1.$

57. $S(t)=4t^4-3t^3-t^2+2,\qquad t_0=2.$

58. $S(t)=2t^4+4t^3-5t^2-1,\qquad t_0=1.$

59. $S(t)=3t^4+t^3-2t^2+1,\qquad t_0=2.$

60. $S(t)=4t^4+2t^3-7t^2-3,\qquad t_0=1.$

IV. В задачах 61-80 исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции и построение графиков рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции D (y);

2) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва;

3) найти точки экстремума функции и определить интервалы ее монотонности;

4) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика;

5) найти асимптоты графика функции;

6) построить график, используя результаты исследования;

7) для функций из пункта а) найти дополнительно наибольшее и наименьшее значения на [α; β].

61. а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ $\alpha = -1$ $\beta = 3$

б) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

62. а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ $\alpha = -1$ $\beta = 2$

б) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

63. а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ $\alpha = 2$ $\beta = 4$

б) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$

64. а) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ $\alpha = -1$ $\beta = 2$

б) $y = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$

65. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ $\alpha = 0$ $\beta = 4$

б) $y = \dfrac{x^2 + 9}{x + 4}$

66. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ $\alpha = -2$ $\beta = 3$

б) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

67. а) $y=2x^3+3x^2-12x-8$ $\alpha=-3$ $\beta=0$

б) $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

68. а) $y=2x^3-9x^2+12x+7$ $\alpha=-3$ $\beta=1$

б) $y=\dfrac{x^2+5}{x+2}$

69. а) $y=2x^3-15x^2+36x-32$ $\alpha=1$ $\beta=4$

б) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$

70. а) $y=2x^3-3x^2-36x+20$ $\alpha=-1$ $\beta=4$

б) $y=\dfrac{x^2-15}{x+4}$

71. а) $y=2x^3+3x^2-36x-21$ $\alpha=-4$ $\beta=1$

б) $y=\dfrac{x^2+9}{x}$

72. а) $y=2x^3+15x^2+36x+32$ $\alpha=-4$ $\beta=0$

б) $y=\dfrac{x^2+8}{x+1}$

73. а) $y=2x^3-15x^2+24x+4$ $\alpha=1$ $\beta=5$

б) $y=\dfrac{x^2+21}{x-2}$

74. а) $y=2x^3-9x^2-24x+61$ $\alpha=-2$ $\beta=3$

б) $y=\dfrac{x^2+16}{x+3}$

75. а) $y=2x^3+9x^2-24x-56$ $\alpha=-5$ $\beta=2$

б) $y=\dfrac{x^2-12}{x-4}$

76. а) $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$ $\quad \alpha = -5 \quad \beta = 0$

б) $y = \dfrac{x^2 + 25}{x}$

77. а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ $\quad \alpha = 0 \quad \beta = 3$

б) $y = \dfrac{x^2 + 24}{x + 1}$

78. а) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$ $\quad \alpha = -3 \quad \beta = 5$

б) $y = \dfrac{x^2 + 32}{x - 2}$

79. а) $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$ $\quad \alpha = -5 \quad \beta = 3$

б) $y = \dfrac{x^2 + 27}{x + 3}$

80. а) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$ $\quad \alpha = -5 \quad \beta = -1$

б) $y = \dfrac{x^2 - 7}{x - 4}$

V. Решить задачи 81 - 100.

81. Каковы должны быть размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг радиуса 6 *см*?

82. Проволока длиной 40 *см* согнута в прямоугольник. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

83. Канал, ширина которого 27 *м*, под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 *м*. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавить по этой системе каналов.

84. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна $S = 24\pi \ (м^2)$.

85. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна $l = \sqrt{3}$ *м*.

86. Турист идет из пункта *A*, находящегося на шоссейной дороге, в пункт *B*, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от A до B по прямой составляет 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт B, если его скорость по шоссе 5 км/час, а по бездорожью - 3 *км/час* ?

87. Объем правильной треугольной призмы $V = 16\ м^3$. Какова должна быть длина стороны основания призмы, чтобы ее полная поверхность была наименьшей?

88. Открытый чан имеет форму цилиндра объема $V = 27\pi\ м^3$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

89. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 *см*. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

90. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого $V = 72\ см^3$, причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

91. Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

92. Требуется изготовить полотняный шатер, имеющий форму прямого кругового конуса заданной вместимости $V = \frac{9}{2}\pi\ м^3$. Каковы должны быть размеры конуса, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?

93. Из прямоугольного листа жести размером 24×9 *см* требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

94. Найти треугольник наибольшей площади, если сумма длин его катета и гипотенузы равна 4 см.

95. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

96. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

97. Какое положительное число, будучи сложенным с обратным числом, дает наименьшую сумму?

98. Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10 *см*. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

99. Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой 72 *м*. Каковы должны быть размеры огорода, чтобы его площадь была наибольшей?

100. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 $м^2$ и разделить затем этот участок на две конгруэнтные части. При каких размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

VI. В задачах 101 - 120 найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

101. $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$ **102.** $\int \ln^3 x\frac{dx}{x}$

103. $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ **104.** $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

105. $\int e^{-x^2}xdx$ **106.** $\int\frac{x}{x^4+2}dx$

107. $\int\frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$ **108.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$

109. $\int\frac{xdx}{2x^4+5}$ **110.** $\int\frac{dx}{x\ln x}$

111. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ **112.** $\int\frac{x^2}{2x^3+3}dx$

113. $\int \sqrt{5x^4+3}\,x^3 dx$

114. $\int x^2 e^{x^3+1} dx$

115. $\int \frac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}} dx$

116. $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$

117. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

118. $\int \frac{\sqrt{\arccos x}dx}{x^2+1}$

119. $\int \frac{\ln x+3}{x} dx$

120. $\int \sqrt{1+2x^2}\,xdx$

VII. В задачах 121 - 140 найти неопределенные интегралы, используя выделение полного квадрата.

121. $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8} dx$

122. $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5} dx$

123. $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8} dx$

124. $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10} dx$

125. $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5} dx$

126. $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10} dx$

127. $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10} dx$

128. $\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17} dx$

129. $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5} dx$

130. $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13} dx$

131. $\int \frac{8x-7}{x^2+10x+29} dx$

132. $\int \frac{11x-3}{x^2+6x+13} dx$

133. $\int \frac{10x-7}{x^2-8x+20} dx$

134. $\int \frac{3x+11}{x^2-16x+68} dx$

135. $\int \frac{5x+16}{x^2+2x+17} dx$

136. $\int \frac{3x-11}{x^2-8x+20} dx$

137. $\int\frac{17x+5}{x^2-12x+40}dx$

138. $\int\frac{12x-7}{x^2+16x+65}dx$

139. $\int\frac{8x-7}{x^2+2x+17}dx$

140. $\int\frac{17x-3}{x^2+8x+32}dx$

VIII. В задачах 141 - 160 найти неопределенные интегралы, применяя метод интегрирования по частям.

141. $\int\ln x dx$

142. $\int(2x+1)\sin 3x dx$

143. $\int(x-1)e^{2x}dx$

144. $\int x\cos 2x dx$

145. $\int\operatorname{arctg} 2x dx$

146. $\int(5x+1)\ln x dx$

5x

147. $\int(8x-2)\sin 5 dx$

148. $\int(x-3)e^{-2x}dx$

149. $\int\sqrt{x}\ln 3x dx$

150. $\int(2x+8)e^{-7x}dx$

151. $\int x^3\ln x dx$

152. $\int(3x+7)\cos 5x dx$

153. $\int(12x+2)\sin 3x dx$

154. $\int\sqrt[3]{x}\ln 2x dx$

155. $\int x\sin 8x dx$

156. $\int\arccos x dx$

157. $\int\arcsin 2x dx$

158. $\int(2x-1)\cos 3x dx$

159. $\int(8x-10)\sin 3x dx$

160. $\int\ln 8x dx$

IX. В задачах 161 - 180 найти неопределенные интегралы разложением рациональных дробей на простейшие.

161. $\int\frac{x}{x^3+1}dx$

162. $\int\frac{x+20}{x^3-8}dx$

163. $\int\frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$

164. $\int\frac{2x+5}{x^3+2x}dx$

165. $\int\frac{3x-1}{x^3+3x}dx$

166. $\int\frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx$

167. $\int\frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$

168. $\int\frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$

169. $\int\frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$

170. $\int\frac{2x}{x^3-1}dx$

171. $\int\frac{3x+1}{x(x^2+3)}dx$

172. $\int\frac{5x-1}{x^3+1}dx$

173. $\int\frac{2x-1}{x^3-x}dx$

174. $\int\frac{2x+5}{x^3-4x}dx$

175. $\int\frac{x}{(x+5)(x^2+3)}dx$

176. $\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}dx$

177. $\int\frac{x}{(x-3)(x^2+10)}dx$

178. $\int\frac{2x+5}{x(x^2+6)}dx$

179. $\int\frac{x-3}{(x+2)(x^2+5)}dx$

180. $\int\frac{x-2}{(x+2)(x^2+3)}dx$

X. В задачах 181 - 200 найти площадь, ограниченную параболами.

181. $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$

$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$

182. $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$

$y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$

183. $y=\frac{1}{3}x^2-3x+2$

$y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$

184. $y=2x^2+6x-3$

$y=-x^2+x+5$

185. $y=3x^2-5x-1$

$y=-x^2+2x+1$

186. $y=-x^2-3x-1$

$y=-x^2-2x+5$

187. $y=2x^2-6x+1$

$y=-x^2+x-1$

188. $y=\frac{1}{3}x^2-2x+4$

$y=-\frac{2}{3}x^2-x+2$

189. $y=x^2-5x-3$

$y=-3x^2+2x-1$

190. $y=x^2-2x-5$

$y=-x^2-x+1$

191. $y=\frac{1}{4}x^2-2x-5$

$y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$

192. $y=\frac{1}{2}x^2+3x-2$

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$

193. $y=2x^2-6x+3$

$y=-2x^2+x+5$

194. $y=x^2-3x-4$

$y=-x^2-x+8$

195. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-1$

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$

196. $y=2x^2+4x-7$

$y=-x^2-x+1$

197. $y=2x^2+3x+1$

$y=-x^2-2x+9$

198. $y=2x^2-6x-2$

$y=-x^2+x-4$

199. $y = x^2 - 2x - 4$

$y = -x^2 - x + 2$

200. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$

$y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$

XI. В задачах 201 - 220 найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, расположенной в первом квадрате и ограниченной параболой и прямой.

201. $y = 2x^2$

$y = -2x + 4$

202. $y = x^2$

$y = -x + 2$

203. $y = 3x^2$

$y = -x + 4$

204. $y = \frac{1}{4}x^2$

$y = -x + 3$

205. $y = \frac{1}{2}x^2$

$y = -3x + 8$

206. $y = 2x^2$

$y = -3x + 14$

207. $y = \frac{1}{3}x^2$

$y = -x + 6$

208. $y = 3x^2$

$y = -2x + 5$

209. $y = \frac{1}{3}x^2$

$y = -2x + 9$

210. $y = \frac{1}{4}x^2$

$y = -2x + 6$

211. $y = \frac{1}{3}x^2$

$y = -3x + 12$

212. $y = 4x^2$

$y = -2x + 2$

213. $y=\frac{1}{4}x^2$

$y=-\frac{1}{2}x+2$

214. $y=4x^2$

$y=-2x+6$

215. $y=x^2$

$y=-x+3$

216. $y=2x^2$

$y=-x+10$

217. $y=3x^2$

$y=-3x+6$

218. $y=x^2$

$y=-2x+5$

219. $y=\frac{1}{2}x^2$

$y=-x+3$

220. $y=3x^2$

$y=-5x+8$

XII. В задачах 221 - 230 найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, расположенной в первом квадрате и ограниченной параболой и прямой.

221. $r=2\cos\phi$

$\phi=0,\quad \phi=\frac{\pi}{4}$

222. $r=8(1+\cos\phi)$

$\phi=0,\quad \phi=\frac{\pi}{2}$

223. $r=10\cos\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\phi=\frac{\pi}{4},\quad \phi=\frac{\pi}{2}$

224. $r=1-\cos 2\phi$

$\phi=0,\quad \phi=\frac{\pi}{6}$

225. $r=\sqrt{\cos 2\phi}$

$\phi=0,\quad \phi=\frac{\pi}{6}$

226. $r=4\cos\phi$

$\phi=0,\quad \phi=\frac{\pi}{2}$

227. $r = 2\sin\phi$

$\phi = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{3}$

228. $r = 2 + \cos\phi$

$\phi = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{6}$

229. $r = 2\phi$

$\phi = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{2}$

230. $r = e^{\phi}$

$\phi = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$

XIII. В задачах 231 - 240 найти длину дуги кривой.

231. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$

$0 \le x \le 12$

232. $y = \ln\sin x$

$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$

233. $y = \ln x$

$\frac{3}{4} \le x \le 1$

234. $y = 1 - \ln\cos x$

$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

235. $r = a\cos\phi$

$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

236. $r = 1 - \cos\phi$

$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

237. $r = 2(1 - \cos\phi)$

$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

238. $r = a\sin\phi$

$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

239. $y = \ln\cos x$

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

240. $y = \frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$

$0 \le x \le 1$

Литература

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1972.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1973. - Т.1.
3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1968.
4. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1974. – Ч.1.
5. Григулецкий В.Г., Ященко З.В. Высшая математика. (Интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды.). - Краснодар, 1998.