МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания для самостоятельной работы

(Математическое моделирование экономических процессов)

по дисциплине

Б1.В.ОД.1 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Код и направление подготовки	09.06.01 – Информатика и вычислительная техника
Наименование профиля / программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре	Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Квалификация (степень) выпускника	***Исследователь. Преподаватель-исследователь***

Краснодар 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

В рыночной системе ведения хозяйства доминируют принципиально новые и не совсем освоенные нашей экономикой механизмы привлечения финансовых средств, направляемых на поддержание и развитие инвестиционных процессов. Эти новые механизмы, основанные на рыночной модели инвестирования, способствуют сокращению централизованных вложений и привлекают частные инвестиции, ограничивая тем самым деятельность государства в качестве непосредственного инвестора. Создается ситуация, когда решающее значение придается росту объема и эффективности негосударственных инвестиций, основными источниками которых должны стать собственные средства предприятий и привлеченные источники, прежде всего средства банков, институциональных инвесторов и населения.

Неразвитость банковской системы России и ее неспособность предоставить свои избыточные ресурсы производственному сектору экономики ставят вопрос об ускоренном развитии рынка ценных бумаг в число стратегически важных направлений развития экономики в целом. По сути, рынок является самым эффективным экономическим регулятором. С его помощью инвестиции автоматически направляются в наиболее эффективные отрасли хозяйственной деятельности и жизнеспособные бизнес-структуры.

Эффективное функционирование рынка ценных бумаг предполагает наличие ряда обязательных условий, среди которых не последнее место занимает инвестиционная теория, на основе которой принимаются конкретные инвестиционные решения. Ключевой в данной теории является проблема анализа и формирования портфеля ценных бумаг, рассмотрению которой посвящено учебное пособие.

В пособии для самостоятельной работы обучающегося подробно излагается теория моделирования портфельных решений. Доступность понимания обеспечивается подробным решением в MS Excel практических задач с содержательной интерпретацией результатов моделирования.

1. ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Начало второй половины двадцатого столетия стало рубежом, с которого начинается развитие новых взглядов на теорию и практику финансовой деятельности. Начало этим новым взглядам положила опубликованная в июне 1952 года в ведущем академическом журнале по финансовым вопросам «Journal of Finance» статья под названием «Формирование портфеля» [42] объемом в четырнадцать страниц. Ее автор выпускник Чикагского университета Г. Марковиц не был известен ни в научных кругах, ни среди специалистов финансового рынка. Однако идеи, которые он изложил в этой статье, начали новый период в развитии теории и практики финансовой деятельности.

Ускорению процесса переосмысления основных принципов инвестирования, изложенных в статье, способствовали наметившиеся спустя некоторое время после выхода статьи радикальные изменения в механизмах регулирования экономики промышленно развитых стран. В развитии мировой экономики стало заметнее проявляться доминирование идей глобализации. Отдельные изолированные региональные финансовые рынки стали функционировать как единый международный финансовый рынок. Технические возможности такого объединения были созданы благодаря высокому уровню информатизации, позволившему заменить традиционную фондовую биржу с ее торговыми залами и торговлей «с голоса» электронными торговыми системами. Новые скорости информационного обмена требовали новых подходов к инвестиционной деятельности.

Размышления над основными идеями этих новых подходов можно обнаружить в той первой статье Марковица, которая упоминалась выше. Новаторство этих идей проявилось в том, что Марковиц предложил метод решения комплексной задачи, предусматривающей получение рекомендаций по управлению всем богатством инвестора, объединенном в портфеле. Сам термин «портфель» («portfolio») понимался как «набор ценных бумаг, фиксирующих имущественные права». В результате решения задачи предложенной Марковицем портфель задавался определенной структурой, благодаря которой он принципиально отличался от пакетов акций отдельных компаний, рассматриваемых изолированно.

Изложение материала в опубликованной статье было чрезмерно математизировано. Марковиц не ориентировался на общедоступность, которой, по мнению многих, должен обладать излагаемый материал. Десять из четырнадцати страниц его статьи были заполнены уравнениями и малопонятными графиками. Научная общественность с трудом воспринимала основные идеи данной работы. Возможно, это обстоятельство сыграло не последнюю роль в том, что принципы инвестирования, изложенные Марковицем, не сразу были взяты на вооружение инвесторами. Кроме того, с позиций знаний того времени трудно было понять идею, в соответствии с которой риск в инвестиционном процессе играет не меньшую роль, чем прибыль. В то же время понимание этой идеи готовилось несколькими поколениями исследователей. В ее основе – знания по теории вероятностей, методам выборочных исследований, нормальному распределению и дисперсии относительно среднего, закону возврата к среднему и теории полезности. Для признания новых взглядов нужно было не только время, но и эмпирический негативный результат такого масштаба, который бы породил необходимость в пересмотре существующих подходов к ведению инвестиционной деятельности.

Случай, поставивший под сомнение теорию инвестирования того времени наступил ровно через 20 лет. Разразившийся в 1973-1974 годах кризис на финансовых рынках показал, что стратегии инвестирования, предусматривающие вложения в наиболее доходные ценные бумаги, могут обеспечивать не только высокие доходы, но и приводить к таким потерям, которые по своим масштабам сравнимы лишь с разорением. Остывший от эйфории высоких доходов ум инвесторов смог осознать, что предшествовавший кризису успех обеспечивался на самом деле не стратегией, а растущим рынком (рынком «быков»). Вложения в любые ценные бумаги на таком рынке приносили доход, который укреплял уверенность в безошибочности принимаемых решений оказавшихся, в конце концов, настоящей западней. Рынок в результате очередного разворота превратился из бычьего в медвежий и стал с огромной скоростью «пожирать» капитал самонадеянных инвесторов. За два года кризисной ситуации акции были обесценены на 50% – худший показатель в истории, если не считать кризиса 1929-1931 годов.

Кризис убедил всех инвесторов в том, что результаты инвестиционной деятельности содержат в себе элемент неопределенности и прав Марковец, который в своей модели учитывал эту неопределенность с помощью риска. Проблема неопределенности и связанного с ней риска в экономике была известна задолго до работ по портфельному инвестированию. Первым, кто обратил внимание на проблему неопределенности в рамках теории управления экономическими объектами, был профессор Чикагского университета Ф. Найт. Своей точкой зрения: «В экономике проблема неопределенности неизбежна, потому что сам экономический процесс нацелен в будущее» – он дал краткое, но исчерпывающее объяснение природы риска в экономике. В статье «Риск, неопределенность и прибыль» [38], опубликованной в 1921 г., он достаточно подробно исследовал возможность вероятностного описания ситуаций, которые теперь принято классифицировать как «ситуации принятия решений в условиях риска». Сейчас этот класс задач достаточно хорошо исследован, разработаны методы принятия решений в условиях риска и есть опыт их практического использования. Но Марковиц был первым, кто указал на строгую взаимосвязь доходности и риска.

Но, пожалуй, самым важным результатом в теории Марковица было утверждение, в соответствии с которым инвесторы путем диверсификации могут управлять риском, который они на себя берут. Это была та возможность, о которой инвесторам, потерпевшим крах в 70-х годах минувшего столетия, ничего не было известно.

Исследования Марковица дали новое представление о природе риска, но не отменили деятельность, связанную с риском. Инвесторы по-прежнему шли на риск, понимая, что рыночная система, хотя и опасна потерями, но в то же время открывает возможность выигрыша. Появилась необходимость в разработке стратегий, которые давали бы инвесторам ориентиры обоснованного риска. Появилась точка зрения, что при конструировании таких стратегий может оказаться весьма полезной разработанная Марковицем модель оптимизации портфеля ценных бумаг.

К тому моменту времени, когда реальная потребность в таких стратегиях созрела полностью, на основе модели Марковица был разработан аппарат эффективного инвестирования. В 1959 году сам Марковиц опубликовал монографию [43], в которой излагались все полученные к тому времени результаты по развитию предложенной им модели. Одновременно с созданием математического аппарата формировалась основная гипотеза финансового рынка, предположения которой должны были, по идее, учитываться в разрабатываемых моделях.

Такая «встречная» согласованность, заранее гарантируя получение непротиворечивой теории, в то же время таила в себе подводные камни. И такие подводные камни есть в современной финансовой теории. Прежде всего, это касается доминирующей в настоящее время, как в теории, так и практике гипотезы эффективного рынка.

Ключевой концепцией, лежащей в основе понятия эффективного рынка, является предположение о том, что цены мгновенно ассимилируют новую информацию и устанавливаются таким образом, что арбитражные возможности исключаются.

Выделяют три формы эффективности рынка.

- Слабая форма эффективности рынка. Текущие цены отражают всю информацию, заключенную в прошлых ценах.
- Полустрогая форма эффективности рынка. Текущие цены отражают всю публичную информацию.
- Строгая форма эффективности рынка. Текущие цены отражают всю информацию, в том числе частную и инсайдерскую.

При тестировании и статистическом анализе под эффективным рынком традиционно понимают вторую форму эффективности. При этом делаются следующие предположения:

- Активы на финансовом рынке оцениваются в рамках какой-либо модели ценообразования (CAPM, APT).
- Цены на финансовые активы реагируют на новую информацию мгновенно и точно.
- Инвесторы одинаково интерпретируют имеющуюся у них одну и ту же информацию для прогноза доходностей активов. Поэтому ошибки в прогнозах, а следовательно, возникновение экономической прибыли или убытка, не предсказуемы на основе имеющейся на момент прогноза информации.

Кстати, отсюда также следует, что инвесторы не могут на рынке постоянно получать экономическую прибыль.

Возникает естественное желание провести эмпирическую проверку реальности этих предположений. Однако в силу внутренней логики предположений формирующих гипотезу эффективного рынка, такая проверка обречена.

Новые идеи всегда вызывают сопротивление либо желание использовать их в видоизмененном варианте. Поэтому, несмотря на важность статьи Марковица, на нее со всех сторон обрушилась критика с нападками на основные постулаты. Некоторые проблемы продолжают вызывать споры по существу концепции до сих пор.

Во-первых, возник вопрос, достаточно ли рациональны инвесторы, чтобы, принимать решения в соответствии с рекомендациями Марковица. Если в решениях по инвестированию интуиция превалирует над расчетом, все эти поиски могут превратиться в простую потерю времени на сомнительное объяснение того, почему рынки ведут себя так, а не иначе.

Во-вторых, не простым оказался вопрос, в котором ставилась под сомнение правомерность использования дисперсии в качестве меры риска. В этом вопросе полная ясность не достигнута. Если инвесторы воспринимают риск как нечто отличное от дисперсии, может быть, можно заменить ее другой величиной, сохранив подход Марковица к оптимизации риска при заданном уровне прибыли. А, может быть, подобного рода модификации не имеют смысла.

Были сомнения и по поводу гипотезы Марковица о положительной связи риска и доходности. Нужна была серьезная эмпирическая проверка. Если бы оказалось, что ценные бумаги с невысоким уровнем риска систематически приносили бы высокие прибыли, то всю теорию пришлось бы отправить в мусорную корзину.

Возникли также и технические проблемы практического использования этой модели. Предположения Марковица, в соответствии с которыми инвесторы будут без труда получать нужные для проведения расчетов данные, оказались не реальными. С позиций сегодняшнего дня, когда торги осуществляются только с использованием компьютерных технологий, эта проблема снимается. Но в те далекие годы, когда компьютеры только завоевывали свое монопольное право на обработку информации, проблема, действительно, существовала и была действительно серьезной.

Сам Марковиц был очень озабочен сложностью практической реализации своих идей. Под его руководством аспирантом У. Шарпом была разработана модифицированная модель, при построении которой не требовалось вычисление ковариаций между отдельными ценными бумагами [51 – 53]. Он предложил оценивать дисперсию акции или облигации по отношению к рынку в целом с помощью однофакторных регрессионных моделей, предполагая, что взаимные ковариации между ценными бумагами равны нулю. Это значительно упростило дело. При этом решение незначительно отличалось от решения, получаемого с помощью модели Марковица.

На основе идей, использованных при построении модифицированной модели, Шарп и Линтнер разработали получившую широкую известность модель оценки долгосрочных финансовых активов (Capital Asset Pricing Model, CAPM), позволяющую осуществлять оценку ценных бумаг для случая, когда все инвесторы формируют свои портфели в точном соответствии с рекомендациями Марковица [39, 40]. Подробно с позиций формального подхода эта модель, как и ряд других модификаций модели Марковица будут рассмотрены в следующих параграфах.

Еще одно возражение заключалась в том, что портфели и сами рынки ценных бумаг описывались только двумя характеристиками – ожидаемой доходностью и дисперсией. Зависимость именно от этих двух характеристик оправдана, только в том случае, если доходность ценных бумаг как случайная величина описывается нормальным распределением, которое, как известно, идентифицируется с помощью двух параметров. Отклонения от нормального закона недопустимы, и множество значений с каждой стороны от среднего должно быть распределено строго симметрично.

Если данные не описываются нормальным распределением, дисперсия не может со стопроцентной степенью точности характеризовать неопределенность портфеля. Более того, рынок изменчив. В одни моменты времени, данные о доходностях, укладываются в нормальное распределение достаточно точно, и на их основе можно вычислять риск и принимать решения относительно портфеля. В других случаях несоответствие данных нормальному распределению становится поводом для разработки новых подходов, о которых речь пойдет дальше.

Главным в инвестиционной деятельности является вопрос об измерении риска. Как могут инвесторы решить, идти или не идти на риск, пока риск не измерен? Изменчивость доходности активов, измеренная дисперсией, интуитивно кажется привлекательной в качестве меры риска. Статистический анализ подтверждает это интуитивное предположение. Как правило, неопределенность характеризуется значительными и быстрыми колебаниями стоимости. Способность к быстрому и значительному росту курса обычно сочетается со столь же выраженной склонностью к его падению. Действительно, уровень дисперсии напрямую связан с размерами возможных потерь.

Однако нет согласия по вопросу о причинах изменчивости, не говоря уже о причинах того, почему величина изменчивости колеблется. Мы наблюдаем изменчивость, когда происходит нечто неожиданное. Пользы от этой тавтологии никакой – никто не знает, как предсказать неожиданное событие.

С другой стороны, изменчивость беспокоит не всех. Наличие риска означает, что на самом деле случится лишь часть того, что может случиться, – к этому и сводится определение изменчивости, – но время, когда это произойдет, остается неопределенным. Вводя элемент времени, мы ослабляем связь между риском и изменчивостью. Время изменяет риск во многих отношениях, а не только его связь с изменчивостью. Не случайно в последнее время для анализа этих связей пытаются использовать регрессионную модель с условно гетероскедастичными остатками, которая была предложена Инглом в 1982 году [36]. С помощью этой модели удается идентифицировать периоды, в которых наблюдаются высокие и низкие уровни дисперсии.

Инвесторы по-разному относятся к риску. Если инвестор не собирается продавать акции, то ему не важно, что происходит с их курсом. Действительно долгосрочных инвесторов не заботят краткосрочные колебания курса, потому что они уверены, что падение сменится ростом. Они воспринимают изменчивость скорее как возможность, а не риск, по крайней мере, в той степени, в какой изменчивые ценные бумаги обычно приносят более высокий доход, чем стабильные.

Не все инвесторы согласны с тем, что изменчивость принимается за измеритель риска. Аргументация основана на том, что сама по себе изменчивость наблюдается при рассмотрении любого процесса, в том числе и доходности портфеля. Если величина изменчивости измерена среднеквадратическим отклонением, то трудно понять без дополнительного анализа, что следует ждать инвестору от этой изменчивости, прибыль или убытки. В связи с этим делались попытки введения альтернативных измерителей риска, с помощью которых интерпретация рисковых ситуаций приобретала бы содержательный смысл. Например, многие инвесторы и портфельные менеджеры не считают изменчивые портфели рискованными, если мала вероятность того, что их доходность окажется ниже определенного уровня. Сам уровень может быть как фиксированным, так и переменным. В качестве такого уровня, например, может использоваться подвижная точка, определяющая минимум доходности для поддержания платежеспособности пенсионного фонда корпорации, или доходность некоего эталонного индекса.

Тем не менее, измерение риска с использованием любой методики никоим образом не отменяет предписания Марковица, рекомендуемые для управления портфелями. Доходность остается желательной, а риск нежелательным; ожидаемую доходность нужно максимизировать при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне доходности.

В последнее время особенно интенсивно развивается подход, основанный на расчете стоимости риска (VaR). Существуют различные методики оценки VaR, среди которых наиболее популярна риск-метрика, разработанная компанией J.P. Morgan. Несмотря на удачную интерпретацию VaR, ее расчет, к сожалению, не осуществляется одновременно с определением структуры портфеля. Это замечание относится и к другим определениям риска. Поэтому все предложения по определению риска, отличные от подхода Марковица, являются как бы вспомогательным инструментом, позволяющим провести дополнительное исследование по оценке риска уже построенного портфеля. Этот вывод касается всех подходов, в том числе и VaR. Известно несколько методик оценки VaR, но не известно ни одной методики построения портфеля, минимизирующего VaR.

Последний вопрос, который имеет смысл обсудить, касается практического использования оптимальных по Марковицу портфелей. Оказалось, что, несмотря на абсолютное доминирование идей и принципов инвестирования, сгенерированных в рамках этой модели, сама модель, за исключением некоторых ситуаций, не имеет практического применения. Поиски причин, может, и добавят критики в адрес теории эффективных портфелей, но вряд ли смогут продвинуть оптимальные портфели в практику финансового менеджмента. Оптимальность бессильна перед неопределенностью.

Не преодолев барьер между прошлым и будущим, оптимальные стратегии уступили место комбинированным, в которых параллельно инвестиционному процессу формируется хеджирующий финансовый поток, предназначенный для компенсации убытков, в случае неблагоприятного развития действительности. Может показаться, что неопределенность, наконец, преодолена, стоит только заранее предусмотреть другой вариант действий. Однако затраты, с которыми придется столкнуться инвестору при решении проблемы неопределенности, могут превзойти все допустимые границы. Разумные решения этой проблемы потребовали применения основных идей все той же теории портфельного инвестирования.

Как правило, все кто исследует развитие теории портфельного инвестирования, отмечают, что жизненность этой теории обеспечена удачным отражением взаимосвязи двух самых главных характеристик инвестиционной деятельности: доходности и риска. В дополнение к этому нужно отметить еще одно очень важное достоинство модели Марковица. Модель обладает огромным потенциалом по формированию инвестиционных стратегий с различной целевой установкой. Можно получить стратегии, удовлетворяющие осторожных инвесторов, а можно получить стратегии для дерзких инвесторов. Модель может использоваться и для формирования самофинансируемой стратегии, используемой при оценке стоимости опциона. Новаторские идеи, заложенные Марковицем, продолжают способствовать развитию современной финансовой теории. Однако реальность не всегда укладывается в рамки гипотезы эффективного рынка. Исследования различного рода отклонений и фактов, не вписывающихся в эффективный рынок, постепенно формировали предположения, на основе которых складывались другие представления о рыночных механизмах. Важным итогом всех этих исследований стала гипотеза фрактального рынка, которая признается альтернативой гипотезе эффективного рынка. Основой этой гипотезы являются следующие предположения:

- участники рынка неоднозначно интерпретируют поступающую информацию в зависимости от присущего каждому участнику инвестиционного горизонта; реакция инвесторов на поступающую информацию может быть не мгновенной, а осуществляться лишь после ее подкрепления;
- цены в каждый момент времени отображают взаимодействие «краткосрочных» и «долгосрочных» инвесторов; высокочастотная составляющая в ценах определяется действиями инвесторов с краткосрочным временным горизонтом, низкочастотная, сглаживающая составляющая отражает активность долгосрочных инвесторов;
- финансовый рынок начинает терять ликвидность и устойчивость, когда на нем исчезают инвесторы с разными инвестиционными горизонтами, т.е. теряется его фрактальность.

Когда говорят, что рынок фрактальный, то очень часто в скобках стоит пояснение «дробный» [17]. Понять смысл этого пояснения человеку, незнакомому с фрактальной геометрией, очень трудно. В теории данный термин используется при определении размерности фракталов. Если графики доходностей понимать как самоповторяющиеся фигуры, которые обладают свойствами фракталов и, следовательно, имеют дробную размерность, то применение этого термина к рынку становится понятным, но мало полезным с позиций построения моделей для предсказания ожидаемой доходности в упреждающие моменты времени.

Есть и другое пояснение, смысл которого ориентирован на понимание фрактального рынка, как рынка неоднородного. Такая интерпретация, очевидно, в большей степени согласуется с выше приведенными постулатами гипотезы фрактального рынка и, кроме того, позволяет при моделировании динамики рынка использовать те подходы, которые в эконометрике применяются в тех ситуациях, когда в данных обнаруживаются эффекты гетероскедастичности.

Общепризнанный подход, который используется при построении эконометрических моделей в случае, когда обнаруживаются эффекты гетероскедастичности, основан на взвешивании данных. Идея взвешивания наблюдений, по нашему мнению, является одним из перспективных направлений в задачах моделирования динамики фрактального рынка. Логика рассуждений, лежащая в обосновании этого направления, несколько иная, чем при обосновании процедуры взвешенного метода наименьших квадратов. Рассмотрим подробней эту логику.

В первом предположении гипотезы фрактального рынка утверждается, что участники рынка неоднозначно интерпретируют поступающую информацию, причем неоднозначность эта зависит от инвестиционного горизонта присущего каждому участнику. Из этого предположения можно сделать вывод, в соответствии с которым участник с долгосрочным горизонтом инвестирования ориентируется на все наблюдения, известные к настоящему моменту времени, считая текущие и недавно имевшие место колебания доходности практически не имеющими отношения к его ожиданиям. Другими словами, тенденция, которой в своих ожиданиях придерживается участник с таким инвестиционным горизонтом, является глобальной и формируется под влиянием всех наблюдений, используемых при построении прогнозной модели.

В свою очередь, участник со среднесрочным горизонтом инвестирования ориентируется только на ту информацию, которая может оказывать влияние на его ожидания. Эта информация содержится в том наборе данных, в которых рынок реализовывался на протяжении промежутка времени, сравнимого с горизонтом инвестирования. Фактически это означает, что в модели должен быть предусмотрен механизм корректировки долгосрочной тенденции в соответствии с последними событиями на рынке, информация о которых содержится в некоторой группе последних наблюдений. Технически это можно реализовать с помощью механизма взвешивания наблюдений выборочной совокупности устроенного таким образом, что группа последних наблюдений имеет самые высокие весовые коэффициенты.

Наконец, инвесторы с краткосрочным горизонтом инвестирования ориентируются на информацию, содержащуюся в последнем (двух, трех последних) наблюдении, так как именно эта информация имеет существенное значение для его ожиданий. Тот же самый механизм взвешивания должен таким образом подкорректировать среднесрочную тенденцию, чтобы результат этой корректировки отражал последнее направление, в котором развивается динамика рынка.

Таким образом, прогнозирование, столь необходимое при обосновании инвестиционных решений, на фрактальном рынке реализуется с помощью моделей, в которых должна быть учтена неоднородность. Это существенно отличает фрактальный рынок от эффективного. По сути, определение столь красивой и загадочной «справедливой» цены опциона, являющейся стержневым результатом теории эффективного рынка, на фрактальном рынке проблематично. Это связано с тем, что предположения гипотезы фрактального рынка ставят под сомнение корректность применения теории мартингалов, на основе которой построен вывод расчетных формул стоимости опциона.

Кроме того, фрактальный рынок, в отличие от эффективного, допускает наличие арбитражных возможностей. Это означает, что модель оптимального портфеля на фрактальном рынке должна отличаться от модели эффективного рынка. Механизмы его формирования должны предусматривать возможность проведения арбитражных операций. Это не вызывает сомнений, но на вопрос какой должна быть процедура формирования такого портфеля, каким должен быть сам портфель фрактального рынка, ответа пока нет. В диссертации будет предложен и исследован один из возможных подходов к построению портфелей фрактального рынка.

Интересен вопрос, связанный с возможностью получения бета-коэффициентов при соблюдении предположений гипотезы фрактального рынка. Как известно, эти коэффициенты можно получить в результате построения либо одноиндексной модели, либо модели рыночной оценки капитала, которую принято называть CAPM. Модель CAPM является одной из тех моделей, на которых построена современная финансовая теория. С ее помощью удается получить разумное объяснение эффекта получения инвесторами более высокой прибыли на финансовых рынках, чем от безрисковых ценных бумаг или банковского вклада.

Естественно, возникает вопрос исследования возможностей построения подобной модели в рамках предположений гипотезы фрактального рынка. Причем вариантов реализации этой идеи несколько. Можно, например, используя взвешенный метод наименьших квадратов построить усредненную модель CAPM для всего фрактального рынка. А можно для каждой группы инвесторов строить модели и сравнивать между собой полученные бета-коэффициенты.

Реализация идей, не укладывающихся в рамки предположений гипотезы эффективного рынка, требует, в том числе, и проверку истинности предположений гипотезы фрактального рынка. Это непростая задача. Необходимость такой проверки следует из того, что если динамика рынка не позволяет идентифицировать его как эффективный рынок, то это еще не означает, что он является фрактальным. Кроме гипотез эффективного и фрактального рынков, существуют и другие менее известные гипотезы. Рассмотрим одну из таких гипотез, которую принято называть гипотезой когерентного (поведенческого) рынка.

Эта гипотеза была выдвинута Веге в 1991 году [57]. Смысл основных предпосылок гипотезы состоит в том, что вероятностное распределение изменений рынка во времени базируется на фундаментальных, или экономических, внешних условиях и «групповом сознании» рынка, которое определяется настроением большинства его участников. В рамках этой гипотезы Веге построил нелинейную статистическую модель рынка, которая, по сути, была альтернативой нелинейной детерминистической модели.

Ввиду того, что комбинации этих двух факторов изменчивы, изменяется и состояние рынка. Происходящие при этом фазовые переходы представляют собой изменения формы функции плотности вероятности распределения доходностей.

Веге предполагал, что рынок может пребывать в четырех различных ситуациях:

1. Случайные блуждания. Согласно Веге, истинное случайное блуждание действительно существует: инвесторы действуют независимо друг от друга и информация быстро отражается в ценах. Фактически эта ситуация в значительной степени соответствует эффективному рынку.
2. Переходные рынки. По мере возрастания уровня «группового сознания» смещение в настроениях инвесторов может быть причиной действия информации на длительных периодах времени. В функционировании рынка появляются признаки фрактального рынка.
3. Хаотические рынки. Настроение инвесторов быстро распространяются в групповом сознании, но фундаментальные условия нейтральны или неопределенны. В результате могут происходить широкие колебания в групповых настроениях. Это можно интерпретировать как потерю рынком признаков фрактальности.
4. Когерентные рынки. Сильные позитивные (негативные) фундаментальные факторы в комбинации с сильными инвесторскими настроениями могут порождать когерентные рынки, где тренд становится положительным (отрицательным) и риск низким (высоким).

Все эти состояния хорошо отражаются нелинейной статистической моделью. В качестве модели Веге использовал функцию плотности вероятности, которую позаимствовал у Калана и Шапиро [37]. Эта функция представляет собой достаточно сложное выражение, зависящее от двух управляющих параметров: показателя поведения толпы и фундаментального смещения.

Изменения этих параметров приводит к изменению формы функции плотности вероятности. Модель получилась достаточно гибкой, но чтобы ее «подогнать» к доминирующей на рынке ситуации нужно подобрать соответствующие образом управляющие параметры. К сожалению, нет методики, позволяющей это делать оптимальным способом.

Модель когерентного рынка чрезвычайно привлекательна, так как реализует возможности нелинейной стохастической теорией. Безусловно, рынки хаотичны и обладают чувствительной зависимостью от начальных условий.

Они трудны для предсказаний, и поэтому статистическое описание становится в большинстве случаев вынужденным. В принципе статистическое описание рынка можно делать при любом распределении, в том числе и при гауссовском. Однако гипотеза когерентного рынка предоставляет для этих целей более богатую теоретическую схему.

Рамки этой гипотезы не охватывают всех проблем инвестирования, и это снижает ее практическую ценность. Кроме того, эмпирических данных в поддержку этой гипотезы в настоящее время недостаточно. Опыт построения инвестиционных стратегий, который описывает Веге, весьма короток и в основном охватывает фазу бычьего рынка с 1982 г., включая крах 1987 г.

Недостаток эмпирических данных не отрицает значимости этой теории. До сих пор она не достаточно изучена, но те результаты, которые получил Веге, свидетельствуют о том, что модель согласуется с эмпирическими данными. Самый важный вывод, который следует из этой гипотезы, в том, что рынок бывает в различных состояниях и вполне возможно, что универсальной гипотеза, рамки которой обеспечивали бы решение всех инвестиционных задач вне зависимости от состояния рынка, в принципе не может быть сформулирована.

Подводя итоги вышесказанному, заметим, что, как правило, все кто исследует развитие теории портфельного инвестирования, отмечают, что жизненность этой теории обеспечена удачным отражением взаимосвязи двух самых главных характеристик инвестиционной деятельности: доходности и риска. В дополнение к этому нам хотелось бы отметить еще одно очень важное достоинство модели Марковица. Модель обладает огромным потенциалом по формированию инвестиционных стратегий с различной целевой установкой. Можно получить стратегии, удовлетворяющие осторожных инвесторов, а можно получить стратегии для дерзких инвесторов. Модель может использоваться и для формирования самофинансируемой стратегии, используемой при оценке стоимости опциона. Новаторские идеи, заложенные Марковицем, продолжают способствовать развитию современной финансовой теории.

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОПУСКОВ В ДИНАМИКЕ СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Как правило, временные ряды, используемые для построения оптимальных портфелей, удобно представлять в виде прямоугольных таблиц. Строки этих таблиц принято называть наблюдениями, а столбцы – переменными. Для формирования этих таблиц обычно используются цены акций на момент закрытия биржи. Несмотря на то, что биржи работают ежедневно (имеются в виду рабочие дни), при формировании подобного рода таблиц, часто возникают ситуации, когда используемый для этих целей Интернет-ресурс (на не обеспечивает комплектность всех наблюдений. О данных, в которых имеются некомплектные наблюдения, принято говорить как о данных с пропусками [15]. Использование таких данных для решения портфельных задач, а также при проведении прогнозных расчетов, на основе которых, по замыслу диссертационного исследования, будут формироваться портфели, требует специальных подходов. Все эти подходы ориентированы в основном на применение процедур восстановления пропусков. Рассмотрим некоторые из них.

Самым простым и часто используемым при обработке больших массивов данных является *метод исключения некомплектных наблюдений.* Для восстановления пропусков во временных рядах он явно не пригоден, поэтому рассматриваться не будет.

Смысл применения процедур восстановления в том, чтобы обеспечить возможность обрабатывать данные с помощью обычных методов. Естественно, надежность получаемых результатов в значительной степени зависит от корректности и эффективности методов, с помощью которых осуществлялось восстановление. В практике прогнозных расчетов для восстановления пропусков используются различные подходы. Чтобы можно было ориентироваться в этом многообразии удобно все методы разделить на классы, в зависимости от принципов, лежащих в основе обоснования проводимых расчетов.

1. *Методы усредненных оценок*.

1.1. *Метод средних.* Самый простой из этих методов – *метод средних*. Он основан на вычислении средних по неполным данным и заполнении этими средними пропусков. Замена средними зачастую является первым этапом более сложной, итерационной, процедуры восстановления пропусков, хотя не исключены случаи, когда такая замена может оказаться достаточно успешной. Особенно эффективен этот метод при работе с большими массивами данных со слабо выраженной динамикой.

1.2. *Метод скользящих средних*. Этот метод в большинстве случаев обеспечивает более высокий уровень точности, чем метод средних. В этом методе, как и в предыдущем, рассчитывается среднее, но не по всем данным, а только тем, которые расположены вокруг пропущенного наблюдения. Скажем, пропуск на k-м месте в j-м ряду может быть восстановлен следующим образом:

$$\tilde{x}_{kj} = (x_{k-1\,j} + x_{k+1\,j})/2 \tag{2.1}$$

или

$$\tilde{x}_{kj} = (x_{k-2\,j} + x_{k-1\,j} + x_{k+1\,j} + x_{k+2\,j})/4. \tag{2.2}$$

2. *Методы распознавания образов*.

2.1. *Метод заполнения с «пристрастным» подбором*, С помощью этого метода вместо пропущенных подставляются значения переменных других наблюдений. Смысл реализации этого метода в том, чтобы подобрать комплектное наблюдение в наибольшей степени близкое (похожее) к некомплектному. Процедура подбора такого наблюдения является некоторым упрощенным аналогом распознающей системы. Решению этой задачи на формальном уровне предусматривает введение меры, с помощью которой можно оценить близость между парой любых наблюдений. При решении этой задачи возникает вопрос выбора меры близости между сравниваемыми наблюдениями. Не имеет смысла здесь подробно останавливаться на этом вопросе. Будем рассматривать случай, когда в качестве меры близости можно использовать метрику Евклида

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(x_{ij} - x_{kj}\right)^2}\,. \tag{2.3}$$

Если задача стоит таким образом, что требуется в i-м наблюдении восстановить значение l-го показателя, то последовательность действий по восстановлению выглядит следующим образом:

1) Рассчитывается расстояние между i-м наблюдением с отсутствующим значением l-го показателя и всеми комплектными наблюдениями, в которых предварительно исключаются (не учитываются) значения этого же показателя

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \sqrt{\sum_{j \neq l} \left(x_{ij} - x_{kj}\right)^2}, \qquad k = \overline{1, n}, \quad k \neq i; \tag{2.4}$$

2) Среди комплектных наблюдений выбирается такое наблюдение с номером k^*, для которого

$$\rho\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{k^*}\right) = \min_k \rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k); \tag{2.5}$$

3) Значение l-го показателя в i-м наблюдении приравнивается значению соответствующего показателя с номером k^*, т.е.

$$x_{il} = x_{k^* l}. \tag{2.6}$$

Если показателей в наблюдении достаточно много, то можно восстанавливать и те некомплектные наблюдения, в которых более одного пропуска.

3. *Интерполяционные методы*.

3.1. *Простая интерполяция*. Данный метод используется в тех случаях, когда переменные представляют собой динамические ряды, которые по преимуществу и используются в экономическом прогнозировании, и можно установить закономерность их изменения во времени. Чаще всего для этих целей используются трендовые модели. Например, если рассматриваемая ситуация выглядит таким образом, что в j-й переменной пропущено наблюдение с номером l, то для построения трендовой модели формируется набор данных, представимых следующим образом:

$$\begin{matrix} x_{1j}, & x_{2j}, & \ldots, & x_{l-1j}, & -, & x_{l+1j}, & \ldots, & x_{nj} \\ 1, & 2, & \ldots, & l-1, & l, & l+1, & \ldots, & n \end{matrix}. \tag{2.7}$$

Трендовая модель $x_{tj} = f(t)$ строится с учетом того, что в данных есть пропуск. При построении модели должны соблюдаться все требования, выполнение которых предусматривается решением подобных задач. Расчетное значение $\hat{x}_{lj} = f(l)$ построенной модели используется в качестве пропущенного.

4. *Комбинированные методы.*

4.1. *Комбинирование среднего и скользящего среднего.* Более высокой точности можно добиться, если использовать сразу несколько методов, с помощью которых восстанавливается одно и то же пропущенное значение. При этом каждому методу отводится своя роль. С помощью одного метода устанавливается начальное приближение восстанавливаемых значений, а с помощью другого – осуществляется их корректировка и уточнение. Хорошим примером такого комбинирования является подход, состоящий в последовательном применении метода средних и метода скользящего среднего. В рамках этого подхода на первом этапе среднее значение принимается за восстанавливаемое

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n-1}\sum_{i \neq l} x_{ij}, \tag{2.8}$$

а на втором это среднее используется в расчете скользящего среднего, которым окончательно заменяется пропуск

$$\tilde{x}_{lj} = \frac{x_{l-1j} + \bar{x}_j + x_{l+1j}}{3}. \tag{2.9}$$

Недостаток такого подхода в том, что с его помощью восстанавливаются не все пропуски, он применим только для $2 < l < n-1$. Этот метод, к сожалению, не предусматривает оценку точности, с которой проведено восстановление.

4.2. *Итерационная процедура с начальным средним*. Этот метод представляет собой более сложный вариант комбинированной процедуры, которая получается, когда среднее, принятое за пропущенное значение на первом этапе, уточняется итерационно, путем многократного построения трендовой модели и замене предыдущей $(k-1)$-й оценки пропуска текущим k-м расчетным значением $\tilde{x}_{lj}^k = f(t)$. Точность расчетов в этом методе может регулироваться. Обычно процесс уточнения восстанавливаемого значения продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $\left|\tilde{x}_{lj}^k - \tilde{x}_{lj}^{k-1}\right| < \varepsilon$, где ε – некоторая заданная, достаточно малая, положительная величина.

5. *Адаптивные методы*.

5.1. *Метод адаптивных ожиданий*. Основная идея этого подхода в том, что за значение восстанавливаемого пропуска принимается величина, определяемая в соответствии с формулой, которая на формальном уровне описывает механизм адаптивных ожиданий

$$\tilde{x}_{lj} = \alpha\, x_{l-1j} + (1-\alpha) x_{l+1j}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{2.10}$$

где α – параметр, который подлежит определению.

Параметр α в случае восстановления единичного пропуска в монотонной последовательности данных можно определить в виде среднего

$$\alpha^* = \frac{1}{n-5}\sum_{i \ne l} \alpha_i \;, \qquad (2.11)$$

где α_i – параметр, определяемый по формуле

$$\alpha_i = \frac{x_{i+1\,j} - x_{ij}}{x_{i+1\,j} - x_{i-1\,j}}, \qquad i = 2, \ldots, l-2,\ l+2, \ldots, n-1, \qquad (2.12)$$

которая легко выводится из соотношения

$$x_{ij} = \alpha_i x_{i-1\,j} + (1-\alpha_i) x_{i+1\,j}\,. \qquad (2.13)$$

Недостаток этого подхода в том, что даже при восстановлении единственного пропуска не используется пять наблюдений (включая сам пропуск) и, кроме того, пропуски восстанавливаются только в монотонных последовательностях или на монотонных отрезках соответствующих последовательностей.

5.2. *Интерполяция с адаптивной настройкой*. В основе данного подхода лежит идея оптимального восстановления пропущенного значения в том смысле, что восстановленное значение должно быть таким, чтобы минимизировать ошибку интерполяции исходного ряда с помощью трендовой или регрессионной модели.

Чтобы понять смысл этого подхода, сформируем набор данных для построения трендовой модели следующим образом:

$$\begin{matrix} x_{1j}, & x_{2j}, & \ldots, & x_{l-1\,j}, & \tilde{x}_{lj} & x_{l+1\,j}, & \ldots, & x_{nj} \\ 1, & 2, & \ldots, & l-1, & l, & l+1, & \ldots, & n \end{matrix}\;, \qquad (2.14)$$

где $\tilde{x}_{lj}$ определено по формуле (2.8).

Тогда трендовая модель, построенная по этому набору данных, очевидным образом зависит от параметра α, т.е. $f(t, \alpha)$. Другими словами, параметр α должен настраиваться в процессе построения трендовой модели по критерию суммы квадратов отклонений расчетных значений от фактических.

Восстановление пропущенного значения в этом случае реализуется через процедуру, состоящую в последовательном изменении α с шагом h и построении для каждого α трендовой модели. Из всех построенных моделей для восстановления пропущенного значения используется α^* из той, которая дает наименьшую сумму квадратов ошибок, т.е.

$$\tilde{x}_{lj} = f(l, \alpha^*), \qquad (2.15)$$

$$\alpha^* = Arg \min_{\alpha} \sum_t (x_{tj} - f(t,\alpha))^2 . \qquad (2.16)$$

5.2. *Интерполяция с адаптивной настройкой в случае нескольких пропусков*. Часто возникает необходимость в восстановлении сразу нескольких пропусков. Сначала рассмотрим ситуацию двух пропусков, которые в исходных данных расположены рядом, т.е. структура данных имеет следующий вид:

$$\begin{matrix} x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{l-1j}, -, \ -, \ x_{l+2j}, \ldots, x_{nj} \\ 1, \quad 2, \ \ldots, l-1, l, l+1, l+2, \ \ldots, n \end{matrix} . \qquad (2.17)$$

В подобной ситуации пропущенные значения можно заменить средними или расчетными значениями, предварительно построив для этих целей трендовую модель. Для этих целей можно предложить более интересный подход. Он основан, как и выше рассмотренный, на идее адаптивных ожиданий, но в отличие от него, в этом подходе будет использоваться модифицированный вариант формулы адаптивных ожиданий.

Запишем фрагмент временного ряда

$$x_{l-2j}, x_{l-1j}, \tilde{x}_l ,$$

который имел бы место после восстановления. Для данных этого фрагмента можно записать

$$x_{l-1j} = \alpha\, x_{l-2j} + (1-\alpha)\tilde{x}_{lj}, \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (2.18)$$

или

$$\tilde{x}_{lj} = \frac{1}{1-\alpha} x_{l-1j} - \frac{1}{1-\alpha} x_{l-2j}, \ \ 0 < \alpha < 1. \qquad (2.19)$$

Аналогично для второго пропуска

$$x_{l+2j} = \alpha\, \tilde{x}_{l+1j} + (1-\alpha) x_{l+3j}, \ \ 0 < \alpha < 1 \qquad (2.20)$$

или

$$\tilde{x}_{l+1j} = \frac{1}{\alpha} x_{l+2j} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} x_{l+3j}, \ \ 0 < \alpha < 1. \qquad (2.21)$$

Подставим полученные выражения вместо пропущенных значений. Тогда по данным с ожидаемыми значениями пропусков

$$\begin{matrix} x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{l-1j}, \tilde{x}_{lj}, \tilde{x}_{l+1j}, x_{l+2j}, \ldots, x_{nj} \\ 1, \quad 2, \ \ldots, l-1, l, \ l+1, \ l+2, \ \ldots, \ n \end{matrix} \qquad (2.22)$$

построим трендовую модель $f(t, \alpha)$, которая после настройки параметра α используется для определения восстанавливаемых значений, т.е. $\tilde{x}_{lj} = f(l, \alpha^*)$ и $\tilde{x}_{l+1j} = f(l+1, \alpha^*)$.

Развивая идею применения адаптивных ожиданий для восстановления пропусков, рассмотрим ситуацию, когда в данных имеется три рядом расположенных пропуска на $l-1, l, l+1$ местах. В этом случае формулы для адаптивных ожиданий, которыми заменяются пропуски, представимы в виде

$$\tilde{x}_{l-1j} = \frac{1}{1-\alpha} x_{l-2j} - \frac{1}{1-\alpha} x_{l-3j}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2.23}$$

$$\tilde{x}_{l+1j} = \frac{1}{\alpha} x_{l+2j} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} x_{l+3j}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2.24}$$

$$\tilde{x}_{lj} = \alpha \tilde{x}_{l-1j} + (1-\alpha) \tilde{x}_{l+1j}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.25}$$

Далее применяется процедура с настройкой α, как это делалось выше.

Изложенные здесь методы, главным образом, применимы для восстановления пропусков в данных временного ряда, рассматриваемого локально без предположений о возможных его взаимосвязях с другими временными рядами. В принципе, эти методы можно использовать и для восстановления пропусков в данных временных рядов, имеющих взаимосвязь с другими временными рядами, например, с индексами. Наличие взаимосвязи расширяет математический аппарат, который можно использовать для решения задач по восстановлению пропусков. Так в дальнейшем нас в основном будут интересовать прогнозные решения портфельного инвестирования, то имеет смысл рассмотреть методы восстановления пропусков, в которых отражена специфика этих задач.

6. *Регрессионный анализ.*

С помощью методов регрессионного анализа восстанавливаются пропуски, имеющиеся в той переменной, по которой надлежит осуществлять прогнозные расчеты. Хотя задача остается прежней – восстановление пропусков, но ситуация отличается от той, которая рассматривалась выше. Дело в том, что задачи прогнозирования и восстановления данных имеют одну и ту же природу. И в том, и в другом случае необходимо получить количественную оценку неизвестного значения. Поэтому, если задача восстановления пропусков касается показателя, который является предметом прогнозных исследований, то ее решение должно быть универсальным, т.е. обеспечивать получение как пропущенных, так и прогнозных значений.

Принято считать, что прогноз – это экстраполяционная задача, т.е. задача оценивания некоторых показателей за рамками области определения известных состояний экономического объекта. На языке теории восстановления пропусков, прогноз – это ситуация, когда требуется восстановить «недописанные» (последние) значения временного ряда. Однако в отличие от прогнозирования, непосредственному восстановлению пропусков соответствует две ситуации. Первая из них требует решения интерполяционной задачи, т.е. оценивания неизвестных характеристик объекта в пределах области его определения, а вторая – решения экстраполяционной задачи, т.е. определения последних значений временного ряда, описывающего динамику моделируемого объекта. Фактически, в первой ситуации мы имеем дело с пропусками, расположенными внутри временного ряда, а во втором – в его конце.

Рассмотрим каждую ситуацию отдельно. И в первой и во второй ситуациях предполагается, что для прогнозирования будет использована регрессионная модель (под регрессионной здесь понимается любая модель, параметры которой оцениваются с помощью метода наименьших квадратов).

6.1. *Метод фиктивных переменных*. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда восстанавливается единственный пропуск в зависимой переменной. Для построения регрессионной зависимости формируется набор данных, в l-м наблюдении которого имеется единственный пропуск, причем этот пропуск, как нетрудно понять, допущен в зависимой переменной y. В принципе, данная ситуация мало чем отличается от ранее рассмотренных и поэтому пропущенное значение можно восстановить с помощью одного из уже рассмотренных выше методов, а затем построить прогнозную модель. Не повторяя описание уже известных нам процедур, изложим новый подход, в котором используются возможности регрессионного анализа.

Основная идея данного подхода заключается в том, чтобы восстанавливаемое значение получить в виде оценки коэффициента регрессии с помощью метода наименьших квадратов. Это позволит не только восстановить пропуск, но и оценить с помощью стандартной ошибки точность, с которой восстановлено пропущенное значение, что в выше рассмотренных методах не делалось. Указанное свойство очень полезно, так как позволяет проверять статистические гипотезы относительно возможных значений восстанавливаемой величины.

Чтобы понять суть этого метода, представим в виде матрицы данные, которые будут использоваться для построения регрессионной моделей с одновременным получением пропущенного значения

$$\begin{matrix} y_1 & 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} & 0 \\ y_2 & 1 & x_{21} & \cdots & x_{2m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{l-1} & 1 & x_{l-11} & \vdots & x_{l-1m} & 0 \\ 0 & 1 & x_{l1} & \vdots & x_{lm} & -1 \\ y_{l+1} & 1 & x_{l+11} & \vdots & x_{l+1m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & 1 & x_{n+11} & \cdots & x_{nm} & 0 \end{matrix} . \qquad (2.26)$$

В принятых обозначениях оценка МНК вектора коэффициентов регрессии записываются в виде

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} . \qquad (2.27)$$

В структуре вектора оценок $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m, \hat{b}_{m+1})'$, как нетрудно понять, последняя компонента представляет собой оценку МНК пропущенного значения $\tilde{y}_l = \hat{b}_{m+1}$. Нужно обратить внимание на то, что эта оценка обладает всеми свойствами оценок МНК, т.е. она несмещенная (ее математическое ожидание равно истинному значению пропуска $\mathbf{E}(\tilde{y}_l) = y_l$) и эффективная (имеет минимальную дисперсию в классе линейных оценок). Ее стандартная ошибка $S_{\tilde{y}_l}$ определяется корнем квадратным из последнего диагонального элемента матрицы $S^2_{\hat{\mathbf{b}}} = \hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Становится понятно, что рассматриваемый подход открывает новые возможности, которые полезны при решении задач восстановления пропусков.

Если выборочное множество позволяет, то с помощью этого метода можно вести восстановление двух, трех и более пропусков. Причем, пропуски могут располагаться подряд или распределяться произвольным образом по выборочному множеству. В качестве примера запишем матрицу данных для одновременного восстановления трех пропусков с помощью МНК

$$
\begin{matrix}
0 & 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} & 0 & 0 & -1 \\
y_2 & 1 & x_{21} & \cdots & x_{2m} & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_{l-2} & 1 & x_{l-21} & \vdots & x_{l-2m} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & x_{l-11} & \vdots & x_{l-1m} & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & x_{l1} & \vdots & x_{lm} & -1 & 0 & 0 \\
y_{l+1} & 1 & x_{l+11} & \vdots & x_{l+1m} & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_n & 1 & x_{n+11} & \cdots & x_{nm} & 0 & 0 & 0
\end{matrix}
. \qquad (2.28)
$$

В векторе оценок для этого случая $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m, \hat{b}_{m+1}, \hat{b}_{m+2}, \hat{b}_{m+3})'$ три последних компоненты являются оценками пропущенных значений, причем $\tilde{y}_l = \hat{b}_{m+1}$, $\tilde{y}_{l-1} = \hat{b}_{m+2}$, $\tilde{y}_1 = \hat{b}_{m+3}$. Причем, все три оценки обладают всеми свойствами оценок МНК.

Как уже упоминалось, природа прогнозирования и восстановления последнего значения идентична. Действительно, если в последней строке данных (2.26) в $(m+1)$-м столбце на последнем месте записать -1, а y_{n+1} положить равным 0, то задача восстановления превращается в задачу получения прогнозной оценки в виде последней компоненты оцениваемого вектора параметров регрессии. Заметим, что при таком способе получения прогнозной оценки, в отличие от традиционного, используется вся доступная информация в том смысле, что факторы прогнозного фона $(1, x_{n+11}, \ldots, x_{n+1m}, -1)$ используются при формировании матрицы $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ системы нормальных уравнений. Полученная таким образом прогнозная оценка будет обладать всеми свойствами оценок МНК, т.е. она будет несмещенной, иметь минимальную дисперсию среди всех линейных оценок, а ее стандартная ошибка будет вычисляется как корень квадратный из последнего диагонального элемента матрицы $S^2_{\hat{\mathbf{b}}} = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

6.2. *Комбинированный метод*. Этот метод применяется в ситуациях, когда одновременно требуется восстановить пропуски в зависимой переменной y и независимой переменной x_j. В нем используются метод адаптивных ожиданий и метод фиктивной переменной в процедуре МНК. С помощью метода адаптивных ожиданий восстанавливается пропуск в независимой переменной, а с помощью фиктивной переменной – пропуск в зависимой переменной

Опишем структуру данных для построения комбинированной модели в простейшем случае, когда наблюдается единственный пропуск в зависимой переменной и одиночный пропуск в одной из независимых переменных

$$\begin{matrix} y_1 & 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} & 0 \\ y_2 & 1 & x_{21} & \cdots & x_{2m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{l-1} & 1 & x_{l-11} & \vdots & \tilde{x}_{l-1m} & 0 \\ 0 & 1 & x_{l1} & \vdots & x_{lm} & -1 \\ y_{l+1} & 1 & x_{l+11} & \vdots & x_{l+1m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & 1 & x_{n+11} & \cdots & x_{nm} & 0 \end{matrix}, \qquad (2.29)$$

где $\tilde{x}_{l-1m} = \alpha\, x_{l-2m} + (1-\alpha) x_{lm}, \quad 0 < \alpha < 1.$

МНК-оценки по этим данным будут зависеть от α

$$\hat{\mathbf{b}}(\alpha) = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}. \qquad (2.30)$$

Параметр α можно настраивать по различным критериям, но, учитывая, что основная цель – построение адекватной регрессионной модели, целесообразно параметр α настраивать таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений расчетных значений $\hat{y}_i$ от фактических y_i, т.е.

$$\alpha^* = Arg \min_{\alpha} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2. \qquad (2.31)$$

Комбинированный подход можно применять для восстановления нескольких пропусков в зависимой и независимой переменных.

Интересная, и в некотором смысле противоречивая, ситуация возникает в задачах восстановления пропущенных значений в зависимой переменной, когда прогнозная модель содержит лаговую переменную, т.е. имеет вид

$$y_t = b_0 + b_1 x_{t1} + \cdots + b_m x_{tm} + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (2.32)$$

С подобной ситуацией приходится сталкиваться очень часто при восстановлении пропусков в финансовых временных рядах, так как для их прогнозирования обычно используются авторегрессионные модели. Как нетрудно понять, наличие пропусков в $\mathbf{y}$ порождает ситуацию, когда одно и то же значение требуется восстанавливать как пропуск, допущенный в зависимой переменной y_t, и как пропуск, допущенный в независимой переменной y_{t-1}.

Комбинированный подход предоставляет возможность пропуск в y_t восстанавливать с помощью фиктивной переменной, а в y_{t-1} – с помощью адаптивных ожиданий. Структура данных для построения комбинированной модели в этом случае может быть представлена в виде

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} & y_1 & 0 \\ y_2 & 1 & x_{21} & \cdots & x_{2m} & y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & x_{l-11} & \vdots & x_{l-1m} & y_{l-1} & -1, \\ y_{l+1} & 1 & x_{l1} & \vdots & x_{lm} & \tilde{y}_l & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & 1 & x_{n+11} & \cdots & x_{nm} & 0 & 0 \end{array} \qquad (2.33)$$

где $\tilde{y}_l = \alpha\, y_{l-1} + (1-\alpha) y_{l+1}$.

В результате применения МНК к структуре данных (2.33) с одновременной настройкой параметра α получается две оценки пропущенного значения

$$\tilde{y}_l^{(1)} = \hat{b}_{m+1}; \qquad \tilde{y}_l^{(2)} = \alpha^* y_{l-1} + (1-\alpha^*) y_{l+1}. \qquad (2.34)$$

Их совпадение желательно, но в реальности является чистой случайностью, поскольку критерии, в соответствии с которыми рассчитывались эти оценки, различны. Оценка $\tilde{y}_l^{(1)}$ получается как величина, которая наилучшим образом предсказывается набором $(1, \quad x_{l-11}, \ldots, x_{l-1m}, y_{l-1})$, а $\tilde{y}_l^{(2)}$ – как величина, которой должна быть равна объясняющая переменная, обеспечивающая наилучшую аппроксимацию y_{l+1}. Вопрос о том, какую оценку следует принять за восстановленное значение, естественно решать, используя обе величины. Одним из возможных вариантов их комбинирования является некое усреднение $\tilde{y}_l^{(1)}$ и $\tilde{y}_l^{(2)}$, в качестве которого можно использовать взвешенную среднюю

$$\tilde{y}_l = \alpha^* \tilde{y}_l^1 + (1-\alpha^*) \tilde{y}_l^{(2)}. \qquad (2.35)$$

Рассмотренные методы являются составной частью современного аппарата экономического прогнозирования. Особенно востребованными они являются при обработке больших массивов данных. Финансовые временные ряды можно считать классическим примером подобного рода данных. Они представляют собой выборочные совокупности достаточно больших объемов и в них, почти всегда обнаруживаются пропущенные наблюдения.

Пример восстановления пропусков в данных с помощью программно-инструментальных средств MS Excel

Анализ табл. 2.1, которая является фрагментом табл. П1, показывает, что проблема восстановления пропусков – действительно, серьезная проблема. Ниже показано одно из возможных ее решений в MS Excel. Воспользуемся для этого методом фиктивных переменных.

Таблица 2.1

Динамика стоимости финансовых активов и индекса (фрагмент табл. П1)

	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть	Индекс РТС
01.04.2009	1305,3	127,82	21,02	2068,1	20,8	148,84	685,51
02.04.2009	1300	139,86	22,234	2223,4	21,01	164,64	733,93
03.04.2009	1401,2	141,13	-	2371,9	-	172,19	746,03
06.04.2009	1403,2	136,98	-	2322	24	167,05	748,62
07.04.2009	1409,9	132,03	21,563	2272,4	22,69	162,55	740,47
08.04.2009	1485,6	136,04	22,367	2370,3	24,05	169,59	760,58
09.04.2009	1641,6	146,93	-	2651,6	27	185,78	810,9
10.04.2009	1654,9	147,55	23,5	2733	28	181,42	817,41
13.04.2009	1631,1	144,95	-	2791,4	30	181,94	814,67
14.04.2009	1524	141,65	23,44	2678,9	-	174,13	807,61
15.04.2009	1510,8	143,54	23,5	2554,2	-	167,61	805,85
16.04.2009	1488,6	140,49	23,415	2676,1	27	174,18	819,57
17.04.2009	1513,9	143,36	24,228	2656,8	29	183,47	834,59
20.04.2009	1464,2	133,87	-	2593,7	27	175,71	800,22
21.04.2009	1500	130,79	23,811	2465	25	168,32	775,24
22.04.2009	1400	138,12	23,532	2523,7	-	172,91	785,13
23.04.2009	1505	148	24,052	2695,1	28,2	176,88	820,7

1. Ввод исходных данных (столбцов табл. П1, отражающих динамику индекса РТС, а также стоимости акций СургутНГ и Сбербанка).

2. Введение фиктивных переменных. Фрагменты структуры данных с фиктивными представлены в табл. 2.2 и табл. 2.3.

3. Построение регрессионных моделей

$$y_t^{[1]} = b_0 + b_1 x_t + b_2 f_{t1}^{[1]} + b_3 f_{t2}^{[1]} + b_4 f_{t3}^{[1]} + b_5 f_{t4}^{[1]} + b_6 f_{t5}^{[1]} + \varepsilon_t^{[1]},$$

$$y_t^{[2]} = a_0 + a_1 x_t + a_2 f_{t1}^{[2]} + a_3 f_{t2}^{[2]} + a_4 f_{t3}^{[2]} + a_5 f_{t4}^{[2]} + \varepsilon_t^{[2]},$$

где $y_t^{[1]}$ – стоимость акций СургутНГ; $y_t^{[2]}$ – стоимость акций Сбербанка; x_t – величина индекса РТС; $a_0, a_1, \ldots, a_5$ и $b_0, b_1, \ldots, b_6$– коэффициенты моделей; $f_{t1}^{[1]}, \ldots, f_{t5}^{[1]}$ и $f_{t1}^{[2]}, \ldots, f_{t4}^{[2]}$ – фиктивные переменные моделей; $\varepsilon_t^{[1]}, \varepsilon_t^{[2]}$– ненаблюдаемые случайные составляющие моделей.

Для построения этих моделей надо вызывать модуль *Регрессия* (*Сервис – Анализ данных – Регрессия*) и в открывшемся окне указать входные и выходные интервалы (см. рис. 2.1 и рис. 2.2).

Таблица 2.2

Фрагмент структуры данных с фиктивными переменными (СургутНГ)

	J	K	L	M	N	O	P	Q
2	Дата	СургутНГ	Индекс РТС	Фиктивные переменные				
3	01.04.2009	21,02	685,51	0	0	0	0	0
4	02.04.2009	22,234	733,93	0	0	0	0	0
5	03.04.2009	0	746,03	-1	0	0	0	0
6	06.04.2009	0	748,62	0	-1	0	0	0
7	07.04.2009	21,563	740,47	0	0	0	0	0
8	08.04.2009	22,367	760,58	0	0	0	0	0
9	09.04.2009	0	810,9	0	0	-1	0	0
10	10.04.2009	23,5	817,41	0	0	0	0	0
11	13.04.2009	0	814,67	0	0	0	-1	0
12	14.04.2009	23,44	807,61	0	0	0	0	0
13	15.04.2009	23,5	805,85	0	0	0	0	0
14	16.04.2009	23,415	819,57	0	0	0	0	0
15	17.04.2009	24,228	834,59	0	0	0	0	0
16	20.04.2009	0	800,22	0	0	0	0	-1
17	21.04.2009	23,811	775,24	0	0	0	0	0
18	22.04.2009	23,532	785,13	0	0	0	0	0

Таблица 2.3

Фрагмент структуры данных с фиктивными переменными (Сбербанк)

	S	T	U	V	W	X	Y
2	Дата	Сбербанк	Индекс РТС	Фиктивные переменные			
3	01.04.2009	20,8	685,51	0	0	0	0
4	02.04.2009	21,01	733,93	0	0	0	0
5	03.04.2009	0	746,03	-1	0	0	0
6	06.04.2009	24	748,62	0	0	0	0
7	07.04.2009	22,69	740,47	0	0	0	0
8	08.04.2009	24,05	760,58	0	0	0	0
9	09.04.2009	27	810,9	0	0	0	0
10	10.04.2009	28	817,41	0	0	0	0
11	13.04.2009	30	814,67	0	0	0	0
12	14.04.2009	0	807,61	0	-1	0	0
13	15.04.2009	0	805,85	0	0	-1	0
14	16.04.2009	27	819,57	0	0	0	0
15	17.04.2009	29	834,59	0	0	0	0
16	20.04.2009	27	800,22	0	0	0	0
17	21.04.2009	25	775,24	0	0	0	0
18	22.04.2009	0	785,13	0	0	0	-1
19	23.04.2009	28,2	820,7	0	0	0	0

20	24.04.2009	27,97	831,41	0	0	0	0

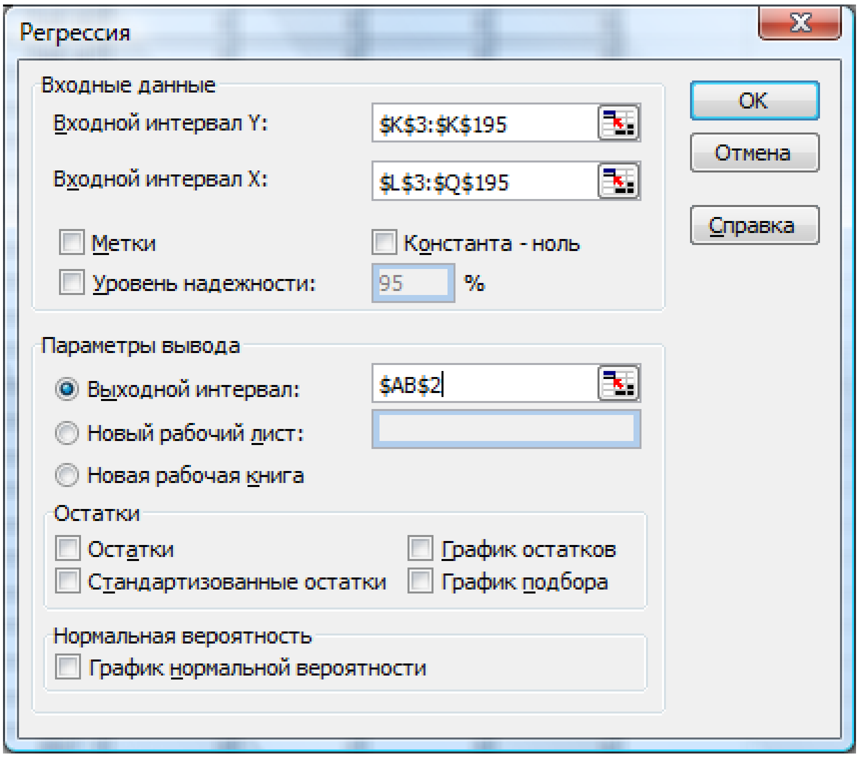


Рис. 2.1. Модуль *Регрессия* (СургутНГ)

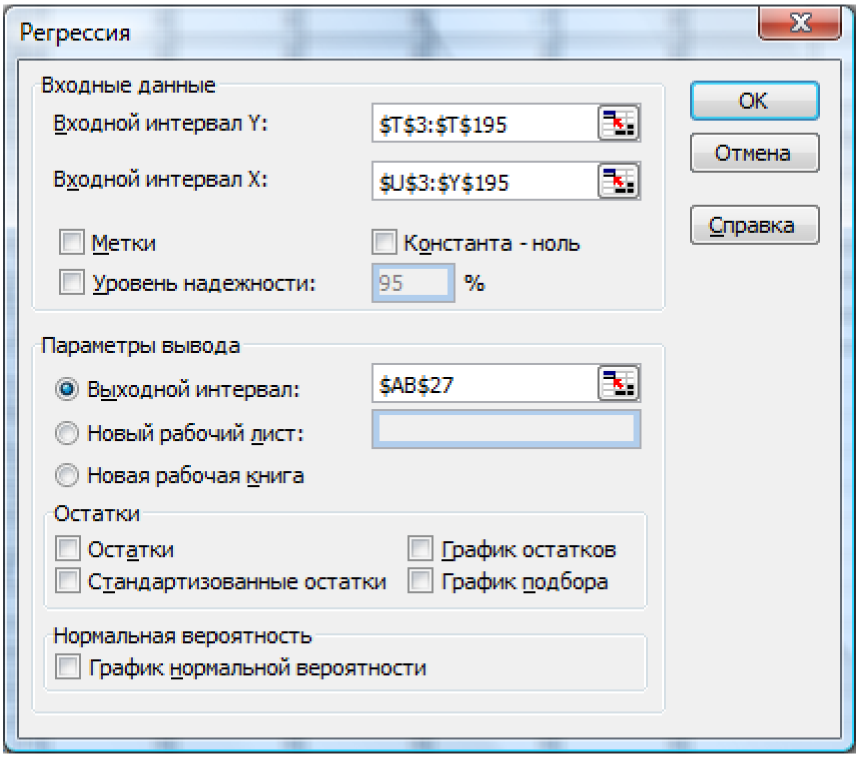


Рис. 2.2. Модуль *Регрессия* (Сбербанк)

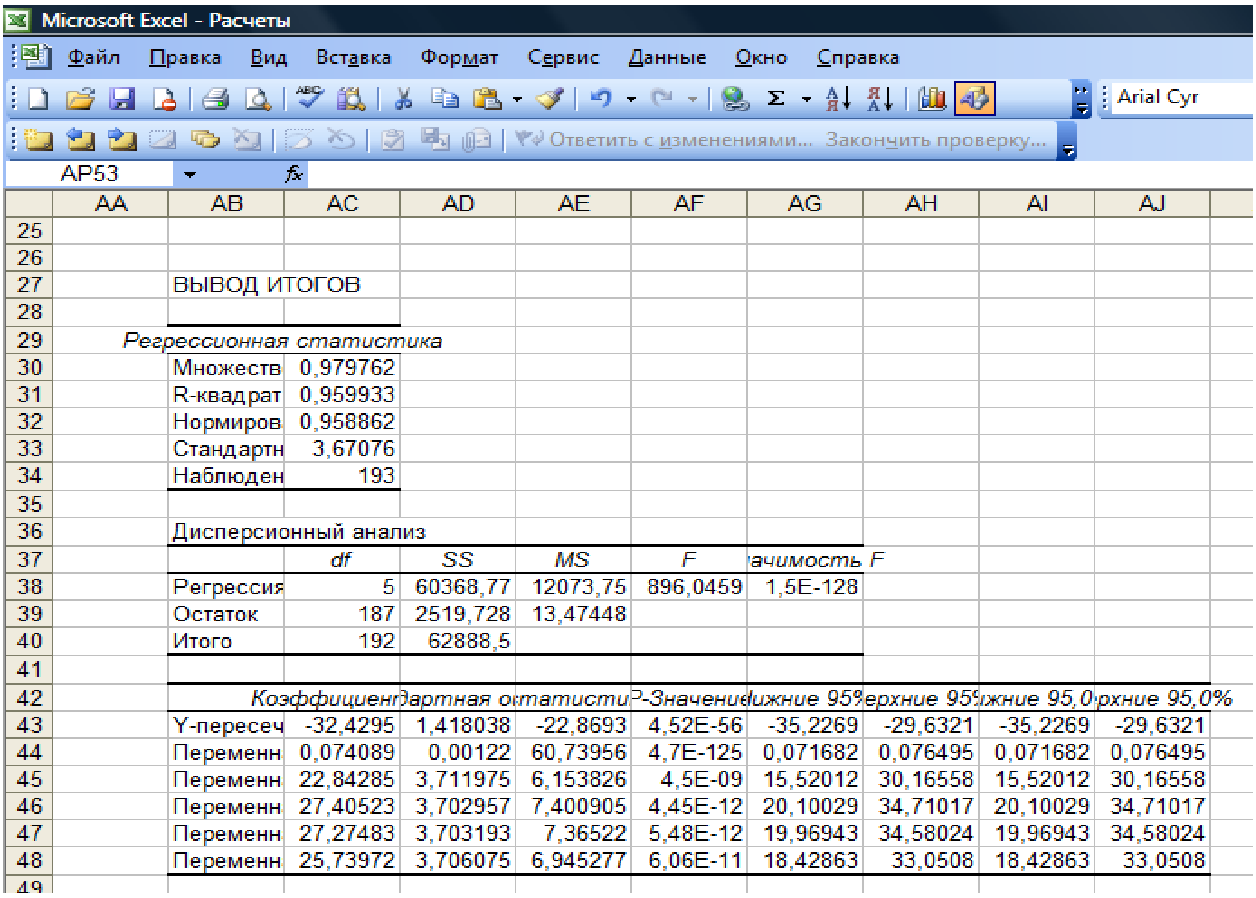
Результаты регрессионного анализа представлены на рис. 2.3 и рис. 2.4.

Фрагмент исходных данных с восстановленными пропусками содержит табл. 2.4.

Microsoft Excel - Расчеты

	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ
1										
2		ВЫВОД ИТОГОВ								
3										
4		*Регрессионная статистика*								
5		Множеств	0,964485							
6		R-квадрат	0,930231							
7		Нормиров	0,927981							
8		Стандартн	1,20896							
9		Наблюден	193							
10										
11		Дисперсионный анализ								
12			*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*			
13		Регрессия	6	3624,649	604,1082	413,3245	1,1E-104			
14		Остаток	186	271,8545	1,461583					
15		Итого	192	3896,504						
16										
17			*Коэффициент*	*дартная о*	*статисти*	*Р-Значение*	*ижние 95%*	*ерхние 95%*	*ижние 95,0*	*рхние 95,0%*
18		Y-пересеч	15,87592	0,471285	33,68643	4,23E-81	14,94617	16,80567	14,94617	16,80567
19		Переменн	0,008008	0,000405	19,78375	1,25E-47	0,00721	0,008807	0,00721	0,008807
20		Переменн	21,85044	1,222812	17,86901	3,16E-42	19,43808	24,26281	19,43808	24,26281
21		Переменн	21,87119	1,222675	17,88798	2,79E-42	19,45909	24,28328	19,45909	24,28328
22		Переменн	22,36995	1,219633	18,34154	1,41E-43	19,96386	24,77604	19,96386	24,77604
23		Переменн	22,40014	1,219466	18,36882	1,18E-43	19,99438	24,8059	19,99438	24,8059
24		Переменн	22,28442	1,220118	18,26415	2,35E-43	19,87737	24,69147	19,87737	24,69147
25										

Рис. 2.3. Вывод итогов регрессионного анализа (СургутНГ)



	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ
25										
26										
27		ВЫВОД ИТОГОВ								
28										
29	*Регрессионная статистика*									
30		Множеств	0,979762							
31		R-квадрат	0,959933							
32		Нормиров	0,958862							
33		Стандартн	3,67076							
34		Наблюден	193							
35										
36		Дисперсионный анализ								
37			*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*			
38		Регрессия	5	60368,77	12073,75	896,0459	1,5E-128			
39		Остаток	187	2519,728	13,47448					
40		Итого	192	62888,5						
41										
42			*Коэффициен*	*дартная о*	*статисти*	*Р-Значени*	*ижние 95%*	*ерхние 95%*	*жние 95,0*	*рхние 95,0%*
43		Y-пересеч	-32,4295	1,418038	-22,8693	4,52E-56	-35,2269	-29,6321	-35,2269	-29,6321
44		Переменн	0,074089	0,00122	60,73956	4,7E-125	0,071682	0,076495	0,071682	0,076495
45		Переменн	22,84285	3,711975	6,153826	4,5E-09	15,52012	30,16558	15,52012	30,16558
46		Переменн	27,40523	3,702957	7,400905	4,45E-12	20,10029	34,71017	20,10029	34,71017
47		Переменн	27,27483	3,703193	7,36522	5,48E-12	19,96943	34,58024	19,96943	34,58024
48		Переменн	25,73972	3,706075	6,945277	6,06E-11	18,42863	33,0508	18,42863	33,0508
49										

Рис. 2.4. Вывод итогов регрессионного анализа (Сбербанка)

Таблица 2.4

	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть	Индекс РТС
01.04.2009	1305,3	127,82	21,02	2068,1	20,8	148,84	685,51
02.04.2009	1300	139,86	22,234	2223,4	21,01	164,64	733,93
03.04.2009	1401,2	141,13	21,8504	2371,9	22,8428	172,19	746,03
06.04.2009	1403,2	136,98	21,8712	2322	24	167,05	748,62
07.04.2009	1409,9	132,03	21,563	2272,4	22,69	162,55	740,47
08.04.2009	1485,6	136,04	22,367	2370,3	24,05	169,59	760,58
09.04.2009	1641,6	146,93	22,3700	2651,6	27	185,78	810,9
10.04.2009	1654,9	147,55	23,5	2733	28	181,42	817,41
13.04.2009	1631,1	144,95	22,4001	2791,4	30	181,94	814,67
14.04.2009	1524	141,65	23,44	2678,9	27,4052	174,13	807,61
15.04.2009	1510,8	143,54	23,5	2554,2	27,2748	167,61	805,85
16.04.2009	1488,6	140,49	23,415	2676,1	27	174,18	819,57
17.04.2009	1513,9	143,36	24,228	2656,8	29	183,47	834,59
20.04.2009	1464,2	133,87	22,2844	2593,7	27	175,71	800,22
21.04.2009	1500	130,79	23,811	2465	25	168,32	775,24
22.04.2009	1400	138,12	23,532	2523,7	25,7397	172,91	785,13
23.04.2009	1505	148	24,052	2695,1	28,2	176,88	820,7

Таким образом, применение рассмотренных выше методов повышает надежность расчетов в тех ситуациях, когда в данных обнаруживаются неточности, связанные с дефектами формирования выборочных совокупностей.

3. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Формальное изложение основных положений теории портфельного инвестирования начнем с введения обозначений. Пусть $\mathrm{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ есть множество активов (акций, облигаций, валютных единиц, всевозможных комбинаций активов), обращающихся на финансовом рынке. Рыночную стоимость актива A_i в момент времени t будем обозначать S_{it}, а величину денежного потока (дивиденды, купонные выплаты и т.п.), связанного с активом A_i в тот же самый момент времени – D_{it}. Тогда, используя введенные обозначения, можно записать выражение для расчета доходности актива A_i за единичный период следующим образом:

$$r_{it} = \frac{S_{it} - S_{it-1} + D_{it}}{S_{it-1}}. \qquad (3.1)$$

Доходность представляет собой ту характеристику, которая на финансовом рынке больше всего интересует инвесторов. Она является случайной величиной. Поэтому для строгого математического описания ее поведения обычно вводят вероятностное пространство $(\Omega, \mathbf{F}, P)$, где Ω– множеств элементарных исходов на финансовом рынке, $\mathbf{F}$ – множество событий, P – вероятности на множестве событий. На формальном уровне все активы A_i финансового рынка в каждый момент времени описывается случайной величиной r_{it} как функцией от $\omega_t \in \Omega$, т.е. $r_{it} = r_i(\omega_t)$.

Известно, что в качестве данных для решения оптимизационной задачи нельзя использовать случайные величины. Чтобы избежать нежелательной ситуации при построении модели переходят к усредненным величинам: математическому ожиданию, дисперсии, ковариации. В непрерывном случае математическое ожидание случайной величины $r_i(\omega)$ записывается следующим образом:

$$m_i = \mathrm{E}\, r_i = \int_{\Omega} r_i(\omega)\, dP\,, \tag{3.2}$$

в дискретном случае вместо интегрирования в (1.2) осуществляется суммирование

$$m_i = \mathrm{E}\, r_i = \sum_{\omega\in\Omega} r_i(\omega)\, p(\omega)\,. \tag{3.3}$$

Аналогично определяются дисперсия

$$\sigma_i^2 = \mathrm{var}(r_i) = \mathrm{E}(r_i - m_i)^2 \tag{3.4}$$

и ковариация

$$\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j) = \mathrm{E}(r_i - m_i)(r_j - m_j)\,. \tag{3.5}$$

В реальных расчетах обычно используются выборочные оценки, построенные на основе исторических значений доходностей r_{it}, $t = 1, \dots, T$

$$m_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}\,, \tag{3.6}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} (r_{it} - m_i)^2\,, \tag{3.7}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} (r_{it} - m_i)(r_{jt} - m_j)\,. \tag{3.8}$$

В однопериодной модели Марковица инвестор в момент времени T формирует портфель $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w} \in \mathbf{W} = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) : \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}, \tag{3.9}$$

где w_i показывает долю капитала инвестора размещенного в активе A_i. Множество $\mathbf{W}$, представляет собой всю совокупность портфелей, которые можно сформировать из n активов. Его принято называть достижимым множеством портфелей.

Любой портфель из достижимого множества можно описать в соответствии с подходом Марковица двумя показателями – математическим ожиданием и дисперсией, в которых концентрированно отражаются надежды и опасения инвесторов.

Математическое ожидание портфеля определяется выражением

$$m_w = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i \right) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, \mathrm{E}\, r_i = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i \tag{1.10}$$

и представляет собой ожидаемую в среднем доходность портфеля.

Соответственно дисперсия портфеля может быть представлена выражением

$$\sigma_w^2 = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \,. \tag{3.11}$$

Для записи этих выражений часто пользуются более удобной и компактной матричной формой

$$m_w = \mathbf{w}'\mathbf{m}\,, \tag{3.12}$$

$$\sigma_w^2 = \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}\,, \tag{3.13}$$

где $\mathbf{w}$, $\mathbf{m}$ – векторы с соответствующими компонентами, $\mathbf{\Sigma}$ – ковариационная матрица доходностей, элементы которой определяются в соответствии с (3.11).

С математической точки зрения стремление инвесторов сформировать портфели, обеспечивающие им высокую доходность с достаточно низким уровнем риска нереально. Получить портфель, который обеспечивал бы достижение максимальной доходности и минимального риска, как известно, невозможно. Поэтому в задачах формирования портфеля предусматривают оптимизацию одного из показателей при фиксированном уровне второго. Либо комбинируют эти критерии, строя на их основе целевую функцию в виде свертки этих критериев, сводя тем самым многокритериальную (в данном случае двухкритериальную) задачу к однокритериальной.

Таким образом, обобщая выше изложенное, можно рассматривать следующие варианты моделей [16], обеспечивающих получение оптимальных портфелей:

1. Минимизация риска при заданном уровне ожидаемой доходности

   $\sigma_w^2 \to \min$;

   $m_w = \mu$.

2. Максимизация ожидаемой доходности при заданном уровне риска

   $m_w \to \max$;

   $\sigma_w^2 = \sigma$.

3. Максимизация специально построенной функции полезности

   $\mathrm{U}(m_w, \sigma_w) \to \max$.

4. Максимизация функции полезности с ограничениями

   $\mathrm{U}(m_w, \sigma_w) \to \max$;

$$\mathbf{Aw} \le \mathbf{b}.$$

Во всех рассмотренных вариантах предполагалось, что сумма элементов вектора структуры портфеля равна единице. Это условие далее мы будем записывать в компактной форме $\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1$, где $\mathbf{i}$ – вектор, все компоненты которого равны единице.

Принято считать, что в портфеле $\mathbf{w}^*$, который является решением любой из выше приведенных задач оптимизации, отражено предпочтение инвестора относительно ожидаемой доходности и уровня риска. Такие портфели принято называть эффективными.

Множество эффективных (оптимальных) портфелей, каждый из которых обеспечивает:

- либо максимальную ожидаемую доходность среди портфелей достижимого множества с одинаковым уровнем риска (дисперсии), т.е.
$$\mathbf{W}^* = \{\mathbf{w}^* \in \mathbf{W} : m_{w^*} = \max\langle\ m_w : \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \sigma^2_{w^*} = \sigma\ \rangle\}\ ;$$
- либо минимальный риск среди портфелей достижимого множества с одинаковым значением ожидаемой доходности, которая не меньше доходности портфеля, обладающего среди всех портфелей самым маленьким риском, т.е.
$$\mathbf{W}^* = \left\{\mathbf{w}^* \in \mathbf{W} : \sigma_{w^*} = \min\left\langle \sigma^2_w : \mathbf{w} \in \mathbf{W}, m_{w^*} = \mu, m_w \ge m_{\min} \right\rangle\right\},$$

называется эффективным множеством.

Графически эффективное множество представляет собой ветвь параболы (рис. 3.1), каждая точка которой является вариантом возможного выбора какого-либо инвестора.

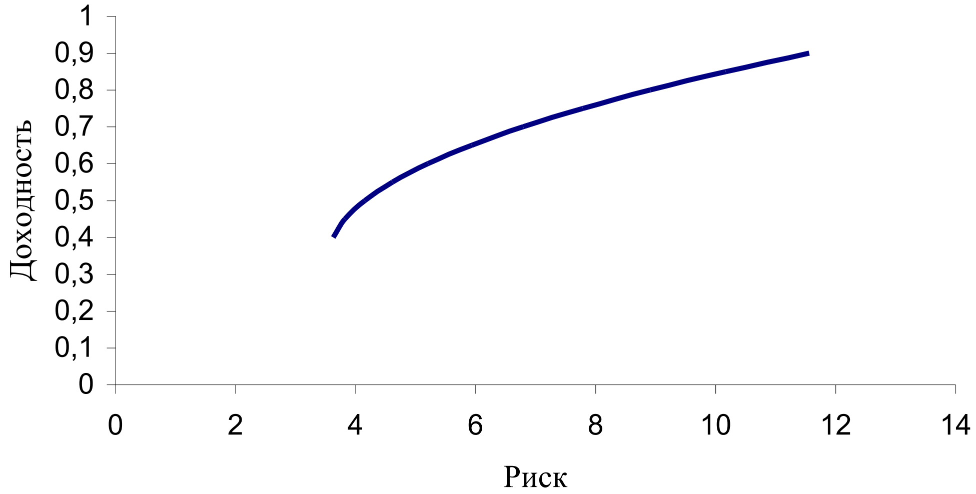


Рис. 3.1. Фронт эффективных портфелей

Эффективное множество очень удобно использовать для описания возможностей инвесторов. Ведь инвестора мало интересует структура портфеля. Ему интересен результат инвестирования. Поэтому формирование портфеля удобней начинать с изучения инвестиционных возможностей. Но сами инвестиционные возможности, естественно, зависят и от структуры портфеля, и от состава портфеля. Поэтому вопрос, связанный с определением состава портфеля, не снимается.

Из теории эффективного рынка следует рекомендация, в соответствии с которой структура портфеля инвестора должна быть идентична рыночному портфелю. Однако при решении практических задач эта рекомендация в полном объеме никогда не выполняется. Как правило, набор ценных бумаг конкретных портфелей значительно уже набора рыночного портфеля.

Кроме того, ценные бумаги, включаемые в портфель, определяют его ликвидность, а это учитываемая характеристика. Поэтому первоначальный отбор активов для включения их в портфель является важной и в то же время самостоятельной задачей, которая, к сожалению, не имеет строго формализованного решения и зачастую решается на эвристическом уровне.

4. МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА

Задача формирования оптимального портфеля имеет два критерия: риск и доходность. Получить решение, одновременно минимизирующее риск и максимизирующее доходность, невозможно. Поэтому при решении этой задачи учитывается мнение инвестора, которое предусматривает либо при заданном уровне доходности минимизацию риска, либо при заданном уровне риска максимизацию доходности.

Сначала рассмотрим задачу, когда требуется минимизировать риск при заданном уровне доходности. Запишем условие этой задачи в матричной форме, используя для этого ранее введенные обозначения,

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \to \min, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{m} = \mu, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1. \tag{4.3}$$

С помощью функции Лагранжа сведем задачу условной минимизации (4.1) – (4.3) к задаче безусловной минимизации

$$\mathrm{L}(\mathbf{w},\lambda,\delta)=\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}-2\lambda(\mathbf{w}'\mathbf{m}-\mu)-2\delta(\mathbf{w}'\mathbf{i}-1). \qquad (4.4)$$

С целью минимизации запишем для функции Лагранжа условия минимума 1-го порядка, которые получаются, если ее продифференцировать по **w,** λ и δ. После сокращения на 2 имеем систему

$$\mathrm{L}'_{\mathbf{w}}=\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}-\lambda\mathbf{m}-\delta\mathbf{i}=\mathbf{0}; \qquad (4.5)$$

$$\mathrm{L}'_{\lambda}=\mathbf{w}'\mathbf{m}-\mu=0; \qquad (4.6)$$

$$\mathrm{L}'_{\mu}=\mathbf{w}'\mathbf{i}-1=0, \qquad (4.7)$$

из которой нетрудно получить

$$\mathbf{w}=\mathbf{\Sigma}^{-1}(\lambda\mathbf{m}+\delta\mathbf{i}). \qquad (4.8)$$

Подставив полученное выражение (4.8) в (4.6) и (4.7), предварительно поменяв местами сомножители, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными λ и δ

$$\begin{cases}\mathbf{m}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\lambda\mathbf{m}+\delta\mathbf{i})=\mu;\\ \mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\lambda\mathbf{m}+\delta\mathbf{i})=1.\end{cases} \qquad (4.9)$$

Если ввести обозначения

$$A=\mathbf{m}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m},\quad B=\mathbf{m}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i},\quad C=\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}, \qquad (4.10)$$

то систему (4.9) можно записать в виде

$$\begin{cases}A\lambda+B\delta=\mu;\\ B\lambda+C\delta=1.\end{cases} \qquad (4.11)$$

Решение системы (1.24) методом Крамера, позволяет получить

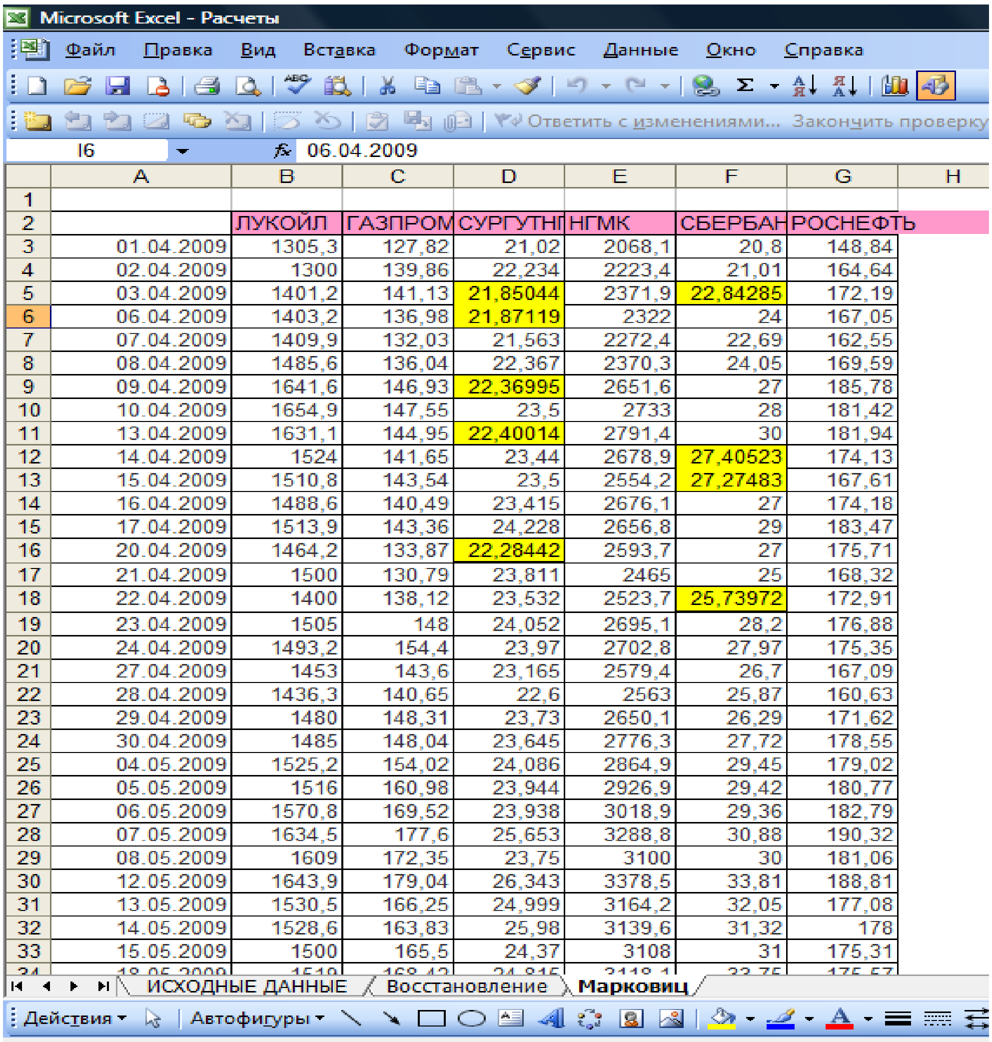
$$\lambda=\frac{C\mu-B}{AC-B^2},\qquad \delta=\frac{A-B\mu}{AC-B^2}. \qquad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.8), получаем уравнение для расчета структуры оптимального портфеля с заданной доходностью μ

$$\mathbf{w}^*=\mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\frac{C\mu-B}{AC-B^2}\mathbf{m}+\frac{A-B\mu}{AC-B^2}\mathbf{i}\right). \qquad (4.13)$$

Алгоритм построения модели Марковица в MS Excel (аналитическое решение)

1. Ввод исходной информации (табл. П1, см. Приложение 1) с восстановленными в предыдущем параграфе пропусками в данных, отражающих динамику стоимости акций СургутНГ и Сбербанка (см. рис. 4.1).



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		ЛУКОЙЛ	ГАЗПРОМ	СУРГУТНГ	НГМК	СБЕРБАН	РОСНЕФТЬ
3	01.04.2009	1305,3	127,82	21,02	2068,1	20,8	148,84
4	02.04.2009	1300	139,86	22,234	2223,4	21,01	164,64
5	03.04.2009	1401,2	141,13	21,85044	2371,9	22,84285	172,19
6	06.04.2009	1403,2	136,98	21,87119	2322	24	167,05
7	07.04.2009	1409,9	132,03	21,563	2272,4	22,69	162,55
8	08.04.2009	1485,6	136,04	22,367	2370,3	24,05	169,59
9	09.04.2009	1641,6	146,93	22,36995	2651,6	27	185,78
10	10.04.2009	1654,9	147,55	23,5	2733	28	181,42
11	13.04.2009	1631,1	144,95	22,40014	2791,4	30	181,94
12	14.04.2009	1524	141,65	23,44	2678,9	27,40523	174,13
13	15.04.2009	1510,8	143,54	23,5	2554,2	27,27483	167,61
14	16.04.2009	1488,6	140,49	23,415	2676,1	27	174,18
15	17.04.2009	1513,9	143,36	24,228	2656,8	29	183,47
16	20.04.2009	1464,2	133,87	22,28442	2593,7	27	175,71
17	21.04.2009	1500	130,79	23,811	2465	25	168,32
18	22.04.2009	1400	138,12	23,532	2523,7	25,73972	172,91
19	23.04.2009	1505	148	24,052	2695,1	28,2	176,88
20	24.04.2009	1493,2	154,4	23,97	2702,8	27,97	175,35
21	27.04.2009	1453	143,6	23,165	2579,4	26,7	167,09
22	28.04.2009	1436,3	140,65	22,6	2563	25,87	160,63
23	29.04.2009	1480	148,31	23,73	2650,1	26,29	171,62
24	30.04.2009	1485	148,04	23,645	2776,3	27,72	178,55
25	04.05.2009	1525,2	154,02	24,086	2864,9	29,45	179,02
26	05.05.2009	1516	160,98	23,944	2926,9	29,42	180,77
27	06.05.2009	1570,8	169,52	23,938	3018,9	29,36	182,79
28	07.05.2009	1634,5	177,6	25,653	3288,8	30,88	190,32
29	08.05.2009	1609	172,35	23,75	3100	30	181,06
30	12.05.2009	1643,9	179,04	26,343	3378,5	33,81	188,81
31	13.05.2009	1530,5	166,25	24,999	3164,2	32,05	177,08
32	14.05.2009	1528,6	163,83	25,98	3139,6	31,32	178
33	15.05.2009	1500	165,5	24,37	3108	31	175,31

Рис. 4.1. Фрагмент исходных данных в MS Excel

2. Расчет однодневной и средней доходности акций каждой компании (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1

Динамика доходности акций

	I	J	K	L	M	N	O
2		Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть
3	01.04.2009						
4	02.04.2009	-0,4060	9,4195	5,7755	7,5093	1,0096	10,6154
5	03.04.2009	7,7846	0,9081	-1,7251	6,6790	8,7237	4,5858
6	06.04.2009	0,1427	-2,9406	0,0949	-2,1038	5,0657	-2,9851
7	07.04.2009	0,4775	-3,6137	-1,4091	-2,1361	-5,4583	-2,6938
8	08.04.2009	5,3692	3,0372	3,7286	4,3082	5,9938	4,3310
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
191	25.12.2009	0,6318	0,8298	0,7851	0,7262	-0,1234	1,1637
192	28.12.2009	1,2496	-0,2908	0,0836	0,9878	-0,7168	2,2091
193	29.12.2009	1,0216	1,1500	2,3236	1,8253	0,9336	-1,2423
194	30.12.2009	-1,0639	-0,6310	-0,7050	-0,0865	1,1717	-1,4157

195	31.12.2009	-0,1536	0,3668	0,2280	-0,6854	0,5973	1,8640
196		СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ					
197		0,1789	0,2475	0,1739	0,4418	0,8059	0,3418

П р и м е ч а н и е:

	Содержимое ячеек столбца J	………	Содержимое ячеек столбца O
4	=(B4/B3-1)*100	⋮	=(G4/G3-1)*100
5	=(B5/B4-1)*100	⋮	=(G5/G4-1)*100
6	=(B6/B5-1)*100	⋮	=(G6/G5-1)*100
7	=(B7/B6-1)*100	⋮	=(G7/G6-1)*100
8	=(B8/B7-1)*100	⋮	=(G8/G7-1)*100
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
191	=(B191/B190-1)*100	⋮	=(G191/G190-1)*100
192	=(B192/B191-1)*100	⋮	=(G192/G191-1)*100
193	=(B193/B192-1)*100	⋮	=(G193/G192-1)*100
194	=(B194/B193-1)*100	⋮	=(G194/G193-1)*100
195	=(B195/B194-1)*100	⋮	=(G195/G194-1)*100
196	СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ		
197	=СРЗНАЧ(J4:J195)	………	=СРЗНАЧ(O4:O195)

3. Вычисление отклонений однодневных доходностей от среднего значения (см. табл. 4.2).

Таблица 4.2

Отклонения доходности

	R	S	T	U	V	W
2	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть
3						
4	-0,5850	9,1720	5,6015	7,0675	0,2037	10,2736
5	7,6057	0,6605	-1,8990	6,2371	7,9178	4,2439
6	-0,0362	-3,1881	-0,0790	-2,5456	4,2598	-3,3269
7	0,2986	-3,8612	-1,5830	-2,5779	-6,2643	-3,0356
8	5,1903	2,7897	3,5547	3,8664	5,1879	3,9891
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
191	0,4528	0,5823	0,6112	0,2844	-0,9294	0,8219
192	1,0707	-0,5383	-0,0903	0,5459	-1,5228	1,8673
193	0,8427	0,9025	2,1497	1,3835	0,1277	-1,5841
194	-1,2428	-0,8785	-0,8789	-0,5283	0,3657	-1,7575
195	-0,3325	0,1193	0,0540	-1,1272	-0,2086	1,5222

П р и м е ч а н и е:

	Содержимое ячеек столбца R	………	Содержимое ячеек столбца W
4	=J4-J$197	⋮	=O4-O$197
5	=J5-J$197	⋮	=O5-O$197
6	=J6-J$197	⋮	=O6-O$197
7	=J7-J$197	⋮	=O7-O$197
8	=J8-J$197	⋮	=O8-O$197
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
191	=J191-J$197	⋮	=O191-O$197
192	=J192-J$197	⋮	=O192-O$197
193	=J193-J$197	⋮	=O193-O$197
194	=J194-J$197	⋮	=O194-O$197
195	=J195-J$197	⋮	=O195-O$197

4. Нахождение ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}$.

Для этого необходимо выделить пустые ячейки (Z4:AE9), затем ввести формулу

=МУМНОЖ(ТРАНСП(R4:W195);R4:W195)/(192-1)

и нажать клавиши *Ctrl+Shift+Enter* одновременно.

В результате появится ковариационная матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8{,}9836 & 7{,}4527 & 5{,}5851 & 7{,}5910 & 8{,}3233 & 7{,}0462 \\ 7{,}4527 & 11{,}9733 & 6{,}5040 & 10{,}1761 & 9{,}7872 & 8{,}4754 \\ 5{,}5851 & 6{,}5040 & 9{,}5117 & 6{,}5736 & 6{,}4846 & 6{,}1410 \\ 7{,}5910 & 10{,}1761 & 6{,}5736 & 13{,}4657 & 10{,}9132 & 8{,}9836 \\ 8{,}3233 & 9{,}7872 & 6{,}4846 & 10{,}9132 & 17{,}6054 & 9{,}4222 \\ 7{,}0462 & 8{,}4754 & 6{,}1410 & 8{,}9836 & 9{,}4222 & 12{,}5648 \end{pmatrix}.$$

5. Нахождение матрицы, обратной к ковариационной $\mathbf{\Sigma}^{-1}$.

Для этого необходимо выделить пустые ячейки (Z12:AE17), затем ввести формулу

=МОБР(Z4:AE9)

и нажать клавиши *Ctrl+Shift+Enter* одновременно.

В результате появится матрица, обратная к ковариационной

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2966 & -0{,}0671 & -0{,}0517 & -0{,}0261 & -0{,}0441 & -0{,}0440 \\ -0{,}0671 & 0{,}2968 & -0{,}0376 & -0{,}1250 & -0{,}0210 & -0{,}0390 \\ -0{,}0517 & -0{,}0376 & 0{,}1903 & -0{,}0186 & 0{,}0006 & -0{,}0258 \\ -0{,}0261 & -0{,}1250 & -0{,}0186 & 0{,}2611 & -0{,}0519 & -0{,}0397 \\ -0{,}0441 & -0{,}0210 & 0{,}0006 & -0{,}0519 & 0{,}1349 & -0{,}0254 \\ -0{,}0440 & -0{,}0390 & -0{,}0258 & -0{,}0397 & -0{,}0254 & 0{,}1906 \end{pmatrix}.$$

6. Расчет величин A, B, C, λ и δ.

Для этого необходимо транспонировать средние значения доходности, выделив пустые ячейки (Z19:Z24), введя формулу

=ТРАНСП(J197:O197)

и нажав клавиши *Ctrl+Shift+Enter* одновременно.

Далее необходимо ввести в ячейки (Z26:Z31) и (J198:O198) вектора из единиц.

Результаты расчетов представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Расчет величин A, B, C, λ и δ

	AB	AC	AD	AE
19	A	B	C	μ
20	0,0486	0,0230	0,1372	0,3
21				
22	$AC-B^2$	λ	δ	
23	0,0061	2,9532	6,7934	

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца AB	Содержание ячеек столбца AC	Содержание ячеек столбца AD
19	A	B	C
20	=МУМНОЖ(J197:O197; МУМНОЖ(Z12:AE17;Z19:Z24))	=МУМНОЖ(J197:O197; МУМНОЖ(Z12:AE17;Z26:Z31))	=МУМНОЖ(J198:O198; МУМНОЖ(Z12:AE17;Z26:Z31))
21			
22	$AC-B^2$	λ	δ
23	=AB20*AD20-AC20^2	=(AD20*AE20-AC20)/AB23	=(AB20-AC20*AE20)/AB23

7. Расчет структуры оптимального портфеля (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Структура оптимального портфеля (доходность $\mu = 0{,}3$)

	AB	AC	AD	AE
25	$\lambda\mathbf{m}$	$\delta\mathbf{i}$	$\lambda\mathbf{m}+\delta\mathbf{i}$	$\mathbf{w}^*$

26	0,5284	6,7934	7,3218	**0,3291**
27	0,7309	6,7934	7,5243	**-0,0428**
28	0,5137	6,7934	7,3071	**0,3826**
29	1,3048	6,7934	8,0982	**0,0607**
30	2,3801	6,7934	9,1735	**0,1420**
31	1,0095	6,7934	7,8029	**0,1285**

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца AB	Содержание ячеек столбца AC	Содержание ячеек столбца AD	Содержание ячеек столбца AE
26	=Z19*$AC$23	=Z26*$AD$23	=AB26:AB31+AC26:AC31	=МУМНОЖ(Z12:AE17; AD26:AD31)
27	=Z20*$AC$23	=Z27*$AD$23	=AB26:AB31+AC26:AC31	=МУМНОЖ(Z12:AE17; AD26:AD31)
28	=Z21*$AC$23	=Z28*$AD$23	=AB26:AB31+AC26:AC31	=МУМНОЖ(Z12:AE17; AD26:AD31)
29	=Z22*$AC$23	=Z29*$AD$23	=AB26:AB31+AC26:AC31	=МУМНОЖ(Z12:AE17; AD26:AD31)
30	=Z23*$AC$23	=Z30*$AD$23	=AB26:AB31+AC26:AC31	=МУМНОЖ(Z12:AE17; AD26:AD31)
31	=Z24*$AC$23	=Z31*$AD$23	=AB26:AB31+AC26:AC31	=МУМНОЖ(Z12:AE17; AD26:AD31)

8. Расчет величины риска (табл. 4.5).

Для этого сначала необходимо выделить ячейки (AA34:AF34), ввести формулу

=МУМНОЖ(ТРАНСП(AE26:AE31);Z4:AE9)

и нажать клавиши *Ctrl+Shift+Enter* одновременно.

В результате появится вектор $\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}$

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix}7{,}3218 & 7{,}5243 & 7{,}3071 & 8{,}0982 & 9{,}1735 & 7{,}8029\end{pmatrix}.$$

Таблица 4.5

Расчет величины риска

	AA	Содержание ячейки
37	2,7712	=(МУМНОЖ(AA34:AF34;AE26:AE31))^0,5

9. Подготовка данных для построения фронта эффективных портфелей из рискованных активов при заданном уровне доходности. Изменяя значения доходности и получая, таким образом, разные значения риска, формируем данные для построения фронта эффективных портфелей (табл. 4.6).

Таблица 4.6

Данные для построения фронта эффективных портфелей

№ п.п.	Риск	Доходность	№ п.п.	Риск	Доходность
1.	2,7011	0,150	9.	3,2485	0,550

2.	2,7041	0,200	10.	3,3856	0,600
3.	2,7276	0,250	11.	3,5333	0,650
4.	2,7712	0,300	12.	3,6902	0,700
5.	2,8338	0,350	13.	3,8552	0,750
6.	2,9144	0,400	14.	4,0273	0,800
7.	3,0113	0,450	15.	4,2057	0,850
8.	3,1232	0,500	16.	4,3895	0,900

10.Построение фронта эффективных портфелей (*Вставка – Диаграмма – Точечная*), рис. 4.2.

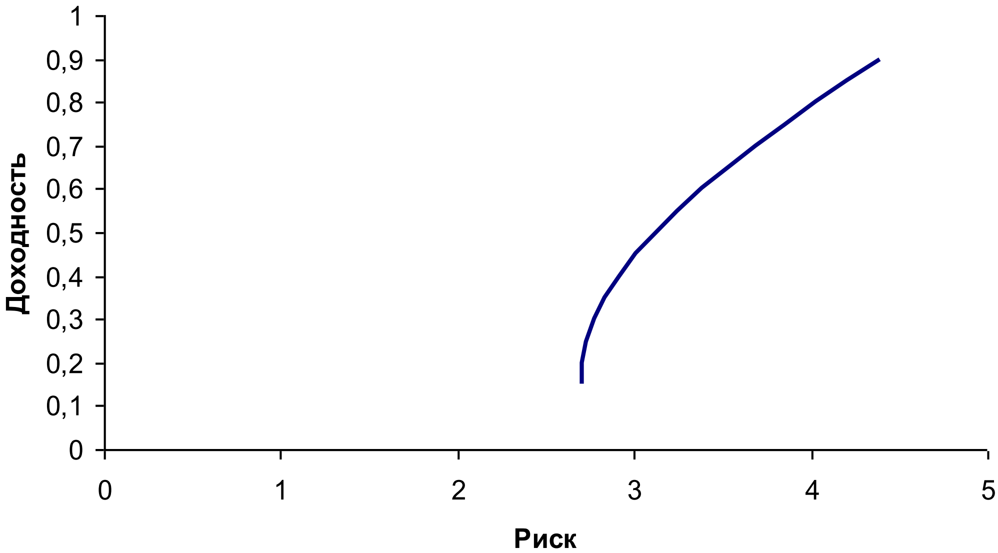


Рис. 4.2. Фронт эффективных портфелей из рискованных активов при $\mu = 0{,}3$

Алгоритм построения модели Марковица в MS Excel (численное решение)

Модель Марковица в данном случае записывается следующим образом:

целевая функция:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 8{,}9836 & 7{,}4527 & 5{,}5851 & 7{,}5910 & 8{,}3233 & 7{,}0462 \\ 7{,}4527 & 11{,}9733 & 6{,}5040 & 10{,}1761 & 9{,}7872 & 8{,}4754 \\ 5{,}5851 & 6{,}5040 & 9{,}5117 & 6{,}5736 & 6{,}4846 & 6{,}1410 \\ 7{,}5910 & 10{,}1761 & 6{,}5736 & 13{,}4657 & 10{,}9132 & 8{,}9836 \\ 8{,}3233 & 9{,}7872 & 6{,}4846 & 10{,}9132 & 17{,}6054 & 9{,}4222 \\ 7{,}0462 & 8{,}4754 & 6{,}1410 & 8{,}9836 & 9{,}4222 & 12{,}5648 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix} \to \min$$

линейные ограничения:

$$
\begin{aligned}
&w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1;\\
&w_1 \qquad\qquad\qquad\quad \le 1;\\
&\qquad w_2 \qquad\qquad\quad \le 1;\\
&\qquad\qquad w_3 \qquad\;\; \le 1;\\
&\qquad\qquad\qquad w_4 \le 1;
\end{aligned}
$$

$$0{,}1789w_1 + 0{,}2475w_2 + 0{,}1739w_3 + 0{,}4418w_4 + 0{,}8059w_5 + 0{,}3418w_6 = 0{,}3\,.$$

1. Подготовка данных для построения модели с использованием промежуточных результатов (средних значений доходности, ковариационной матрицы, риска), полученных в ходе аналитического решения задачи. Прежде всего необходимо эти результаты разместить на листе MS Excel так, как это показано на рис. 4.3. Заметим, что в ячейке $AP$12 содержится величина дисперсии, т.е. величина риска, возведенная в квадрат. Далее следует ввести матрицу из коэффициентов линейных ограничений (AJ13:AO19); строку из нулей, соответствующую первоначальной структуре портфеля (AJ24:AO24); единичный вектор (AP13:AP19).

2. Задание целевой функции путем введения в ячейку AQ12 формулы =МУМНОЖ(AJ24:AO24;МУМНОЖ(AJ4:AO9;ТРАНСП(AJ24:AO24))).

3. Задание ограничений путем введения в ячейки (AQ13:AQ20) формулы =МУМНОЖ(AJ13:AO20;ТРАНСП(AJ24:AO24)).

4. Вызов модуля *Поиск решения* (*Сервис – Поиск решения*). В результате появится окно, в котором необходимо:

1) установить целевую ячейку $AQ$12, равной минимальному значению (см. рис. 4.4);

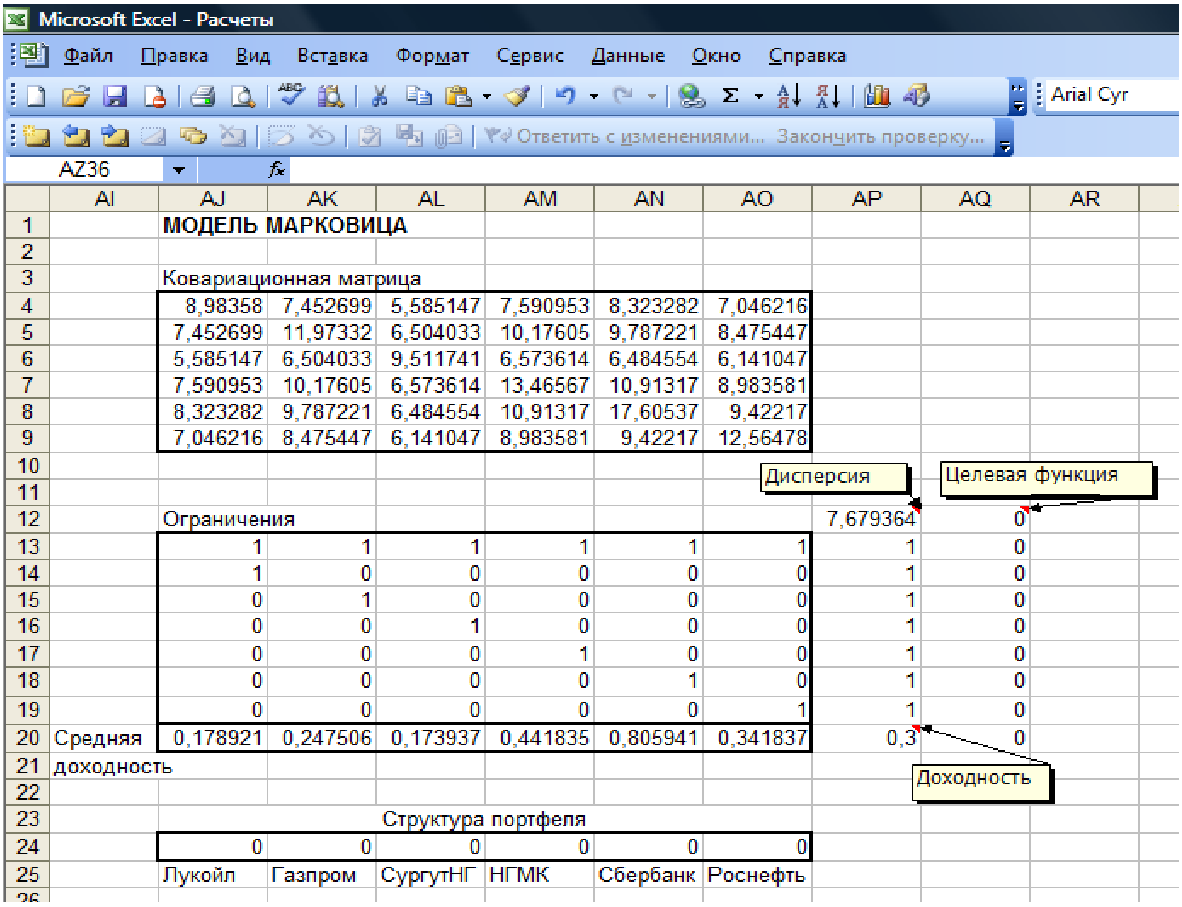


Рис. 4.3. Первоначальные установки при построении модели Марковица

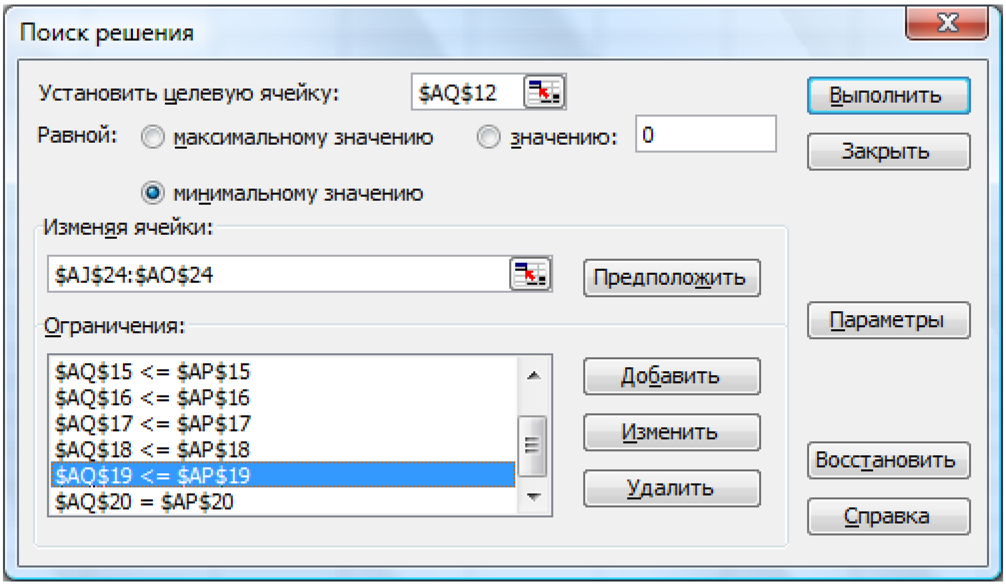


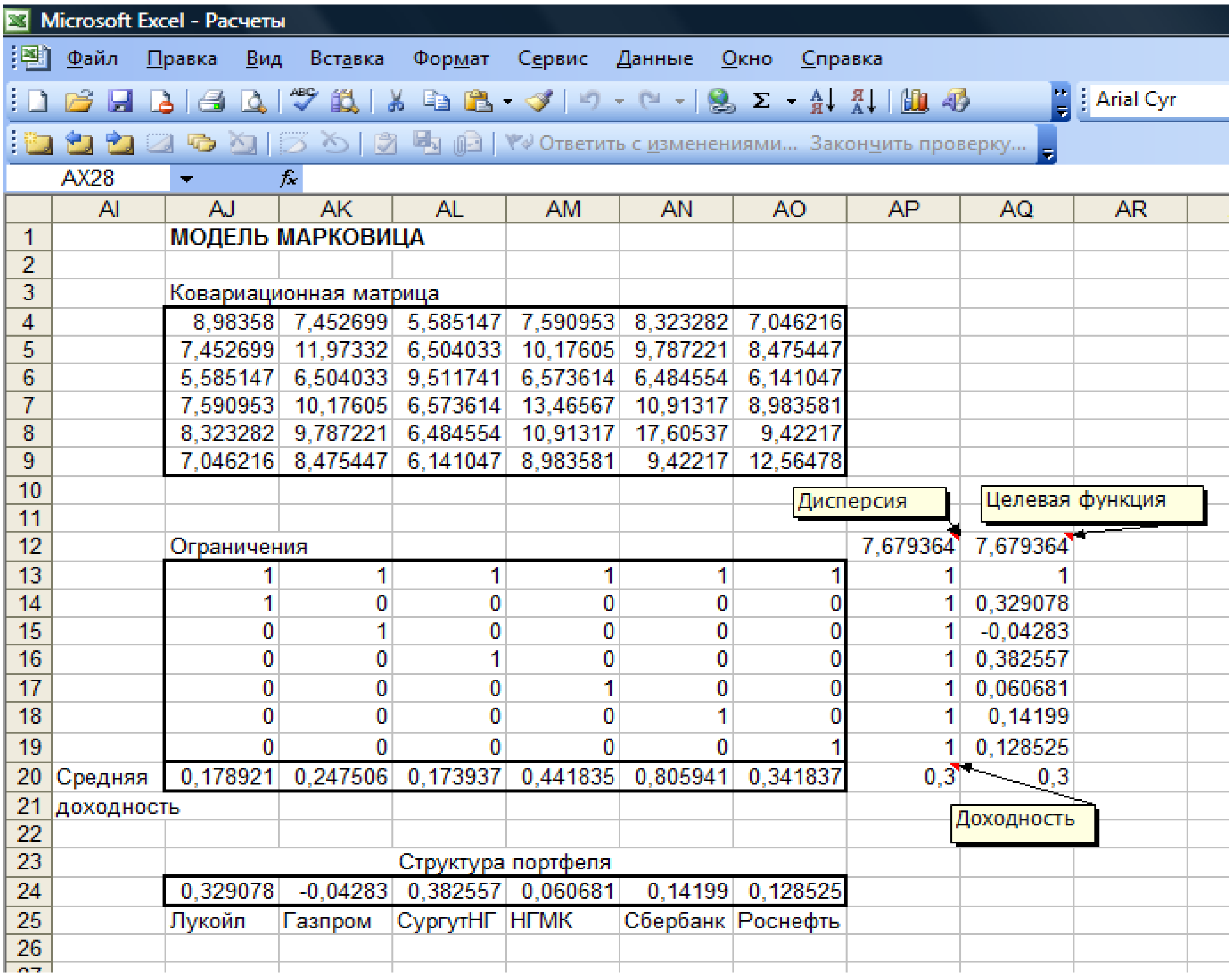
Рис. 4.4. Модуль *Поиск решения* (модель Марковица)

2) в строке «Изменяя ячейки» указать диапазон $AJ$24:$AO$24 (см. рис. 4.4);

3) указать ограничения (см. рис. 4.4):

$AQ$13=$AP$13; $AQ$14<=$AP$14; $AQ$15<=$AP$15;
$AQ$16<=$AP$16; $AQ$17<=$AP$17; $AQ$18<=$AP$18;
$AQ$19<=$AP$19; $AQ$20=$AP$20.

4) нажать кнопку *Выполнить*. В результате появится окно, представленное на рис. 4.5.



	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR
1		МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА								
2										
3		Ковариационная матрица								
4		8,98358	7,452699	5,585147	7,590953	8,323282	7,046216			
5		7,452699	11,97332	6,504033	10,17605	9,787221	8,475447			
6		5,585147	6,504033	9,511741	6,573614	6,484554	6,141047			
7		7,590953	10,17605	6,573614	13,46567	10,91317	8,983581			
8		8,323282	9,787221	6,484554	10,91317	17,60537	9,42217			
9		7,046216	8,475447	6,141047	8,983581	9,42217	12,56478			
10										
11										
12		Ограничения						7,679364	7,679364	
13		1	1	1	1	1	1	1	1	
14		1	0	0	0	0	0	1	0,329078	
15		0	1	0	0	0	0	1	-0,04283	
16		0	0	1	0	0	0	1	0,382557	
17		0	0	0	1	0	0	1	0,060681	
18		0	0	0	0	1	0	1	0,14199	
19		0	0	0	0	0	1	1	0,128525	
20	Средняя	0,178921	0,247506	0,173937	0,441835	0,805941	0,341837	0,3	0,3	
21	доходность									
22										
23				Структура портфеля						
24		0,329078	-0,04283	0,382557	0,060681	0,14199	0,128525			
25		Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть			
26										

Рис. 4.5. Результаты *Поиска решения* (модель Марковица)

5. МОДЕЛЬ БЛЭКА

Если в задаче (4.1) – (4.3) поменять местами функцию цели и ограничение, то структура портфеля будет определяться как решение задачи оптимизации средней доходности портфеля при ограниченном риске. Формально эта задача (задача Блэка) записывается следующим образом:

$$\mathbf{w}'\mathbf{m} \to \max, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{w} \le \sigma^2, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{5.3}$$

$$0 \le \mathbf{I}\,\mathbf{w} \le \mathbf{i}, \tag{5.4}$$

где **I** – единичная матрица.

Структура модели с учетом промежуточных результатов предыдущей задачи выглядит следующим образом:

целевая функция:

$$0{,}1789w_1+0{,}2475w_2+0{,}1739w_3+0{,}4418w_4+0{,}8059w_5+0{,}3418w_6\to\max;$$

квадратичное ограничение:

$$\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\\w_5\\w_6\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}8{,}9836 & 7{,}4527 & 5{,}5851 & 7{,}5910 & 8{,}3233 & 7{,}0462\\7{,}4527 & 11{,}9733 & 6{,}5040 & 10{,}1761 & 9{,}7872 & 8{,}4754\\5{,}5851 & 6{,}5040 & 9{,}5117 & 6{,}5736 & 6{,}4846 & 6{,}1410\\7{,}5910 & 10{,}1761 & 6{,}5736 & 13{,}4657 & 10{,}9132 & 8{,}9836\\8{,}3233 & 9{,}7872 & 6{,}4846 & 10{,}9132 & 17{,}6054 & 9{,}4222\\7{,}0462 & 8{,}4754 & 6{,}1410 & 8{,}9836 & 9{,}4222 & 12{,}5648\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\\w_5\\w_6\end{pmatrix}\le 7{,}6793;$$

линейные ограничения:

$$\begin{aligned}w_1+w_2+w_3+w_4&=1;\\w_1\qquad\qquad\quad&\le1;\\w_2\qquad\quad&\le1;\\w_3\quad\;&\le1;\\w_4&\le1;\end{aligned}$$

условие неотрицательности:

$$w_i\ge0,\quad i=\overline{1,4}.$$

Алгоритм построения модели Блэка в MS Excel

1. Подготовка данных для построения модели с использованием промежуточных результатов (средних значений доходности, ковариационной матрицы, дисперсии), полученных в предыдущем параграфе в ходе решения задачи Марковица. Прежде всего необходимо эти результаты разместить на листе MS Excel так, как это показано на рис. 5.1. Далее следует ввести матрицу из коэффициентов линейных ограничений (B13:G19); строку из нулей, соответствующую первоначальной структуре портфеля (B21:G21); единичный вектор (H13:H19).

2. Задание целевой функции путем введения в ячейку I21 формулы

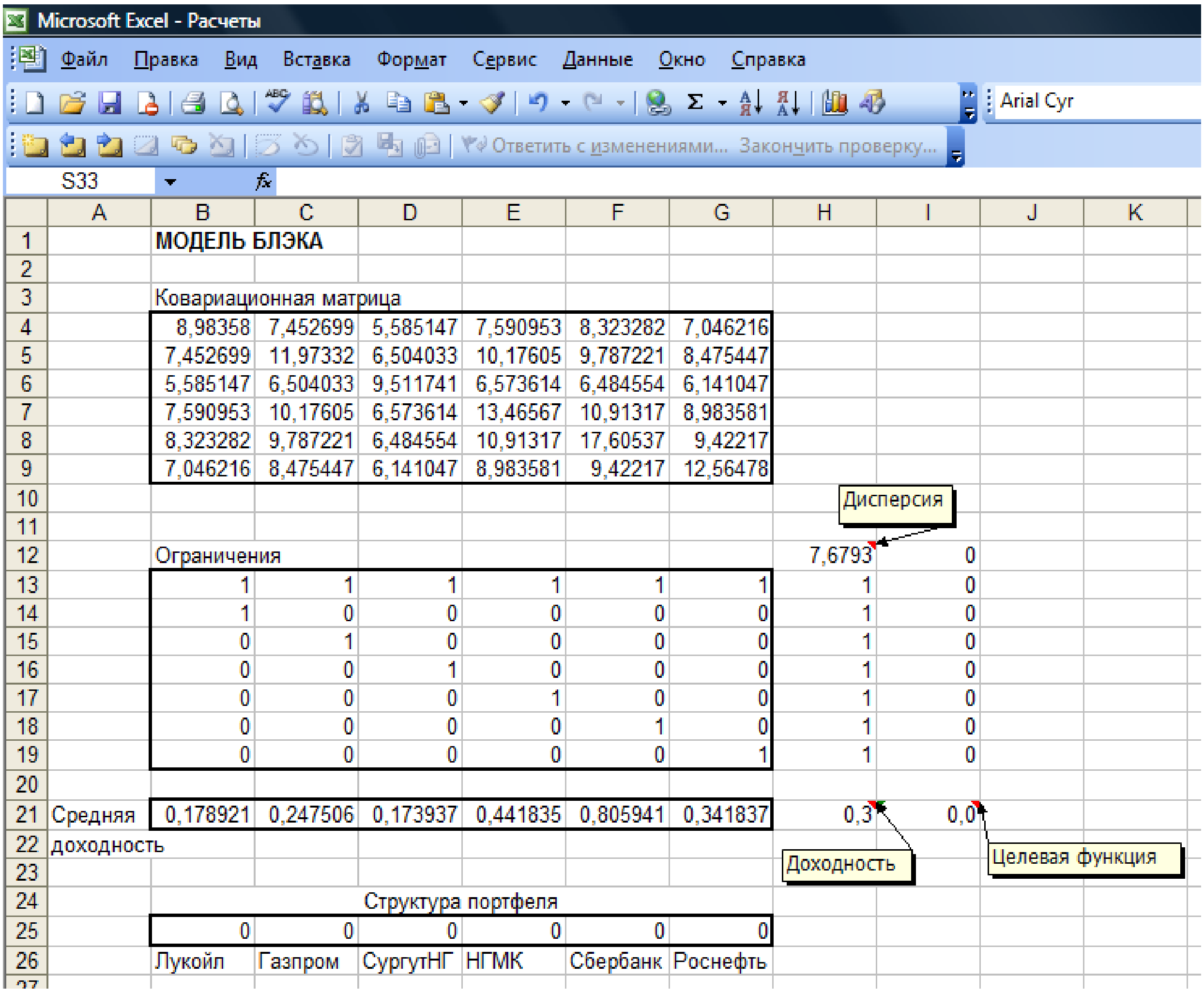
=СУММПРОИЗВ(B21:G21;B25:G25).

3. Задание ограничений путем введения в ячейки (I13:I19) формулы

=МУМНОЖ(B13:G19;ТРАНСП(B25:G25)),

а в ячейку I12 – формулы

=МУМНОЖ(B25:G25;МУМНОЖ(B4:G9;ТРАНСП(B25:G25))).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		МОДЕЛЬ БЛЭКА									
2											
3		Ковариационная матрица									
4		8,98358	7,452699	5,585147	7,590953	8,323282	7,046216				
5		7,452699	11,97332	6,504033	10,17605	9,787221	8,475447				
6		5,585147	6,504033	9,511741	6,573614	6,484554	6,141047				
7		7,590953	10,17605	6,573614	13,46567	10,91317	8,983581				
8		8,323282	9,787221	6,484554	10,91317	17,60537	9,42217				
9		7,046216	8,475447	6,141047	8,983581	9,42217	12,56478				
10											
11											
12		Ограничения						7,6793	0		
13		1	1	1	1	1	1	1	0		
14		1	0	0	0	0	0	1	0		
15		0	1	0	0	0	0	1	0		
16		0	0	1	0	0	0	1	0		
17		0	0	0	1	0	0	1	0		
18		0	0	0	0	1	0	1	0		
19		0	0	0	0	0	1	1	0		
20											
21	Средняя	0,178921	0,247506	0,173937	0,441835	0,805941	0,341837	0,3	0,0		
22	доходность										
23											
24				Структура портфеля							
25		0	0	0	0	0	0				
26		Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть				

Рис. 5.1. Первоначальные установки при построении модели Блэка

4. Вызов модуля *Поиск решения* (*Сервис – Поиск решения*). В результате появится окно, в котором необходимо:

1) установить целевую ячейку $I$21, равной максимальному значению (см. рис. 5.2);
2) в строке «Изменяя ячейки» указать диапазон $B$25:$G$25 (см. рис. 5.2);
3) указать ограничения (см. рис. 5.2):
   $IQ$12=$H$12; $I$13=$H$13; $I$14<=$H$14; $I$15<=$H$15; $I$16<=$H$16; $I$17<=$H$17; $I$18<=$H$18; $I$19<=$H$19;
4) нажать кнопку *Выполнить*. В результате появится окно, представленное на рис. 5.3.

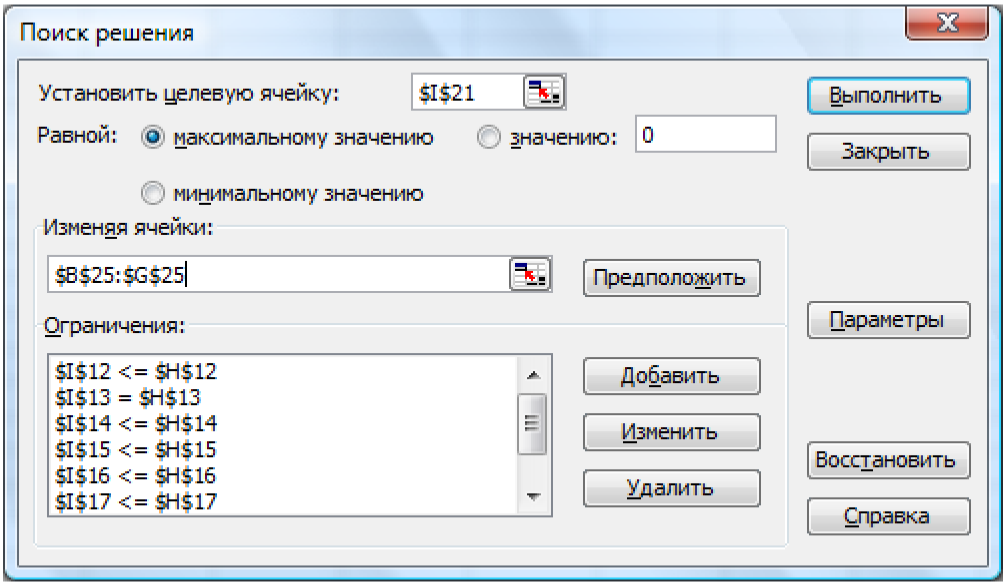
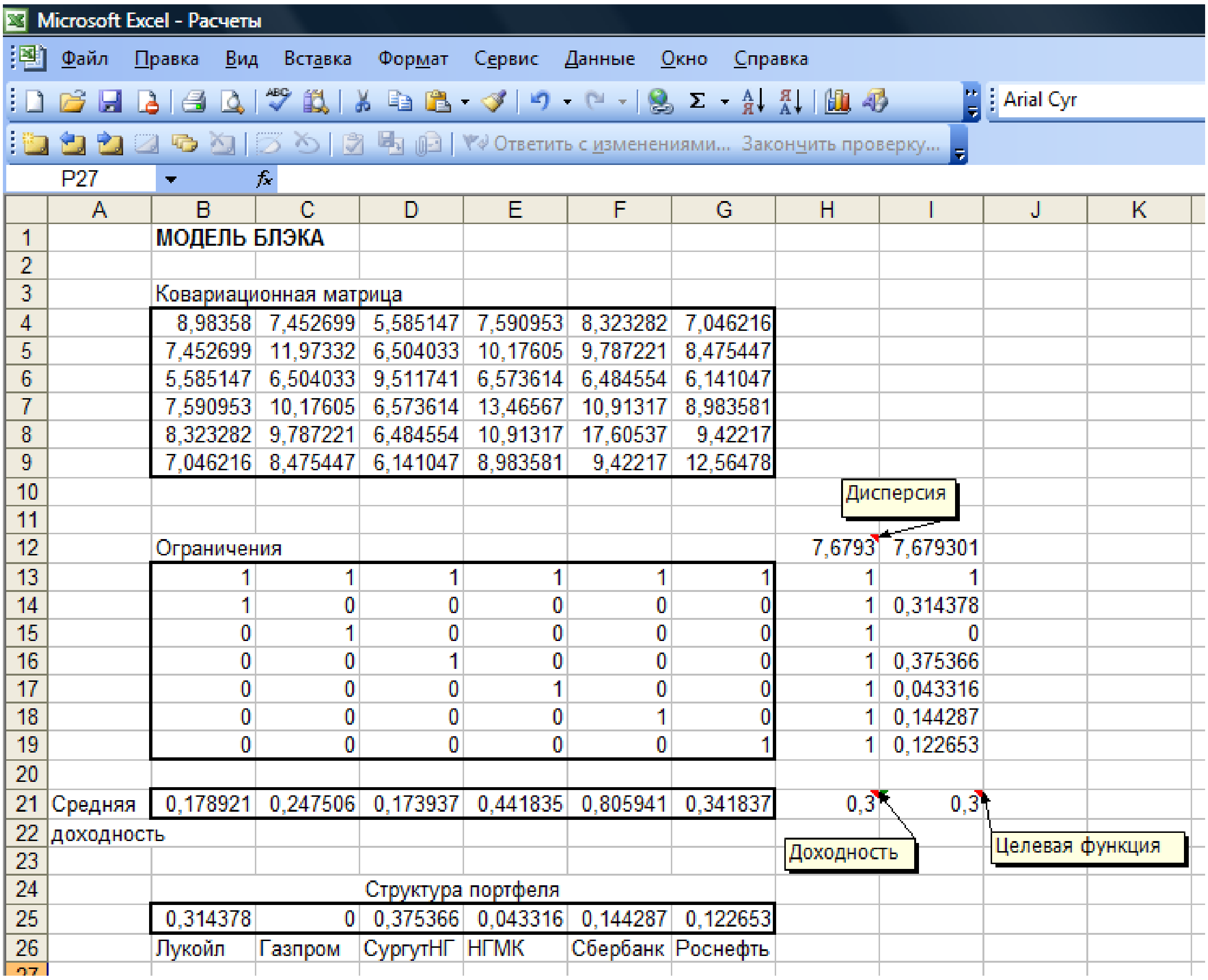


Рис. 5.2. Модуль *Поиск решения* (модель Блэка)



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		МОДЕЛЬ БЛЭКА									
2											
3		Ковариационная матрица									
4		8,98358	7,452699	5,585147	7,590953	8,323282	7,046216				
5		7,452699	11,97332	6,504033	10,17605	9,787221	8,475447				
6		5,585147	6,504033	9,511741	6,573614	6,484554	6,141047				
7		7,590953	10,17605	6,573614	13,46567	10,91317	8,983581				
8		8,323282	9,787221	6,484554	10,91317	17,60537	9,42217				
9		7,046216	8,475447	6,141047	8,983581	9,42217	12,56478				
10											
11											
12		Ограничения						7,6793	7,679301		
13		1	1	1	1	1	1	1	1		
14		1	0	0	0	0	0	1	0,314378		
15		0	1	0	0	0	0	1	0		
16		0	0	1	0	0	0	1	0,375366		
17		0	0	0	1	0	0	1	0,043316		
18		0	0	0	0	1	0	1	0,144287		
19		0	0	0	0	0	1	1	0,122653		
20											
21	Средняя	0,178921	0,247506	0,173937	0,441835	0,805941	0,341837	0,3	0,3		
22	доходность										
23											
24				Структура портфеля							
25		0,314378	0	0,375366	0,043316	0,144287	0,122653				
26		Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть				

Рис. 5.3. Результаты *Поиска решения* (модель Блэка)

В заключении заметим, что при решении задачи (5.1) – (5.4) требуется заранее определить уровень допустимого риска. Но это непростая задача, так как риск – трудно понимаемая с количественной точки зрения величина. Как правило, требуются дополнительные исследования, чтобы сложить определенную точку зрения по этому поводу. Проще определить уровень доходности, который инвестор ждет от своих вложений, чем уровень риска, на который согласен инвестор. Поэтому наиболее предпочтительным для проведения практических расчетов является вариант модели (4.1) – (4.3).

6. МОДЕЛЬ ТОБИНА

Рассматриваемая в данном параграфе модель отличается от модели Марковица тем, что в ней предусматривается введение в состав портфеля безрискового актива A_0. Под безрисковым активом обычно понимается ценная бумага, доходность по которой r_f на протяжении всего исследуемого периода неизменна и обеспечивается государством. Модель была предложена Дж. Тобиным [56].

С формальных позиций модель Тобина получается из модели Марковица в результате небольшой модификации. Но на самом деле между этими моделями есть принципиальное различие. Модель Марковица предназначена для решения задач эффективного инвестирования на микроуровне, так как в ней акцентируется внимание на поведении отдельного инвестора. Подход Тобина по существу, макроэкономический, поскольку в нем моделируется распределение совокупного капитала в экономике по двум его формам: наличной (денежной) и неналичной (в виде ценных бумаг).

Обозначив через w_0 ту часть средств, которая вложена в безрисковый актив и преследуя цель, сформировать портфель, минимизирующий риск при заданном уровне ожидаемой доходности, запишем математическую модель в следующем виде:

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \to \min, \tag{6.1}$$

$$r_f w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{m} = \mu, \tag{6.2}$$

$$w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1. \tag{6.3}$$

Для решения этой задачи запишем функцию Лагранжа

$$\mathrm{L}(\mathbf{w}, \lambda, \delta) = \mathbf{w}'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{w} + 2\lambda(r_f w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{m} - \mu) + 2\delta(w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} - 1) \tag{6.4}$$

и продифференцируем ее по всем переменным, в том числе по множителям Лагранжа

$$\mathrm{L}_{w_0} = \lambda r_f + \delta = 0, \quad (6.5)$$

$$\mathrm{L}_{\mathbf{w}} = 2\mathbf{\Sigma w} + 2\lambda \mathbf{m} + 2\delta \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (6.6)$$

$$\mathrm{L}_{\lambda} = r_f w_0 + \mathbf{w'm} = \mu, \quad (6.7)$$

$$\mathrm{L}_{\delta} = w_0 + \mathbf{w'i} = 1. \quad (6.8)$$

Используя специфику этой системы уравнений, получим ее решение в общем виде. Из первого уравнения определим взаимозависимость между множителями Лагранжа

$$\delta = -\lambda r_f. \quad (6.9)$$

Использование полученного соотношения упрощает второе уравнение и позволяет получить промежуточный результат для структуры портфеля в следующем виде:

$$\mathbf{w} = -\lambda \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i}). \quad (6.10)$$

Соответственно, доля безрискового актива в портфеле определяется соотношением

$$w_0 = 1 - \mathbf{w'i}, \quad (6.11)$$

подстановка которого в уравнение (6.8) обеспечивает преобразование этого уравнения

$$r_f(1 - \mathbf{w'i}) + \mathbf{w'm} = \mu, \quad (6.12)$$

$$\mathbf{w'}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i}) = \mu - r_f, \quad (6.13)$$

что позволяет после подстановки (6.10) вычислить множитель Лагранжа λ

$$-\lambda(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i})' \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i}) = \mu - r_f, \quad (6.14)$$

$$\lambda = -\frac{\mu - r_f}{(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i})' \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i})}. \quad (6.15)$$

Используя полученное выражение для λ, получаем формулы для расчета структуры портфеля

$$\mathbf{w} = \frac{\mu - r_f}{(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i})' \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i})} \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i}), \quad (6.16)$$

$$w_0 = 1 - \left(\frac{\mu - r_f}{(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i})' \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i})} \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f \mathbf{i}) \right)' \times \mathbf{i}. \quad (6.17)$$

Если для каждого μ, заключенного между величиной безрисковой ставки и максимально возможной доходностью портфеля, решить эту оптимизационную задачу, то, используя полученные результаты, можно построить график, точки которого представляют собой эффективное множество. В системе координат ($\mathbf{m}_w, \sigma_w$) это множество для данного портфеля представляет собой луч (см. рис. 6.1).

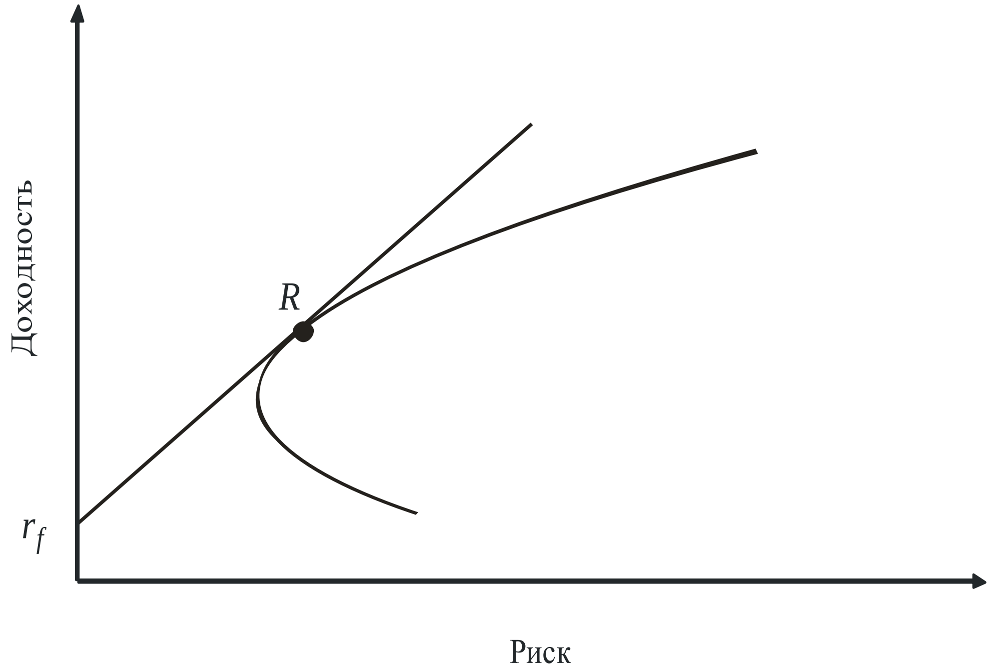


Рис. 6.1. Эффективное множество при наличии безрискового актива

Точка касания луча, выходящего из точки с координатами $(0, r_f)$, и кривой эффективного множества инвестиционных возможностей, находится как решение следующей задачи оптимизации:

$$\frac{\mathbf{w}'\mathbf{m} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}'\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{w}}} \quad \to \quad \max. \tag{6.18}$$

Решение данной задачи представляет собой портфель, структура которого устроена таким образом, что обеспечивает максимально возможную доходность на каждую единицу риска. Для получения структуры данного портфеля поступим следующим образом. Используя свойство структуры эффективного портфеля $\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1$, проведем преобразование числителя в (6.18)

$$\frac{\mathbf{w}'\mathbf{m} - r_f\mathbf{w}'\mathbf{i}}{\sqrt{\mathbf{w}'\,\Sigma\,\mathbf{w}}} \to \max. \tag{6.19}$$

После дифференцирования по $\mathbf{w}$, получаем

$$(\mathbf{m} - r_f\mathbf{i})(\mathbf{w}'\,\Sigma\,\mathbf{w})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\mathbf{w}'\,\Sigma\,\mathbf{w})^{-\frac{3}{2}}2(\Sigma\,\mathbf{w})[\mathbf{w}'(\mathbf{m} - r_f\mathbf{i})] = \mathbf{0}. \tag{6.20}$$

После умножения левой и правой части полученной системы уравнений на $(\mathbf{w}'\,\Sigma\,\mathbf{w})^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})-\frac{\mathbf{w}'(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})}{\mathbf{w}'\,\Sigma\,\mathbf{w}}\Sigma\,\mathbf{w}=\mathbf{0}. \tag{6.21}$$

Учитывая, что $\dfrac{\mathbf{w}'(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})}{\mathbf{w}'\,\Sigma\,\mathbf{w}}$ число, введем обозначение

$$\lambda=\frac{\mathbf{w}'(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})}{\mathbf{w}'\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{w}} \tag{6.22}$$

и запишем систему (6.18) в следующем виде:

$$(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})-\lambda\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{w}=\mathbf{0}. \tag{6.23}$$

Произведя замену $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{w}$, и записав систему уравнений как

$$\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{z}=(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})\ , \tag{6.24}$$

получаем ее решение

$$\mathbf{z}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})\ . \tag{6.25}$$

Нормирование полученного решения позволяет получить единственный вариант структуры искомого портфеля

$$\mathbf{w}^*=\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}'\mathbf{i}}\ . \tag{6.26}$$

Структура так определенного портфеля идентична структуре рыночного портфеля. Для всех инвесторов, действующих на данном финансовом рынке, рыночный портфель будет одним и тем же, независимо от их индивидуального отношения к риску. Таким образом, всем инвесторам, рационально действующим на финансовом рынке, целесообразно распределять свои средства по рисковым активам в пропорции, соответствующей рыночному портфелю.

После определения оптимальной структуры портфеля рисковых активов и нахождения точки касания, инвестор решает задачу распределения своих средств между портфелем и безрисковым активом, доходность которого r_f является детерминированной величиной. Решение этой задачи существенно зависит от субъективных предпочтений инвестора. Инвестор, не склонный к риску, по идее, должен выбрать такое распределение, которому соответствует точка, лежащая левее точки касания R. Это будет означать, что часть своего капитала, которую будем обозначать y, он вкладывает в рыночный портфель, а оставшуюся часть $(1-y)$ – в безрисковый актив. Ожидаемая доходность m_w так сформированного портфеля может быть представлена в виде

$$m_w = (1-y)r_f + y m_y, \tag{6.27}$$

где m_y – доходность рыночного портфеля.

Нетрудно понять, что риск данного портфеля ниже риска рыночного портфеля, так как определяется соотношением

$$\sigma_w = y\sigma_y, \tag{6.28}$$

где σ_w – риск рыночного портфеля, σ_y – риск эффективного портфеля инвестора, сформированного в соответствии с его индивидуальными предпочтениями.

Если инвестор склонен к риску, то его выбор окажется правее точки R, Такой выбор следует интерпретировать как заимствование денег под безрисковую ставку r_f и инвестирование всего капитала, в том числе и заимствованного, в рыночный портфель. В этом случае $y>1$, а $(1-y)<0$ и риск портфеля инвестора выше риска рыночного портфеля. При этом соотношение рискованного и безрискового активов определяется либо из (6.27)

$$y = \frac{m_w - r_f}{m_y - r_f}, \tag{6.29}$$

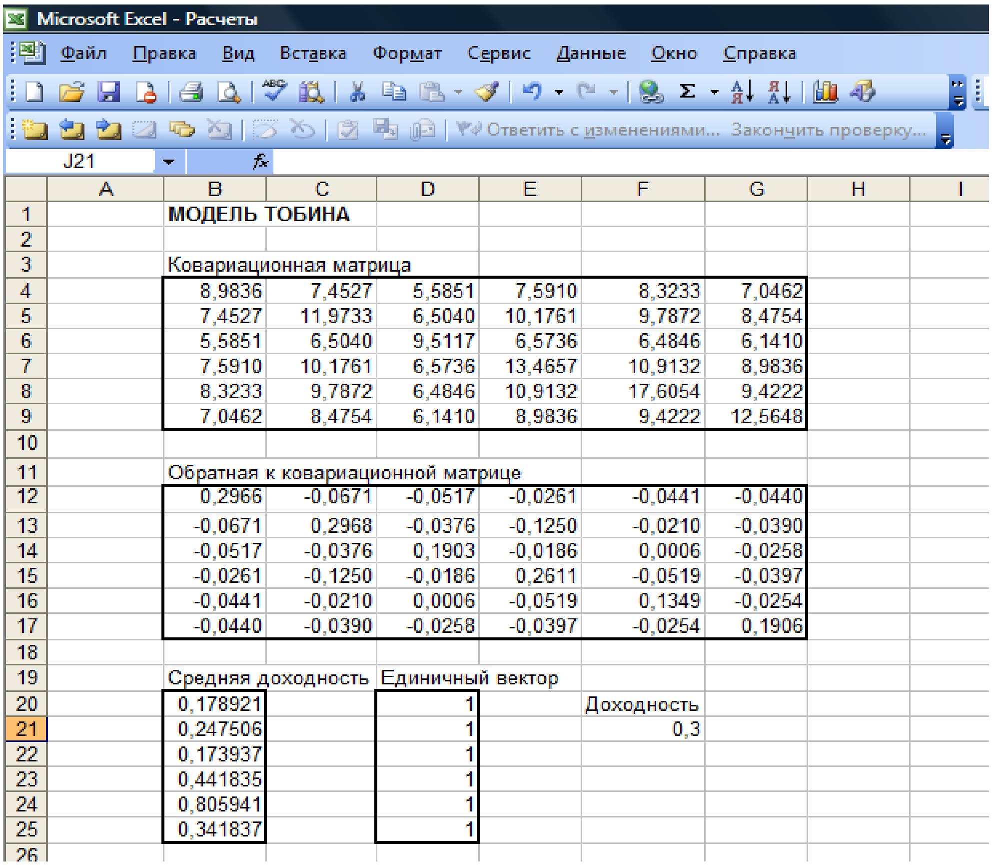
либо из (6.28)

$$y = \frac{\sigma_w}{\sigma_y} . \tag{6.30}$$

Если инвестор выбирает портфель, соответствующий точке касания R, то это означает, что он принимает решение весь свой капитал вложить в рыночный портфель, не беря и не давая заем под безрисковую ставку процента.

Алгоритм построения модели Тобина в MS Excel

1. Подготовка данных для построения модели с использованием промежуточных результатов (средних значений доходности, ковариационной матрицы, обратной к ковариационной матрице), полученных в ходе аналитического решения задачи Марковица (см. третий параграф). Прежде всего необходимо эти результаты разместить на листе MS Excel так, как это показано на рис. 6.2 и ввести единичный вектор (H13:H19).



Microsoft Excel - Расчеты

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		МОДЕЛЬ ТОБИНА							
2									
3		Ковариационная матрица							
4		8,9836	7,4527	5,5851	7,5910	8,3233	7,0462		
5		7,4527	11,9733	6,5040	10,1761	9,7872	8,4754		
6		5,5851	6,5040	9,5117	6,5736	6,4846	6,1410		
7		7,5910	10,1761	6,5736	13,4657	10,9132	8,9836		
8		8,3233	9,7872	6,4846	10,9132	17,6054	9,4222		
9		7,0462	8,4754	6,1410	8,9836	9,4222	12,5648		
10									
11		Обратная к ковариационной матрице							
12		0,2966	-0,0671	-0,0517	-0,0261	-0,0441	-0,0440		
13		-0,0671	0,2968	-0,0376	-0,1250	-0,0210	-0,0390		
14		-0,0517	-0,0376	0,1903	-0,0186	0,0006	-0,0258		
15		-0,0261	-0,1250	-0,0186	0,2611	-0,0519	-0,0397		
16		-0,0441	-0,0210	0,0006	-0,0519	0,1349	-0,0254		
17		-0,0440	-0,0390	-0,0258	-0,0397	-0,0254	0,1906		
18									
19		Средняя доходность		Единичный вектор					
20		0,178921		1		Доходность			
21		0,247506		1		0,3			
22		0,173937		1					
23		0,441835		1					
24		0,805941		1					
25		0,341837		1					
26									

Рис. 6.2. Исходные данные для построения портфеля Тобина

2. Расчет ежедневной безрисковой ставки. Результаты расчета представлены в табл. 6.1 при условии, что годовая безрисковая ставка равна 12%.

Таблица 6.1

Расчет безрисковой ставки

	B	Содержание ячейки
28	0,000472	=1,12^(1/240)-1

3. Нахождение точки касания (см. табл. 6.3).

4. Подготовка данных для построения фронта эффективных портфелей при наличии безрискового актива (см. табл. 6.4). Столбцы «Риск» и «Доходность 1» табл. 6.4 рассчитаны так, как это было показано при построении эффективных портфелей из рискованных активов (см. третий параграф). Третий столбец этой таблицы рассчитывается с помощью формул (6.27) и (6.30).

5. Выполнение промежуточных вычислений и расчет структуры портфеля по формулам (6.16) и (6.17). Результаты расчетов представлены в табл. 6.2.

6. Построение фронта эффективных портфелей по первым трем столбцам («Риск», «Доходность 1», «Доходность 2») табл. 6.4 (*Вставка – Диаграммы – Точечная*, см. рис. 6.3).

Таблица 6.2

Промежуточные и окончательные расчеты по построению портфеля Тобина

	B	C	D	E	F
30	$\mathbf{m}-r_f\mathbf{i}$	$(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})$	$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})$	$\dfrac{\mu-r_f}{(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i})}$	$\mathbf{w}$
31	0,1784	0,0486	-0,0347	6,1640	-0,2140
32	0,2470		-0,0306		-0,1888
33	0,1735	$\mu-r_f$	-0,0020	w_0	-0,0126
34	0,4414	0,2995	0,0211	0,8584	0,1301
35	0,8055		0,0641		0,3952
36	0,3414		0,0051		0,0316

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца B	Содержание ячеек столбца C
31	=B20:B25-B28*D20:D25	=МУМНОЖ(ТРАНСП(B31:B36);МУМНОЖ(B12:G17;B31:B36))
32	=B20:B25-B28*D20:D25	
33	=B20:B25-B28*D20:D25	
34	=B20:B25-B28*D20:D25	=F21-B28
35	=B20:B25-B28*D20:D25	
36	=B20:B25-B28*D20:D25	

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца D	Содержание ячеек столбца E	Содержание ячеек столбца F
31	=МУМНОЖ(B12:G17;B31:B36)	=C34/C31	=E31*D31:D36
32	=МУМНОЖ(B12:G17;B31:B36)		=E31*D31:D36
33	=МУМНОЖ(B12:G17;B31:B36)		=E31*D31:D36
34	=МУМНОЖ(B12:G17;B31:B36)	=1-МУМНОЖ(ТРАНСП(F31:F36); D20:D25)	=E31*D31:D36
35	=МУМНОЖ(B12:G17;B31:B36)		=E31*D31:D36
36	=МУМНОЖ(B12:G17;B31:B36)		=E31*D31:D36

Таблица 6.3

Расчет точки касания

	B	C
39	$\mathbf{w}^*$	ТОЧКА КАСАНИЯ
40	-1,5120	Доходность
41	-1,3337	**2,1167**
42	-0,0889	
43	0,9193	Риск
44	2,7923	**9,6002**
45	0,2230	

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца B	Содержание ячеек столбца C
40	=(D31:D36)/МУМНОЖ(ТРАНСП(D31:D36);D20:D25)	
41	=(D31:D36)/МУМНОЖ(ТРАНСП(D31:D36);D20:D25)	=СУММПРОИЗВ(B20:B25;B40:B45)
42	=(D31:D36)/МУМНОЖ(ТРАНСП(D31:D36);D20:D25)	
43	=(D31:D36)/МУМНОЖ(ТРАНСП(D31:D36);D20:D25)	
44	=(D31:D36)/МУМНОЖ(ТРАНСП(D31:D36);D20:D25)	=(МУМНОЖ(МУМНОЖ (ТРАНСП(B40:B45);B4:G9); B40:B45)^0,5)
45	=(D31:D36)/МУМНОЖ(ТРАНСП(D31:D36);D20:D25)	

Таблица 6.4

Данные для построения фронта эффективных портфелей при наличии безрискового актива

	K	L	M	N	Содержание ячеек столбца M	Содержание ячеек столбца N
3	Риск	Доход-ность 1	Доход-ность 2	y		
4	0,0000		0,0005	0,0000	=K4/$K$30	=(1-N4)*$B$28+N4*$M$30
5	1,3511		0,2983	0,1407	=K5/$K$30	=(1-N5)*$B$28+N5*$M$30
6	2,0261		0,4471	0,2111	=K5/$K$30	=(1-N6)*$B$28+N6*$M$30
7	2,7011	0,1500	0,5959	0,2814	=K7/$K$30	=(1-N7)*$B$28+N7*$M$30
8	2,7041	0,2000	0,5966	0,2817	=K8/$K$30	=(1-N8)*$B$28+N8*$M$30
9	2,7276	0,2500	0,6017	0,2841	=K9/$K$30	=(1-N9)*$B$28+N9*$M$30
10	2,7712	0,3000	0,6113	0,2887	=K10/$K$30	=(1-N10)*$B$28+N10*$M$30
11	2,8338	0,3500	0,6252	0,2952	=K11/$K$30	=(1-N11)*$B$28+N11*$M$30
12	2,9144	0,4000	0,6429	0,3036	=K12/$K$30	=(1-N12)*$B$28+N12*$M$30
13	3,0113	0,4500	0,6643	0,3137	=K13/$K$30	=(1-N13)*$B$28+N13*$M$30
14	3,1232	0,5000	0,6890	0,3253	=K14/$K$30	=(1-N14)*$B$28+N14*$M$30
15	3,2485	0,5500	0,7166	0,3384	=K15/$K$30	=(1-N15)*$B$28+N15*$M$30
16	3,3856	0,6000	0,7468	0,3527	=K16/$K$30	=(1-N16)*$B$28+N16*$M$30
17	3,5333	0,6500	0,7793	0,3680	=K17/$K$30	=(1-N17)*$B$28+N17*$M$30
18	3,6902	0,7000	0,8139	0,3844	=K18/$K$30	=(1-N18)*$B$28+N18*$M$30
19	3,8552	0,7500	0,8503	0,4016	=K19/$K$30	=(1-N19)*$B$28+N19*$M$30
20	4,0273	0,8000	0,8882	0,4195	=K20/$K$30	=(1-N20)*$B$28+N20*$M$30
21	4,2057	0,8500	0,9276	0,4381	=K21/$K$30	=(1-N21)*$B$28+N21*$M$30
22	4,3895	0,9000	0,9681	0,4572	=K22/$K$30	=(1-N22)*$B$28+N22*$M$30
23	4,5782	0,9500	1,0097	0,4769	=K23/$K$30	=(1-N23)*$B$28+N23*$M$30
24	4,7711	1,0000	1,0522	0,4970	=K24/$K$30	=(1-N24)*$B$28+N24*$M$30
25	5,5763	1,2000	1,2297	0,5809	=K25/$K$30	=(1-N25)*$B$28+N25*$M$30
26	6,4199	1,4000	1,4157	0,6687	=K26/$K$30	=(1-N26)*$B$28+N26*$M$30
27	7,2885	1,6000	1,6072	0,7592	=K27/$K$30	=(1-N27)*$B$28+N27*$M$30
28	8,1742	1,8000	1,8024	0,8515	=K28/$K$30	=(1-N28)*$B$28+N28*$M$30
29	9,0720	2,0000	2,0003	0,9450	=K29/$K$30	=(1-N29)*$B$28+N29*$M$30
30	**9,6002**	**2,1167**	**2,1167**	1,0000	=K30/$K$30	=(1-N30)*$B$28+N30*$M$30
31	9,9786	2,2000	2,2001	1,0394	=K31/$K$30	=(1-N31)*$B$28+N31*$M$30
32	10,8917	2,4000	2,4014	1,1345	=K32/$K$30	=(1-N32)*$B$28+N32*$M$30
33	11,8100	2,6000	2,6039	1,2302	=K33/$K$30	=(1-N33)*$B$28+N33*$M$30

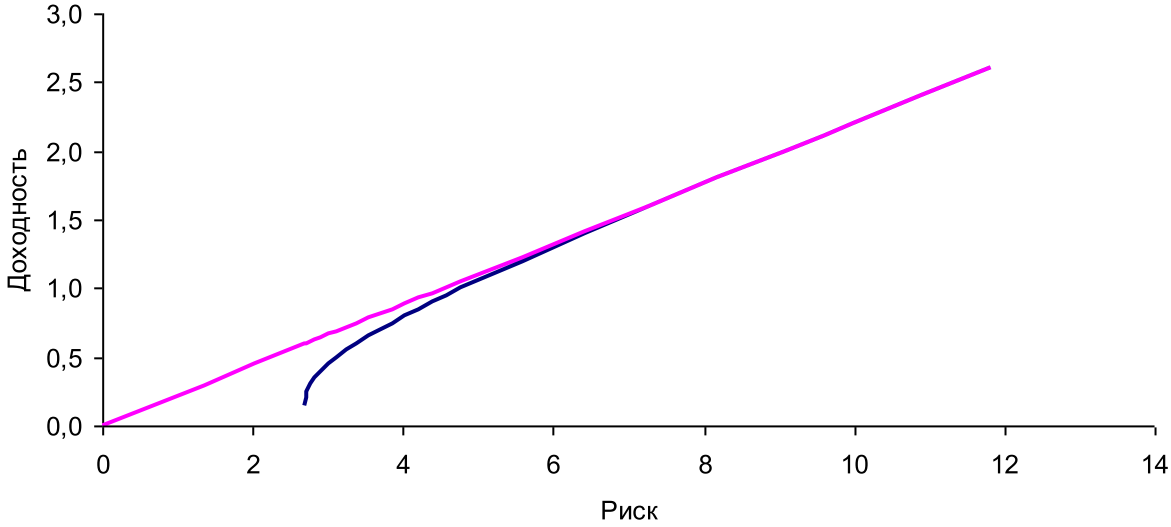


Рис. 6.3. Фронт эффективных портфелей при наличии безрискового актива

7. МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЯ С УЧЕТОМ ОТНОШЕНИЯ ИНВЕСТОРА К РИСКУ

Рассмотрим теперь модель, в которой используется критерий в виде свертки. Функция цели этой модели сконструирована таким образом, что представляет собой разность между доходностью портфеля и его риском. Максимизация данного критерия позволяет сформировать портфель, который обеспечивает инвестору получение максимального дохода за минусом дисперсии (квадрата риска на среднем уровне). При решении задачи с такой функцией цели ни доходность, ни риск не фиксируются. Это позволяет определить оптимальное соотношение между риском и доходностью. Регулирование этого соотношения осуществляется введением в критерий дополнительного параметра $\tau \geq 0$, интерпретируемого как несклонность инвестора к риску. Понятно, что значения этого параметра расположены вокруг единицы. И все же это не измеритель риска. Данный параметр рекомендуют понимать как обратную величину известного отношения Эрроу – Пратта

$$R_R = \frac{-v\,\mathrm{U}''(v)}{\mathrm{U}'(v)}, \tag{7.1}$$

где $\mathrm{U}(v)$ – функция полезности со свойствами $\mathrm{U}'(v) \geq 0$ и $\mathrm{U}''(v) < 0$.

Задача оптимизации для определения эффективного портфеля в зависимости от отношения инвестора к риску в матричном виде записывается следующим образом:

$$2\tau\mathbf{w}'\mathbf{m}-\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}\to\max, \tag{7.2}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i}=1. \tag{7.3}$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа

$$\mathrm{L}(\mathbf{w},\lambda)=2\tau\mathbf{w}'\mathbf{m}-\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}+2\lambda(\mathbf{w}'\mathbf{i}-1). \tag{7.4}$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по $\mathbf{w}$ и по λ, получаем линейную систему из $(n+1)$ уравнения с $(n+1)$ неизвестным

$$\begin{cases}\mathrm{L}'_{\mathbf{w}}=2\tau\mathbf{m}-2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}+2\lambda\mathbf{i}=\mathbf{0};\\ \mathrm{L}'_{\lambda}=\mathbf{w}'\mathbf{i}-1=0.\end{cases} \tag{7.5}$$

Решая для случая $\tau=0$ первое уравнение этой системы

$$\mathbf{w}=\lambda\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} \tag{7.6}$$

и подставляя полученное выражение во второе уравнение, имеем

$$\lambda=\frac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}. \tag{7.7}$$

Окончательно получаем, что при $\tau=0$ структура портфеля определяется следующим выражением:

$$\mathbf{w}_{\min}=\frac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}. \tag{7.8}$$

При $\tau>0$ из (7.5) получаем

$$\mathbf{w}=\mathbf{\Sigma}^{-1}(\lambda\mathbf{i}+\tau\mathbf{m}). \tag{7.9}$$

Подставляя полученное выражение во второе уравнение системы (7.5), определим λ

$$\mathbf{i}\mathbf{\Sigma}^{-1}\lambda\mathbf{i}+\mathbf{i}\mathbf{\Sigma}^{-1}\tau\mathbf{m}=1; \tag{7.10}$$

$$\lambda=\frac{1}{\mathbf{i}'\Sigma^{-1}\mathbf{i}}-\tau\frac{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}. \tag{7.11}$$

Заменяя λ в первом уравнении (7.5) полученным выражением, имеем

$$\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}=\left(\frac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}-\tau\frac{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}\right)\mathbf{i}+\tau\mathbf{m}; \tag{7.12}$$

$$\mathbf{w}=\frac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}+\tau\left(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}-\frac{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\right). \tag{7.13}$$

В компактной форме портфель, структура которого задается выражением (7.13) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\min} + \tau\,\mathbf{w}_c\,, \tag{7.14}$$

где $\mathbf{w}_c$ – самофинансируемый портфель, структура которого определяется вторым слагаемым выражения (7.13).

Экономический смысл портфеля $\mathbf{w}_c$ состоит в том, что он не принадлежит достижимому множеству и в нем реализуется механизм самофинансирования, предусматривающий покупку одних активов за счет продажи других.

Таким образом, удалось показать, что эффективный портфель может быть представлен в виде линейной комбинации портфеля $\mathbf{w}_{\min}$, зависящего только от ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}$ и обеспечивающего минимальный доход при минимальном риске, и портфеля $\mathbf{w}_c$, генерирующего максимально возможную доходность.

Для данного портфеля, в силу того, что

$$\mathrm{cov}(\mathbf{m}_w, \mathbf{m}_c) = \mathbf{w}_c'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{\min} = 0\,, \tag{7.15}$$

эффективное множество в системе координат риск–доходность (σ_w, m_w) определяется с помощью следующих формул:

$$m_w = m_{\min} + \tau\, m_c\,, \tag{7.16}$$

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_{\min}^2 + \tau^2\sigma_c^2}\,. \tag{7.17}$$

Теперь рассмотрим модель Тобина с учетом отношения инвестора к риску. В этом случае мы максимизируем ожидаемую доходность портфеля за минусом возможных потерь в виде дисперсии. Формально функция цели и ограничение этой задачи записываются следующим образом:

$$2\tau\left(r_f w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{m}\right) - \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \to \max\,, \tag{7.18}$$

$$w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1\,. \tag{7.19}$$

Наличие параметра τ, отражающего отношение к риску, позволяет рассматривать при решении этой задачи два случая $\tau = 0$ и $\tau > 0$. Полагая $\tau = 0$, мы тем самым с помощью модели имитируем инвестора, у которого отсутствуют ожидания и который готов инвестировать только в безрисковый актив. Этот вывод подтверждается решением на формальном уровне.

При $\tau = 0$ функция Лагранжа записывается следующим образом:

$$\mathrm{L}(\mathbf{w}, \lambda) = -\mathbf{w}'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{w} + 2\lambda(w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} - 1)\,. \tag{7.20}$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по всем переменным, получаем систему из $(n+2)$ уравнений

$$\mathrm{L}'_{w_0} = 2\lambda = 0, \tag{7.21}$$

$$\mathrm{L}'_{\mathbf{w}} = -2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} + 2\lambda\mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{7.22}$$

$$\mathrm{L}'_{\lambda} = w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1. \tag{7.23}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\lambda = 0, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{0}, \qquad w_0 = 1.$$

В соответствии с полученным решением, эффективный портфель содержит единственный актив с неизменным уровнем доходности. Структура портфеля с нулевым риском имеет вид $\mathbf{w}_{\min} = (1, 0, \ldots, 0)$. Все предельно ясно: не хочешь рисковать, вкладывай в безрисковые активы и довольствуйся минимальным уровнем дохода.

В случае $\tau > 0$ поступаем точно также. Записываем функцию Лагранжа

$$\mathrm{L}(\mathbf{w}, \lambda) = 2\tau\left(r_f w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{m}\right) - \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w} + 2\lambda(w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} - 1), \tag{7.24}$$

у которой на одно слагаемое больше. Дифференцируем эту функцию

$$\mathrm{L}'_{w_0} = \tau r_f + \lambda = 0; \tag{7.25}$$

$$\mathrm{L}'_{\mathbf{w}} = \tau\mathbf{m} - \mathbf{\Sigma}\mathbf{w} + \lambda\mathbf{i} = \mathbf{0}; \tag{7.26}$$

$$\mathrm{L}'_{\lambda} = w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1 \tag{7.27}$$

и решаем полученную систему.

Из первого уравнения получаем

$$\lambda = -\tau r_f\,. \tag{7.28}$$

Подставив полученное выражение в (7.21)

$$\tau\mathbf{m} - \mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \tau r_f\,\mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{7.29}$$

получаем выражение для расчета структуры той части портфеля, которая включает рискованные активы

$$\mathbf{w} = \tau\,\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - r_f\,\mathbf{i}). \tag{7.30}$$

Если (7.25) подставить в (7.18), то получаем формулу для расчета той доли, которую в портфеле должны занимать инвестиции в безрисковый актив

$$w_0 + \tau(\mathbf{m} - r_f\,\mathbf{i})'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} = 1, \tag{7.31}$$

$$w_0 = 1 - \tau(\mathbf{m} - r_f\,\mathbf{i})'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}. \tag{7.32}$$

Введение в модель безрискового актива позволяет сформулировать известную теорему о разделении капитала на два взаимных фонда. Смысл этой теоремы в том, что инвестор, формируя свой портфель на финансовом рынке, принимает два независимых решения. Первое решение касается соотношения рисковых активов в рыночном портфеле, а второе – соотношения между рыночным портфелем и безрисковым активом.

Алгоритм построения модели портфеля с учетом отношения инвестора к риску в MS Excel

1. Подготовка данных для построения модели с использованием промежуточных результатов (средних значений доходности, ковариационной матрицы, обратной к ковариационной матрице), полученных в ходе аналитического решения задачи Марковица (см. третий параграф). Прежде всего необходимо эти результаты разместить на листе MS Excel так, как это показано это было сделано при построении модели Тобина (см. рис. 7.2).

2. Определение структуры минимального портфеля с использованием формулы (7.13) (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1

Определение структуры минимального портфеля

	B	C	D
27	$\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}$	$\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}$	$\mathbf{w}_{\min}$
28	0,0635	0,1372	0,4630
29	0,0070		0,0511
30	0,0572		0,4169
31	-0,0002		-0,0018
32	-0,0070		-0,0508
33	0,0167		0,1217

П р и м е ч а н и е :

	Содержание ячеек столбца B	Содержание ячеек столбца C	Содержание ячеек столбца D
28	=МУМНОЖ(B12:G17;D20:D25)	=МУМНОЖ(ТРАНСП (D20:D25);B28:B33)	=B28:B33/C28
29	=МУМНОЖ(B12:G17;D20:D25)		=B28:B33/C28
30	=МУМНОЖ(B12:G17;D20:D25)		=B28:B33/C28
31	=МУМНОЖ(B12:G17;D20:D25)		=B28:B33/C28
32	=МУМНОЖ(B12:G17;D20:D25)		=B28:B33/C28
33	=МУМНОЖ(B12:G17;D20:D25)		=B28:B33/C28

3. Определение структуры самофинансируемого портфеля с использованием формулы (7.13) (см. табл. 7.2).

Таблица 7.2

Определение структуры самофинансируемого портфеля

	F	G	H	I
27	$\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}$	$\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}$	$\dfrac{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}$	$\mathbf{w}_c$
28	-0,0347	0,0230	0,0107	-0,0453
29	-0,0306		0,0012	-0,0318
30	-0,0020	$\dfrac{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$	0,0096	-0,0116
31	0,0211	0,1678	0,0000	0,0211
32	0,0641		-0,0012	0,0653
33	0,0051		0,0028	0,0023

Примечание:

	Содержание ячеек столбца F	Содержание ячеек столбца G	Содержание ячеек столбца H	Содержание ячеек столбца I
28	=МУМНОЖ(B12:G17;B20:B25)	=МУМНОЖ(ТРАНСП (D20:D25);F28:F33)	=G31*B28:B33	=(F28:F33-H28:H33)
29	=МУМНОЖ(B12:G17;B20:B25)		=G31*B28:B33	=(F28:F33-H28:H33)
30	=МУМНОЖ(B12:G17;B20:B25)		=G31*B28:B33	=(F28:F33-H28:H33)
31	=МУМНОЖ(B12:G17;B20:B25)	=G28/C28	=G31*B28:B33	=(F28:F33-H28:H33)
32	=МУМНОЖ(B12:G17;B20:B25)		=G31*B28:B33	=(F28:F33-H28:H33)
33	=МУМНОЖ(B12:G17;B20:B25)		=G31*B28:B33	=(F28:F33-H28:H33)

4. Нахождение структуры составного портфеля с помощью формулы (7.14) при условии, что $\tau = 0{,}7$ (см. табл. 7.3).

Таблица 7.3

Определение структуры составного портфеля

	J	K	Содержание ячеек столбца K
27	τ	$\mathbf{w}$	
28	0,7	0,4313	=D28:D33+J28*I28:I33
29		0,0288	=D28:D33+J28*I28:I33
30		0,4087	=D28:D33+J28*I28:I33
31		0,0130	=D28:D33+J28*I28:I33
32		-0,0051	=D28:D33+J28*I28:I33
33		0,1233	=D28:D33+J28*I28:I33

5. Вычисление доходности и риска при $\tau = 0{,}7$ по формулам (7.16) и (7.17) (см. табл. 7.4).

Таблица 7.4

Расчет доходности и риска

	M	N	Содержание ячеек столбца M	Содержание ячеек столбца N
27	$\sigma^2_{\min}$	Доходность		
28	7,2891	0,1991	=МУМНОЖ(МУМНОЖ (ТРАНСП(D28:D33);B4:G9)D28:D33)	=СУММПРОИЗВ (B20:B25;K28:K33)
29				
30	σ^2_c	Риск		
31	0,0447	2,7038	=МУМНОЖ(МУМНОЖ (ТРАНСП(I28:I33);B4:G9);I28:I33)	=(M28+J28^2*M31)^0,5

6. Построение фронта эффективных портфелей. Меняя значения τ, получаем разные значения доходности и риска, тем самым формируем данные для построения фронта эффективных портфелей (см. табл. 7.5). Далее строим фронт (*Диаграмма – Вставка – Точечная*), рис. 7.1.

Таблица 7.5

Данные для построения фронта эффективных портфелей

τ	σ_w	m_w
0	2,6998	0,1678
0,1	2,6999	0,1723
0,2	2,7002	0,1768
0,3	2,7006	0,1813
0,4	2,7012	0,1857
0,5	2,7019	0,1902
0,6	2,7028	0,1947
0,7	2,7039	0,1992
0,8	2,7051	0,2036
0,9	2,7065	0,2081
1	2,7081	0,2126

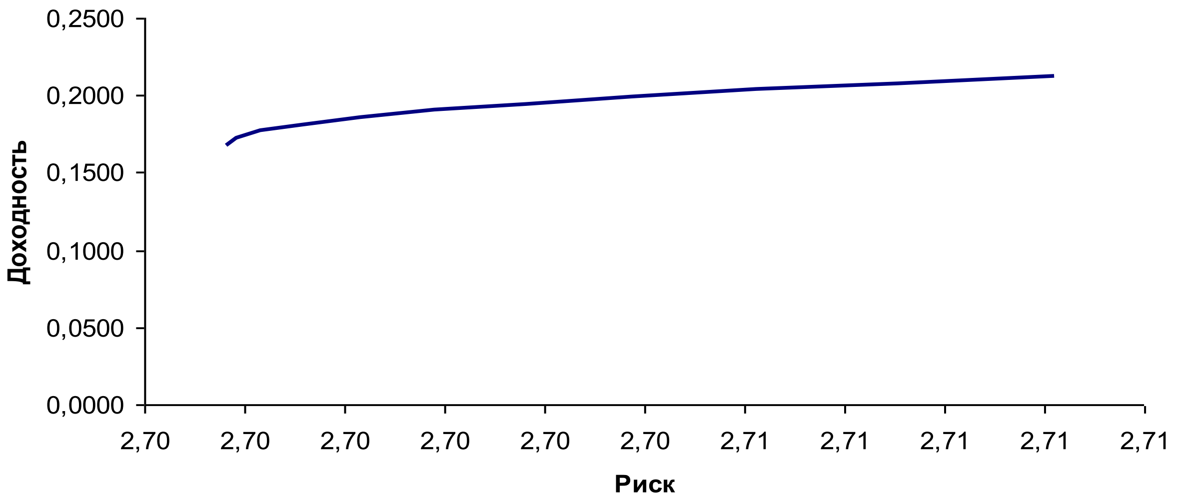


Рис. 7.1. Фронт эффективных портфелей с учетом отношения инвестора к риску

8. МОДЕЛЬ ЛИНТНЕРА – ШАРПА (CAPM)

Модель Марковица не только научила инвесторов диверсифицировать свои вложения и строить оптимальные портфели, но и стала отправным пунктом для углубленных исследований закономерностей финансовых рынков. Прежде чем перейти к описанию модели Линтнера – Шарпа, рассмотрим предположения, которые гарантируют корректность математических моделей:

1. Финансовый рынок и действия на нем индивидуального инвестора описываются моделью Марковица.
2. На рынке действуют K инвесторов с одинаковыми ожиданиями, т.е. инвесторы одинаково оценивают математическое ожидание и дисперсию доходностей рисковых активов и имеют одинаковый временной горизонт в один период.
3. Рынок находится в равновесии, т.е. спрос на финансовые активы равен их предложению.
4. В рамках моделей оценки рыночной стоимости финансовых активов делается так же предположение о возможности заимствования и инвестирования по безрисковой ставке процента.

В основе модели Линтнера – Шарпа лежит четвертое предположение о том, что все инвесторы, действующие на рынке, могут занимать и инвестировать по безрисковой ставке r_f. Данное предположение создает ситуацию, в соответствии с которой рынок состоит из безрискового актива A_0 с доходностью r_f и n рискованных активов A_i с доходностями r_i, $i = \overline{1,n}$.

Далее будем считать, что определен вектор средних доходностей $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)'$ и ковариационная матрица $\mathbf{\Sigma}$. Причем доходность хотя бы одного рискового актива по величине отличается от доходности безрискового актива, т.е. $\exists i = \overline{1,n} : m_i \neq r_f$.

Кроме того, предполагается, что матрица ковариаций $\mathbf{\Sigma}$ положительно определена, т.е. для любого портфеля $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)' \neq (0, 0, \ldots, 0)$: $\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} > 0$.

Если эти условия выполняются, то существует единственный портфель k-го инвестора $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_n)'$, $k = \overline{1,K}$, который является эффективным и который может быть представлен в виде

$$\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{w}_{\min} + \tau^{(k)}\,\mathbf{w}^{c}, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{w}_{\min} = (1, 0, \ldots, 0)'$ – портфель с нулевым риском, так как состоит только из безрискового актива, а $\mathbf{w}^{c} = (w_0^c, w_1^c, \ldots, w_n^c)'$ – портфель, первая компонента которого равна

$$w_0^c = -(\mathbf{m} - r_f\,\mathbf{i})'\,\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\,, \tag{8.2}$$

а вектор из остальных компонент определяется в соответствии с матричным выражением

$$w_i^c = (\mathbf{m} - r_f\,\mathbf{i})'\,\mathbf{\Sigma}^{-1}. \tag{8.3}$$

Фактически все инвесторы сформировали свои портфели в соответствии с моделью Марковица и зависящие от индивидуального отношения к риску, характеризуемому параметром τ.

Если предположить, что величина инвестиций в портфель k-го инвестора равна $v^{(k)}$, то совокупный спрос на рынке можно определить в виде взвешенного портфеля, который легко рассчитывается, если просуммировать с соответствующими весами все портфели инвесторов (8.1)

$$\mathbf{w}^{m} = \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{v^{(k)}}{\sum_{k=1}^{K} v^{(k)}}\,\mathbf{w}^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{v^{(k)}}{\sum_{k=1}^{K} v^{(k)}}\left(\mathbf{w}_{\min} + \tau^{(k)}\mathbf{w}^{c}\right)\right). \tag{8.4}$$

Окончательно получаем портфель совокупного спроса

$$\mathbf{w}^{m} = \mathbf{w}_{\min} + \tau^{m}\mathbf{w}^{c}, \tag{8.5}$$

где $\tau^{m} = \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{v^{(k)}}{\sum_{k=1}^{K} v^{(k)}}\,\tau^{(k)}\right)$.

Данный портфель $\mathbf{w}^{m} = (w_0^m, w_1^m, \ldots, w_n^m)$ является эффективным, так как представляет собой линейную комбинацию эффективных портфелей и может быть получен в результате решения задачи

$$\tau^{m}\left(r_f\,w_0^m + \mathbf{w}'\mathbf{m}\right) - \mathbf{w}'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{w}\,1, \tag{8.6}$$

$$w_0^m + \mathbf{w}'\mathbf{i} - 1, \tag{8.7}$$

где $w = (w_1^m, \ldots, w_n^m)$.

Функция Лагранжа записывается обычным образом:

$$\mathrm{L}(\mathbf{w},\lambda)=2\tau^m\left(r_f w_0^m+\mathbf{w}'\mathbf{m}\right)-\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}+2\lambda(w_0^m+\mathbf{w}'\mathbf{i}-1). \qquad (8.8)$$

Ее дифференцирование позволяет получить систему уравнений

$$\mathrm{L}'_{w_0}=\tau^m r_f+\lambda=0, \qquad (8.9)$$

$$\mathrm{L}'_{\mathbf{w}}=\tau^m\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{w}+\lambda\mathbf{i}=\mathbf{0}, \qquad (8.10)$$

$$\mathrm{L}'_{\lambda}=w_0^m+\mathbf{w}'\mathbf{i}=1, \qquad (8.11)$$

которой должен удовлетворять рассматриваемый портфель.

Выразив λ из (8.9)

$$\lambda=-\tau^m r_f \qquad (8.12)$$

и подставив полученное выражение в (8.9), имеем систему уравнений в матричной форме

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}=\tau^m(\mathbf{m}-r_f\mathbf{i}). \qquad (8.13)$$

Чтобы был понятен результат умножения, распишем детали этой системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{var}(r_1) & \mathrm{cov}(r_1,r_2) & \cdots & \mathrm{cov}(r_1,r_n) \\ \mathrm{cov}(r_2,r_1) & \mathrm{var}(r_2) & \cdots & \mathrm{cov}(r_2,r_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{cov}(r_n,r_1) & \mathrm{cov}(r_n,r_2) & \cdots & \mathrm{var}(r_n) \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix}=\tau^m\begin{pmatrix} m_1-r_f \\ m_1-r_f \\ \vdots \\ m_1-r_f \end{pmatrix}. \qquad (8.14)$$

Результат перемножения произвольной i-й строки и вектора $\mathbf{w}$ может быть записан следующим образом:

$$\mathrm{cov}(r_i,r^m)=\tau^m(m_i-r_f), \qquad i=\overline{1,n}, \qquad (8.15)$$

так как

$$\mathrm{cov}(r_i,r^m)=w_1\mathrm{cov}(r_i,r_1)+w_2\mathrm{cov}(r_i,r_2)+\ldots+w_n\mathrm{cov}(r_i,r_n)=$$
$$=\mathrm{cov}(r_i,w_1r_1+w_1r_2+\cdots+w_nr_n). \qquad (8.16)$$

Если теперь (8.9) умножить на w_0 , а (8.10) на $\mathbf{w}$ и результаты умножения сложить, то получим выражение

$$\tau^m w_0 r_f+\tau^m\mathbf{w}'\mathbf{m}-\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}+\lambda w_0+\lambda\mathbf{w}'\mathbf{i}=0. \qquad (8.17)$$

Сгруппировав некоторые члены

$$\tau^m(w_0 r_f+\mathbf{w}'\mathbf{m})-\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}+\lambda(w_0+\mathbf{w}'\mathbf{i})=0 \qquad (8.18)$$

и учитывая, что

$$w_0 r_f+\mathbf{w}'\mathbf{m}=\mathrm{E}\,r^m,$$

$$w_0 + \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1,$$

$$\lambda = -\tau^m r_f\,,$$

можно (8.18) переписать в виде

$$\tau^m \,\mathrm{E}\, r^m - \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \tau^m r_f = 0\,. \tag{8.19}$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} = \tau^m (\mathrm{E}\, r^m - r_f) \tag{8.20}$$

или

$$\mathrm{var}(r^m) = \tau^m (\mathrm{E}\, r^m - r_f)\,. \tag{8.21}$$

Завершая вывод уравнения Линтнера – Шарпа, разделим (8.15) на (8.21)

$$\frac{\mathrm{cov}(r_i, r^m)}{\mathrm{var}(r^m)} = \frac{m_i - r_f}{\mathrm{E}\, r^m - r_f}\,. \tag{8.22}$$

Очевидные преобразования позволяют записать

$$m_i = r_f + \frac{\mathrm{cov}(r_i, r^m)}{\mathrm{var}(r^m)} (\mathrm{E}\, r^m - r_f) \tag{8.23}$$

или

$$\mathrm{E}\, r_i = r_f + \beta(\mathrm{E}\, r^m - r_f)\,. \tag{8.24}$$

Так как вывод уравнения осуществлялся в предположении, что рынок находится в равновесии, то вектор $\mathbf{w}^m$ характеризует одновременно и спрос и предложение на финансовом рынке, т.е. этот вектор является рыночным портфелем. Компоненты этого вектора равны доли каждого актива на рынке, определяемой как отношение его совокупной стоимости (произведение текущей рыночной стоимости актива на количество его единиц находящихся в обращении на рынке) к сумме совокупных рыночных стоимостей всех активов на финансовом рынке

$$\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_n)', \quad w_i = \left(\frac{S_t(A_i) n_t(A_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n} S_t(A_i) n_t(A_i)} \right), \quad i = \overline{1, n}\,, \tag{8.25}$$

где $S_t(A_i)$ – рыночная стоимость i-го актива;

$n_t(A_i)$ – количество i-го актива на рынке.

Определить реальную структуру рыночного портфеля довольно сложно. Поэтому при решении практических задач, как правило, используются биржевые индексы. С их помощью удается получить достаточно полное представление о состоянии финансового рынка. Правда, не все исследователи согласны с таким упрощением. Известна так называемая критика Ролла [47, 48], в которой подвергается сомнению правомерность использования биржевых индексов для построения модели CAPM. Несмотря на критику Ролла, в практике обоснования инвестиционных решений эту модель строят, используя исторические данные о доходностях индекса и финансового актива.

Особый интерес представляет интерпретация уравнения Линтнера – Шарпа. Для интерпретации удобно это уравнение переписать в виде

$$\mathrm{E}\,r_i - r_f = \beta(\mathrm{E}\,r^m - r_f). \tag{8.26}$$

Разность между ожидаемой доходностью и уровнем безрисковой доходности ($\mathrm{E}\,r_i - r_f$) называют премией за риск, которую может получить инвестор, вложив свои средства в актив A_i. Разность ($\mathrm{E}\,r^m - r_f$) по аналогии является премией за риск, на которую в среднем может рассчитывать инвестор, вложивший свои средства в рыночные активы. Эти премии находятся в определенном соотношении. Величина этого соотношения равна коэффициенту бета $\beta_i = \mathrm{cov}(r_i, r^m)/\mathrm{var}(r^m)$.

Главным итогом CAPM является *SML (линия рынка актива).* Она говорит о том, что в состоянии равновесия ожидаемая доходность актива равна ставке без риска плюс вознаграждение за рыночный риск, который измеряется величиной бета. *SML* изображена на рис. 8.1. Она представляет собой прямую линию, проходящую через две точки, координаты которых равны r_f,0 и $\mathrm{E}(r_m)$,1. Таким образом, зная ставку без риска и ожидаемую доходность рыночного портфеля, можно построить *SML*. В состоянии равновесия рынка ожидаемая доходность каждого актива и портфеля независимо от того, эффективный он или нет, должна располагаться на *SML*.

Алгоритм построения модели Линтнера – Шарпа в Ms Excel

1. Расчет однодневной доходности акций и индекса по данным табл. П1 аналогично тому, как это было сделано при построении модели Марковица (см. табл. 4.1). Фрагмент данных представлен на рис. 8.2.

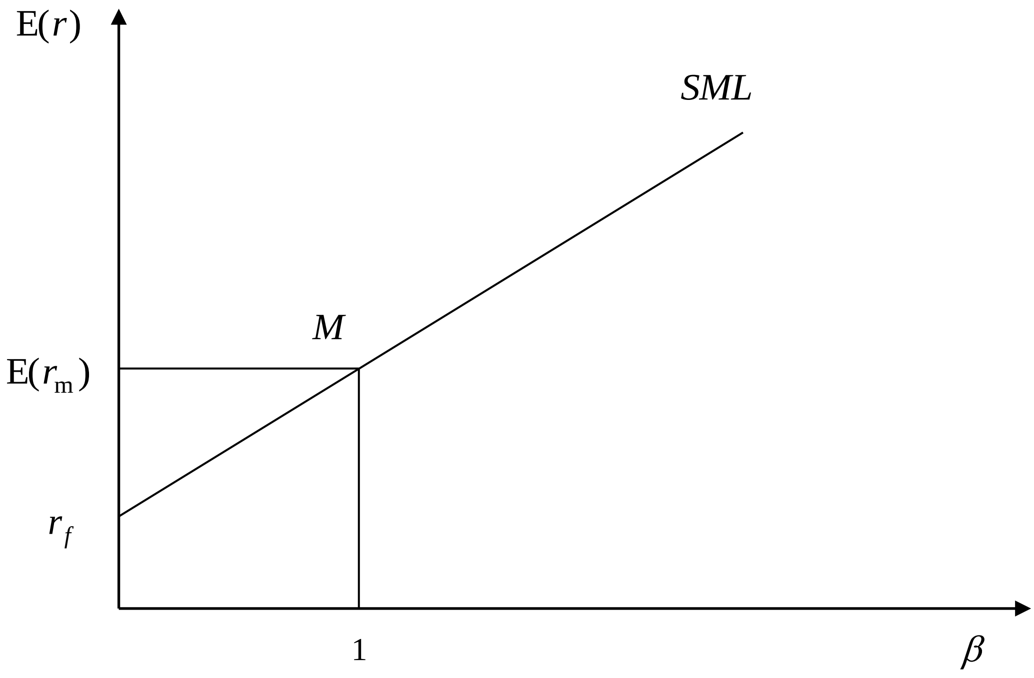
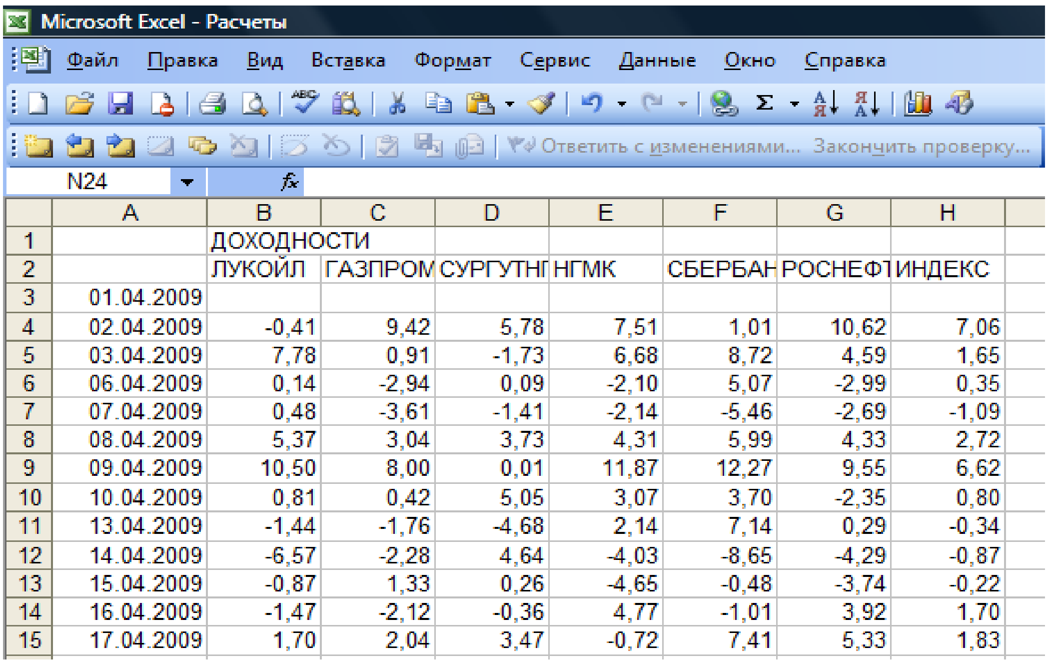


Рис. 8.1. Линия рынка актива



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		ДОХОДНОСТИ						
2		ЛУКОЙЛ	ГАЗПРОМ	СУРГУТНГ	НГМК	СБЕРБАН	РОСНЕФТ	ИНДЕКС
3	01.04.2009							
4	02.04.2009	-0,41	9,42	5,78	7,51	1,01	10,62	7,06
5	03.04.2009	7,78	0,91	-1,73	6,68	8,72	4,59	1,65
6	06.04.2009	0,14	-2,94	0,09	-2,10	5,07	-2,99	0,35
7	07.04.2009	0,48	-3,61	-1,41	-2,14	-5,46	-2,69	-1,09
8	08.04.2009	5,37	3,04	3,73	4,31	5,99	4,33	2,72
9	09.04.2009	10,50	8,00	0,01	11,87	12,27	9,55	6,62
10	10.04.2009	0,81	0,42	5,05	3,07	3,70	-2,35	0,80
11	13.04.2009	-1,44	-1,76	-4,68	2,14	7,14	0,29	-0,34
12	14.04.2009	-6,57	-2,28	4,64	-4,03	-8,65	-4,29	-0,87
13	15.04.2009	-0,87	1,33	0,26	-4,65	-0,48	-3,74	-0,22
14	16.04.2009	-1,47	-2,12	-0,36	4,77	-1,01	3,92	1,70
15	17.04.2009	1,70	2,04	3,47	-0,72	7,41	5,33	1,83

Рис. 8.2. Фрагмент исходных данных для построения САРМ

2. Построение регрессионных уравнений, отражающих связь доходности акций каждой компании с доходностью индекса (*Сервис – Анализ данных – Регрессия*). В окне *Регрессия* необходимо указать входной интервал Y и входной интервал X, а также выходной интервал. В качестве примера на рис. 8.3 показано заполненное окно для акций Лукойл. Аналогично заполняются окна регрессионного анализа для других компаний.

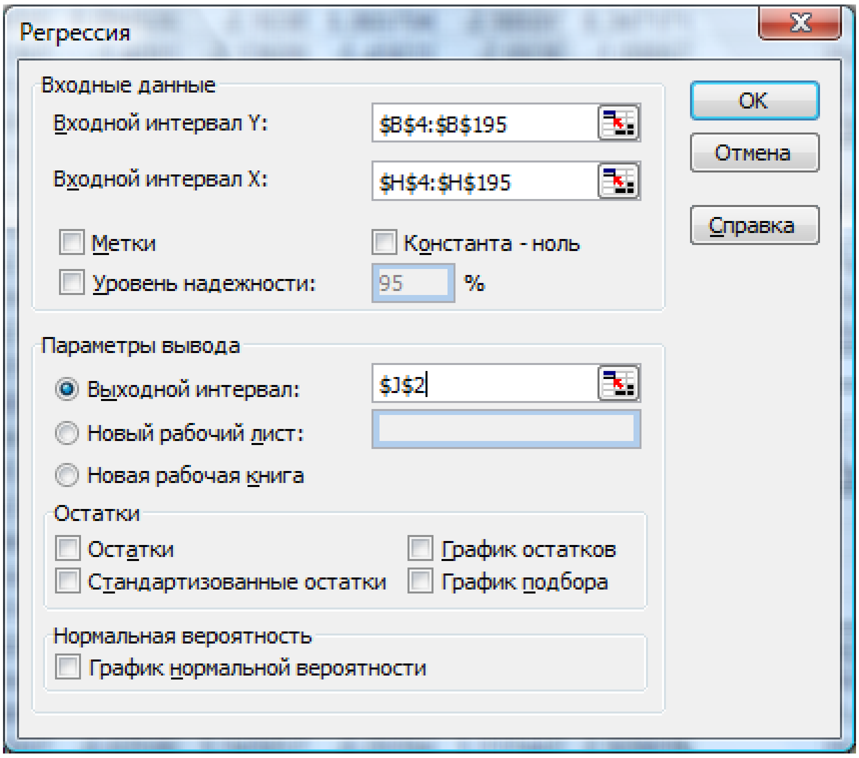
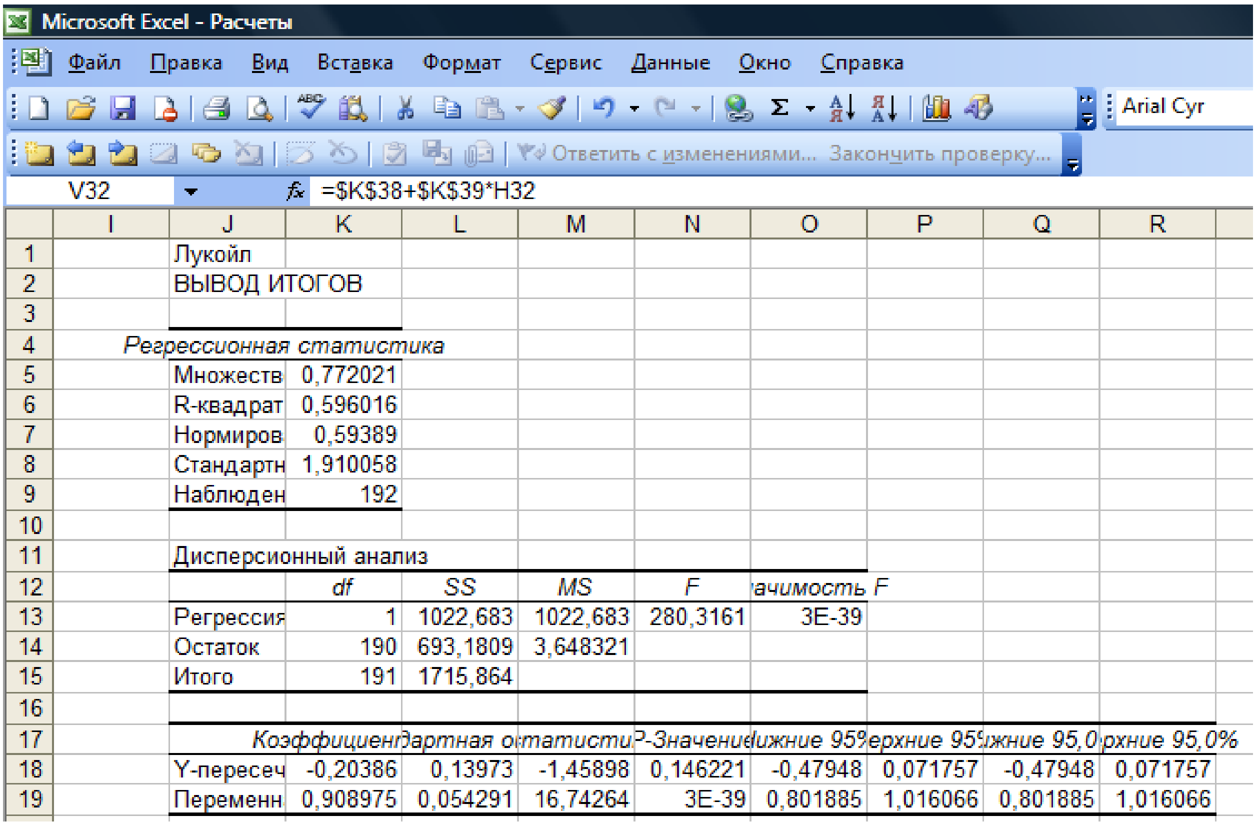


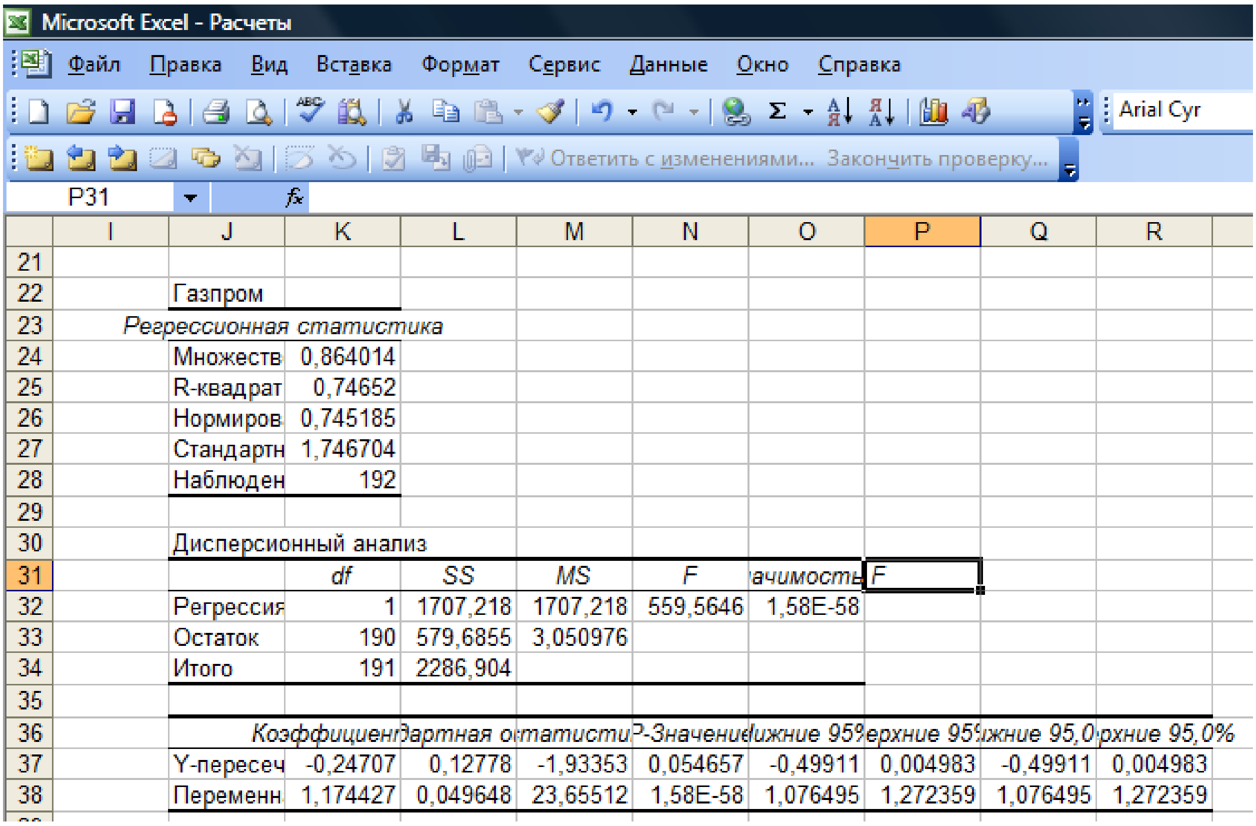
Рис. 8.3. Окно Регрессия (Лукойл)

После нажатия кнопки *OK* появятся результаты регрессионного анализа (см. рис. 8.4 – 8.9).



	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1		Лукойл								
2		ВЫВОД ИТОГОВ								
3										
4		*Регрессионная статистика*								
5		Множеств	0,772021							
6		R-квадрат	0,596016							
7		Нормиров	0,59389							
8		Стандартн	1,910058							
9		Наблюден	192							
10										
11		Дисперсионный анализ								
12			*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*			
13		Регрессия	1	1022,683	1022,683	280,3161	3E-39			
14		Остаток	190	693,1809	3,648321					
15		Итого	191	1715,864						
16										
17			*Коэффициент*	*дартная о*	*статисти*	*Р-Значение*	*ижние 95%*	*ерхние 95%*	*ижние 95,0*	*рхние 95,0%*
18		Y-пересеч	-0,20386	0,13973	-1,45898	0,146221	-0,47948	0,071757	-0,47948	0,071757
19		Переменн	0,908975	0,054291	16,74264	3E-39	0,801885	1,016066	0,801885	1,016066

Рис. 8.4. Вывод итогов регрессионного анализа (Лукойл)



Microsoft Excel - Расчеты

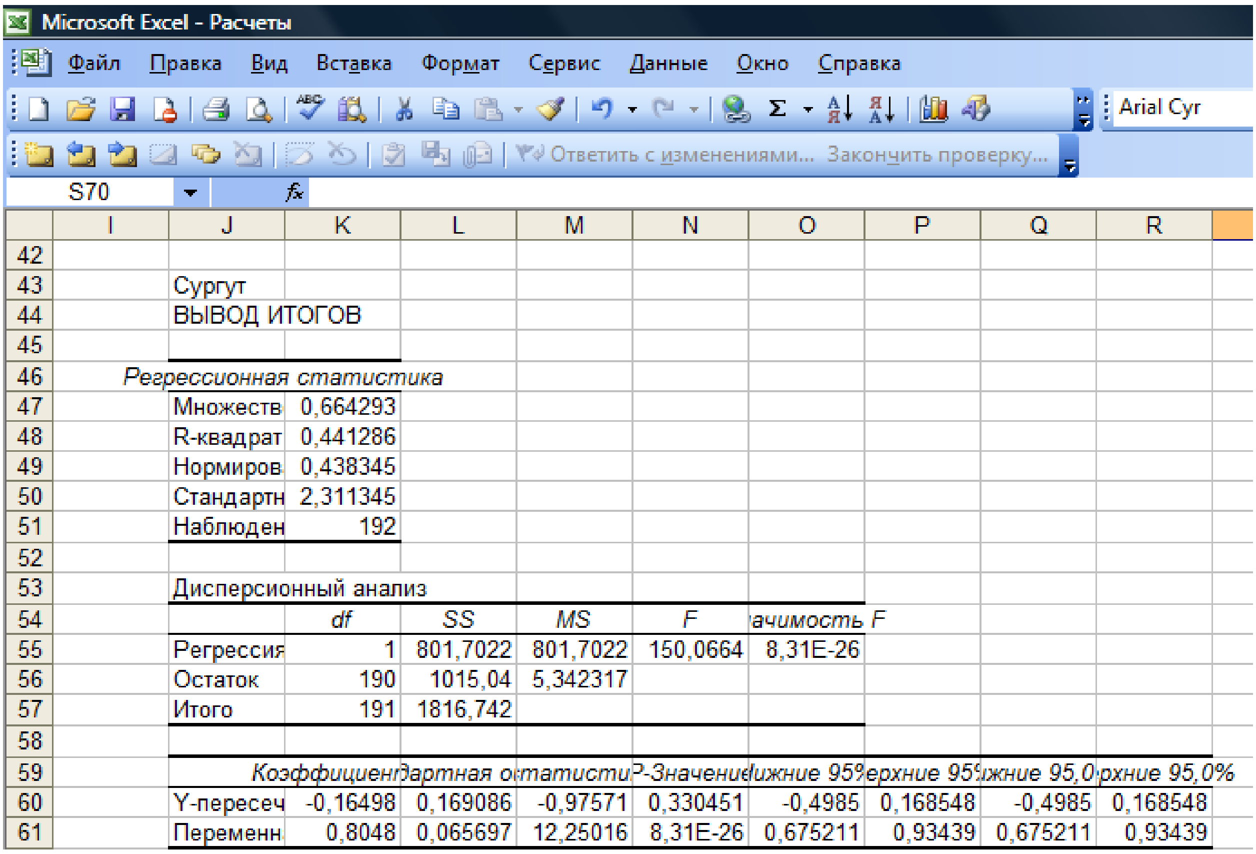
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Ответить с изменениями... Закончить проверку... Arial Cyr

P31

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
21										
22		Газпром								
23		*Регрессионная статистика*								
24		Множеств	0,864014							
25		R-квадрат	0,74652							
26		Нормиров	0,745185							
27		Стандартн	1,746704							
28		Наблюден	192							
29										
30		Дисперсионный анализ								
31			*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость*	*F*		
32		Регрессия	1	1707,218	1707,218	559,5646	1,58E-58			
33		Остаток	190	579,6855	3,050976					
34		Итого	191	2286,904						
35										
36			*Коэффициент*	*дартная ош*	*татистик*	*P-Значение*	*ижние 95%*	*ерхние 95%*	*жние 95,0*	*рхние 95,0%*
37		Y-пересеч	-0,24707	0,12778	-1,93353	0,054657	-0,49911	0,004983	-0,49911	0,004983
38		Переменн	1,174427	0,049648	23,65512	1,58E-58	1,076495	1,272359	1,076495	1,272359

Рис. 8.5. Вывод итогов регрессионного анализа (Газпром)



Microsoft Excel - Расчеты

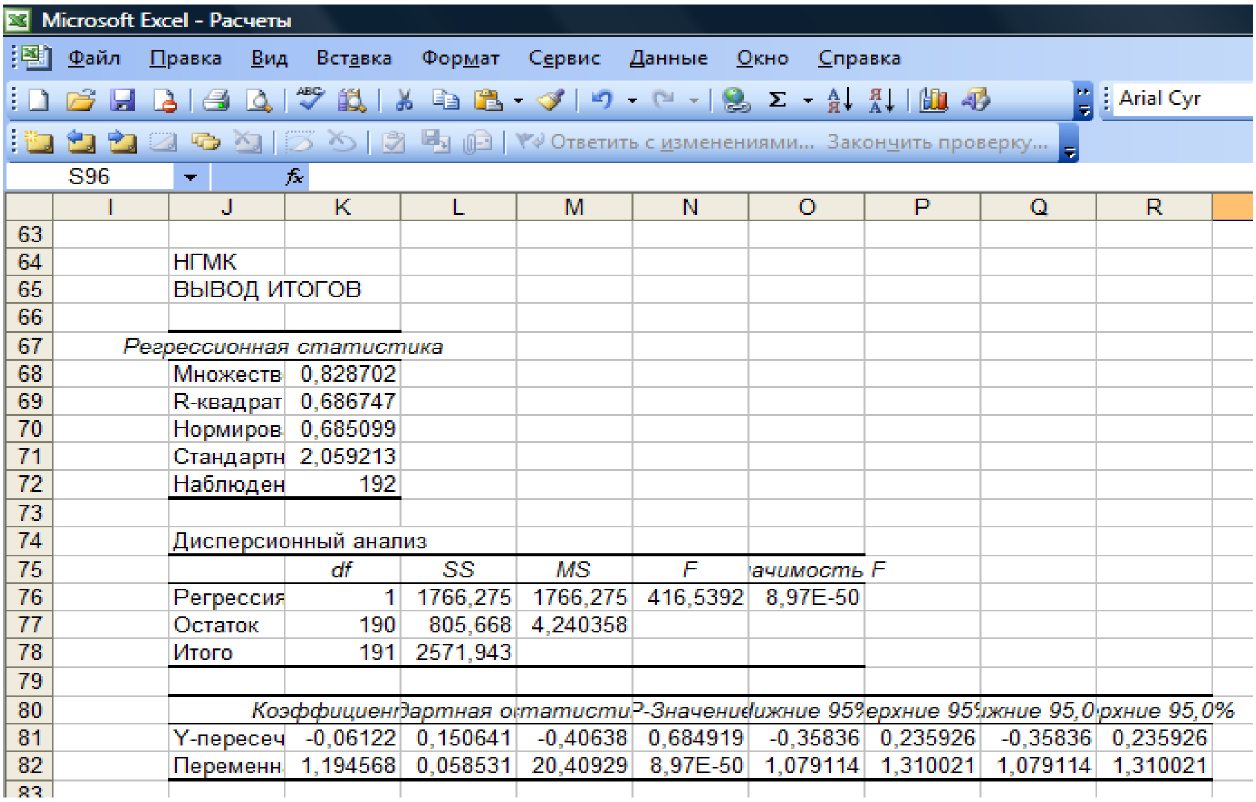
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Ответить с изменениями... Закончить проверку... Arial Cyr

S70

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
42										
43		Сургут								
44		ВЫВОД ИТОГОВ								
45										
46		*Регрессионная статистика*								
47		Множеств	0,664293							
48		R-квадрат	0,441286							
49		Нормиров	0,438345							
50		Стандартн	2,311345							
51		Наблюден	192							
52										
53		Дисперсионный анализ								
54			*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость*	*F*		
55		Регрессия	1	801,7022	801,7022	150,0664	8,31E-26			
56		Остаток	190	1015,04	5,342317					
57		Итого	191	1816,742						
58										
59			*Коэффициент*	*дартная ош*	*татистик*	*P-Значение*	*ижние 95%*	*ерхние 95%*	*жние 95,0*	*рхние 95,0%*
60		Y-пересеч	-0,16498	0,169086	-0,97571	0,330451	-0,4985	0,168548	-0,4985	0,168548
61		Переменн	0,8048	0,065697	12,25016	8,31E-26	0,675211	0,93439	0,675211	0,93439

Рис. 8.6. Вывод итогов регрессионного анализа (СургутНГ)



НГМК

ВЫВОД ИТОГОВ

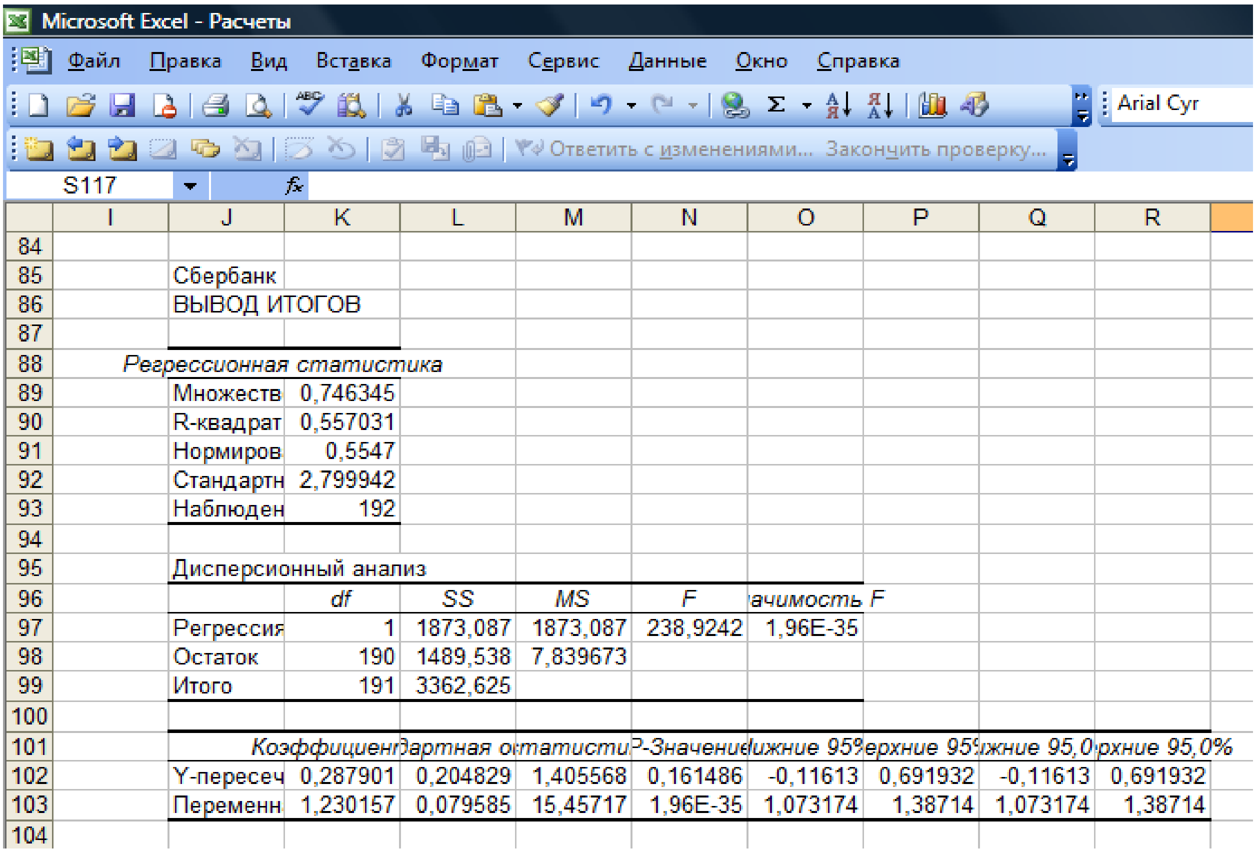
Регрессионная статистика	
Множеств	0,828702
R-квадрат	0,686747
Нормиров	0,685099
Стандартн	2,059213
Наблюден	192

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	ачимость F
Регрессия	1	1766,275	1766,275	416,5392	8,97E-50
Остаток	190	805,668	4,240358		
Итого	191	2571,943			

	Коэффициент	дартная о	татистик	Р-Значение	ижние 95%	ерхние 95%	ижние 95,0	рхние 95,0%
Y-пересеч	-0,06122	0,150641	-0,40638	0,684919	-0,35836	0,235926	-0,35836	0,235926
Переменн	1,194568	0,058531	20,40929	8,97E-50	1,079114	1,310021	1,079114	1,310021

Рис. 8.7. Вывод итогов регрессионного анализа (НГМК)



Сбербанк

ВЫВОД ИТОГОВ

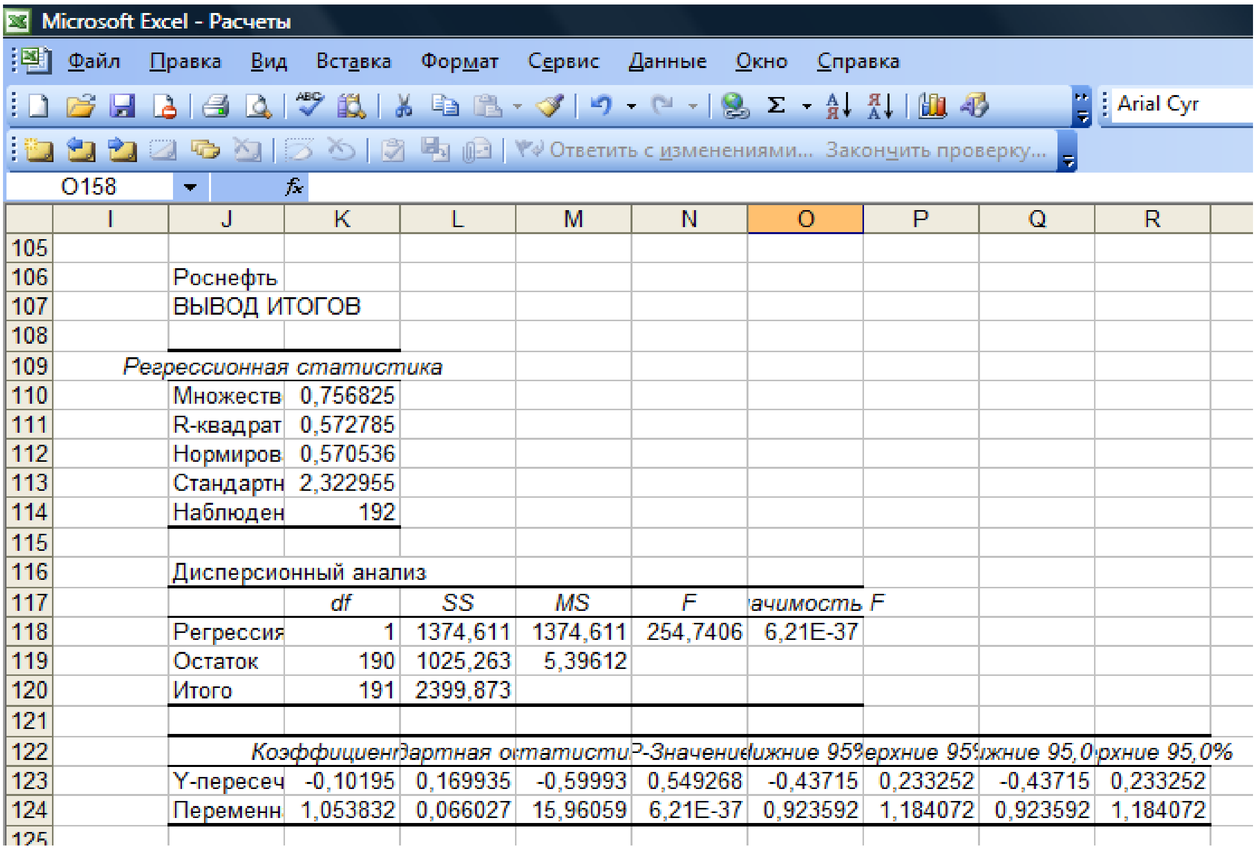
Регрессионная статистика	
Множеств	0,746345
R-квадрат	0,557031
Нормиров	0,5547
Стандартн	2,799942
Наблюден	192

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	ачимость F
Регрессия	1	1873,087	1873,087	238,9242	1,96E-35
Остаток	190	1489,538	7,839673		
Итого	191	3362,625			

	Коэффициент	дартная о	татистик	Р-Значение	ижние 95%	ерхние 95%	ижние 95,0	рхние 95,0%
Y-пересеч	0,287901	0,204829	1,405568	0,161486	-0,11613	0,691932	-0,11613	0,691932
Переменн	1,230157	0,079585	15,45717	1,96E-35	1,073174	1,38714	1,073174	1,38714

Рис. 8.8. Вывод итогов регрессионного анализа (Сбербанк)



Роснефть	
ВЫВОД ИТОГОВ	
Регрессионная статистика	
Множеств	0,756825
R-квадрат	0,572785
Нормиров	0,570536
Стандартн	2,322955
Наблюден	192

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*
Регрессия	1	1374,611	1374,611	254,7406	6,21E-37
Остаток	190	1025,263	5,39612		
Итого	191	2399,873			

	Коэффициент	*дартная о*	*статисти*	*P-Значение*	*ижние 95%*	*ерхние 95%*	*ижние 95,0*	*рхние 95,0%*
Y-пересеч	-0,10195	0,169935	-0,59993	0,549268	-0,43715	0,233252	-0,43715	0,233252
Переменн	1,053832	0,066027	15,96059	6,21E-37	0,923592	1,184072	0,923592	1,184072

Рис. 8.9. Вывод итогов регрессионного анализа (Роснефть)

С помощью графика на рис. 8.1 можно оценить эффективность актива. Так, если на оси β отложить полученные значения, то можно определить доходность актива.

9. ОДНОИНДЕКСНАЯ МОДЕЛЬ ШАРПА

Правила построения границы эффективных портфелей, сформулированные Марковицем, позволяют находить оптимальный с точки зрения инвестора портфель из любого количества ценных бумаг. Однако основной сложностью выполнения этих правил является большой объем вычислений, необходимый для определения веса каждой ценной бумаги.

В 1963 году У. Шарп предложил новый метод построения границы эффективных портфелей, позволяющий значительно сократить объемы необходимых вычислений. В дальнейшем этот метод был модифицирован и в настоящее время известен как одноиндексная модель Шарпа.

На формальном уровне с помощью одноиндексной модели [51] устанавливается взаимосвязь между доходностью активов, включаемых в портфель, и доходностью рыночного индекса

$$r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{ti}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{9.1}$$

где r_{ti} – доходность i -го актива в момент времени t;

r_{It} – доходность рыночного индекса в момент времени t;

α_i, β_i – оцениваемые параметры регрессионной модели;

ε_{ti} – ненаблюдаемая случайная величина.

В модели (9.1) β то же самое, что и в модели Линтнера – Шарпа.

Через параметры линейной регрессионной модели (9.1) выражаются все величины, используемые при построении модели, с помощью которой формируется оптимальная структура портфеля. Расчетные формулы выглядят следующим образом:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_I, \tag{9.2}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \tag{9.3}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_I^2, \tag{9.4}$$

где $\bar{r}_i$, $\bar{r}_I$ – математические ожидания доходности i -го актива и индекса;

σ_i^2, σ_I^2 – дисперсии доходностей i -го актива и индекса;

σ_{ij} – ковариация доходностей i -го и j -го активов.

Формулы получены благодаря свойствам случайных величин ε_{ti}, наличие которых, в силу того, что сами случайные величины не наблюдаемы, постулируется. Естественность всех предположений относительно ε_{ti} не вызывает сомнений.

Чтобы записать формальную постановку модели Шарпа, определим выражение для доходности портфеля и выражение для дисперсии портфеля.

Определение ожидаемой доходности портфеля. Как установлено, ожидаемая доходность портфеля, состоящего из n ценных бумаг, вычисляется по формуле:

$$\mathrm{E}(r_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \,\mathrm{E}(r_i), \tag{9.5}$$

где w_i – вес каждой ценной бумаги в портфеле. Подставим в эту формулу выражение $\mathrm{E}(r_i)$

$$\mathrm{E}(r_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[\alpha_i + \beta_i \,\mathrm{E}(r_m)\right]. \tag{9.6}$$

Выделим в этом равенстве слагаемые, на которые не оказывают воздействие изменения рынка, и слагаемые, которые зависят от рыночных показателей:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \right) E(r_m). \tag{9.7}$$

Для придания этой формуле компактности Шарп предложил сначала считать рыночный индекс как характеристику условной $(n+1)$-й акции в портфеле. В таком случае второе слагаемое уравнения (9.7) можно представить в виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \right) E(r_m) = w_{n+1}\, E(\alpha_{n+1}), \tag{9.8}$$

где

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \ , \tag{9.9}$$

$$E(\alpha_{n+1}) = E(r_n). \tag{9.10}$$

При этом считается, что дисперсия $(n+1)$-й ошибки равна дисперсии рыночной доходности: $\sigma^2_{\varepsilon, n+1} = \sigma^2_m$. Выражение (8.10) представляет собой сумму взвешенных величин «беты» каждой ценной бумаги (где весом служат w_i) и называется *портфельной «бетой» (*β_n*)*. С учетом выражений (9.9) и (9.10) формулу (9.8) можно записать так:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i \,. \tag{9.11}$$

Таким образом, ожидаемую доходность портфеля $E(r_n)$ можно представить состоящей из двух частей:

а) суммы взвешенных параметров α_i каждой ценной бумаги – $w_1\alpha_1 +$, $+ w_2\alpha_2 + \ldots + w_n\alpha_n$ что отражает вклад в $E(r_n)$ самих ценных бумаг;

б) компоненты $w_{n+1}\alpha_i = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \right) E(r_m)$, т.е. произведения портфельной «беты» и ожидаемой рыночной доходности, что отражает взаимосвязь рынка с ценными бумагами портфеля.

Определение дисперсии портфеля. Как известно, дисперсию портфеля можно представить в виде:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} . \tag{9.12}$$

Если вместо значений σ_i^2 и $\sigma_{i,j}$ подставить выражения:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon,i}^2 , \tag{9.13}$$

$$\sigma_{i,j} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 , \tag{9.14}$$

провести соответствующие вычисления и воспользоваться условностью (9.9), то можно показать, что дисперсия портфеля представляется в виде:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \sigma_{\varepsilon,i}^2 . \tag{9.15}$$

При этом только необходимо иметь в виду, что $w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$, т.е. $(w_{n+1})^2 = (w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + \ldots + w_n\beta_n)^2$, а $\sigma_{\varepsilon,n+1}^2 = \sigma_m^2$. Значит, дисперсию портфеля, содержащего n акций, можно представить состоящей из двух компонент:

а) средневзвешенных дисперсий ошибок $\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2$, где весами служат w_i, что отражает долю риска портфеля, связанного с риском самих ценных бумаг (собственный риск);

б) $\beta_n^2 \sigma_m^2$ – взвешенной величины дисперсии доходности рыночного портфеля σ_m^2, где весом служит квадрат портфельной «беты», что отражает долю риска портфеля, определяемого нестабильностью самого рынка (рыночный риск).

Определив выражения для ожидаемой доходности и дисперсии, запишем модель Шарпа в матричной форме:

$$\mathbf{w}_{n+1}' \mathbf{\Sigma}_d \mathbf{w}_{n+1} \to \min , \tag{9.16}$$

$$\mathbf{w}_{n+1}' \boldsymbol{\alpha} = \mu , \tag{9.17}$$

$$\mathbf{w}' \mathbf{i} = 1 , \tag{9.18}$$

$$\mathbf{w}' \boldsymbol{\beta} = w_{n+1} , \tag{9.19}$$

где $\mathbf{w}_{n+1}' = (w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$ – вектор, компоненты которого определяют структуру расширенного портфеля;

$\mathbf{w}' = (w_1, \ldots, w_n,)$– вектор, компоненты которого определяют структуру портфеля;

$$\mathbf{\Sigma}_d = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon,2}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon,n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят остаточные дисперсии активов и дисперсия рыночного портфеля (индекса) σ_m^2;

$\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n,)$ – вектор параметров;

$\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \dots, \beta_n,)$– вектор параметров.

Отметим основные этапы, которые необходимо выполнить для построения границы эффективных портфелей в модели Шарпа:

1) выбрать n ценных бумаг, из которых формируется портфель, и определить исторический промежуток в N лет, за который будут наблюдаться значения доходности $r_{i,t}$ каждой ценной бумаги;

2) по рыночному индексу вычислить рыночные доходности $r_{m,t}$ для того же промежутка времени;

3) определить величину дисперсии рыночного показателя σ_m^2, а также значения ковариаций $\sigma_{i,m}$ доходностей каждой ценной бумаги с рыночной доходностью и найти величины β_i:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2}; \tag{9.20}$$

4) найти ожидаемые доходности каждой ценной бумаги $\mathrm{E}(r_i)$ и рыночной доходности $\mathrm{E}(r_m)$ и вычислить параметр α_i:

$$\alpha_i = \mathrm{E}(r_i) - \beta_i \, \mathrm{E}(r_m); \tag{9.21}$$

5) вычислить дисперсии $\sigma_{\varepsilon,i}^2$ ошибок регрессионной модели;

6) подставить эти значения в уравнения:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \sigma_{\varepsilon,i}^2 \,, \tag{9.22}$$

$$\mathrm{E}(r_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i = \mathrm{E}^*, \tag{9.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \tag{9.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i = w_{n+1} . \tag{9.25}$$

После такой подстановки выяснится, что неизвестными величинами являются веса w_i акций портфеля. Выбрав определенную величину ожидаемой доходности портфеля E^*, можно решить систему уравнений (9.22) – (9.25) с использованием множителей Лагранжа.

Запишем функцию Лагранжа

$$\mathrm{L} = \mathbf{w}'_{n+1}\mathbf{\Sigma}_d \mathbf{w}_{n+1} + \lambda_1(\mathbf{w}'_{n+1}\boldsymbol{\alpha} - \mu) + \lambda_2(\mathbf{w}'\mathbf{i} - 1) + \lambda_3(\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} - w_{n+1}) \to \min . \tag{9.26}$$

Продифференцируем ее по $\mathbf{w}$ и множителям Лагранжа

$$\mathrm{L}_w = 2\mathbf{\Sigma}_d \mathbf{w}_{n+1} + \lambda_1 \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2 \mathbf{i} + \lambda_3 \boldsymbol{\beta} = 0, \tag{9.27}$$

$$\mathrm{L}_{\lambda_1} = \mathbf{w}'_{n+1}\boldsymbol{\alpha} - \mu = 0, \tag{9.28}$$

$$\mathrm{L}_{\lambda_2} = \mathbf{w}'\mathbf{i} - 1 = 0, \tag{9.29}$$

$$\mathrm{L}_{\lambda_3} = \mathbf{w}'\mathbf{i} - w_{n+1} = 0. \tag{9.30}$$

Решение системы (9.27) – (9.30) позволяет получить структуру портфеля.

Алгоритм построения одноиндексной модели Шарпа в Ms Excel

1. Вычисление расчетных значений доходности акций каждой компании (с использованием результатов регрессионного анализа, полученных в предыдущем параграфе при построении CAPM). Результаты расчетов представлены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Фрагмент таблицы с расчетными значениями

	U	V	W	X	Y	Z
3	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть
4	6,2166	8,0483	5,5196	8,3764	8,9769	7,3416
5	1,2947	1,6892	1,1619	1,9082	2,3160	1,6355
6	0,1117	0,1607	0,1144	0,3535	0,7150	0,2639
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
193	-0,6065	-0,7673	-0,5215	-0,5904	-0,2570	-0,5688
194	-1,3511	-1,7294	-1,1807	-1,5689	-1,2647	-1,4320
195	0,9224	1,2081	0,8322	1,4189	1,8121	1,2038

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца U	Содержание ячеек столбца V	Содержание ячеек столбца W
3	Лукойл	Газпром	СургутНГ
4	=$K$18+$K$19*H4	=$K$39+$K$40*H4	=$K$60+$K$61*H4
5	=$K$18+$K$19*H5	=$K$39+$K$40*H5	=$K$60+$K$61*H5
6	=$K$18+$K$19*H6	=$K$39+$K$40*H6	=$K$60+$K$61*H6
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
193	=$K$18+$K$19*H193	=$K$39+$K$40*H193	=$K$60+$K$61*H193
194	=$K$18+$K$19*H194	=$K$39+$K$40*H194	=$K$60+$K$61*H194
195	=$K$18+$K$19*H195	=$K$39+$K$40*H195	=$K$60+$K$61*H195

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца X	Содержание ячеек столбца Y	Содержание ячеек столбца Z
3	НГМК	Сбербанк	Роснефть
4	=$K$81+$K$82*H4	=$K$102+$K$103*H4	=$K$123+$K$124*H4
5	=$K$81+$K$82*H5	=$K$102+$K$103*H5	=$K$123+$K$124*H5
6	=$K$81+$K$82*H6	=$K$102+$K$103*H6	=$K$123+$K$124*H6
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
193	=$K$81+$K$82*H193	=$K$102+$K$103*H193	=$K$123+$K$124*H193
194	=$K$81+$K$82*H194	=$K$102+$K$103*H194	=$K$123+$K$124*H194
195	=$K$81+$K$82*H195	=$K$102+$K$103*H195	=$K$123+$K$124*H195

2. Расчет квадратов отклонений расчетных от фактических значений доходности и остаточной дисперсии (см. в табл. 9.2).

Таблица 9.2

Фрагмент расчета остаточных дисперсий

	AB	AC	AD	AE	AF	AG
3	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть
4	43,8587	1,8801	0,0655	0,7519	63,4782	10,7177
5	42,1187	0,6101	8,3345	22,7600	41,0585	8,7043
6	0,0010	9,6175	0,0004	6,0383	18,9288	10,5559
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
193	2,6508	3,6760	8,0947	5,8355	1,4177	0,4537
194	0,0825	1,2063	0,2263	2,1977	5,9361	0,0003
195	1,1578	0,7078	0,3651	4,4279	1,4756	0,4359
196	Суммы квадратов отклонений					
197	693,1809	579,6855	1015,0403	805,6680	1489,5379	1025,2627
198	Остаточные дисперсии					
199	3,6483	3,0510	5,3423	4,2404	7,8397	5,3961

П р и м е ч а н и е:

	Содержание ячеек столбца AB	Содержание ячеек столбца AC	Содержание ячеек столбца AD	Содержание ячеек столбца AE	Содержание ячеек столбца AF	Содержание ячеек столбца AG
3	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть
4	=(B4-U4)^2	=(C4-V4)^2	=(D4-W4)^2	=(E4-X4)^2	=(F4-Y4)^2	=(G4-Z4)^2
5	=(B5-U5)^2	=(C5-V5)^2	=(D5-W5)^2	=(E5-X5)^2	=(F5-Y5)^2	=(G5-Z5)^2
6	=(B6-U6)^2	=(C6-V6)^2	=(D6-W6)^2	=(E6-X6)^2	=(F6-Y6)^2	=(G6-Z6)^2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
193	=(B193-U193)^2	=(C193-V193)^2	=(D193-W193)^2	=(E193-X193)^2	=(F193-Y193)^2	=(G193-Z193)^2
194	=(B194-U194)^2	=(C194-V194)^2	=(D194-W194)^2	=(E194-X194)^2	=(F194-Y194)^2	=(G194-Z194)^2
195	=(B195-U195)^2	=(C195-V195)^2	=(D195-W195)^2	=(E195-X195)^2	=(F195-Y195)^2	=(G195-Z195)^2
196	Суммы квадратов отклонений					
197	=СУММ (AB4:AB195)	=СУММ (AC4:AC195)	=СУММ (AD4:AD195)	=СУММ (AE4:AE195)	=СУММ (AF4:AF195)	=СУММ (AG4:AG195)
198	Остаточные дисперсии					
199	=AB196/190	=AC196/190	=AD196/190	=AE196/190	=AF196/190	=AG196/190

3. Расчет дисперсии рыночного портфеля (индекса). Фрагмент результатов содержится в табл. 9.3.

Таблица 9.3

Расчет дисперсии

	AI	Содержание ячеек столбца AI
2	0,4211	=СРЗНАЧ(H4:H195)
3		
4	44,1193	=(H4-$AI$2)^2
5	1,5069	=(H5-$AI$2)^2
6	0,0055	=(H6-$AI$2)^2
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
193	0,7466	=(H193-$AI$2)^2
194	2,8333	=(H194-$AI$2)^2
195	0,6690	=(H195-$AI$2)^2
196		
197	**0,4084**	=СУММ(AI4:AI195)/(190-1)

4. Формирование ковариационной матрицы в предположении некоррелированности ценных бумаг (табл. 9.4).

Таблица 9.4

Ковариационная матрица

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
129	7,2966	0	0	0	0	0	0	-0,2039	1	0,9090
130	0	6,1020	0	0	0	0	0	-0,2471	1	1,1744
131	0	0	10,6846	0	0	0	0	-0,1650	1	0,8048
132	0	0	0	8,4807	0	0	0	-0,0612	1	1,1946
133	0	0	0	0	15,6793	0	0	0,2879	1	1,2302
134	0	0	0	0	0	10,7922	0	-0,1019	1	1,0538
135	0	0	0	0	0	0	13,0980	0,4211	0	-1
136	-0,2039	-0,2471	-0,1650	-0,0612	0,2879	-0,1019	0,4211	0	0	0
137	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
138	0,9090	1,1744	0,8048	1,1946	1,2302	1,0538	-1	0	0	0

Примечание:

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
129	=2* AB197	0	0	0	0	0	0	=K18	1	=K19
130	0	=2* AC197	0	0	0	0	0	=K39	1	=K40
131	0	0	=2* AD197	0	0	0	0	=K60	1	=K61
132	0	0	0	=2* AE197	0	0	0	=K81	1	=K82
133	0	0	0	0	=2* AF197	0	0	=K102	1	=K103
134	0	0	0	0	0	=2* AG197	0	=K123	1	=K124
135	0	0	0	0	0	0		=AI2	0	-1
136	=K18	=K39	=K60	=K81	=K102	=K123	=AI2	0	0	0
137	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
138	=K19	=K40	=K61	=K82	=K103	=K124	-1	0	0	0

5. Расчет структуры портфеля (см. табл. 9.5)

Таблица 9.5

Определение структуры портфеля

	J	K	L	M	Содержание ячеек столбца M
142		0	Портфель	**0,3483**	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
143		0		**-0,0559**	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
144		0		**0,3553**	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
145		0		**0,0604**	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
146		0		**0,1363**	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
147		0		**0,1556**	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
148		0		0,9407	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
149	Доходность	0,3		-5,6665	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
150		1		-12,7269	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)
151		0		9,9349	=МУМНОЖ(МОБР(J129:S138);K142:K151)

10. НОВЫЙ ПОДХОД К ПОРТФЕЛЬНОМУ ИНВЕСТИРОВАНИЮ

Несмотря на интенсивное развитие финансовой теории, в настоящее время растет неудовлетворенность результатами практической деятельности на финансовых рынках. На наш взгляд, основной причиной успехов и неудач на рынке является умение или отсутствие такового принимать инвестиционные решения на основе анализа сформированного представления о будущем, позволяющего оценить размеры реального риска. Не случайно модель Марковица, в которой отсутствуют элементы упреждающего обоснования, но рассчитываются усредненные оценки риска, так и не стала инструментом инвестиционного менеджмента. Определенные с ее помощью стратегии – стратегии упущенных возможностей. Это хорошо иллюстрируют результаты расчетов, приведенные в табл. 1.10. Заметим, что данные исторического периода использовались для построения оптимального портфеля, а данные упреждающего периода – для проверки эффективности построенного портфеля, если бы инвестор продолжал действовать в соответствии с так определенной стратегией инвестирования.

Существует много методик и различных схем, в которых излагается специфика практического использования упреждающей информации. Но даже те из них, которые претендуют на обобщения, на самом деле представляют собой частные решения. В целом неудовлетворенность прогнозными решениями, также как и самими прогнозами, продолжает оставаться на высоком уровне. Поэтому идеи, в которых предлагаются решения по практическому применению результатов прогнозирования в инвестиционной деятельности, остаются актуальными. Остановимся более подробно на тех идеях и на тех способах формирования портфеля ценных бумаг, которые ввиду перспективности своего развития, заслуживают, на наш взгляд, более пристального внимания специалистов в области инвестиционного менеджмента.

Рассмотрим подход к портфельному инвестированию, предусматривающий замену средних доходностей их прогнозными оценками [9]. В результате такой операции изменяется оценка риска портфеля. Обычно величина риска в портфельных задачах определяется через ковариационную матрицу. В большинстве случаев это чрезмерно завышенная оценка. Поэтому ковариационная матрица в данном подходе рассчитывается не по отклонениям от среднего, а по отклонениям от условно среднего, которые можно получить после построения прогнозной модели.

Таблица 1.10

Результаты анализа упреждающих возможностей модели Марковица

Номер Наблюдения	Доходность				
	ЛУКОЙЛ	НГМК	ГАЗПРОМ	МТС	Портфель
Ретроспективный период					
1	3,5352	6,9180	8,0791	17,2042	6,7228
2	3,1322	9,1749	5,4669	10,1556	4,3573
3	3,4527	12,3270	5,4024	9,1739	4,1207
4	7,0413	10,2350	8,1909	13,3154	7,3913
5	5,6940	9,3433	8,8035	11,5571	8,0354
6	3,1724	8,5883	8,7377	11,2361	7,6704
7	1,7396	9,3979	9,4223	17,4187	7,5563
8	-0,2262	9,8399	7,4302	17,0883	5,1979
9	-2,2665	13,5200	8,2433	17,5724	5,3145
10	-0,4567	10,8657	9,7172	13,5378	7,6913
11	0,3577	8,9430	9,6102	13,5506	7,8934
12	-2,0007	4,3936	7,6756	15,5979	5,8144
13	1,2703	2,5388	10,2908	15,5102	9,1842
14	1,7980	1,8392	10,0587	32,2776	7,7140
15	-0,0432	1,1824	7,7972	45,9610	4,0493
16	-2,3893	-4,6236	5,4083	4,8585	5,1885
17	-4,8205	-2,4161	3,5892	1,7523	2,9934
18	-5,0829	-2,0474	1,7865	1,4060	1,1047
Средняя доходность	**0,7726**	**6,1122**	**7,5394**	**14,9541**	**6,0000**
Риск	**3,3231**	**5,4517**	**2,3382**	**10,3839**	**4,4813**
Структура	**0,1573**	**-0,0959**	**1,0210**	**-0,0825**	
Упреждающий период					
19	-1,3993	-2,5368	0,1908	0,2687	0,1957
20	1,4463	2,8369	0,5090	0,8395	0,4060
21	0,0670	0,5614	-0,2875	-2,3943	-0,1393
22	0,7682	4,1121	0,9404	-0,1845	0,7021
23	3,4261	-0,8168	2,7299	4,6485	3,0211
24	-0,9642	-0,6376	1,1438	-0,5357	1,1215
25	-0,5063	1,5494	1,0809	0,7307	0,8152
26	-2,5790	-0,0882	-0,7232	4,0173	-1,4671
27	-1,5625	-0,6351	-1,0647	-0,1528	-1,2594
28	-1,2426	-0,0199	-0,3398	0,5426	-0,5853
29	1,0929	-0,2268	1,5313	-2,5768	1,9698
30	-1,8715	-3,7964	-0,7588	-1,8921	-0,5492
31	-2,4998	-3,8398	-1,8864	2,0039	-2,1166
32	-0,8309	-4,1843	-0,5653	-2,2172	-0,1239
33	1,9199	3,0488	1,1081	1,6142	1,0080
34	-2,0998	0,6258	-2,2809	-3,6657	-2,4168
35	-0,6142	-2,1477	-0,4616	-1,1033	-0,2711
36	0,3766	4,2270	0,3854	1,0046	-0,0353
Средняя Доходность	**-0,3929**	**-0,1093**	**0,0695**	**0,0527**	**0,0153**

Модель формирования портфеля ценных бумаг с условно ожидаемой доходностью в общем случае записывается следующим образом:

$$2\tau \mathbf{w}'\mathbf{m}_{t|t-1} - \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{w} \to \max, \tag{10.1}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{10.2}$$

где τ – параметр, характеризующий уровень доверия инвестора прогнозным оценкам;

$\mathbf{i}$ – единичный вектор;

$\mathbf{w} = \left(w_1, w_2, \ldots, w_n\right)'$ – вектор структуры портфеля;

$\mathbf{r}_t = (r_{t1}, r_{t2}, \ldots, r_{tn})'$ – вектор доходностей активов, включенных в портфель;

$\mathbf{m}_{t|t-1} = \mathrm{M}(\mathbf{r}_t) = (m_{t|t-11}, m_{t|t-12}, \ldots, m_{t|t-1n})'$ – вектор условных математических ожиданий доходностей;

$R_t = \mathbf{w}'\mathbf{r}_t$ – доходность портфель в момент времени t;

$\mathrm{M}(R_t) = \mathbf{w}'\mathbf{m}_{t|t-1}$ – математическое ожидание доходности портфеля; $\varepsilon_{t|t-1i} = r_{ti} - \mathrm{M}(r_{ti}|r_{t-1i})$ – отклонение условно среднего от наблюдаемого значения доходности;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{t|t-1i} = (\varepsilon_{2|1i}, \varepsilon_{3|2i}, \ldots, \varepsilon_{t|t-1i})'$ – вектор отклонений;

$\mathbf{E}_{t|t-1} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{t|t-11}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t|t-12}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_{t|t-1n})$ – матрица отклонений;

$\boldsymbol{\sigma}_p^2 = \mathbf{V}(R_t) = \mathbf{w}'\,\mathrm{M}(\mathbf{E}'_{t|t-1}\mathbf{E}_{t|t-1})\mathbf{w} = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}\mathbf{w}$ – дисперсия портфеля с условно ожидаемой доходностью.

Конструкция целевой функции задачи (10.1) – (10.2) обеспечивает максимизацию разности между взвешенной величиной условно средних доходностей и вариацией этой взвешенной величины. По сути, в данной задаче оптимизируется гарантированно достижимый в среднем уровень доходности портфеля. Это является результатом того, что из оптимизируемого критерия исключен риск и фактически доходность портфеля находится на нижнем условно ожидаемом уровне.

В общем виде оптимальная структура портфеля задается соотношением

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{i}}\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{i} + \tau\left(\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{m}_{t|t-1} - \frac{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{m}_{t|t-1}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{i}}\mathbf{\Sigma}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{i}\right), \tag{10.3}$$

представляющим собой сумму двух портфелей.

Первый портфель – это портфель минимальной доходности. Его структура практически не зависит от прогнозных оценок, и поэтому он мало чувствителен к изменению ситуации на рынке ценных бумаг. Второй портфель представляет собой самофинансируемый портфель. Структура этого портфеля существенно зависит от прогнозных оценок, поэтому все сомнения по поводу надежности инвестирования в портфель (3) должны быть отнесены к самофинансируемому портфелю.

Реализация рассмотренного подхода имеет смысл в рамках гипотезы эффективного рынка. Специфику инвестирования в рамках альтернативной гипотезы – гипотезы фрактального рынка – отражает подход, смысл которого в следующем [4]. Соглашаясь с предположением гипотезы фрактального рынка о наличии инвесторов с различным инвестиционным горизонтом, мы одновременно соглашаемся с тем, что один и тот же актив можно рассматривать как несколько активов с различным уровнем доходности и различной волатильностью. Активы с фиксированным лагом определения доходности – псведоактивы – обладают всеми признаками обычного актива и поэтому могут быть использованы для формирования псевдопортфеля, т.е. портфеля, который включает один и тот же актив с доходностью, структурированной по различным горизонтам инвестирования.

Причем при построении псевдопортфеля используются не исторические данные, а информационные возможности прогнозного образа, предусматривающие наличие прогнозных оценок и вероятностей реальности этих оценок. Другими словами, прогнозный образ можно понимать как распределение дискретной случайной величины, по которому без труда определяются числовые характеристики этой случайной величины. В этом важное отличие рассматриваемого подхода от общепринятой схемы построения эффективных портфелей. Хотя влияние исторических данных на формируемую структуру портфеля, безусловно, должно учитываться, но косвенно, через прогнозные оценки, полученные на основе исторических данных.

Для формальной записи модели формирования портфеля на неоднородных (фрактальных) рынках введем обозначения:

n – число инвестиционных горизонтов, которых придерживаются инвесторы на неоднородном рынке;

m – число экстраполяционных вариантов прогнозного образа;

S_t – уровень цены актива в момент, предшествующий периоду, для которого рассчитывается прогнозная оценка;

x – переменная, принимающая значения равные условным номерам вариантов прогнозного образа;

z_{t+1} – экспертно-аналитическая оценка ожидаемой ситуации в упреждающем периоде;

$$\mathbf{R}(S_t) = \begin{pmatrix} r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0n} \\ r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix};$$

матрица экстраполяционных вариантов прогнозного образа;

$$\mathbf{p}(z_{t+1}) = \begin{pmatrix} p(x=0) \\ p(x=1) \\ \vdots \\ p(x=m) \end{pmatrix};$$

вектор вероятностного описания прогнозного образа;

$$\mathbf{P}(z_{t+1}) = \begin{pmatrix} p(x=0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(x=1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(x=m) \end{pmatrix}$$

диагональная матрица с вероятностными оценками на диагонали.

Используя введенные обозначения, можно записать ковариационную матрицу псевдопортфеля

$$\mathbf{\Sigma}_{Sz} = \mathbf{R}'(S_t)\mathbf{P}(z_{t+1})\mathbf{R}(S_t) \tag{10.4}$$

и математическое ожидание

$$\mathbf{m}_{Sz} = \mathbf{R}'(S_t)\mathbf{p}(z_{t+1}). \tag{10.5}$$

И ковариационная матрица, и математическое ожидание зависят от тех же переменных, от которых зависит прогнозный образ неоднородного рынка. Поэтому и структура портфеля, получаемого как решение задачи

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_{Sz}\mathbf{w} \to \min, \tag{10.6}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{m}_{Sz} = \mu, \tag{10.7}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{10.8}$$

зависит от значения этих переменных.

В рассматриваемом далее подходе к построению риск-устойчивого инвестиционного портфеля модель формирования прогнозного образа является, как и в предыдущем случае, базовой [21]. Один из вариантов этой модели предусматривает оценку вероятностного распределения реальности вариантов прогнозного образа на основе прогнозной оценки индекса

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+1} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y_t + \mathbf{X}\hat{\mathbf{d}}, \tag{10.9}$$

$$\hat{z}_{t+1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 z_t, \tag{10.10}$$

$$\mathrm{P}(y_{i+1} = j) = \frac{e^{\hat{\mathbf{z}}_{i+1}\hat{\mathbf{b}}_j}}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} e^{\hat{\mathbf{z}}_{i+1}\hat{\mathbf{b}}_j}}, \quad j = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1, \tag{10.11}$$

$$\mathrm{P}(y_{i+1} = n) = \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} e^{\hat{\mathbf{z}}_{i+1}\hat{\mathbf{b}}_j}}. \tag{10.12}$$

где $\hat{\mathbf{y}}_{t+1}$ – вектор, компоненты которого представляют собой значения вариантов прогнозного образа для момента $t+1$;

$\mathbf{X}$ – матрица значений дискретных переменных;

$\hat{\mathbf{d}}$ – вектор оцененных параметров дискретной составляющей прогнозной модели;

$\hat{z}_{t+1}$ – прогнозная оценка рыночного индекса, от которого зависит распределение вероятностей реальности вариантов прогнозного образа;

$\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$ – оцененные параметры авторегрессионной модели рыночного индекса;

$\hat{\mathbf{b}}_j$ – вектор оценок параметров j-го блока полиномиальной модели.

Во втором варианте предусматривается замена прогнозной модели индекса процедурой формирования экспертно-аналитической оценки.

Модель формирования риск-устойчивого инвестиционного портфеля с использованием информационных возможностей прогнозного образа имеет вид:

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_E \mathbf{w} \to \min, \tag{10.13}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{m}_E = \mu, \tag{10.14}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{10.15}$$

где ковариационная матрица $\mathbf{\Sigma}_E$ и вектор математического ожидания доходностей $\mathbf{m}_E$ активов определяются в соответствии с информационными возможностями прогнозных образов.

Для прогнозного образа i-го актива $(\mathbf{R}^i, \mathbf{P}^i)$ математическое ожидание

$$m^i = (\mathbf{R}^i)'\mathbf{P}^i = \sum_{j=1}^{n} r_j^i p_j^i, \tag{10.16}$$

где r_j^i – величина доходности в j-м варианте прогнозного образа i-го финансового актива;

p_j^i – вероятность реальности j-го варианта прогнозного образа i-го финансового актива.

Компоненты вектора $\mathbf{m}_E = (m^1, m^2, \ldots, m^n)'$ определены как математические ожидания прогнозных образов активов, включаемых в портфель.

В данной модели риск учитывается не как среднеквадратическое отклонение от среднего, а как среднеквадратическое отклонение от математического ожидания дискретной случайной величины (прогнозного образа). Среднее значение – это частный случай, когда все варианты прогнозного образа равновероятны. Портфель, структура которого определяется с помощью данной модели, ориентирован в будущем не на среднюю доходность, а на доходность, которая чаще других значений будет иметь место в будущем. В этом и состоит преимущество данной модели перед моделью Марковица.

Идея построения риск-устойчивых стратегий инвестирования в некотором смысле напоминает процедуру формирования риск-нейтральной цены опциона с помощью биномиального дерева. Для ее реализации рассматривается множество вариантов, которые могут быть сформированы из значений прогнозных образов.

Если в i-м прогнозном образе содержится R^i вариантов, а в портфель включается n активов, то число возможных комбинаций этих вариантов определяется по формуле произведения

$$N = R^1 \times R^2 \times \cdots \times R^n. \tag{10.17}$$

Обозначим множество, содержащее N комбинаций, через $\mathbf{\Psi}_N$. Тогда доходность портфеля, построенного на основе данных прогнозного образа, можно определять для каждого варианта $\mathbf{r}_j \in \mathbf{\Psi}_N$ ($j = 1, 2, \ldots, N$)

$$\mu_j = \mathbf{w}'\mathbf{r}_j . \qquad (10.18)$$

Полученные таким образом значения μ_j могут превосходить заданный уровень доходности μ, а могут быть ниже этого уровня. Понятно, что те случаи, когда $\mu_j > \mu$ нас устраивают, а те, которые ниже, должны отличаться от μ на минимально возможную величину.

Для удобства формального изложения процедуры построения риск-устойчивого портфеля рассмотрим величину

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \mu_j \geq \mu; \\ \mu - \mu_j, & \mu_j < \mu, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, N \qquad (10.19)$$

и определим ее максимальное значение

$$\delta_p = \max_j \delta_j . \qquad (10.20)$$

На формальном уровне риск-устойчивый портфель – это портфель, для которого δ_p минимально, и наступившая реальность при условии, что она не выходит за рамки прогнозного образа, не может существенно изменить величину δ_p.

В рассмотренной модификации портфеля Марковица используется не только информация, получаемая в рамках технического анализа, но и результаты фундаментального анализа. Естественно, расширенные информационные возможности позволяют строить более надежные инвестиционные стратегии.

В целом изложенные способы формирования инвестиционного портфеля связаны единым замыслом. Суть замысла в том, чтобы исторические данные использовать для построения модели прогнозного образа, а портфель формировать на основе прогнозных оценок доходностей, рассчитываемых с помощью этой модели. В результате удается устранить главный, на наш взгляд, недостаток модели Марковица – отсутствие упреждающей ориентации на достижение ожидаемого инвесторами уровня доходности.

Направления исследований в рамках магистерских диссертаций

1. Оценка стоимости финансовых активов на неоднородном (фрактальном) рынке.
2. Тест-упреждающий анализ моделей портфельного инвестирования.
3. Модели портфельного инвестирования с условно ожидаемой доходностью.
4. Модели риск-устойчивого портфельного инвестирования.
5. Оптимизация инвестиционных решений на неоднородном (фрактальном) рынке.
6. Портфели с риск-предикторной оценкой доходности.
7. Модификация решений одноиндексной модели Шарпа.
8. Портфельные решения на дереве биномиального описания упреждающего периода.
9. Имитационное моделирование в задачах портфельного инвестирования.
10. Модели портфельного инвестирования в пространстве прогнозных оценок.
11. Рационально-стохастические модели портфельных решений.
12. Адаптивные модели в задачах обоснования инвестиционных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскинадзи В.М. Инвестиционное дело / В.М. Аскинадзи, В.Ф. Максимова, В.С. Петров. – М.: Маркет ДС, 2007. – 512 с.
2. Барбаумов В.Е. Финансовые инвестиции / Е.В. Барбаумов, И.М. Гладких, А.С. Чуйко. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 544 с.
3. Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг / А.Н. Буренин. – М.: НТО Вавилова С.И., 2008. – 440 с.
4. Вартанова Э.Р. Формирование портфелей ценных бумаг на неоднородных рынках / Э.Р. Вартанова, В.И. Тинякова // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – Тамбов, 2009. – № 2(16). – С. 171-179.
5. Воронцовский А.В. Инвестиции и финансирование: Методы оценки и обоснования / А.В. Воронцовский. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 2003. – 528 с.
6. Гибсон Р. Формирование инвестиционного портфеля: управление финансовыми рисками / Р. Гибсон. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 276 с.
7. Давнис В.В. Имитационно-аналитическое моделирование доходности финансовых активов / В.В. Давнис, Д.А. Хабибулин // Современная экономика: проблемы и решения. – 2010. – №5.
8. Давнис В.В. Моделирование риск-трендовых оценок стоимости опционов / В.В. Давнис, С.Ю. Богданова // Современная экономика: проблемы и решения. – Воронеж, 2010. – № 1. – С. 119-129.
9. Давнис В.В. Портфель ценных бумаг с оптимальной предикторной структурой / В.В. Давнис, Е.А. Хлебникова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. СПб., 2006. – № 6-3(48). – С. 154-158.
10. Давнис В.В. Прогнозные модели экспертных предпочтений: монография / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248 с.
11. Иванов А. Обоснование структуры инвестиционного портфеля / А. Иванов, А. Саркисян // Журнал для акционеров. – 2001. – №9. – С. 41-49.
12. Иванов А.П. Финансовые инвестиции на рынке ценных бумаг /А.П. Иванов. – М.: Дашков и Ко, 2007. – 480 с.
13. Казаков В.А. Модели формирования портфеля акций в современной теории инвестирования / В.А. Казаков, А.В. Тарасов, А.Б. Зубицкий // Финансы и кредит. – 2006. – №5(209). – С. 17-20.

14. Касимов Ю.Ф. Введение в теорию оптимального портфеля ценных бумаг / Ю.Ф. Касимов. – М.: Анкил, 2005. – 144 с.

15. Литтл Р.Дж.А. Статистический анализ данных с пропусками / Р.Дж.А. Литтл, Д.Б. Рубин. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 336 с.

16. Мельников А.В. Математические методы финансового анализа / А.В. Мельников, Н.В. Попова, В.С. Скорнякова. – М.: Анкил, 2006. – 440 с.

17. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Э. Петерс. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.

18. Попов В.Ю. Инвестиции: математические методы / В.Ю. Попов, А.Б. Шаповал. – М.: Форум, 2008. – 144 с.

19. Тинякова В.И. Модели адаптивно-рационального прогнозирования экономических процессов: монография / В.И. Тинякова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2008. – 336 с.

20. Тинякова В.И. Распределенная волатильность: модель и свойства / В.И. Тинякова, Г.Б. Суюнова // Современная экономика: проблемы и решения (науч.-практ. журнал). – Воронеж, 2010. – № 3 (3). – С. 138-149.

21. Тинякова В.И. Риск-устойчивые стратегии инвестирования в финансовые активы / В.И. Тинякова, М.А. Мартынова, О.В. Тимченко // Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов: материалы междунар. науч.-практ. конф. – Воронеж: Изд-во ЦНТИ, 2009. – С. 356-366.

22. Тинякова В.И. Новый подход к портфельному инвестированию // В.И. Тинякова, И.В. Шевырев // Экономические науки. – 2009. – № 12(61). – С. 442-449.

23. Шапкин А.С. Управление портфелем инвестиций ценных бумаг / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – М.: Дашков и К, 2007. – 356 с.

24. Шапкин А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций / А.С. Шапкин. – Дашков и К, 2003.– 544 с.

25. Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М.: ИНФРА-М, 2006. – XII, 1028 с.

26. Шведов А.С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг / А.С. Шведов. – М.: ГУ-ВШЭ, 1999. – 142 с.

27. Эконометрика / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 576 с.

28. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А.А. Лобанова и А.В. Чугунова. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. – 878 с.

29. Bradley S.P. A Dynamic Model for Bond Portfolio Management / S.P. Bradley // Management science . – 1972. – V. 19. – P. 139-151.

30. Chincarini L.B. Quantitative Equity Portfolio Management / L.B. Chincarini. – McGraw-Hill, 2007.

31. Chopra V.K. The Effects of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice / V.K. Chopra, W.T. Ziemba // J. Portfolio Management. – 1993. – Vol. 19. – №2. – P. 6-11.

32. Cowles A. Can Stock Market Forecasters Forecast? / A. Cowles // Econometrica. –1933. – Vol. 1, №3. – P. 309-324.

33. Cox J.C. Relationship between Forward Prices and Future Prices / J.C. Cox, J.E. Ingersoll, jr., S.A. Ross // J. Financial Econom. – 1981. – Vol. 9. – №4. – P. 321-346.

34. Dantzig J.B. Multistage Linear Stochastic Programs for Portfolio Optimization / J.B. Dantzig, J. Infanger // Management Science. – 1993. – V. 1. – P. 197-206.

35. Elton E.J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis / E.J. Elton, M.J. Gruber. – NY: Wiley, 1995.

36. Engle R. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation / R. Engle // Econometrica. – 1982. – № 50. – P. 987-1007.

37. Callan B. A Theory of Social Imitation / B. Callan, D. Shapiro // Physics Today. – 1974. – № 27.

38. Knight F. Risk, Uncertainty, and Profit / F. Knight. – Boston, Houghton Miffin Co. – 1921. – P. 210-235.

39. Lintner J. Security Prices Risk and Maximal Glans from Diversification / J. Lintner // Journal of Finance. December 1965. – P. 587-616.

40. Lintner J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risk Invest Mends in Stock Portfolios and Capitals Budgets / J. Lintner // Review of Economics and Statistics. February 1965. – P. 13-37.

41. Markowitz H.M. Mean-variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Market / H.M. Markowitz. – Oxford; N.Y.: Blackwell, 1987. – 387 p.

42. Markowitz H.M. Portfolio Selection / H.M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – №1. – P. 77-91.

43. Markowitz H.M. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments / H.M. Markowitz. – Oxford; N.Y.: Blackwell, 1991. – 384 p.

44. Markowitz H.M. The Early History of Portfolio Theory: 1600 – 1960 // Financial Analysts J. – 1999. – Vol. 55. – №4. – P. 5-16.

45. Merton R.C. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty the Continuous – Time Case / R.C. Merton // The Review of Economic Statistics. – August, 1969.

46. Mossin J. Optimal Multiperiod Portfolio Policies / J. Mossin // Journal of Business. – 1968. – Vol. 41. – P. 215-229.

47. Roll R. A Critique of Asset Pricing Theory's Tests / R. Roll // Journal of Finance and Economics. March 1977. – Pp. 129-176.

48. Roll R. A Critical reexamination of the Empirical Evidence of the Arbitrage Pricing Theory / R. Roll and R. Ross // Journal of Finance. – June, 1984.

49. Ross S.A. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing / S.A. Ross // Journal of Economy Theory. – 1976. – Vol. 13, №3. – Pp. 343-362.

50. Ross Sh. M. An Elementary Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics / Sh. M. Ross. – Cambridge University Press, 2003. – 253 p.

51. Sharpe W.F. A Simplified Model for Portfolio Analysis / W.F. Sharpe // Management Science. – 1963. – Vol. 9, №2. – P. 277-293.

52. Sharpe W.F. Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / W.F. Sharpe // Journal of Finance – 1964. – Vol. 19. – №3. – P. 425-442.

53. Sharpe W.F. Portfolio Theory and Capital Markets / W.F. Sharpe. – N.Y.: McGrawffill, 1970.

54. Stock J.H. VAR, Error Correction and Pretest Forecasts at Long Horizons / J.H. Stock // OxfordBulletin of Economics and Statistics. – 1996. – V.58. – №4. – P. 685-701.

55. Tobin J. Liquidity Preferences as a Behavior Toward Risk / J. Tobin // Review Economic Studies. – 1958. – Vol. 25, № 6. – P. 65-68.

56. Tobin J. The Theory of Portfolio Selection / J. Tobin // Theory of Interest Rates / Ed. by F.H. Hahn, F.P.R. Brechling. – London: MacMillan, 1965. – P. 3-51.

57. Vaga T. The Coherent Market Hypothesis / T. Vaga // Financial Analysts Journal. – December/January, 1991.

58. www.rts.ru – сайт Российской торговой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица П1

Динамика стоимости акций и индекса РТС [58]

Дата	Стоимость акций компаний (руб.):						Индекс РТС, долл. США
	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть	
1	2	3	4	5	6	7	8
01.04.2009	1305,3	127,82	21,02	2068,1	20,8	148,84	685,51
02.04.2009	1300	139,86	22,234	2223,4	21,01	164,64	733,93
03.04.2009	1401,2	141,13	-	2371,9	-	172,19	746,03
06.04.2009	1403,2	136,98	-	2322	24	167,05	748,62
07.04.2009	1409,9	132,03	21,563	2272,4	22,69	162,55	740,47
08.04.2009	1485,6	136,04	22,367	2370,3	24,05	169,59	760,58
09.04.2009	1641,6	146,93	-	2651,6	27	185,78	810,9
10.04.2009	1654,9	147,55	23,5	2733	28	181,42	817,41
13.04.2009	1631,1	144,95	-	2791,4	30	181,94	814,67
14.04.2009	1524	141,65	23,44	2678,9	-	174,13	807,61
15.04.2009	1510,8	143,54	23,5	2554,2	-	167,61	805,85
16.04.2009	1488,6	140,49	23,415	2676,1	27	174,18	819,57
17.04.2009	1513,9	143,36	24,228	2656,8	29	183,47	834,59
20.04.2009	1464,2	133,87	-	2593,7	27	175,71	800,22
21.04.2009	1500	130,79	23,811	2465	25	168,32	775,24
22.04.2009	1400	138,12	23,532	2523,7	-	172,91	785,13
23.04.2009	1505	148	24,052	2695,1	28,2	176,88	820,7
24.04.2009	1493,2	154,4	23,97	2702,8	27,97	175,35	831,41
27.04.2009	1453	143,6	23,165	2579,4	26,7	167,09	803,17
28.04.2009	1436,3	140,65	22,6	2563	25,87	160,63	784,01
29.04.2009	1480	148,31	23,73	2650,1	26,29	171,62	814,78
30.04.2009	1485	148,04	23,645	2776,3	27,72	178,55	832,87
04.05.2009	1525,2	154,02	24,086	2864,9	29,45	179,02	855,67
05.05.2009	1516	160,98	23,944	2926,9	29,42	180,77	871,58
06.05.2009	1570,8	169,52	23,938	3018,9	29,36	182,79	897,1
07.05.2009	1634,5	177,6	25,653	3288,8	30,88	190,32	942,31
08.05.2009	1609	172,35	23,75	3100	30	181,06	938,27
12.05.2009	1643,9	179,04	26,343	3378,5	33,81	188,81	979,82
13.05.2009	1530,5	166,25	24,999	3164,2	32,05	177,08	947,53
14.05.2009	1528,6	163,83	25,98	3139,6	31,32	178	932,11
15.05.2009	1500	165,5	24,37	3108	31	175,31	936,27
18.05.2009	1519	168,42	24,815	3118,1	33,75	175,57	939,65
19.05.2009	1535,1	174,09	24,588	3241,8	35,4	180,53	968,88
20.05.2009	1606,9	180,75	25,343	3562,4	39,08	189,86	1023,98
21.05.2009	1544,1	174,9	24,18	3402	38,31	180,49	1001,36
22.05.2009	1525	174,6	24,158	3429	38	175	1013,37
25.05.2009	1544,6	170,43	24,349	3326,1	39,2	183,71	1017,92
26.05.2009	1507	163,95	23,343	3191,2	38,06	178,25	990,26
27.05.2009	1541,6	172,56	24,232	3312,5	40,96	188,06	1030,79
28.05.2009	1584,2	174,95	25,136	3461,5	42,02	200,83	1053,73
29.05.2009	1600	177,84	25	3420	43,41	185	1087,59
01.06.2009	1715,1	189,55	26,35	3641,8	49,8	216,31	1167,42
02.06.2009	1727,7	190,61	25,727	3639,5	52,65	216,5	1180,56
03.06.2009	1634,9	175,17	24,893	3319,1	49,22	202,83	1127,57
04.06.2009	1669,8	172,4	24,105	3203,9	48,73	202,13	1108,73
05.06.2009	1720,1	184,08	25	3363,7	50,5	208,42	1149,95

Продолжение табл. П1

1	2	3	4	5	6	7	8
08.06.2009	1661,8	170,95	25,05	3084,5	48,09	195,49	1096,68
09.06.2009	1659	177,51	24,704	3123	49,49	197,79	1105,3
10.06.2009	1656,4	181,33	24,658	3270,9	49,6	198,52	1121,79
11.06.2009	1651,5	182,47	25,2	3370	47,3	201,65	1127,23
15.06.2009	1573,4	174,54	24	3248,9	44,91	190,99	1077,17
16.06.2009	1593,2	176,02	23,993	3285,3	45,92	190,56	1082,19
17.06.2009	1528,4	164,25	24,2	3069,2	43,21	184,75	1038,41
18.06.2009	1480,8	156,2	23,054	2812	41,48	174,95	997,68
19.06.2009	1462	162,85	22,698	2790	41,1	181,37	1011,38
22.06.2009	1379,7	155,25	23,21	2642,9	37,92	168,54	961,04
23.06.2009	1362	145,56	22,596	2519,1	36,64	168,66	932,74
24.06.2009	1399,7	152,92	22,295	2682,5	41,71	174,18	959,18
25.06.2009	1392,8	148,85	21,758	2643	41,03	168,49	947,52
26.06.2009	1386	150,13	21	2750	38	170,03	955,45
29.06.2009	1381,1	152,64	21,757	2897,7	39,9	170,22	951,46
30.06.2009	1458,1	164,59	22,267	2972,6	39,18	174,29	987,02
01.07.2009	1412,7	162,12	22,143	2894,6	38,69	170,75	977,94
02.07.2009	1373,3	155,95	21,398	2869,5	37,66	167,13	960,46
03.07.2009	1341	155,35	21,637	2730	37,93	169,56	950,24
06.07.2009	1330,4	146,94	20,656	2681,3	38,7	164,09	921,44
07.07.2009	1339,6	146,52	21,105	2679	37,24	163,09	924,11
08.07.2009	1306	138,47	20,293	2592,2	36,2	158,24	889,77
09.07.2009	1324,7	138,47	19,91	2624,5	36,12	157,74	884,94
10.07.2009	1281,9	135,67	19,452	2535,1	34,88	159,14	835,23
13.07.2009	1351,7	131,67	19,9	2418,7	35,72	156,97	835,61
14.07.2009	1393,5	137,18	20,2	2595,2	37,28	162,92	866,55
15.07.2009	1429,5	142,74	20,467	2740,1	37,66	167,57	887,85
16.07.2009	1439,3	146,05	20,73	2746,1	37,78	168,38	903,23
17.07.2009	1465,7	153,08	20,7	2919,5	36,69	170,7	925
20.07.2009	1489,6	158,14	21,93	3123,6	39,74	175,69	972,31
21.07.2009	1529,9	162,36	22,64	3090,3	40,37	179,3	987,69
22.07.2009	1472,1	156,15	22,14	2955,1	39,23	174,02	963,06
23.07.2009	1501,2	159,84	22,01	3083	39,43	179,73	975,96
24.07.2009	1555	164,14	23	3090	41,26	188,29	1012,62
27.07.2009	1557	166,27	23,955	3169,1	42,28	186,68	1037,61
28.07.2009	1488,9	156,34	23,39	3059,2	41,13	183,42	1001,8
29.07.2009	1465	151,16	23,37	2909,5	39,31	181,56	973,78
30.07.2009	1540,5	159,28	23,98	3027,1	41,78	189,13	1001,3
31.07.2009	1525	162,02	23	3000	43,01	191,72	1017,47
03.08.2009	1602,9	168,89	25,4	3300,5	45,63	197,2	1067,98
04.08.2009	1592,6	167,82	25,49	3299,3	45,82	198,07	1074,49
05.08.2009	1628,7	171,08	26,5	3406	47,95	203,71	1094,26
06.08.2009	1594,5	171,68	25,94	3389,4	47,23	201,36	1083,79
07.08.2009	1600	172,35	25,6	3350	46,5	203,35	1080,08
10.08.2009	1570,3	169,46	24,792	3395,9	47,61	201,09	1065,14
11.08.2009	1487,6	160,47	23,976	3225,2	46,97	192,12	1033,72
12.08.2009	1521,5	163,9	24,362	3300,8	47,4	191,88	1025,12
13.08.2009	1572,5	169,02	24,19	3378,4	47,56	194,28	1054,57
14.08.2009	1512	165,55	23,8	3439,6	47	193,8	1059,92
17.08.2009	1455,3	153,36	23,18	3236	44,83	180,98	1005,77
18.08.2009	1442	150,49	22,782	3214,1	45,38	180,59	1001,52

Продолжение табл. П1

1	2	3	4	5	6	7	8
19.08.2009	1399,1	149,33	22,899	3196,6	45,28	176,7	993,57
20.08.2009	1488,3	156,4	23,961	3294,1	46,53	183,4	1018,5
21.08.2009	1549,8	163,56	24,928	3361,3	48,23	192,07	1050,44
24.08.2009	1645,1	171,8	26,504	3453	49,92	205,37	1094
25.08.2009	1626,3	170,15	26,628	3419,3	49	206,5	1103,02
26.08.2009	1564,6	166,24	26,024	3349,8	47,9	201,28	1072,05
27.08.2009	1506,9	164,1	26,334	3389,9	48,11	198,48	1070,49
28.08.2009	1601,2	167,24	26,806	3486,9	48,24	203,33	1089,46
31.08.2009	1579,2	163,17	26,068	3387	47,38	198,5	1066,53
01.09.2009	1598,8	163,73	25,845	3424,6	49,33	201,42	1073,62
02.09.2009	1564,8	159,43	24,853	3287,4	48,95	196,64	1053,17
03.09.2009	1560,5	160,79	24,869	3298,5	52,97	200,46	1074,05
04.09.2009	1515,9	157,91	24,688	3251,6	53,56	197,55	1063,57
07.09.2009	1531,9	161,61	24,776	3348,6	55,32	202,53	1093,04
08.09.2009	1579,2	166,11	25,961	3410	58,45	210,54	1135,94
09.09.2009	1659,3	170,3	26,428	3407,5	57,27	211,88	1159,8
10.09.2009	1658,7	172,54	26,144	3357,1	56,39	209,24	1163,76
11.09.2009	1667,3	174,19	26,628	3424,7	60,63	212,69	1196,55
14.09.2009	1654,5	172,02	27,108	3405,9	58,98	211,96	1194,21
15.09.2009	1692,5	176,42	28,393	3537,2	61,29	224,38	1224,33
16.09.2009	1691,5	180,93	27,605	3564	61,71	224,81	1246,81
17.09.2009	1677,2	181,37	27,083	3611,6	58,88	226,12	1231,41
18.09.2009	1677,4	185,99	27,304	3726,5	58,45	227,62	1245,56
21.09.2009	1615	177,99	26,107	3626,1	55,81	222,7	1210,57
22.09.2009	1647	195,7	26,384	3772,9	62,41	227,33	1249,14
23.09.2009	1614	181,99	25,46	3797	60,54	225,91	1254,31
24.09.2009	1576,1	177,09	24,968	3670,6	58,22	224,1	1242,23
25.09.2009	1588,3	177,43	24,562	3709	58,49	220,62	1225,29
28.09.2009	1628	180,78	25,621	3800,8	60,36	230,55	1248,73
29.09.2009	1657	179,9	26,046	3760,9	60,99	229,02	1260,56
30.09.2009	1633,8	175,27	25,682	3728,8	59,98	227,32	1254,52
01.10.2009	1678	176,43	26	3779,7	60,34	228,68	1266,85
02.10.2009	1626,8	171,39	24,889	3607	58,58	220,12	1224,8
05.10.2009	1627,7	170,42	24,837	3571,8	58,58	219,88	1227,19
06.10.2009	1681,7	175,54	25,743	3708,5	61,15	231,6	1270,63
07.10.2009	1705,1	174,38	26,298	3682,6	62,41	231,58	1287,37
08.10.2009	1798,7	179,27	26,903	3850	66,38	241,99	1334,94
09.10.2009	1909,3	182,69	27,3	3871	68,99	249,43	1372,11
12.10.2009	1953,1	194,45	28,47	4098,4	71,24	254,62	1428,06
13.10.2009	1884,7	190,5	27,69	3940,8	68,49	272,35	1400,02
14.10.2009	1935,9	200,35	28,58	4132,7	71,03	243,49	1441,24
15.10.2009	1935,9	196,59	28,547	4054,9	67,81	246,27	1434,35
16.10.2009	1911,8	191,55	28,367	3914,8	64,96	240,49	1408,68
19.10.2009	1947,4	195,99	29,03	4105,2	69,23	247,77	1433,37
20.10.2009	1925,4	196,03	28,764	4157,7	69,05	245,61	1446,14
21.10.2009	1928,2	196,89	29,1	4289,9	70,03	247,46	1446,64
22.10.2009	1901,8	192,56	28,88	4308,6	69,84	245,87	1448,34
23.10.2009	1900	193,52	28,95	4286,9	69,84	245,58	1461,3
26.10.2009	1876,7	194,08	28,93	4292	69,26	244,79	1476,06
27.10.2009	1794,3	189,71	27,979	4227,1	68,9	239,59	1421,29
28.10.2009	1749,4	178,94	26,601	3922	65,12	226,04	1368,77

Окончание табл. П1

1	2	3	4	5	6	7	8
29.10.2009	1784	184,05	26,871	4054,8	67,65	232,01	1377,16
30.10.2009	1702,9	176	25,699	3848,8	64,64	222,22	1348,54
02.11.2009	1713,4	180,94	26,312	3952,9	66,43	225,81	1357,06
03.11.2009	1651,3	174,14	25,421	3834	63,44	217,93	1305,11
05.11.2009	1704,8	179,91	25,726	3962,6	64,83	224,74	1348,82
06.11.2009	1658,8	175,08	25,09	3897,6	64,91	224,29	1337,54
09.11.2009	1743,4	181,7	26,347	4088,7	69,04	237,75	1407,71
10.11.2009	1749,1	183,54	27,3	4156,3	69,83	243,88	1436,97
11.11.2009	1730,7	181,45	26,75	4110,4	69,42	243,38	1434,45
12.11.2009	1717,3	178,94	26,52	4075,7	69,6	248,33	1425,34
13.11.2009	1692,6	178,9	26	4073,5	69,87	244,59	1419,49
16.11.2009	1781,6	186,33	27,24	4242,7	73,75	257,15	1481,82
17.11.2009	1790,2	183,44	27,42	4189	73,19	254,31	1472,76
18.11.2009	1817,6	185,18	27,315	4251	73,55	261,4	1486,62
19.11.2009	1772,5	181,24	26,66	4121,9	71,56	253,86	1451,2
20.11.2009	1752,5	178,08	26,31	4111,4	71,22	248,42	1436,44
23.11.2009	1764,8	179,26	27,67	4125	71,67	257,39	1466,77
24.11.2009	1719	175,71	27,39	4003,4	71,22	254,49	1447,23
25.11.2009	1685,4	171,47	27,17	3976,3	70,02	249,11	1427,55
26.11.2009	1661,7	166,97	25,77	3865,1	67,06	239,06	1366,85
27.11.2009	1700,7	169,19	26,104	3965,4	67,45	239,51	1369,6
30.11.2009	1682,5	166,39	25,957	3992,2	69,45	233,6	1374,93
01.12.2009	1724,2	168,54	26,9	4093,3	71,16	245,72	1416,3
02.12.2009	1730,9	167,37	26,9	4222,4	71,45	248,77	1415,98
03.12.2009	1680,7	163,34	26,4	4179	72,41	243,38	1409,32
04.12.2009	1726	168,59	26,847	4200	74,68	252,15	1427,13
07.12.2009	1692,7	166,03	26,67	4135,2	73,71	247,12	1389,64
08.12.2009	1638,2	167,04	26,626	4178,7	72,54	242,91	1353,23
09.12.2009	1608,4	167,04	26,43	4130,3	73,46	239,37	1348,92
10.12.2009	1607,1	166,14	26,628	4126,3	74,25	242,28	1351,98
11.12.2009	1602	166,43	26,32	4051,4	75,02	239,59	1366,36
14.12.2009	1622,1	166,91	26,298	4115,9	76,13	243,72	1381,91
15.12.2009	1648,5	172,06	26,6	4178,4	77,19	245,08	1396,32
16.12.2009	1712,8	181,41	27,818	4295,3	82,18	261,7	1449,02
17.12.2009	1652,8	177,03	27,548	4211,8	81,09	254,42	1400,91
18.12.2009	1662,3	181,78	27,475	4175,9	81,13	256,19	1410,22
21.12.2009	1669,3	183,85	26,99	4222,2	81,2	254,41	1425,45
22.12.2009	1671,5	182,93	26,48	4182,6	81,37	253,42	1417,22
23.12.2009	1673,4	184,64	26,29	4210,6	80,81	252,71	1434,6
24.12.2009	1662	180,77	26,111	4130,9	81,01	248,34	1443,61
25.12.2009	1672,5	182,27	26,316	4160,9	80,91	251,23	1450,25
28.12.2009	1693,4	181,74	26,338	4202	80,33	256,78	1451,6
29.12.2009	1710,7	183,83	26,95	4278,7	81,08	253,59	1445,17
30.12.2009	1692,5	182,67	26,76	4275	82,03	250	1426,93
31.12.2009	1689,9	183,34	26,821	4245,7	82,52	254,66	1444,61

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Результаты диссертационных исследований по проблемам инвестирования в финансовые активы

В табл. П2 отражены сведения о состоявшихся защитах диссертаций на соискание ученой степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики» аспирантов и соискателей кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета.

Таблица П2

Сведения о защитах кандидатских диссертаций

	Диссертант	Название диссертации	Научный руководитель	Год и место защиты
1.	Нагин А.А.	Адаптивные модели в задачах анализа и прогнозирования стоимости финансовых активов	Д.э.н., проф. Давнис В.В.	Воронеж, 2006
2.	Тимченко А.Б.	Прогнозирование стоимости финансовых активов и адаптивный анализ их волатильности	Д.э.н., проф. Давнис В.В.	Воронеж, 2007
3.	Акопян Е.А.	Формирование портфеля ценных бумаг с условно ожидаемой доходности	Д.э.н., проф. Давнис В.В.	Воронеж, 2008
4.	Сурков П.В.	Эконометрическое моделирование эволюции цен в задачах оценки опционов	Д.э.н., проф. Давнис В.В.	Воронеж, 2008
5.	Середа А.Ю.	Оценка показателя VaR на основе моделей изменяющейся вариации в задачах портфельного инвестирования	Д.э.н., проф. Давнис В.В.	Воронеж, 2008
6.	Вартанова Э.Р.	Формирование портфеля ценных бумаг на основе прогнозных оценок динамики неоднородного рынка	Д.э.н., проф. Давнис В.В.	Воронеж, 2009
7.	Мартынова М.А.	Инвестиционные решения в пространстве риск-устойчивых стратегий	Д.э.н., доц. Тинякова В.И.	Воронеж, 2009
8.	Богданова С.Ю.	Моделирование риск-нейтральных и риск-трендовых оценок стоимости опционов	Д.э.н., проф. Давнис В.В.	Воронеж, 2010
9.	Суюнова Г.Б.	Моделирование риск-предикторных оценок стоимости опционов с учетом распределенной волатильности	Д.э.н., доц. Тинякова В.И.	Воронеж, 2010

Научная новизна исследования ***Нагина А.А.*** состоит в разработке прогнозных моделей с многоуровневой структурой адаптивного механизма, адекватно отражающих мультитрендовые процессы на финансовых рынках. Научную новизну содержат следующие результаты диссертационного исследования:

- введено понятие «мультитрендовый процесс», позволяющее объяснить необходимость идентификации в динамике стоимости финансовых активов одновременное присутствие различных тенденций;
- разработаны:

  1) модели с многоуровневой структурой адаптивного механизма, позволяющие осуществлять идентификацию мультитрендовых процессов, которые характеризуются разным темпом смены закономерностей своего развития;

  2) прогнозные модели стоимости финансовых активов с регулируемой реакцией адаптивного механизма, в которые заложена возможность комбинирования динамических характеристик процессов с субъективной оценкой ожидаемых изменений, что позволяет с достаточно высокой вероятностью предсказывать развороты трендов. Их программная реализация представляет собой человеко-машинный вариант прогнозной модели;
- предложена методика адаптивного анализа динамики равновесных цен на финансовые активы, позволяющая обнаружить динамические эффекты сближения и разбегания цен на финансовом рынке, что обеспечивает получение дополнительной информации при обосновании инвестиционных решений;
- построены прогнозные модели с адаптивной регрессией условно гетероскедастичных остатков, что позволяет получить более точные оценки волатильности при анализе финансовых временных рядов;
- предложен вариант схемы адаптивного анализа CAPM, позволяющий в краткосрочных периодах выделять в бета-коэффициенте интенсивную и экстенсивную составляющие, что, в конечном итоге, способствует повышению объективности оценки финансовых активов.

Научная новизна исследования ***Тимченко А.Б.*** состоит в разработке прогнозных моделей, обладающих специальной структурой, которая отражает основные предположения, лежащие в основе гипотезы фрактального рынка.

Научную новизну содержат следующие результаты диссертационного исследования:

- многоуровневая адаптивная процедура, применение которой в моделях прогнозирования позволяет отразить специфику рыночной динамики, лежащую в основе предположений гипотезы фрактального рынка;
- модель с двухуровневой структурой адаптивного механизма для прогнозирования волатильности по условно гетероскедастичным регрессионным остаткам. С ее помощью удается получать более точные прогнозные оценки, чем с помощью известных моделей семейства ARCH;
- методика адаптивного анализа волатильности цен финансовых активов, позволяющая уточнить механизм формирования волатильности путем выделения двух составляющих, первая из которых характеризует изменение ее среднего уровня за счет краткосрочных изменений динамики цены, а вторая – за счет изменения долгосрочной тенденции в ее динамике;
- модель формирования прогнозного образа на основе многовариантных экстраполяционных расчетов, обеспечивающих представление о многообразии будущего, и мультиномиальной модели множественного выбора, позволяющей оценить вероятность реальности каждого варианта;
- процедура формирования шкалы экспертно-аналитического оценивания на основе частичной рандомизации регрессионных остатков и построения регрессионной модели множественного выбора.

Научная новизна исследования ***Акопян Е.А.*** состоит в разработке подхода к формированию портфеля ценных бумаг, основанного на принципах упреждающих решений, обоснование которых предполагает использование специальных методик адаптивного прогнозирования. Научную новизну содержат следующие результаты диссертационного исследования:

- методика формирования портфеля ценных бумаг с условно ожидаемой доходностью, предусматривающая оригинальное решение комплексной задачи инвестирования: 1) восстановление пропусков в данных, отражающих динамику стоимости акций; 2) формирование производных временных рядов, обладающих памятью; 3) построение авторегрессионных моделей, обеспечивающих получение прогнозных оценок усредненной доходности акций; 4) построение модели составного портфеля с условно ожидаемой доходностью; 5) анализ эффективности портфеля;

- методика портфельного инвестирования для случая выполнения условий гипотезы фрактального рынка, предусматривающая формирование трех портфелей, отличающихся горизонтом инвестирования. Реализация методики предусматривает использование данных, полученных в результате расчетов по прогнозной модели с локально действующим многошаговым адаптивным механизмом;
- метод восстановления пропусков в финансовых временных рядах, основанный на совместном использовании фиктивных переменных и формулы адаптивных ожиданий с настраиваемым по критерию минимальной ошибки параметром сглаживания. Важным преимуществом метода является возможность получения стандартных ошибок восстановленных значений;
- процедура формирования производных временных рядов с памятью, обеспечивающая возможность адекватного моделирования динамики усредненной доходности и использования результатов моделирования при построении портфелей, сохраняющих свои оптимальные свойства на упреждающих отрезках времени;
- модели прогнозирования с локально действующим многошаговым адаптивным механизмом, с помощью которых удается получать прогнозные оценки доходности для интервалов времени различной протяженности, что представляет интерес для инвесторов с кратко-, средне- и долгосрочным горизонтом инвестирования;
- схема оценки эффективности стратегий портфельного инвестирования на основе поступреждающего тестирования, позволяющая осуществлять компаративный анализ стратегий и выбор той стратегий, которой обеспечивает статистическую устойчивость уровня доходности на упреждающих отрезках времени, соизмеримых с соответствующим горизонтом инвестирования.

Научная новизна исследования ***Суркова П.В.*** состоит в разработке эконометрического подхода к моделированию эволюции цен на биномиальном рынке, обеспечивающего в рамках теории риск-нейтрального оценивания повышение уровня адекватности принимаемых решений по оценке стоимости опционов. Научную новизну содержат следующие результаты диссертационного исследования:

- эконометрическая модель двухуровневого процесса эволюции цен на биномиальном рынке, позволяющая уточнить величину риск-нейтральной вероятности, используемой при оценке стоимости опционов;

- прогнозная модель с усредненной реакцией адаптивного механизма, позволяющая повысить экстраполяционную точность процессов, отражающих скачки в динамике доходности финансовых активов;
- процедура скользящего сглаживания финансовых временных рядов, предусматривающая замену каждого текущего значения математическим ожиданием дискретной случайной величины, имеющей биномиальный закон распределения. Обладая памятью, сглаженные таким образом временные ряды обеспечивают возможность построения прогнозных моделей с высоким уровнем адекватности;
- комбинированная модель для прогнозирования волатильности базисного актива в случае, когда ARCH-эффекты в динамике доходности этого актива слабо тестируемы. Предлагаемая модель обеспечивает получение прогнозных оценок волатильности, которые можно использовать в модели Блэка–Шоулза при оценке стоимости опциона взамен рекомендуемой «внутренней» волатильности;
- методика определения прогнозной стоимости опциона на основе мультитрендовых прогнозных расчетов и вероятностной оценки их реальности. В методике не используется понятие риск-нейтральной вероятности, поэтому прогнозные оценки стоимости опционов, получаемые с помощью предлагаемой методики, могут рассматриваться как альтернативные оценкам CRR-модели, учитываемые при обосновании инвестиционных решений.

Научная новизна диссертационного исследования ***Середы А.Ю.*** состоит в разработке подхода к определению величины показателя Value-at-Risk портфеля на основе прогнозных оценок условной дисперсии интегрированной доходности. Научную новизну содержат следующие результаты диссертационного исследования:

- метод оценки риска портфеля, в котором в отличие от известных подходов, не используется ковариационная матрица. Это упрощает расчеты и позволяет избежать ситуаций, в которых не удается получить корректную оценку ковариационной матрицы;
- модель условно изменяющейся вариации для анализа волатильности портфеля финансовых активов. С помощью данной модели получаются достаточно надежные прогнозные оценки риска портфеля на стадии его формирования;

- методика определения величины показателя Value-at-Risk на основе прогнозных оценок условной дисперсии. Полученные с помощью методики оценки риска являются более точным отражением уровня неопределенности на упреждающих отрезках времени, чем те, которые основаны на исторических данных;
- процедура тестирования модели VaR, предусматривающая сравнительный анализ прогнозных и статистически определенных оценок на поступреждающих отрезках временного рядах. Такая процедура обеспечивает экстраполяционную надежность результатов моделирования;
- метод тестирования методики определения показателя VaR на основе рандомизированного формирования портфеля финансовых активов. Портфели со случайно выбранными весами будут гарантировать независимость выводов по результатам моделирования VaR от конкретных алгоритмов оптимизации структуры этих портфелей.

Научная новизна исследования ***Вартановой Э.Р.*** состоит в разработке подхода к формированию портфеля ценных бумаг на основе прогнозных оценок динамики неоднородного рынка. Научная новизна подхода реализована в следующих результатах:

- предложена методика проверки неоднородности процессов рыночной динамики, предусматривающая проверку целостности фондового рынка как системы с различным уровнем волатильности процессов формирования доходности инвесторов в зависимости от горизонта инвестирования;
- разработана методика прогнозирования динамики неоднородного рынка, позволяющая описать упреждающий период с помощью достаточно полного множества альтернативных вариантов с оценкой вероятности их возможной реальности и ориентированная на использование при разработке хеджирующих стратегий инвестирования;
- предложен критерий оценки надежности отражения упреждающей реальности в виде альтернативных вариантов, основанный, в отличие от обычно используемых в прогностике дисперсионных критериев, на измерении уровня неопределенности, который имеет место в информационной среде прогнозного образа фондового рынка при обосновании инвестиционных решений;

- введено понятие «псевдоактив», позволяющее неоднородный рынок финансовых активов рассматривать как однородный рынок псевдоактивов, благодаря чему открывается возможность применения аппарата построения эффективных портфелей в условиях гипотезы фрактального рынка;
- предложен подход к построению портфеля ценных бумаг на неоднородном рынке, предусматривающий формирование прогнозного образа рынка, определение структуры портфеля и его поступреждающее тестирование и обеспечивающий высокую эффективность инвестиционных решений в перспективном периоде.

Научная новизна исследования ***Мартыновой М.А.*** состоит в разработке подхода к построению инвестиционного портфеля, свойство риск-устойчивости которого гарантирует инвестору минимальные потери в неблагоприятных для него ситуациях. Научная новизна реализована в следующих результатах:

- разработан подход к формированию многовариантного представления динамики финансового рынка, позволяющий построить прогнозные образы активов, интерпретируемые как случайные величины с известными законами распределения, что обеспечивает возможность применения к этим данным современного аппарата портфельного инвестирования;
- предложена модель формирования портфеля ценных бумаг, в которой в отличие от модели Марковица используется условно взвешенная доходность, определяемая в соответствии с вероятностями реальности вариантов прогнозного образа финансовых активов;
- введено понятие «риск-устойчивая стратегия» и разработана методика построения риск-устойчивых стратегий инвестирования, основной характеристикой надежности которых в отличие от других стратегий является не усредненная величина риска, а минимаксная, определенная по данным прогнозных образов активов, включаемых в портфель;
- предложена процедура пошаговой минимизации верхней границы возможных отклонений доходности риск-устойчивой стратегии от заданного уровня, что позволяет снизить потери инвестора в неблагоприятных для него ситуациях;
- разработана методика обоснования инвестиционных решений, позволяющая формировать портфели из объектов разной природы (реальных

средств и финансовых активов) на основе единообразия информационного описания их прогнозных образов.

Научная новизна исследования ***Богдановой С.Ю.*** состоит в разработке подхода к моделированию стоимости опционов на основе введенного понятия «риск-трендовая оценка» и эконометрических моделей специального вида, обеспечивающих получение таких оценок. Научная новизна реализована в следующих результатах:

- введено понятие «риск-трендовая оценка», которое было положено в основу методики расчета оценки внутренней стоимости опциона, ориентация на которую позволяет инвестору повысить обоснованность принимаемых решений по выбору необходимого опциона;
- разработан эконометрический вариант биномиальной модели *(B,S)*-рынка, с помощью которого удается в рамках методики риск-нейтрального оценивания рассчитать риск-трендовую оценку стоимости опциона;
- сформулирована гипотеза альтернативных ожиданий, предназначенная для идентификации значений ненаблюдаемой переменной при построении эконометрического варианта биномиальной модели *(B,S)*- рынка;
- предложена мультиномиальная модель неполного рынка, позволяющая обосновать возможность применения на неполных рынках инструментов хеджирования полного рынка с вероятностной оценкой надежности;
- разработан эконометрический вариант мультиномиальной модели неполного рынка, обеспечивающий распространение методики риск-трендового оценивания стоимости опционов на неполные рынки.

Научная новизна исследования ***Суюновой Г.Б.*** состоит в разработке подхода к моделированию правдоподобных оценок стоимости опционов на основе введенных понятий: «риск-предикторная оценка» и «распределенная волатильность». Данный подход не требует выполнения предположений классической теории оценивания опционов, что обеспечивает возможность его использования в задачах оценки стоимости экзотических опционов. Научную новизну содержат следующие результаты:

- введено понятие «распределенная волатильность», трактуемое как математическое ожидание случайной величины со значениями в виде усредненных оценок возможных отклонений доходности финансового актива от тренда. Распределенная волатильность:

реализует вероятностный механизм взаимосвязи доходности финансового инструмента с активностью рынка;

позволяет получать не только метрическую, но и энтропийную оценку неопределенности ситуации;

является дифференцируемой функцией, для которой можно рассчитать предельные эффекты,

что очень важно при реализации опционных стратегий, основанных на торговле волатильностью;

- разработана система из двух линейных и одного нелинейного эконометрического уравнения, реализующая идею стохастической взаимосвязи между уровнем активности рынка и волатильностью финансового актива, что позволяет создать инструмент в виде модели распределенной волатильности для прогнозирования шоковых составляющих эволюции цен финансовых активов;
- предложена процедура определения порядка модели распределенной волатильности, в соответствии с которой выбирается модель, наиболее точно по квадратичному критерию воспроизводящая на историческом периоде колебания в динамике актива;
- введено понятие «риск-предикторная оценка стоимости опциона», которое интерпретируется как математическое ожидание прогнозных оценок внутренней стоимости опциона. Риск-предикторные оценки, обладая более высокой правдоподобностью, чем риск-нейтральные, являются предпочтительным инструментом для инвесторов при обосновании принимаемых решений;
- разработана методика риск-предикторного оценивания стоимости опционов с учетом распределенной волатильности, реализующая схему расчетов по комбинированной модели из трех составляющих: экстраполяционной, отвечающей за многовариантное описание динамики финансового актива на упреждающем периоде; экспертно-аналитической, отвечающей за формирование шкал оценки уровня активности рынка и предпочтительного варианта ожидаемой стоимости базового актива; имитационной, воссоздающей многообразие возможных ситуаций упреждающего периода.