

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет  
имени И.Т. Трубилина»

Факультет гидромелиорации

Кафедра сопротивления материалов

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
Методические указания

Краснодар  
КубГАУ  
2020

Составители: В. А. Дробот, П. Г. Пасниченко

**Сопротивление материалов** : метод. указания к выполнению расчетно-графических работ / сост. В. А. Дробот, П. Г. Пасниченко – Краснодар : КубГАУ, 2020. – 65 с.

В методическом указании изложены теоретические основы, а также практические указания по выполнению расчетов прочности, жесткости и устойчивости валов, балок при поперечном изгибе, стержней. Приводится методика определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определения положения опасных сечений, а так же подбора сечений из условий прочности.

Издание предназначено для обучающихся по специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений.

Рассмотрено и одобрено кафедрой сопротивления материалов, протокол № 6 от 03.02.2020.

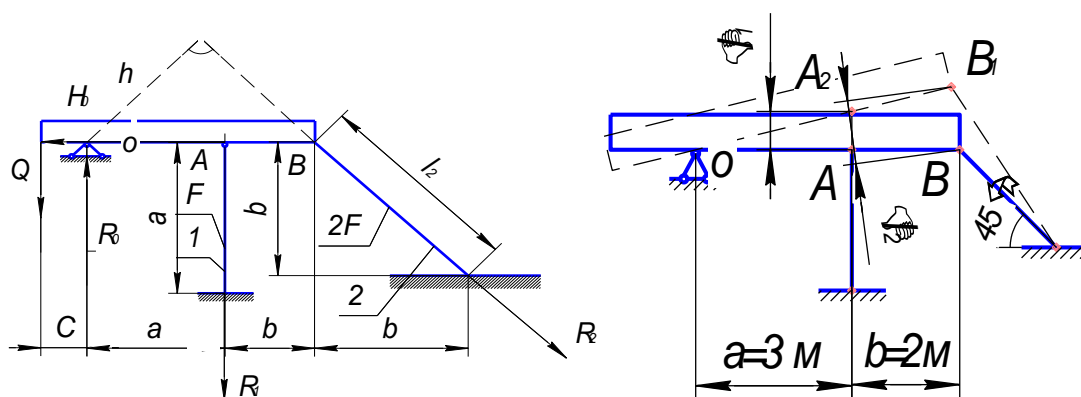
© Дробот В. А., Пасниченко П. Г.,  
составление, 2020  
© ФГБОУ ВО «Кубанский  
государственный аграрный  
университет имени И. Т. Трубилина»,  
2020

# РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №1

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров. Требуется определить:

- 1) усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу  $Q$ ;
- 2) допускаемую нагрузку  $Q'_{дон}$ , приравняв большее из напряжений в двух стержнях к допускаемому напряжению  $\bar{\sigma} = 160 \text{ МПа}$ ;
- 3) предельную грузоподъемность системы  $Q_m^k$  и допускаемую нагрузку  $Q''_{дт}$ , если предел текучести  $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ , запас прочности  $k = 1,5$ ;
- 4) сравнить величины  $Q'_{дон}$  и  $Q''_{дт}$ .



### РЕШЕНИЕ

1. Определим усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу  $Q$

На данную систему действуют следующие внешние силы: нагрузка  $Q$  и реакции опор  $R_0$ ,  $H_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$ , причем усилия в стержнях 1 и 2 равны соответствующим реакциям опор:  $N_1 = R_1$ ,  $N_2 = R_2$ .

## 1.1 Статическая сторона задачи

Для определения неизвестных реакций опор можно составить 3 уравнения статистики:

$$\sum M_0 = 0; R_1 \cdot a + R_2 \cdot h = Q \cdot c; \quad (1)$$

$$\sum X = 0; H_0 = R_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (2)$$

$$\sum Y = 0; Q + R_1 + R_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R_0. \quad (3)$$

где  $Q$  - нагрузка, приложенная к брусу ;

$R_1$  - реакция, возникающая в первом стержне;

$R_2$  - реакция, возникающая во втором стержне;

$H_0$  - горизонтальная составляющая реакции, возникающая в опоре;

$R_0$  - вертикальная составляющая реакции, возникающая в опоре;

$a$  - плечо реакции  $R_1$  относительно точки  $O$  ( $a = OA = 3m$ );

$h$  - плечо реакции  $R_2$  относительно точки  $O$ ;

$c$  - плечо силы  $Q$  относительно точки  $O$ .

$$h = \frac{a + b \cdot \sqrt{2}}{2} = 3,5i .$$

Подставим значения плеч в уравнение (1) получим:

$$3 \cdot R_1 + 3,5 \cdot R_2 = 2 \cdot Q \quad (4)$$

Система статически неопределима, т.к. в 3-х уровнях статики 4 неизвестных реакции опор. Для решения системы составим уравнение деформации.

## 1.2 Геометрическая сторона задачи

При перегрузке системы абсолютно жесткий брус займет наклонное положение, повернувшись относительно шарнира «О». Из подобия  $\triangle OA_1A$  и  $\triangle OB_1B$  следует:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{OA}{OB} \quad - (2a) \quad - \text{в неявном виде дополнительное уравнение.}$$

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{3}{5}; \quad AA_1 = \Delta l_1; \quad BB_1 = \Delta l_2 \cdot \sqrt{2},$$

где  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  - удлинение соответственного 1 – го и 2 – го стержней.

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad (5)$$

## 1.3 Физическая сторона задачи

Выразим деформации стержней через усилия:

$$\Delta l_1 = \frac{R_1 \cdot l_1}{E \cdot F};$$

$$\Delta l_2 = \frac{R_2 \cdot l_2}{E \cdot 2 \cdot F};$$

$$l_1 = a \text{ и } l_2 = b \cdot \sqrt{2};$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{R_1 \cdot a \cdot E \cdot 2 \cdot F}{E \cdot F \cdot R_2 \cdot \sqrt{2} \cdot b} = \frac{R_1 \cdot 3}{R_2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot R_1}{\sqrt{2} \cdot R_2} \quad (6)$$

Приравняем правые части (5) и (6) уравнений:

$$\frac{3 \cdot R_1}{\sqrt{2} \cdot R_2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{5} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 0,4 \Rightarrow R_1 = 0,4 \cdot R_2.$$

$$R_1 = 0,4 \cdot R_2 - \text{дополнительное уравнение в явном виде} \quad (7)$$

Составим систему уравнений состоящую из (1) и (7) уравнений (уравнения (2) и (3) не рассматриваем, т.к. в них входят неизвестные реакции  $R_0$  и  $H_0$ , которые по условию задачи определять не требуется).

$$\begin{cases} 3 \cdot R_1 + 3,5 \cdot R_2 = 2 \cdot Q; \\ R_1 = 0,4 \cdot R_2. \end{cases}$$

Решая полученную систему, определим реакции  $R_1$  и  $R_2$  выраженные через силу  $Q$ .

$$R_1 = 0,168 \cdot Q; \quad R_2 = 0,42 \cdot Q.$$

Определим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{R_1}{F_1} = \frac{R_1}{F} = \frac{0,168 \cdot Q}{10 \cdot 10^{-4}} = 168 \cdot Q; \quad \sigma_2 = \frac{R_2}{F_2} = \frac{R_2}{2 \cdot F} = \frac{0,42 \cdot Q}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 210 \cdot Q.$$

2. Определим допускаемую нагрузку  $Q'_{\text{доп}}$  из расчета по допускаемым напряжениям.

Из расчета видно, что напряжение во втором стержне ( $\sigma_2 = 210 \cdot Q$ ) больше, чем напряжение в первом стержне ( $\sigma_1 = 168 \cdot Q$ ), поэтому:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_2 = 210 \cdot Q'_{\text{доп}} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$Q'_{\text{доп}} = \frac{160 \cdot 10^6}{210} = 760000 \text{ Н} = 760 \text{ кН}$$

3. Определим предельную грузоподъемность системы  $Q_m^k$  и допускаемую нагрузку  $Q_{\text{дон}}''$  из расчета по допускаемым нагрузкам

Напряжение в первом стержне достигнет предела текучести  $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$  при усилении  $R_1 = \sigma_m \cdot F = 240 \text{ кН}$ , а во втором стержне при усилении  $R_2 = \sigma_m \cdot 2 \cdot F = 480 \text{ кН}$ .

Исходя из уравнения статики (1) можно определить предельную грузоподъемность системы:

$$Q_m^k = \frac{3 \cdot R_1 + 3,5 \cdot R_2}{2} = \frac{3 \cdot 240 + 3,5 \cdot 480}{2} = 1200 \text{ кН}$$

Допускаемая нагрузка при запасе прочности  $k = 1,5$

$$Q_{\text{дон}}'' = \frac{Q_m^k}{k} = \frac{1200}{1,5} = 800 \text{ кН}.$$

4. Таким образом допускается нагрузка из расчета допускаемым напряжениям  $Q_{\text{дон}}' = 760 \text{ кН}$ , а допускаемая нагрузка из расчета по допускаемым нагрузкам  $Q_{\text{дон}}'' = 800 \text{ кН}$ .

Сравнение показывает, что  $Q_{\text{дон}}''$  превышает  $Q_{\text{дон}}'$  на

$$\frac{Q_{\text{дон}}'' - Q_{\text{дон}}'}{Q_{\text{дон}}''} \cdot 100\% = \frac{800 - 760}{800} \cdot 100\% = 5\%.$$

## РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №2

### РАСЧЕТ ВАЛА НА КРУЧЕНИЕ

На равномерно вращающемся валу установлено пять шкивов (звездочек, шестерен и т.д.), каждый из которых передает определенную мощность  $N$ . Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов  $T_z$ ;
- 2) из условия прочности и жесткости определить диаметр вала сплошного и кольцевого сечения; а также размеры вала прямоугольного сечения.
- 3) построить эпюру углов закручивания.
- 4) построить эпюры касательных напряжений для всех форм сечения.

Порядок решения рассмотрим на примере.

Задан вал (рисунок 1 а). Мощности, передаваемые шкивам:  $N_1 = 70 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 90 \text{ кВт}$ ,  $N_3 = N_4 = 100 \text{ кВт}$ . Число оборотов вала  $n = 600 \text{ об/мин}$ . Допускаемый угол закручивания  $[\varphi] = 0,5 \text{ град/м}$ . Допускаемое напряжение  $[\tau] = 120 \text{ МПа}$ . Модуль касательной упругости  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Для вала кольцевого сечения  $c = \frac{d_a}{d_i} = 0,8$ . Для вала прямоугольного сечения  $\frac{h}{b} = 3$ .

### РЕШЕНИЕ:

1. Построение эпюры крутящих моментов  $T_z$

Определим величину внешних вращающих моментов, приложенных к шкивам, по формуле:



$$T_i = 9550 \cdot \frac{N_i}{n}, \quad (1)$$

где  $T_i$  - внешний вращающий момент,  $H \cdot м$ ;

$N_i$  - передаваемая на вал мощность,  $кВт$ ;

$n$  - число оборотов вала,  $об/мин$ ;

$$T_1 = 9550 \cdot \frac{70}{600} = 1114 H \cdot м,$$

$$T_2 = 9550 \cdot \frac{90}{600} = 1433 H \cdot м,$$

$$T_3 = T_4 = 9550 \cdot \frac{100}{600} = 1592 H \cdot м.$$

При равномерном вращении вала алгебраическая сумма внешних моментов равна нулю. Пользуясь этим, найдем  $T_5$ .

Из условия равновесия внешних моментов имеем:

$$\sum M = 0, T_2 - T_1 - T_5 - T_4 + T_3 = 0, \quad (2)$$

$$T_5 = T_2 - T_1 - T_4 + T_3 = 1433 - 1114 - 1592 + 1592 = 319 H \cdot м.$$

При построении эпюры крутящих моментов  $T_\epsilon$  применим метод сечений: крутящий момент  $T_\epsilon$  в произвольном сечении каждого участка вала равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих по одну сторону от сечения относительно оси вала. Крутящий момент  $T_\epsilon$  в сечении считается положительным, если внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке (при взгляде на отсеченную часть со стороны сечения).

Участок I:  $0 \leq x_1 \leq 0,15 м$

$$T_\kappa^I = T_2 = 1433 H \cdot м.$$

Участок II:  $0,15м \leq x_2 \leq 0,25м$

$$T_{\kappa}^{II} = T_2 - T_1 = 1433 - 1114 = 319Н \cdot м.$$

Участок III:  $0,25м \leq x_3 \leq 0,35м$

$$T_{\kappa}^{III} = T_2 - T_1 - T_5 = 1433 - 1114 - 319 = 0Н \cdot м.$$

Участок IV:  $0,35м \leq x_4 \leq 0,425м$

$$T_{\kappa}^{IV} = T_2 - T_1 - T_5 - T_4 = 1433 - 1114 - 319 - 1592 = -1592Н \cdot м.$$

## ПРОВЕРКА

Определим крутящий момент  $T_{\kappa}$  в сечении IV участка от внешнего момента, расположенного справа от сечения:

$$T_{\kappa}^{IV} = -T_3 = -1592Н \cdot м.$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов  $T_{\kappa}$  (рисунок 1 б):

2. Из условия прочности и жесткости определим диаметр вала сплошного и кольцевого сечения; а также размеры вала прямоугольного сечения.

Как видно из эпюры крутящего момента  $T_{\kappa}$ , опасное сечение вала, будет на IV участке, где крутящий момент равен:  $T_{\kappa \max} = 1592Н \cdot м$ . По этому моменту, без учета знака, будем проводить расчет вала.

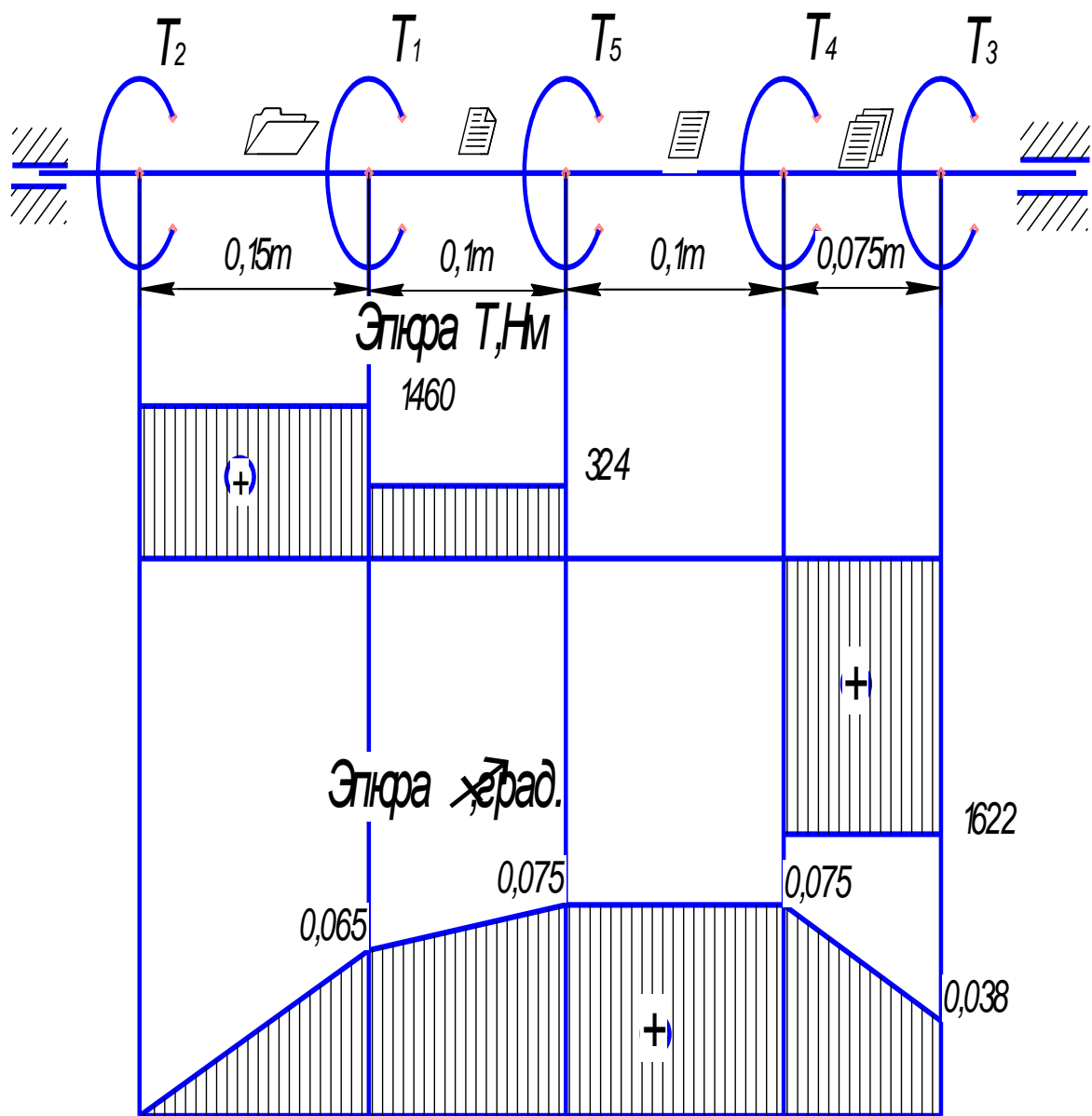


Рисунок 1 – Кручение вала:

- схема нагружения вала;
- эпюра крутящих моментов в сечениях вала;
- эпюра углов закручивания вала.

## 2.1 Определим диаметр вала сплошного (круглого) сечения

- из условия прочности:

$$d = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{\kappa \max}}{\tau}}, \quad (3)$$

$$d = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{1592}{120 \cdot 10^6}} = 4,07 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 40,7 \text{ мм}.$$

Округляем до ближайшего стандартного значения  $d = 41 \text{ мм}$ .

б) из условия жесткости:

$$d = 4,86 \cdot \sqrt[4]{\frac{T_{\kappa \max}}{G \cdot \mathbf{I}}}, \quad (4)$$

$$d = 4,86 \cdot \sqrt[4]{\frac{1592}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5}} = 6,86 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 68,6 \text{ мм}.$$

Округляем до ближайшего стандартного значения  $d = 70 \text{ мм}$ .

Для обеспечения прочности и жесткости вала выбираем сечение большего диаметра ( $d = 70 \text{ мм}$ ).

## 2.2 Определим диаметр вала кольцевого сечения

а) из условия прочности:

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{T_{\dot{\epsilon} \max}}{0,2 \cdot (1 - c^4) \cdot \mathbf{I}}}, \quad (5)$$

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{1592}{0,2 \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 120 \cdot 10^6}} = 4,83 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 48,3 \text{ мм}.$$

б) из условия жесткости:

$$d_i = \sqrt[4]{\frac{T_{\dot{\epsilon} \max}}{0,1 \cdot G \cdot \mathbf{I} \cdot (1 - c^4)}}, \quad (6)$$

$$d_n = \sqrt[4]{\frac{1592}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5 \cdot (-0,8^4)}} = 2,87 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 28,7 \text{ мм}.$$

Для обеспечения прочности и жесткости вала выбираем сечение большего диаметра. С учетом требований ГОСТа принимаем  $d_n = 50 \text{ мм}$ .

$$d_g = 0,8 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 40 \text{ мм}.$$

3.3 Определим размеры вала прямоугольного сечения из условия прочности

$$\frac{T_{\kappa \max}}{W_{\kappa}} = \tau, \quad (7)$$

где  $W_{\kappa}$  - момент сопротивления кручению,  $\text{м}^3$ .

$$W_{\kappa} = \alpha \cdot h \cdot b^2 \quad (8)$$

Из формулы (7):

$$W_{\kappa} = \frac{T_{\kappa \max}}{\tau} = \frac{1592}{120 \cdot 10^6} = 13,27 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Зная соотношение сторон  $\frac{h}{b} = 3$  по таблице 1 определим  $\alpha = 0,267$  и,

подставив в выражение  $W_{\kappa}$ , получим:

$$W_{\kappa} = 0,267 \cdot 3 \cdot b^3,$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_{\kappa}}{3 \cdot 0,267}} = \sqrt[3]{\frac{13,27 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 0,267}} = 2,55 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 25,5 \text{ мм},$$

$$h = 3 \cdot b = 3 \cdot 2,55 \cdot 10^{-2} = 7,65 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 76,5 \text{ мм}.$$

Применяем:  $h = 80\text{мм}$ ,  $b = 26\text{мм}$ .

#### 4. Построение эпюры углов закручивания вала

Эпюру углов закручивания построим для вала сплошного сечения диаметром  $d_n = 7 \cdot 10^{-2}\text{м}$ .

За начальное принимаем сечение в точке А, то есть угол закручивания любого сечения вала вычисляем относительно сечения А, которое полагается неподвижным в процессе кручения.

Угол закручивания определим по формуле:

$$\varphi_i = \frac{T_k^i \cdot l_i}{G \cdot I_p},$$

(9)

где  $\varphi_i$  - угол закручивания вала в  $i$ -ом сечении, град;

$T_k^i$  - крутящий момент в сечении  $i$ -го участка, Нм;

$l_i$  - длина  $i$ -го участка, м;

$G \cdot I_p$  - жесткость вала, Нм.

$G$  - модуль касательной упругости, МПа;

$I_p$  - полярный момент инерции,  $\text{м}^4$ .

Для вала круглого сечения полярный момент инерции определим по формуле:

$$I_p = 0,1 \cdot d^4 \tag{10}$$

Тогда жесткость вала равна:

$$G \cdot I_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^4 = 1,92 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

Угол поворота сечения В относительно сечения А:

$$\varphi_B = \frac{T_{\kappa}^I \cdot l_I}{G \cdot I_p} = \frac{1433 \cdot 0,15}{1,92 \cdot 10^5} = 0,00112 \text{ рад} = 0,064^\circ.$$

Угол поворота сечения С относительно сечения А:

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{T_{\kappa}^{II} \cdot l_{II}}{G \cdot I_p} = 0,00112 + \frac{319 \cdot 0,1}{1,92 \cdot 10^5} = 0,00129 \text{ рад} = 0,074^\circ.$$

Угол поворота сечения Д относительно сечения А:

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{T_{\kappa}^{III} \cdot l_{III}}{G \cdot I_p} = 0,00129 + \frac{0 \cdot 0,1}{1,92 \cdot 10^5} = 0,00129 \text{ рад} = 0,074^\circ.$$

Угол поворота сечения Е относительно сечения А:

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{T_{\kappa}^{IV} \cdot l_{IV}}{G \cdot I_p} = 0,00129 - \frac{1592 \cdot 0,075}{1,92 \cdot 10^5} = 0,000668 \text{ рад} = 0,038^\circ.$$

По результатам расчетов строим эпюру углов закручивания вала (рисунок 1в).

5. Построение эпюр касательных напряжений для всех трех форм сечений.

Для вала круглого сечения  $d = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

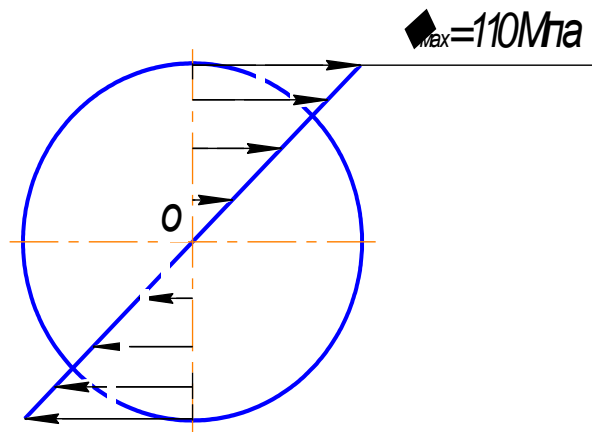
$$\tau_{\max} = \frac{T_{\ell \max}}{W_p}, \quad (11)$$

где  $W_p$  - полярный момент инерции,  $\text{м}^3$ .

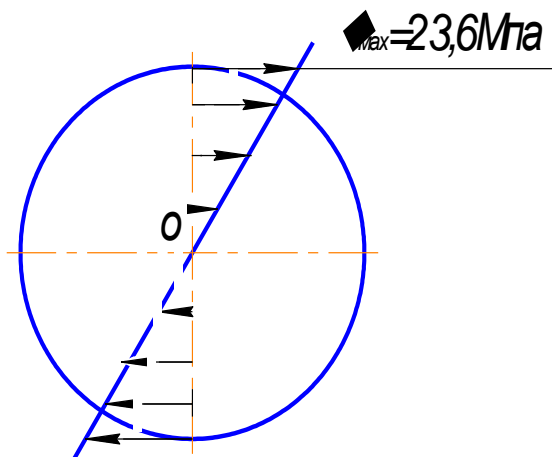
Для вала круглого сечения полярный момент инерции определим по формуле:

$$W_p = 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^3 = 13,78 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$\tau_{\max} = \frac{1592}{13,78 \cdot 10^{-6}} = 115,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 115,5 \text{ МПа}.$$



Для вала круглого сечения  $d = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .



$$W_p = 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^3 = 68,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$



$$\tau_{\max} = \frac{1592}{68,6 \cdot 10^{-6}} = 23,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,2 \text{ МПа}.$$

Для вала кольцевого сечения  $d_i = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $d_e = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

$$W_p = 0,2 \cdot d_n^3 \cdot (-c^4) = 0,2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (-0,8^4) = 14,76 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

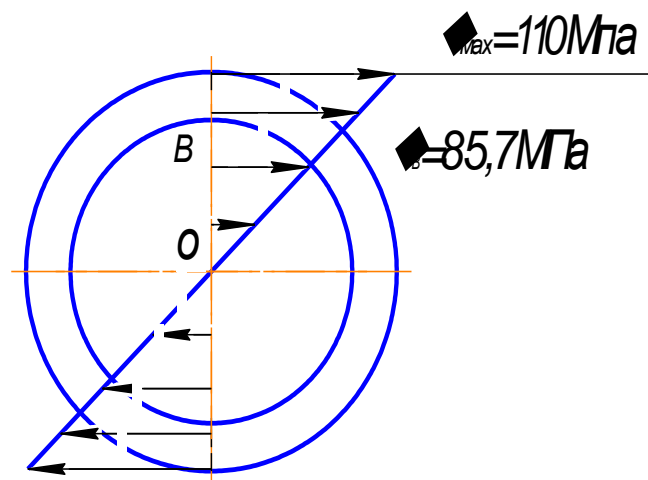
$$\tau_{\max} = \frac{T_{\kappa \max}}{W_p} = \frac{1592}{14,76 \cdot 10^{-6}} = 23,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 107,9 \text{ МПа}.$$

$$\tau_e = \frac{T_e}{I_p} \cdot \rho_e,$$

$$\rho_e = \frac{d_e}{2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$I_p = 0,1 \cdot d_n^4 \cdot (-c^4) = 0,1 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4 \cdot (-0,8^4) = 36,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$\tau_e = \frac{1592}{36,9 \cdot 10^{-8}} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 86,3 \text{ МПа}.$$



Для вала прямоугольного сечения  $h = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $b = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  по таблице 1

при  $\frac{h}{b} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{2,6 \cdot 10^{-2}} = 3$  принимаем  $\alpha = 0,267, \gamma = 0,75$ .

$$W_{\kappa} = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,267 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot (2,6 \cdot 10^{-2})^2 = 14,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{T_{\kappa \max}}{W_{\kappa}} = \frac{1592}{14,4 \cdot 10^{-6}} = 110,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 110,6 \text{ МПа},$$

$$\tau_B = \gamma \cdot \tau_{\max} = 0,75 \cdot 110,6 = 83 \text{ МПа} .$$

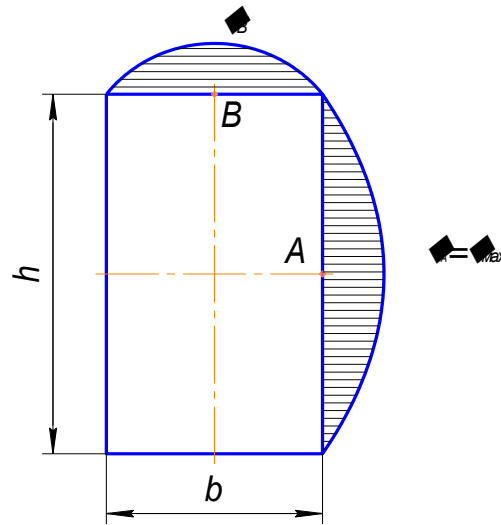


Таблица 1 Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

$\frac{h}{b}$	1,00	1,20	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	8,00	10,00	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,219	0,221	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
$\beta$	0,141	0,166	0,172	0,186	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
$\gamma$	1,00	0,93	0,91	0,86	0,82	0,79	0,77	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74

По ГОСТ 2590-71 стандартными являются диаметры:

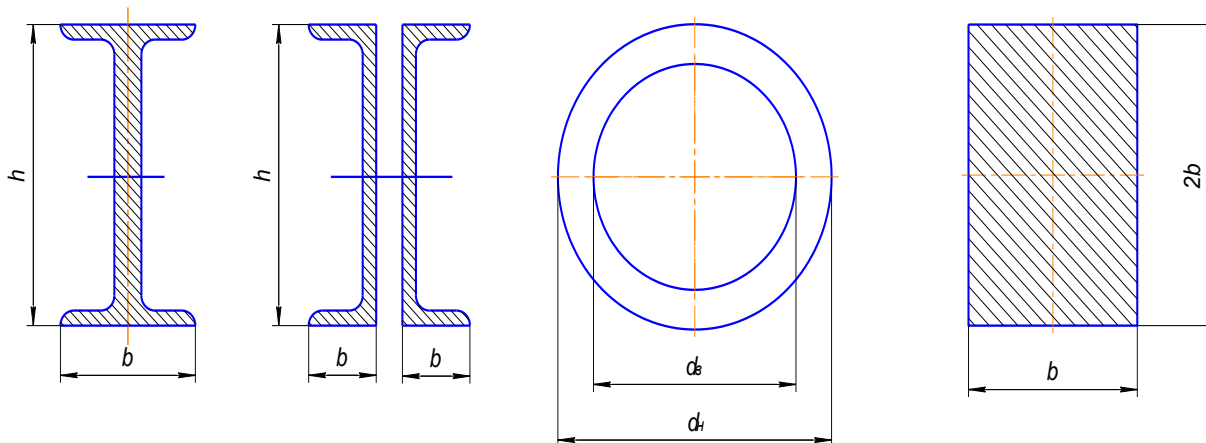
5; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 27; 28; 30;  
 32; 34; 36; 38; 40; 41; 42; 45; 46; 48; 50; 53; 55; 58; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90;  
 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200 мм.

## РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА № 3

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ БАЛОК И ПОДБОР СЕЧЕНИЙ ИЗ УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ:

1. Определить опорные реакции.
2. Составить выражения  $Q_x$  и  $M_x$  для каждого участка балки и произвести вычисления.
3. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
4. По наибольшему абсолютному значению изгибающего момента подобрать следующие варианты сечений:



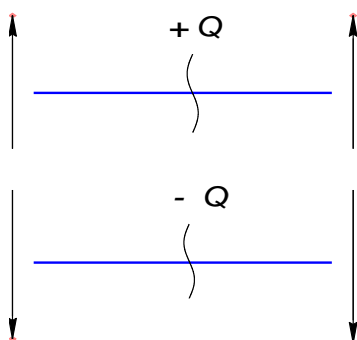
РЕШЕНИЕ:

При поперечном изгибе в сечении балки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ . Величина их определяется следующими правилами:

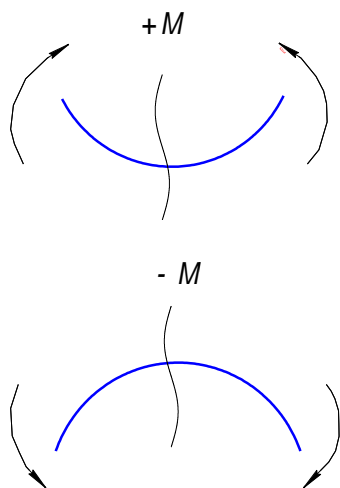
1. Поперечная сила  $Q$  численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на плоскость самого сечения.

2. Изгибающий момент  $M$  в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно поперечной оси сечения.

Знаки  $Q$  и  $M$  определяются правилами:



1. Поперечная сила в сечении считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена вверх, а справа – вниз, и отрицательна в противоположном случае.



2. Изгибающий момент принято считать положительным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вниз или стремится повернуть левую часть балки по направлению хода часовой стрелки, а правую часть против хода часовой стрелки и отрицательным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вверх или стремится повернуть левую часть балки против хода часовой стрелки, а правую часть по направлению хода часовой стрелки.

При построении эпюры  $Q$  и  $M$  балку разбивают на участки, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил и окончания действия распределенных нагрузок.

На каждом участке берут произвольное сечение и составляют аналитические выражения для  $Q$  и  $M$ , которые справедливы в пределах рассматриваемого участка.

Для построения эпюры на данном участке достаточно получить две точки - в начале и в конце участка. Подставив в найденные выражения  $Q$  и  $M$  абсциссу начала и конца участка, определяют их величины.

Положительные значения  $Q$  и  $M$  откладывают вверх от оси эпюры, отрицательные вниз.

Эпюра  $M$  получается построенной со стороны сжатых волокон.

Проверку эпюр  $Q$  и  $M$  осуществляют на основании правил, вытекающих из дифференциальных зависимостей:

На участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  ограничена горизонтальной прямой, а эпюра  $M$  – наклонной прямой.

На участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра  $Q$  ограничена прямой наклоненной линией, а эпюра  $M$  – параболой. При этом: а) наклон эпюры  $Q$  идет в сторону действия нагрузки; б) выпуклость параболы обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки.

На участках балки с положительной  $Q$  момент возрастает, а на участках, где  $Q$  отрицательна - убывает.

В сечениях, где  $Q$  меняет знак, изгибающий момент имеет экстремальное значение. Если  $Q$  меняет знак с «+» на «-», то момент максимален, если с «-» на «+», то минимален.

В сечении, где приложена сосредоточенная сила на эпюре  $Q$  будет «скачек» на величину и в направлении приложенной силы, а на эпюре  $M$  – излом графика.

В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M$  получается «скачек» на величину момента. Если момент действует по часовой стрелке - «скачек» вверх, если против часовой стрелки – вниз.

Если на участке поперечная сила равна нулю, то эюра  $M$  ограничена горизонтальной прямой.

### ПРИМЕР 1

Построить эюры  $Q$  и  $M$  для балки, показанной на рис. 3.1.

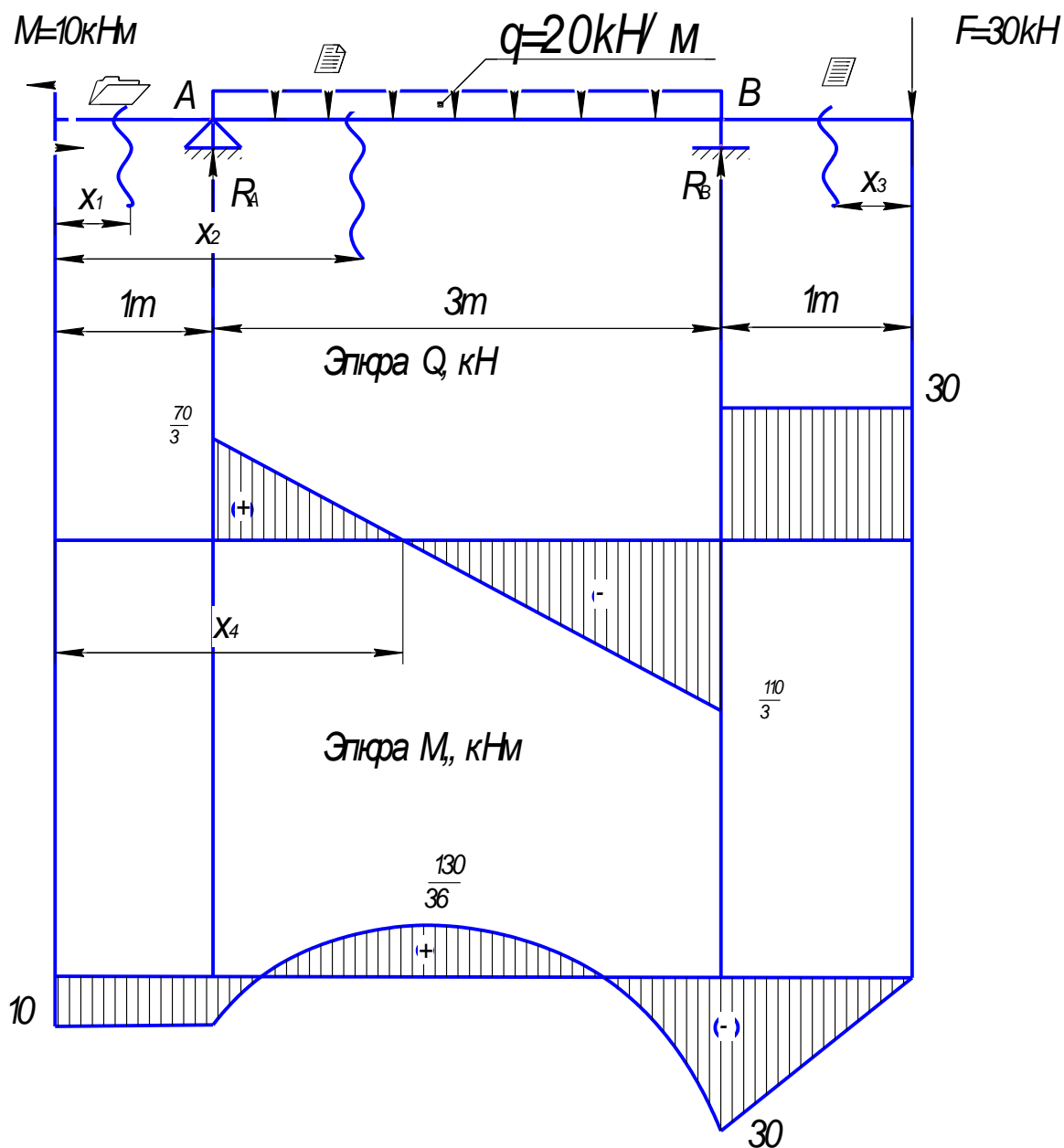


Рисунок 3.1 Схема балки, эюры  $Q$  и  $M$

## РЕШЕНИЕ

1. Определяем опорные реакции, составляя уравнения моментов относительно опоры  $A$  и  $B$ .

$$\sum M_A = M - F \cdot 4 + R_B \cdot 3 - 3 \cdot q \cdot 1.5 = 0,$$

$$R_B = \frac{F \cdot 4 + 3 \cdot q \cdot 1.5 - M}{3} = \frac{30 \cdot 4 + 3 \cdot 20 \cdot 1.5 - 10}{3} = \frac{200}{3} \text{ кН},$$

$$\sum M_B = M - F \cdot 1 - R_A \cdot 3 + 3 \cdot q \cdot 1.5 = 0,$$

$$R_A = \frac{-F \cdot 1 + 3 \cdot q \cdot 1.5 + M}{3} = \frac{-30 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1.5 + 10}{3} = \frac{70}{3} \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = \frac{70}{3} + \frac{200}{3} - 30 - 20 \cdot 3 = 0.$

2. Разбиваем балку на участки. Балка имеет три участка, пометим их на схеме римскими цифрами.

3. Для произвольного сечения каждого участка составляем выражения  $Q$  и  $M$ , а затем вычисляем их значения в начале и конце участка.

Для 1 участка  $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_1 = 0;$$

$$M_1 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 2 участка  $1 \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$

$$Q_2 = R_A - q \cdot (x_2 - 1);$$

$$M_2 = R_A \cdot (x_2 - 1) - M - q \cdot \frac{(x_2 - 1)^2}{2};$$

при  $x_2 = 1\text{ м}$   $Q_2 = R_A = \frac{70}{3} \text{ кН}$ ;  $M_2 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

при  $x_2 = 4\text{ м}$   $Q_2 = R_A - q \cdot (x_2 - 1) = \frac{70}{3} - 20 \cdot 3 = \frac{110}{3} \text{ кН}$ ;

$$M_2 = R_A \cdot 3 - M - q \cdot \frac{3^2}{2} = \frac{70}{3} \cdot 3 - 10 - 20 \cdot \frac{3^2}{2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Построив по этим данным эпюру  $Q$ , обнаруживаем, что в некотором сечении на этом участке усилие обращается в нуль, а это значит, что в сечении момент имеет экстремальное значение. Найдем его.

Из условия  $Q_2 = 0$  найдем абсциссу  $x_0$  сечения, в котором действует  $M_{\max}$ :

$$Q_2 = R_A - q \cdot (x_0 - 1) = 0;$$

$$x_0 = \frac{R_A + q}{q} = \frac{\frac{70}{3} + 20}{20} = \frac{13}{6};$$

$$M_{\max 2} = R_A \cdot (x_0 - 1) - M - q \cdot \frac{(x_0 - 1)^2}{2} = \frac{70}{3} \cdot \left(\frac{13}{6} - 1\right) - 10 - 20 \cdot \frac{\left(\frac{13}{6} - 1\right)^2}{2} = \frac{130}{36} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 3 участка  $0 \leq x_3 \leq 1\text{ м}$

$$Q_3 = F = 30 \text{ кН};$$

$$M_3 = -F \cdot x_3,$$

при  $x_3 = 0\text{ м}$ ,  $M_3 = 0$ ,

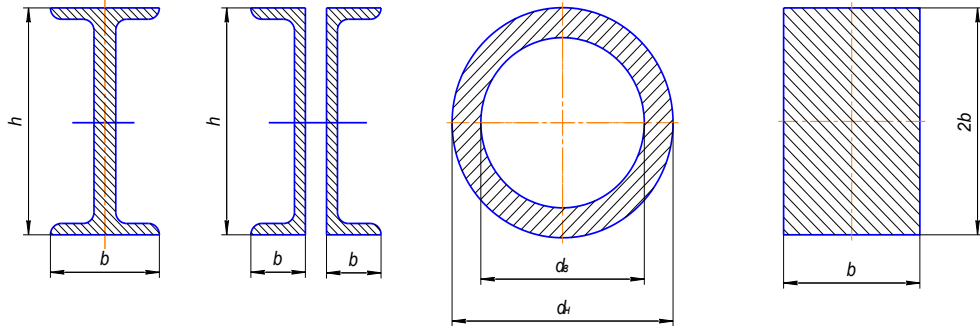
при  $x_3 = 1\text{ м}$ ,  $M_3 = -30 \cdot 1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

4. По полученным значениям  $Q$  и  $M$  строим эпюры, рис.3.1.



## ПРИМЕР 2

Для балки, показанной на рис.3.2, построить эюры  $Q$  и  $M$ , подобрать следующие варианты сечений:



Дать оценку рациональности сечения. Допускаемое напряжение  $\sigma_{\text{доп}} = 160 \text{ МПа}$ .

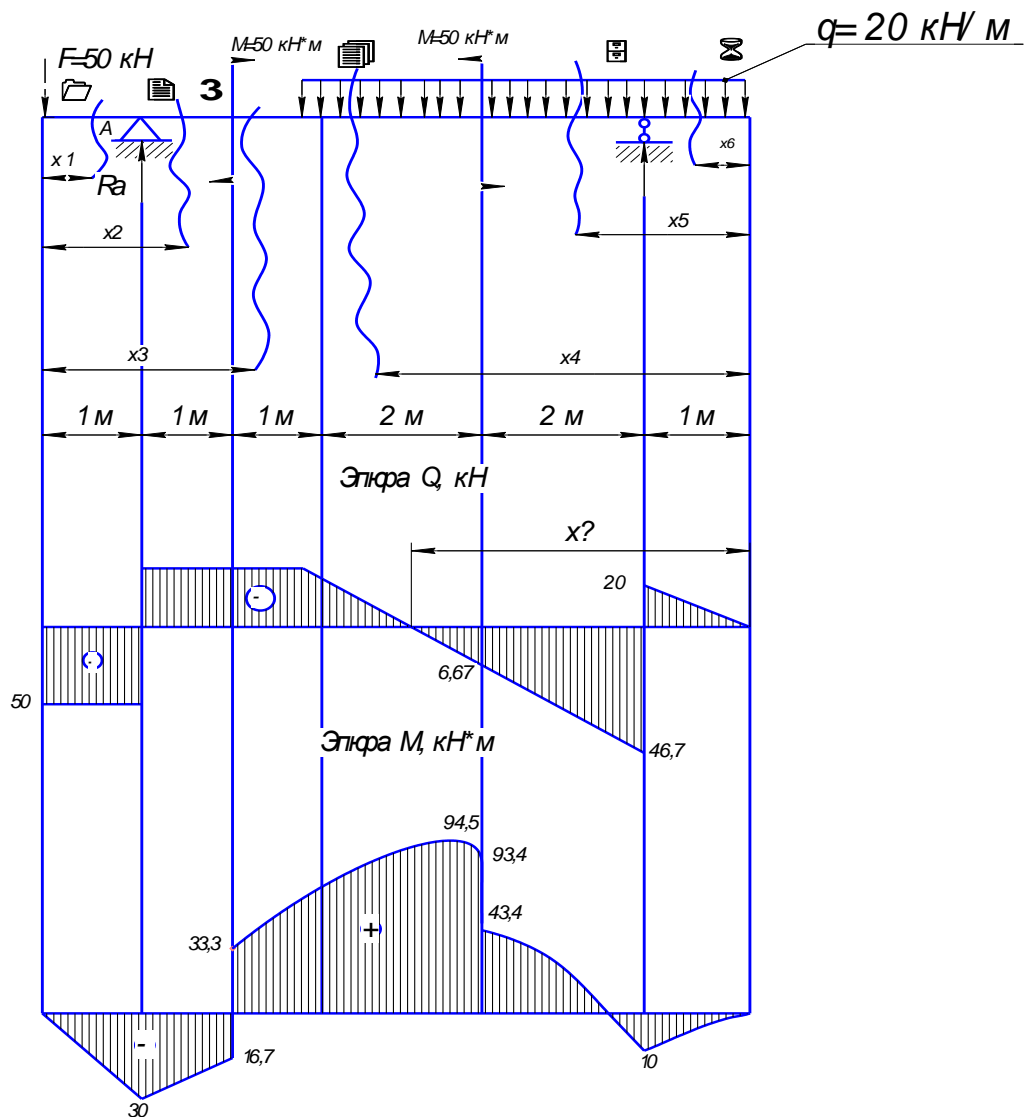


Рисунок 3.2 Схема балки, эюры  $Q$  и  $M$

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = F \cdot 1 + M + R_B \cdot 6 - M - 5 \cdot q \cdot 4.5 = 0,$$

$$R_B = \frac{-F \cdot 1 - M + M + 5 \cdot q \cdot 4.5}{6} = 66.7 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = F \cdot 7 + M + 5 \cdot q \cdot 1.5 - R_A \cdot 6 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{F \cdot 7 + M + 5 \cdot q \cdot 1.5 - M}{6} = 83.3 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = R_A + R_B - F - 5 \cdot q = 83.3 + 66.7 - 50 - 5 \cdot 20 = 0.$

2. Разбиваем балку участки.

Балка имеет шесть участков. Направление отсчета для первых трех участков слева направо. Для трех последних - справа налево.

3. Для произвольного сечения каждого участка составляем выражения  $Q$  и  $M$ , а затем вычисляем их значения в начале и в конце участка.

Для 1 участка  $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_1 = -F = -50 \text{ кН};$$

$$M_1 = -F \cdot x_1,$$

при  $x_1 = 0 \text{ м}$ ,  $M_1 = 0$ ,

при  $x_1 = 1 \text{ м}$ ,  $M_1 = -50 \cdot 1 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Для 2 участка  $1 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_2 = -F + R_A = -50 + 83.3 = 33.3 \text{ кН};$$

$$M_2 = -F \cdot x_2 + R_A \cdot (x_2 - 1),$$

при  $x_2 = 1\text{ м}$ ,  $M_2 = -50 \cdot 1 = -50\text{ кН} \cdot \text{м}$ ,

при  $x_2 = 2\text{ м}$ ,  $M_2 = -50 \cdot 2 + 83,3 \cdot 1 = -16,7\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Для 3 участка  $2 \leq x_3 \leq 3\text{ м}$

$$Q_3 = -F + R_A = -50 + 83,3 = 33,3\text{ кН};$$

$$M_3 = -F \cdot x_3 + R_A \cdot (x_3 - 1) - 50,$$

при  $x_3 = 2\text{ м}$ ,  $M_3 = -50 \cdot 2 + 83,3 \cdot (2 - 1) - 50 = 33,3\text{ кН} \cdot \text{м}$ ,

при  $x_3 = 3\text{ м}$ ,  $M_3 = -50 \cdot 3 + 83,3 \cdot (3 - 1) - 50 = 66,6\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Для 4 участка  $0 \leq x_4 \leq 1\text{ м}$

$$Q_4 = q \cdot x_4,$$

$$M_4 = -\frac{q \cdot x_4^2}{2},$$

при  $x_4 = 0\text{ м}$ ,  $Q_4 = 0$ ,  $M_4 = 0$ ,

при  $x_4 = 1\text{ м}$ ,  $Q_4 = 20 \cdot 1 = 20\text{ кН}$ ,  $M_4 = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} = -10\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Для 5 участка  $1 \leq x_5 \leq 3\text{ м}$

$$Q_5 = q \cdot x_5 - R_B,$$

$$M_5 = -\frac{q \cdot x_5^2}{2} + R_B \cdot (x_5 - 1) - 50,$$

при  $x_5 = 1\text{ м}$ ,  $Q_5 = 20 \cdot 1 - 66,7 = 46,7\text{ кН}$ ,  $M_5 = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} + 66,7 \cdot (1 - 1) - 50 = -10\text{ кН} \cdot \text{м}$ ,

при  $x_5 = 3\text{ м}$ ,  $Q_5 = 20 \cdot 3 - 66,7 = 6,67\text{ кН}$ ,  $M_5 = -\frac{20 \cdot 3^2}{2} + 66,7 \cdot 2 = 43,4\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Для 6 участка  $3 \leq x_6 \leq 5\text{ м}$

$$Q_6 = q \cdot x_6 - R_B,$$

$$M_6 = -\frac{q \cdot x_6^2}{2} + R_B \cdot (x_6 - 1) + M,$$

при  $x_6 = 3\text{ м}$ ,  $Q_6 = 20 \cdot 6 - 66,7 = 6,67\text{ кН}$ ,  $M_6 = -\frac{20 \cdot 3^2}{2} + 66,7 \cdot (3 - 1) + 50 = -93,3\text{ кН} \cdot \text{м}$ ,

при  $x_6 = 5\text{ м}$ ,  $Q_6 = 20 \cdot 5 - 66,7 = 33,3\text{ кН}$ ,  $M_6 = -\frac{20 \cdot 5^2}{2} + 66,7 \cdot 4 + 50 = 66,7\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

В некотором сечении на этом участке усилие обращается в нуль, а это значит, что в сечении момент имеет экстремальное значение. Найдем его.

Из условия  $Q_6 = 0$  найдем абсциссу  $x_0$  сечения, в котором действует

$M_{\max}$ :

$$Q_6 = q \cdot x_0 - R_B = 0,$$

$$x_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{66,7}{20} = 3,335\text{ м},$$

$$M_{\max 6} = -\frac{20 \cdot 3,335^2}{2} + 66,7 \cdot (3,335 - 1) + 50 = 94,5\text{ кН} \cdot \text{м},$$

4. По полученным значениям  $Q$  и  $M$  строим эпюры. Эпюры необходимо проверить по дифференциальным зависимостям.

5. Подбираем сечения балок.

Подбор сечения производим по наибольшему абсолютному значению изгибающего момента.

В нашем примере  $M_{\max} = 94,5\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

По условию прочности:

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_{\text{п}}$$

где  $W$  - момент сопротивления,  $\text{м}^3$ .

$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{п}}}$$

а) Подбор двутавра

$$W = \frac{94.5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 591 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 591 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента прокатной стали ГОСТ 8230-72 принимаем швеллер №27,  $W = 308 \text{ см}^3$ ,  $A = 35.2 \text{ см}^2$ .

Определим рабочее напряжение

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{2 \cdot W_{\text{шв}}} = \frac{94.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 308 \cdot 10^{-6}} = 153.5 \text{ МПа}.$$

Определим недонапряжение

$$\frac{\sigma_{\text{п}} - \sigma_p}{\sigma_{\text{п}}} \cdot 100\% = \frac{160 - 153.5}{160} \cdot 100\% = 4.06\% \text{ - расхождение в пределах нормы.}$$

б) Подбор балки кольцевого сечения

$$W = 0.1 \cdot d_n^3 \cdot \left( \frac{1}{8} \right) = 0.1 \cdot d_n^3 \cdot \left( \frac{1}{8} \right) = 0.059 \cdot d_n^3,$$

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{W}{0.059}} = \sqrt[3]{\frac{591 \cdot 10^{-6}}{0.059}} = 21.7 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$d_n = 22 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Округляем до  $d_n = 22 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

$$A = \frac{\pi \cdot d_n^2}{4} = \frac{3.14 \cdot 0.22^2}{4} = 0.037 \text{ м}^2.$$

в) Подбор балки прямоугольного сечения

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot b^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot b^3,$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.037}{2}} = 0.096 \text{ м},$$

округляем до  $b = 0.1 \text{ м.}$

$$h = 2 \cdot b = 0.2 \text{ м.}$$

$$A = b \cdot h = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02 \text{ м}^2.$$

## РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №4

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Для заданной статически неопределимой рамы требуется:

- 1 установить степень статической неопределимости;
- 2 выбрать основную систему;
3. написать каноническое уравнение;
- 4 построить эпюры  $M$  от единичных сил и внешней нагрузки и вычислить при помощи способа Верещагина все перемещения, входящие в каноническое уравнение;
- 5 найти величины лишних неизвестных, решив уравнения;
- 6 построить окончательные эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$ .
- 7 проверить правильность построения окончательной эпюры  $M$ .
- 8 подобрать сечения рамы заданной формы по условию прочности, жесткость всех участков рамы считать одинаковой.

При расчете статически неопределимых рам методом сил коэффициенты  $\langle \delta_{11}; \delta_{12}; \dots \rangle$  и свободные члены  $\langle \Delta_{1P}; \Delta_{2P}; \dots \rangle$  канонических уравнений для прямолинейных элементов с постоянной жесткостью вычисляются по способу Верещагина по формуле:

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\omega \cdot \eta}{E \cdot I}, \quad (4.1)$$

где  $\omega$  – площадь нелинейной эпюры изгибающих моментов;

$\eta$  – ордината линейной эпюры изгибающих моментов под центром площади  $\omega$ .

Вычисление по формуле 4.1 производят на участках, на каждом из которых одна из эпюр должна быть прямолинейна (рисунок 4.1). В тех случаях, когда обе эпюры прямолинейны, можно умножить площадь одной из них на ординату другой, расположенную под центром тяжести первой.

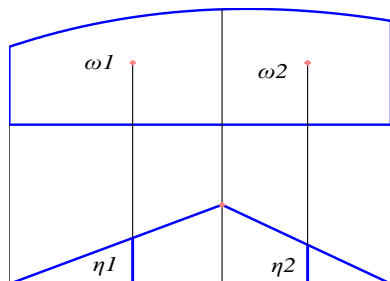


Рисунок 4.1 Перемножение эпюр

В таблице 4.1 приведены значения площадей и координаты центров тяжести наиболее часто встречающихся фигур. Знак произведения  $\omega \cdot \eta$  принимается положительным, если обе эпюры построены с одной стороны оси, в противном случае произведение  $\omega \cdot \eta$  принимается отрицательным.

Если одна из эпюр имеет сложное очертание, то она разбивается на несколько простых фигур, для которых легко определяется площадь  $\omega$  и положение центра тяжести (рисунок 4.2). В этом случае:

$$\sum \omega \cdot \eta = \omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2 + \omega_3 \cdot \eta_3. \quad (4.2)$$

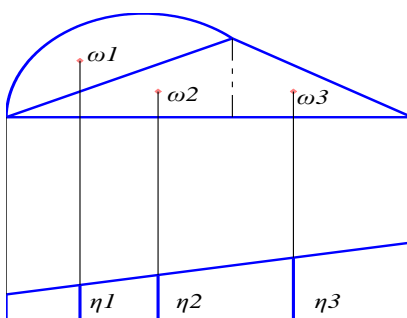


Рисунок 4.2 Перемножение эпюр, имеющих сложное очертание

Различные комбинации эпюр для перемножения по правилу Верещагина приведены в таблице 4.2.



Рассмотрим случай перемножения эпюр, из которых одна ограничена квадратной параболой (рисунок 4.3), что соответствует случаю загрузки этого участка распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ .

Грузовую параболическую эпюру  $M_p$  (на рисунке 4.3 заштрихована) заменим параболическим сегментом  $CKD$  и двумя треугольниками  $ABD$  и  $BCD$ . Тогда площадь эпюры определится по формуле

$$\omega = \omega_2 + \omega_3 - \omega_1. \quad (4.3)$$

Площадь параболического сегмента независимо от угла наклона его основания  $DC$  к горизонтальной линии  $AB$ , равна:

$$\omega_2 = \frac{2}{3} \cdot h \cdot l, \quad (4.4)$$

где  $h$  - средняя ордината эпюры,  $h = \frac{q \cdot l^2}{8}$ .

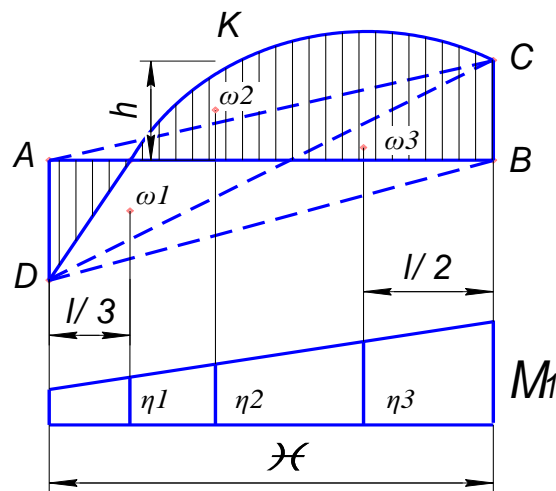


Рисунок 4.3 Перемножение эпюр, одна из которых ограничена квадратной параболой

Перемножение эпюр дает:

$$\sum \omega \cdot \eta = -\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2 + \omega_3 \cdot \eta_3.$$

Остальные пояснения к заданию даются по ходу решения примера.

Таблица 4.1 Площадь  $\omega$  и координаты центра тяжести элементов фигур

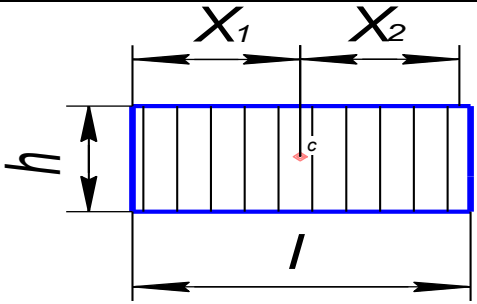
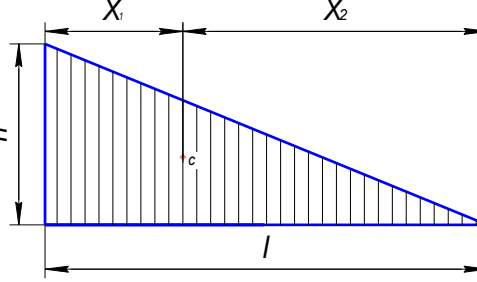
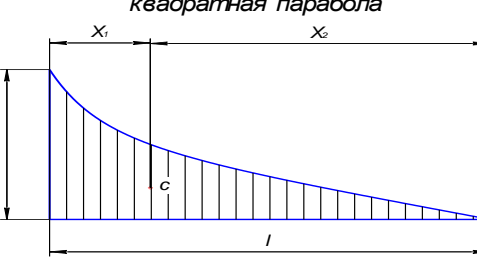
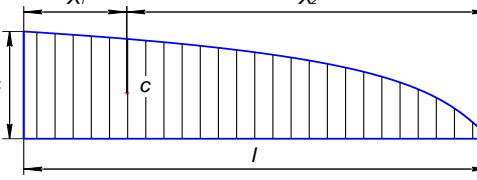
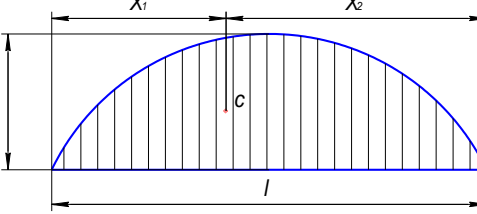
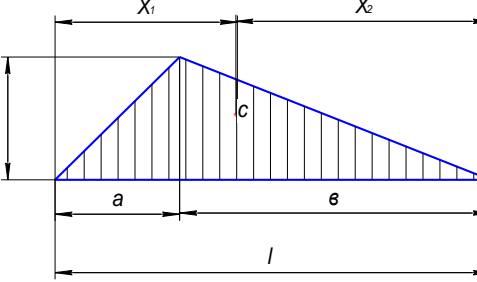
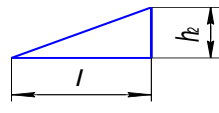
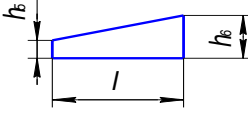
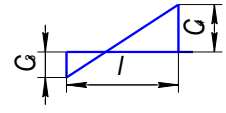
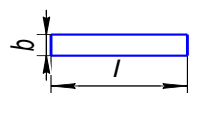
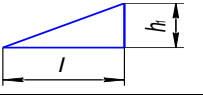
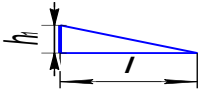
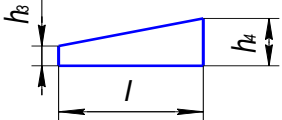
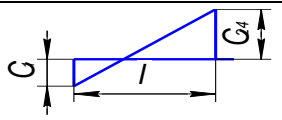
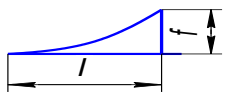
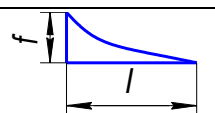
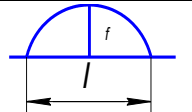
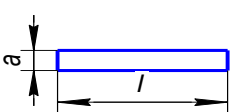
Фигура	Площадь $\omega$	Координата центра тяжести	
		$X_1$	$X_2$
	$hl$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{hl}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}$
<p>квадратная парабола</p> 	$\frac{hl}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$
	$\frac{2hl}{3}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{5l}{8}$
	$\frac{2hl}{3}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{hl}{2}$	$\frac{a+l}{3}$	$\frac{b+l}{3}$

Таблица 4.2 Таблица выражений интегралов  $\int M_i M_p dx$

				
	$\frac{\ell h_1 h_2}{3}$	$\frac{\ell h_1}{6} (2h_6 + h_5)$	$\frac{\ell h_1}{6} (2C_4 - C_3)$	$\frac{\ell h_1 b}{2}$
	$\frac{\ell h_1 h_2}{6}$	$\frac{\ell h_1}{6} (2h_5 + h_6)$	$\frac{\ell h_1}{6} (2C_3 - C_4)$	$\frac{\ell h_1 b}{2}$
	$\frac{\ell h_2}{6} (2h_4 + h_3)$	$\frac{\ell}{6} 2(h_5 h_5 + h_4 h_6) + h_3 h_6 + h_4 h_5$	$\frac{\ell}{6} 2(-h_3 C_3 + h_4 C_4) + h_3 C_4 + h_4 C_3$	$\frac{\ell b}{2} (h_3 + h_4)$
	$\frac{\ell h_2}{6} (2C_2 - C_1)$	$\frac{\ell}{6} 2(-C_1 h_5 + C_2 h_6) - C_1 h_6 + C_2 h_5$	$\frac{\ell}{6} 2(-C_1 C_3 + C_2 C_4) - C_2 C_3 - C_1 C_4$	$\frac{\ell b}{2} (-C_1 + C_2)$
	$\frac{\ell f h_2}{4}$	$\frac{\ell f}{12} (3h_6 + h_5)$	$\frac{\ell f}{12} (3C_4 + C_3)$	$\frac{\ell f b}{3}$
	$\frac{\ell f h_2}{12}$	$\frac{\ell f}{12} (3h_5 + h_6)$	$\frac{\ell f}{12} (-3C_3 + C_4)$	$\frac{\ell f b}{3}$
	$\frac{\ell f h_2}{3}$	$\frac{\ell f}{3} (h_5 + h_6)$	$\frac{\ell f}{3} (-C_3 + C_4)$	$\frac{2\ell f b}{3}$
	$\frac{\ell f h_2 a}{2}$	$\frac{\ell a}{2} (h_5 + h_6)$	$\frac{\ell a}{2} (-C_3 + C_4)$	$\ell a b$

## ПРИМЕР

Для заданной статически неопределимой рамы с элементами постоянной жесткости  $E \cdot I$  построить эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$  и подобрать номер двутавра при  $\sigma_{\text{доп}} = 160 \text{ МПа}$ .

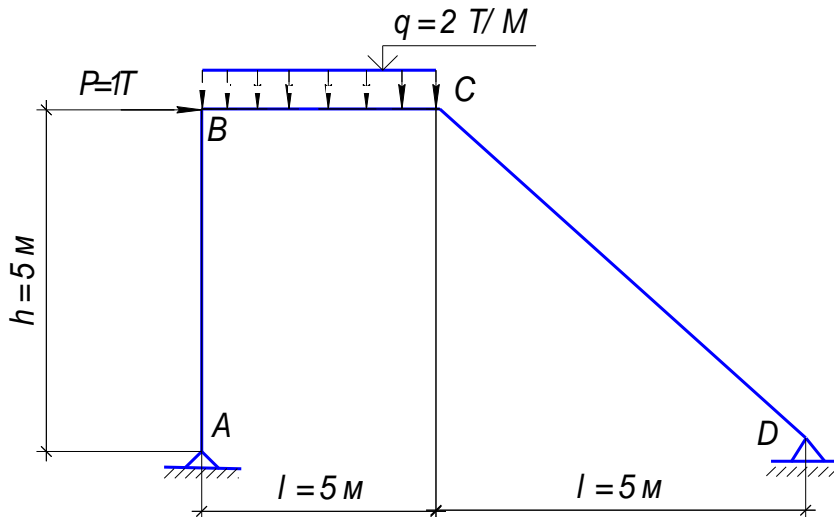


Рисунок 4.4 Схема рассматриваемой статически неопределимой рамы

## РЕШЕНИЕ:

1. Устанавливаем степень статической неопределимости:

$$S = 3 \cdot n - m, \quad (4.5)$$

где  $n$  - число замкнутых контуров в раме;

$m$  - число одиночных шарниров.

$$n = 1, \quad m = 2, \quad S = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

Рама один раз статически неопределима, то есть содержит одну дополнительную связь.

2. Выбираем основную систему путем установления горизонтальной связи в опоре  $D$ . Вертикальную связь отбросить нельзя, т.к. в этом случае оставшиеся три опорных стержня пересекаются в одной точке  $A$ , и система будет мгновенно изменяемой. Взамен отброшенной связи к основной системе прикладывают силу  $X_1$ , заменяющую действие удаленной связи.

3. Составляем каноническое уравнение, которое выражает условие равенства нулю суммарного горизонтального перемещения точки  $D$  от заданной нагрузки и от неизвестной силы  $X_1$ :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (4.6)$$

Для вычисления перемещений, входящих в уравнение в виде коэффициента  $\delta_{11}$ , при неизвестном и свободного (грузового) члена необходимо построить для основной системы эпюры изгибающего момента от силы  $\bar{X}_1 = 1$  и от заданной нагрузки. Обозначим их  $M_p$  и  $\bar{M}_1$ .

4. Строим эпюры моментов для основной системы.

При построении эпюры  $\bar{M}_1$  ординаты откладываем со стороны сжатого волокна. При вычислении моментов в сечениях пользуемся обычным правилом знаков, считая положительным момент левых сил, направленный против хода часовой стрелки. Выражения  $Q$ ,  $M$  и  $N$  для произвольных сечений не записываем. Ограничиваемся вычислением внутренних усилий в узлах и местах экстремума, а затем проводим линии эпюр, используя дифференциальные зависимости.

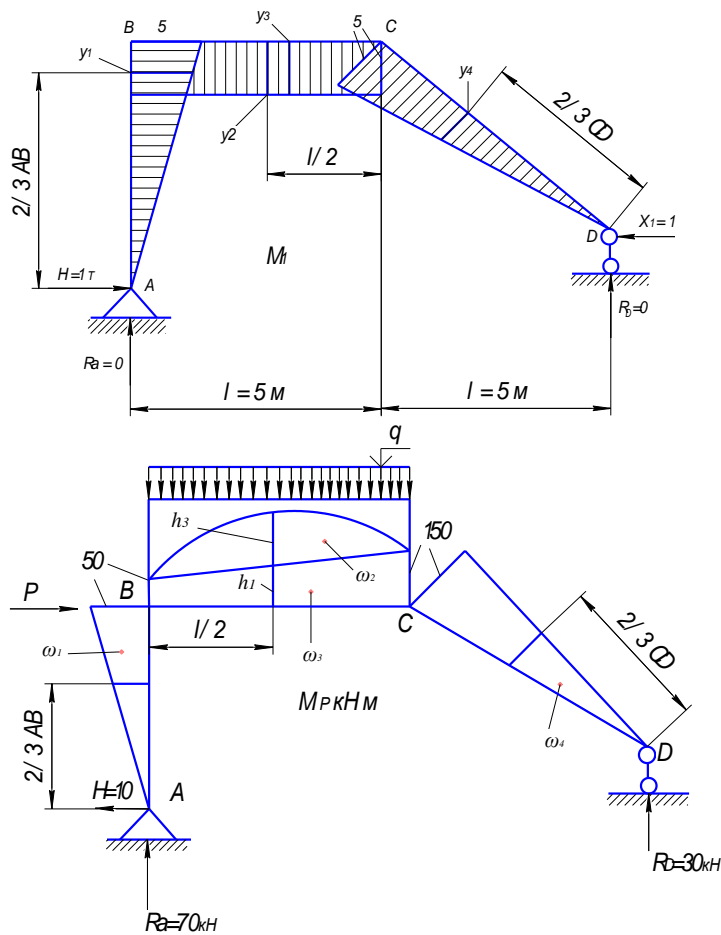


Рисунок 4.5 Эпюры  $\bar{M}_1$  и  $M_P$ .

Для построения эпюры  $\bar{M}_1$  определим реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, R_D = 0; \\ \sum M_D = 0, R_A = 0; \\ \sum X = 0, \bar{H} = \bar{X} = 1. \end{aligned}$$

Строим эпюру  $\bar{M}_1$ .

На участке  $AB$  эпюра будет прямолинейна:  $M_A = 0$ ,  $M_{AB} = -\bar{H} \cdot 5 = -5$ .

На участке  $BC$  эпюра прямолинейна. Момент в начале участка, очевидно, такой же, как в конце участка  $AB$ :  $M_{CB} = -\bar{H} \cdot 5 = -5$ .

На участке  $DC$  эпюра прямолинейна:  $M_D = 0$ ,  $M_{CD} = -\bar{X}_1 \cdot 5 = -5$ .

Для построения эпюры  $M_p$  загрузим основную систему заданной нагрузкой и определим опорные реакции:

$$\sum M_A = R_D \cdot 10 - P \cdot 5 - 5 \cdot q \cdot 2,5 = 0,$$

$$R_D = \frac{5 \cdot 20 \cdot 2,5 + 10 \cdot 5}{10} = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = -R_A \cdot 10 - P \cdot 5 + 5 \cdot q \cdot 7,5 = 0,$$

$$R_A = \frac{5 \cdot 20 \cdot 7,5 - 10 \cdot 5}{10} = 70 \text{ кН};$$

$$\sum X = P - H = 0,$$

$$H = X = 1 \text{ кН}.$$

Строим эпюру  $M_p$ .

На участке  $AB$  эпюра прямолинейна:

$$M_A = 0, \quad M_{BA} = H \cdot 5 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке  $BC$  эпюра ограничена параболой:

$$M_{BC} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{CB} = R_A \cdot 5 + H \cdot 5 - \frac{q \cdot BC^2}{2} = 70 \cdot 5 + 10 \cdot 5 - \frac{20 \cdot 5^2}{2} = 150 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке  $DC$  эпюра прямолинейна:

$$M_D = 0,$$

$$M_{CD} = R_D \cdot 5 = 30 \cdot 5 = 150 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$CD = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,08.$$

5. Вычисляем перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{ip}$  по способу Верещагина. Для определения перемещения  $\delta_{11}$  умножим площади  $\omega$  на ординаты  $y$ , взятые из одной и той же эпюры  $\bar{M}_1$ :

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 7,08 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (41,7 + 125 + 59,2) = \frac{225,9}{EI}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Перемножая эпюры  $M_p$  и  $\bar{M}_1$  для получения перемещений  $\Delta_{ip}$ , из первой возьмем площади, из второй – ординаты, соответствующие центрам тяжести этих площадей. При этом эпюру  $M_p$  по ригелю разобьем на две фигуры: параболический сегмент ( $l = 5\text{ м}, h_2 = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{2 \cdot 5^2}{8} = 6,25\text{ м}$ ) с центром тяжести посередине и площадью  $\omega_2 = \frac{2}{3} \cdot h_2 \cdot l$  и трапецию с площадью  $\omega_3 = h_3 \cdot l$ , где средняя линия  $h_3 = \frac{50 + 150}{2} = 100$ . Находить положение центра тяжести трапеции нет необходимости, т.к. в эпюре  $\bar{M}_1$  все ординаты по ригелю имеют одно и то же значение:

$$\begin{aligned}\Delta_{ip} &= \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot \eta_1 - \omega_2 \cdot \eta_2 - \omega_3 \cdot \eta_3 - \omega_4 \cdot \eta_4) = \\ &= -\frac{1}{EI} \left( \frac{5 \cdot 50}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 62,5 \cdot 5 \cdot 5 + 100 \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 7,08 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \\ &= -\frac{1}{EI} (417 + 1040 + 2500 + 177) = -\frac{5727}{EI}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

## 6. Определим неизвестную силу

Подставляя найденные значения из (4.7) и (4.8) в уравнение (4.6), получим:

$$X_1 = \frac{-\Delta_{ip}}{\delta_{11}} = \frac{-572,7}{225,9} = 25,4\text{ кН}.$$



После определения неизвестных усилий, определение реакций и построение эпюр внутренних силовых факторов производится как в обычной статически определимой системе.

В данном случае сила  $X_1$  не вызывает вертикальных опорных реакций, так как проходит через центры обоих опорных шарниров, поэтому реакции остаются такими же как и при загрузке основной системы только заданной нагрузкой, то есть  $R_A = 70 \text{ кН}$ ,  $R_D = 30 \text{ кН}$ . Значение реакции  $H$  определяется из уравнения:

$$\sum X = P - H - X_1 = 0$$

$$H = P - X_1 = 10 - 25,4 = -15,4 \text{ кН}$$

7. Строим окончательные эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$ .

Окончательную эпюру моментов получим путем непосредственного построения. Для этого к основной системе прикладываем найденное неизвестное усилие  $X_1$  и заданную нагрузку (рисунок 4.6).

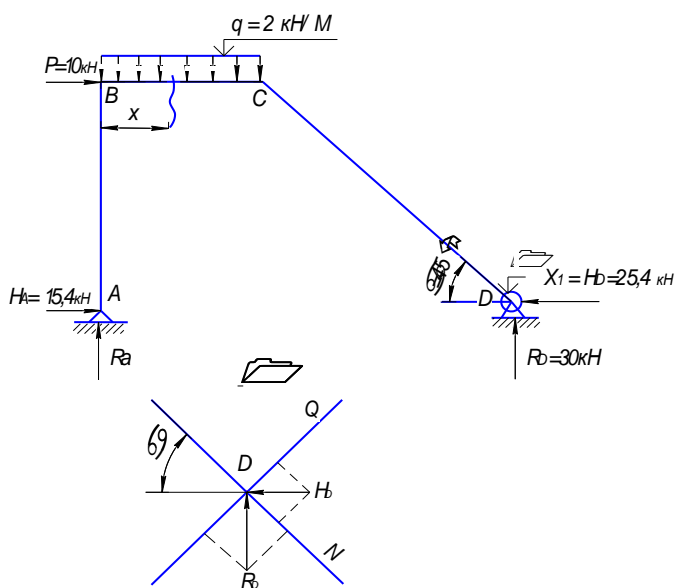


Рисунок 4.6 Основная система

Построение эюры  $M$ .

Участок  $AB$ :

$$M_A = 0; M_{AB} = -H \cdot 5 = -15,4 \cdot 5 = -77 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок  $BC$ :

$$M_{BC} = M_{BA} = -77 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{CB} = R_A \cdot 5 - H_A \cdot 5 - \frac{q \cdot l^2}{2} = 70 \cdot 5 - 15,4 \cdot 5 - \frac{20 \cdot 5^2}{2} = 23 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Экстремальное значение момента на участке найдем после построения эюры  $Q$ .

Участок  $DC$ :

$$M_D = 0; M_{CD} = R_D \cdot 5 - H_D \cdot 5 = 30 \cdot 5 - 25,4 \cdot 5 = 23 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

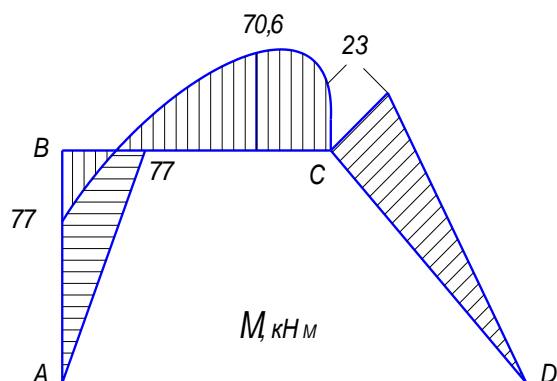


Рисунок 4.7 Эюра  $M$ , кНм

8. Строим эюру  $Q$

Участок  $AB$ :

$$Q_{AB} = -H_A = -15,4 \text{ кН}.$$

Участок  $BC$ :

$$Q_{BC} = R_A = 70 \text{ кН};$$

$$Q_{CB} = R_A - q \cdot l = 70 - 20 \cdot 5 = 30 \text{ кН}.$$

Определим сечения, в котором  $Q = 0$ . Для этого напишем выражение поперечной силы для произвольного сечения и приравняем его к «0»:

$$Q_x = R_A - q \cdot x = 0,$$

$$x = \frac{R_A}{q} = 3,5 \text{ м}.$$

Тогда значение максимального момента будет равно:

$$M_{\max} = R_A \cdot x - H_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2};$$

$$M_{\max} = 70 \cdot 3,5 - 15,4 \cdot 3,5 - \frac{20 \cdot 3,5^2}{2} = 70,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DC:

Для определения поперечной силы в сечении элемента спроектируем силы  $R_D$  и  $H_D$  на плоскость поперечного сечения:

$$Q_{DC} = H_D \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 45^\circ = 25,4 \cdot 0,70 - 30 \cdot 0,70 = -3,25 \text{ кН}.$$

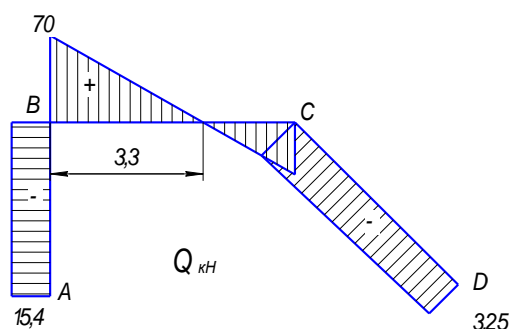


Рисунок 4.8 Эпюра  $Q$ , кН

9. Строим эпюру  $N$

Участок  $AB$ :

$$N_{AB} = -R_A = -70 \text{ кН}.$$

Участок  $BC$ :

$$N_{BC} = -P - H_A = -10 - 15,4 = -25,4 \text{ кН}.$$

Участок  $DC$ :

Для определения продольной силы в сечении элемента спроектируем силы  $R_D$  и  $H_D$  на его продольную ось.

$$N_{DC} = -H_D \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 45^\circ = -25,4 \cdot 0,707 - 30 \cdot 0,707 = -39,2 \text{ кН}.$$

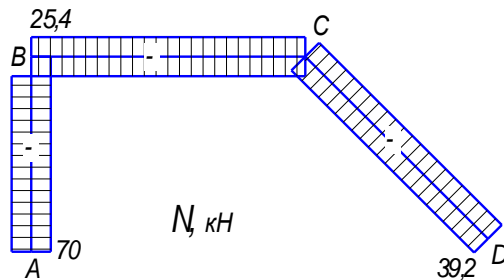
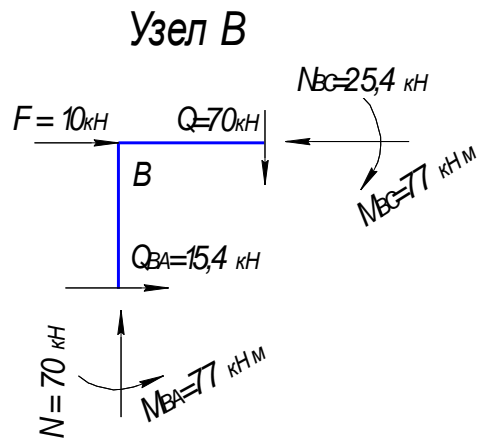


Рисунок 4.9 Эпюра  $N$ , кН

10. Проверяем правильность построения эпюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$ , проверяем условие равновесия деформации

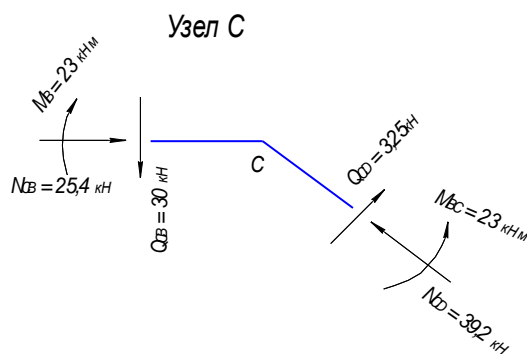
Статистическая проверка состоит в том, что любой узел, вырезанный из нагруженной рамы, должен находиться в равновесии под действием сил и моментов, заменяющих действие отброшенных элементов. Если к рассмотренному узлу приложены внешние силы и моменты, то они также входят в уравнение равновесия.



$$\sum X = Q_{BA} + P - N_{BC} = 0; \quad \sum X = 15,4 + 10 - 25,4 = 0.$$

$$\sum Y = N_{BA} - Q_{BC} = 0; \quad \sum Y = 70 - 7 = 0.$$

$$\sum M_B = M_{BA} - M_{BC} = 0; \quad \sum M_B = 77 - 77 = 0.$$



$$\sum X = N_{CB} + Q_{CD} \cdot \cos 45^\circ - N_{CD} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum X = 25,4 + 3,25 \cdot 0,707 - 39,2 \cdot 0,707 = 0;$$

$$\sum Y = 39,2 \cdot 0,707 + 32,5 \cdot 0,707 - 30 = 0;$$

$$\sum M_C = M_{CD} - M_{CB} = 0; \quad \sum M_C = 23 - 23 = 0.$$

Статистическая проверка является необходимой, но недостаточной, т.к. проверка правильности построения эпюр по известным значениям лишних неизвестных усилий не дает оснований для суждения о правильности самих

величин. Общим контролем является проверка выполнения условий деформации. Т.к. в заданной статически неопределимой системе перемещения по направлению отброшенной связи равно нулю, то произведение окончательной эпюры изгибающих моментов на эпюру от единичного усилия должно равняться нулю.

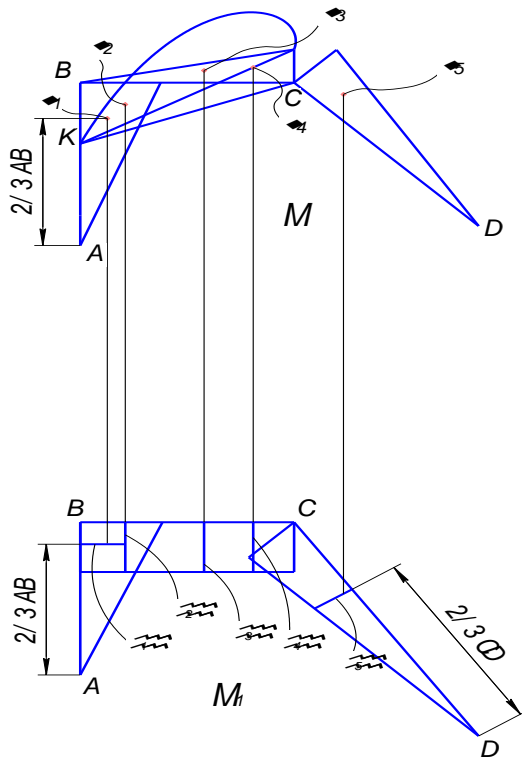


Рисунок 4.10

Перемножим эпюры  $M$  и  $\bar{M}_1$  (рисунок 4.10), получим перемещение по направлению отброшенной связи. При этом эпюру  $M$  по ригелю разобьем на три фигуры: параболу ( $l = 5\text{ м}, h_3 = \frac{q \cdot l^2}{2} = 6,25\text{ м}$ ) с центром тяжести посередине и площадью  $\omega = \frac{2}{3} \cdot h_3 \cdot l$  и два треугольника  $BCK$  и  $BEC$ .

$$\Delta_D = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2 - \omega_3 \cdot \eta_3 - \omega_4 \cdot \eta_4 - \omega_5 \cdot \eta_5)$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{5 \cdot 77}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{5 \cdot 77}{2} \cdot 5 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 5^2}{3 \cdot 8} \cdot 5 \cdot 5 - \frac{23 \cdot 5}{2} \cdot 5 - \frac{23 \cdot 7,08}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} (642 + 962 - 1042 - 289 - 273) = 0.$$

Т.к. найденное перемещение равно нулю, то эпюра  $M$  построена правильно.

## 11. Подберем сечение элементов рамы

Расчет на прочность производим только по нормальным напряжениям. По эпюрам  $M$  и  $N$  устанавливаем опасное сечение. Оно будет находится в узле  $B$ , где  $M_{\max} = 77 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $N = 70 \text{ кН}$ .

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma}.$$

При подборе сечения вначале, пренебрегая действием продольной силы и учитывая только действие изгибающего момента, по пониженному допускаемому напряжению  $\bar{\sigma} = 100 \text{ МПа}$  определим момент сопротивления:

$$W = \frac{M_{\max}}{\bar{\sigma}} = \frac{77 \cdot 10^5}{100} = 770 \text{ см}^3 = 770 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По таблице сортамента прокатной стали ГОСТ 8239-72 принимаем двутавр № 40,  $W = 947 \text{ см}^3$ ,  $A = 71,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 71,4 \text{ см}^2$ .

Определим расчетное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{77 \cdot 10^5}{947} + \frac{7 \cdot 10^3}{71,4} = 81,4 + 98 = 189,4 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}$$

Принимаем двутавр № 45,  $W = 1220 \text{ см}^3$ ,  $A = 83 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 83 \text{ см}^2$ .

$$\sigma_{\max} = \frac{77 \cdot 10^5}{1220} + \frac{7 \cdot 10^3}{83} = 147,6 \text{ МПа}.$$

Окончательно останавливаемся на двутавре № 45.



## РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №5

### РАСЧЕТ ВАЛА ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

Валы двигателей внутреннего сгорания, бортовых передач тракторов, коробок передач тракторов и автомобилей, все так называемые тяжелые валы работают на изгибе с кручением. Под действием приложенных сил в поперечных сечениях вала возникают: крутящий момент  $T$  изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , и при наличии осевых усилий продольная сила  $N$ .

Расчет на прочность ведут по нормальным напряжениям от изгибающих моментов и продольной силы и касательным напряжениям от крутящего момента. Касательные напряжения от поперечных сил невелики, поэтому их не учитывают. Для определения опасного сечения строят эпюры внутренних силовых факторов  $T$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $N$ . Так как в опасных точках опасного сечения возникает плоское напряжение состояние, то расчет вала на прочность производится с использованием теории прочности.

### ПРИМЕР

Для заданного вала (рис. 5.1а), постоянного сечения определить диаметр, используя третью теорию прочности. При расчете левую опору считать неподвижной.

Размеры вала -  $a = 0,1\text{ м}$ ,  $b = 0,5\text{ м}$ ,  $c = 0,1\text{ м}$ ,  $z_2 = 0,05\text{ м}$ .

Нагрузки, приложенные к валу -  $F_1 = 1\text{ кН}$ ,  $F_2 = 2\text{ кН}$ ,  $F_3 = 4\text{ кН}$ ,  $F_4 = 3\text{ кН}$ ,  
 $F_5 = 4\text{ кН}$ .

А – шарнирно-неподвижная опора;

В – шарнирно-подвижная опора.

$$z_1 = \frac{F_4}{F_1} \cdot z_2 = \frac{3}{1} \cdot 0,05 = 0,15\text{ м}.$$

Допускаемое напряжение  $\sigma_{\text{доп}} = 80\text{ МПа}$ .

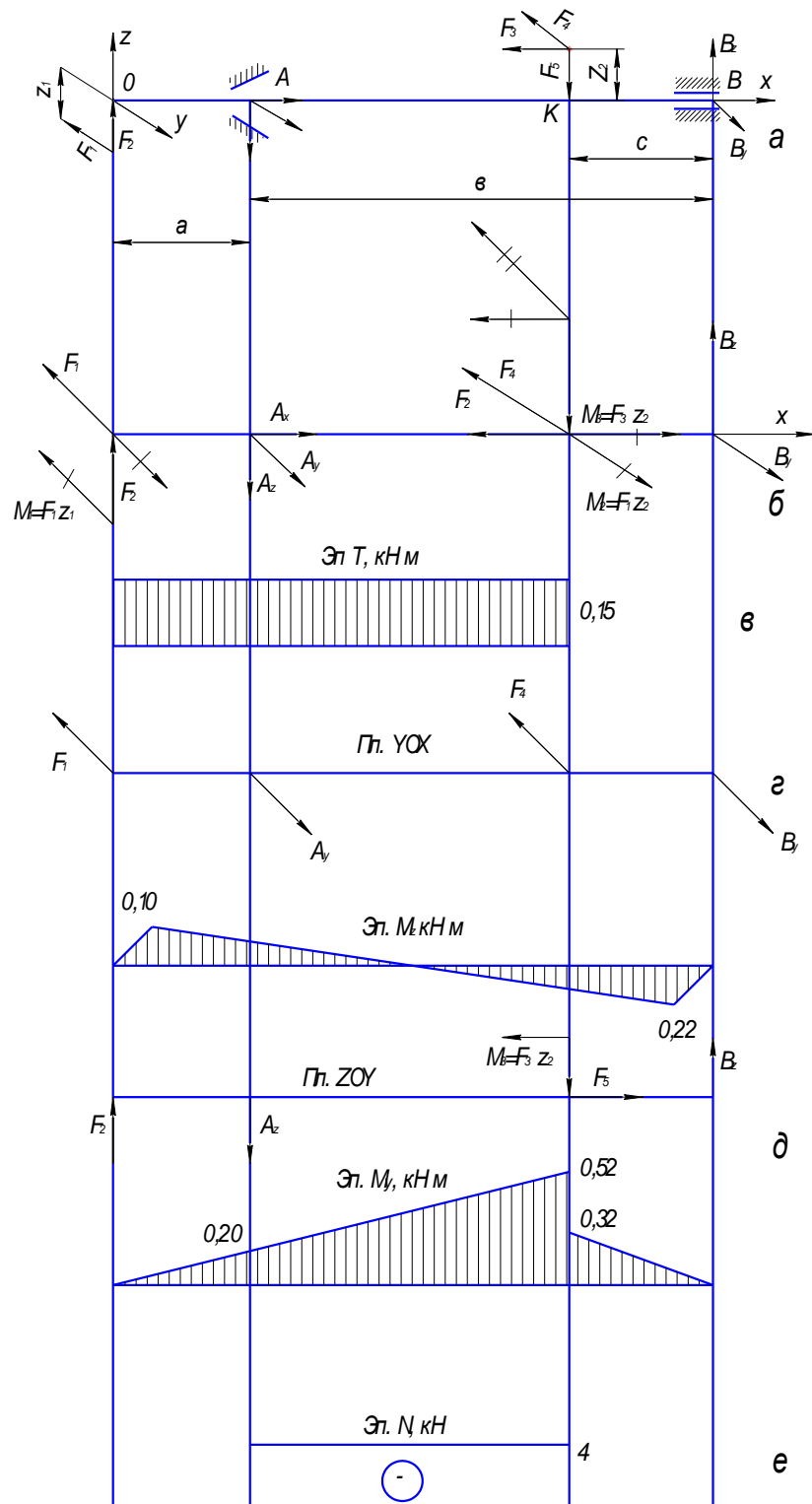


Рисунок 5.1 – Вал, работающий при сложном сопротивлении:

- схема вала и действующих нагрузок;
- расчетная схема;
- эпюра крутящих моментов  $T$ ;
- схема сил, действующих в плоскости YOX и эпюра изгибающих моментов  $M_z$ ;
- схема сил, действующих в плоскости ZOY и эпюра изгибающих моментов  $M_y$ ;
- эпюра нормальной (продольной) силы  $N$ .

## РЕШЕНИЕ

### 1. Составляем расчетную схему

Для составления расчетной схемы приводим силы -  $F_1$ ,  $F_3$  и  $F_4$  к точкам, лежащим на оси вала, (рис. 5.1б). Перенос каждой силы будет сопровождаться появлением изгибающих и крутящих моментов. Силы  $F_1$  и  $F_4$ , перенесенные на ось вала, будут изгибать вал и создавать внешние **крутящие** моменты  $M_1 = F_1 \cdot z_1$  и  $M_2 = F_4 \cdot z_2$ . Сила  $F_3$ , перенесенная на ось вала, будет сжимать вал и вызовет появление момента изгибающего вал,  $M_3 = F_3 \cdot z_2$ .

### 2. Определим опорные реакции

Начало координат помещаем на левом конце вала. Неподвижная опора А имеет три составляющие опорные реакции:  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ . Подвижная опора В - две:  $B_y$ ,  $B_z$ . Для определения опорных реакций в плоскости  $ZOX$  используем уравнение моментов:

$$\sum M_{B_y} = F_5 \cdot c - F_2 \cdot (a+b) - A_z \cdot b + F_3 \cdot z_2 = 0,$$

$$A_z = \frac{F_2 \cdot (a+b) - F_5 \cdot c - F_3 \cdot z_2}{b} = \frac{2 \cdot (1+0,5) - 4 \cdot 0,1 - 4 \cdot 0,05}{0,5} = 1,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_{A_y} = F_3 \cdot z_2 + B_z \cdot b - F_2 \cdot a - F_5 \cdot (a-c) = 0,$$

$$B_z = \frac{F_2 \cdot a + F_5 \cdot (a-c) - F_3 \cdot z_2}{b} = \frac{2 \cdot 0,1 + 4 \cdot (1,5 - 0,1) - 4 \cdot 0,05}{0,5} = 3,2 \text{ кН}.$$

Для определения опорных реакций в плоскости  $YOX$  используем уравнения моментов:

$$\sum M_{B_z} = A_y \cdot b - F_1 \cdot (a+b) - F_4 \cdot c = 0,$$

$$A_y = \frac{F_1 \cdot (a+b) + F_4 \cdot c}{b} = \frac{1 \cdot (0,1+0,05) + 3 \cdot 0,1}{0,5} = 1,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_{A_y} = F_4 \cdot (a-c) - B_y \cdot b - F_1 \cdot a = 0,$$

$$B_y = \frac{F_4 \cdot (a-c) - F_1 \cdot a}{b} = \frac{3 \cdot (0,5-0,1) - 1 \cdot 0,1}{0,5} = 2,2 \text{ кН}.$$

Для определения реакции  $A_x$  составим сумму проекций всех сил на ось  $X$ :

$$\sum X = A_x - F_3 = 0,$$

$$A_x = F_3 = 4 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности вычисления составляющих опорных реакций вычислим сумму проекций всех сил на ось  $Y$  и  $Z$ :

$$\sum Y = A_y + B_y - F_1 - F_4 = 1,8 + 2,2 - 1 - 3 = 0,$$

$$\sum Z = F_2 - A_z - F_5 + B_z = 2 - 1,2 - 4 + 3,2 = 0.$$

Реакции вычислены верно.

### 3. Строим эпюру крутящего момента $T$

Внешние моменты  $M_1 = F_1 \cdot z_1$  и  $M_2 = F_4 \cdot z_2$  приложенные в валу, образуют уравновешенную систему сил. Крутящий момент, определяемый через внешние моменты, будет равен:

$$T = F_1 \cdot z_1 = F_4 \cdot z_2 = 1 \cdot 0,15 = 3 \cdot 0,05 = 0,15 \text{ кН}$$

Эпюра крутящего момента представлена на рисунок 5.1в.

#### 4. Строим эпюры изгибающих моментов $M_z$ и $M_y$

Для построения эпюр изгибающих моментов вычислим усилия в характерных сечениях (над опорами, в точках приложения сосредоточенных сил, моментов), отложим в этих местах ординаты, а затем проведем линии эпюр.

Эпюры строим на сжатом волокне.

4.1 Определяем изгибающие моменты, действующие в горизонтальной плоскости  $YOX$ , то есть  $M_z$ .

В точке  $O$ :  $M_1 = 0$ .

В сечении над опорой  $A$ :  $M_2 = F_1 \cdot a = 1 \cdot 0,1 = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

В точке  $K$ :  $M_3 = F_1 \cdot \overset{+}{\underset{-}{1}} + \overset{-}{\underset{-}{c}} \overset{+}{\underset{-}{A_y}} \cdot \overset{-}{\underset{-}{c}}$ ,

$$M_3 = 1 \cdot \overset{+}{\underset{-}{1}} + 0,5 - 0,1 \overset{-}{\underset{-}{1,8}} \cdot \overset{-}{\underset{-}{0,5 - 0,1}} \overset{+}{\underset{-}{}} = -0,22 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В сечении над опорой  $B$ :  $M_4 = 0$ .

По полученным данным строим эпюру  $M_z$  (рисунок 5.1г).

4.2 Определяем изгибающие моменты, действующие в вертикальной плоскости  $ZOX$ , то есть  $M_y$ .

В точке  $O$ :  $M_1 = 0$ .

В сечении над опорой  $A$ :  $M_2 = F_2 \cdot a = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

В точке  $K$ :  $M_3 = F_2 \cdot \overset{+}{\underset{-}{1}} + \overset{-}{\underset{-}{c}} \overset{+}{\underset{-}{A_z}} \cdot \overset{-}{\underset{-}{c}}$ ,

$$M_3 = 2 \cdot \overset{+}{\underset{-}{1}} + 0,5 - 0,1 \overset{-}{\underset{-}{1,2}} \cdot \overset{-}{\underset{-}{0,5 - 0,1}} \overset{+}{\underset{-}{}} = 0,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В сечении чуть правее точки  $K$ :  $M_4 = B_z \cdot c = 3,2 \cdot 0,1 = 0,32 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

По полученным выражениям строим эпюру изгибающего момента  $M_y$  (рисунок 5.1д).

## 5. Строим эпюру нормальной силы $N$

На ось вала проектируются силы  $A_x$  и  $F_3$ , которые будут вызывать сжатие вала на участке между неподвижной опорой  $A$  и точкой приложения силы  $F_3$ .

$$N = -A_x = -F_3 = -4кН.$$

Эпюра продольной силы представлена на рисунке 5.1е.

## 6. Определяем внутренние силовые факторы в опасном сечении

Опасное сечение вала устанавливаем по эпюрам крутящих  $T$ , изгибающих  $M_z$  и  $M_y$  моментов и продольной силы  $N$ .

Для вала с постоянным диаметром опасным является сечение, где действуют наибольшие крутящий момент, изгибающие моменты и продольная сила. Сопоставляя эпюры  $T$ ,  $M_z$ ,  $M_y$  и  $N$ , находим, что опасным является сечение, проходящие через точку  $K$  где одновременно действуют:

$$T = 0,15кН \cdot м;$$

$$M_z = 0,52кН \cdot м;$$

$$M_y = 0,22кН \cdot м;$$

$$N = -4кН.$$

## 7. Определяем диаметр вала

Обычно нормальные напряжения, вызываемые продольной силой  $N$ , малы сравнению с нормальными напряжениями, вызываемыми изгибающим моментом. Поэтому для облегчения расчета вначале определим диаметр вала, пренебрегая действием продольной силы  $N$ . Затем несколько увеличим полученное по расчету значение  $d$  и произведем проверку. При

неудовлетворительных результатах проверки следует внести коррективы в значение  $d$  и повторить производимый расчет.

Диаметр вала из расчета на изгиб с кручением определяем по формуле:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{np}}{\sigma_{\text{доп}}}}$$

где  $M_{np}$  - приведенный момент, кН·м,

$\sigma_{\text{доп}}$  - допускаемое напряжение, Мпа.

По 3-ей теории прочности приведенный момент равен:

$$M_{np} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} = \sqrt{0,52^2 + 0,22^2 + 0,15^2} = 0,59 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Тогда диаметр вала будет равен:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 0,59 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6}} = 0,0419 \text{ м}.$$

Округляем до ближайшего значения  $d = 42 \text{ мм}$ .

Проверяем прочность найденного диаметра вала с учетом действия продольной силы по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M}{W}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq \sigma_{\text{доп}},$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения вала, м. Для вала круглого поперечного

$$\text{сечения } A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,042^2}{4} = 13,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$W$  - осевой момент сопротивления, м<sup>3</sup>. Для вала круглого поперечного

$$\text{сечения } W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = 0,1 \cdot d^3 = 0,1 \cdot 0,042^3 = 7,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$W_p$  - полярный момент сопротивления,  $\text{м}^3$ . Для вала круглого поперечного

$$\text{сечения } W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot 0,042^3 = 14,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Подставляя найденные значения, получим:

$$\sigma = \sqrt{\left( \frac{4 \cdot 10^3}{13,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,52 \cdot 10^3}{7,4 \cdot 10^{-6}} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{0,15 \cdot 10^3}{14,8 \cdot 10^{-6}} \right)^2} = 75,9 \text{ МПа},$$

Условие выполняется.



## РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №6

### РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ВЫНОСЛИВОСТЬ

На стойку, составленную из нескольких профилей, соединенных планками, или тонкостенный стержень действует сжимающая сила  $F$ .

Материал – сталь Ст 3 ГОСТ 380–71. Основное допускаемое напряжение на сжатие  $\sigma_{сж} = 160 \text{ МПа}$ .

Требуется:

1. Подобрать сечение стойки из условия устойчивости.
2. Определить ширину сечения стойки  $B$ .
3. Определить расстояние между соединительными планками  $l_0$ , ширину  $H$  и толщину  $t_{пл}$  соединительных планок (для стойки состоящей из нескольких профилей).

Порядок расчета рассмотрим на примере.

#### ПРИМЕР

На стойку, составленную из двух двутавров с шарнирно закрепленными концами (рисунок 6.1), действует сжимающая сила  $F = 500 \text{ кН}$ . Определить сечение стойки (номер двутавра), ширину сечения стойки  $B$ , расстояние между соединительными планками  $l_0$  и размеры соединительных планок  $H$ .

#### РЕШЕНИЕ

1. Подбор сечения стойки из условия устойчивости

Условие устойчивости стержня имеет вид:

$$\frac{F}{\varphi \cdot A} \leq \sigma_{сж}^*$$

где  $\varphi$  - коэффициента продольного изгиба;

$F$  - сжимающая сила, кН;

$A$  - площадь поперечного сечения стойки, м<sup>2</sup>;

$\sigma_{сж}$  - допускаемое напряжение, Мпа.

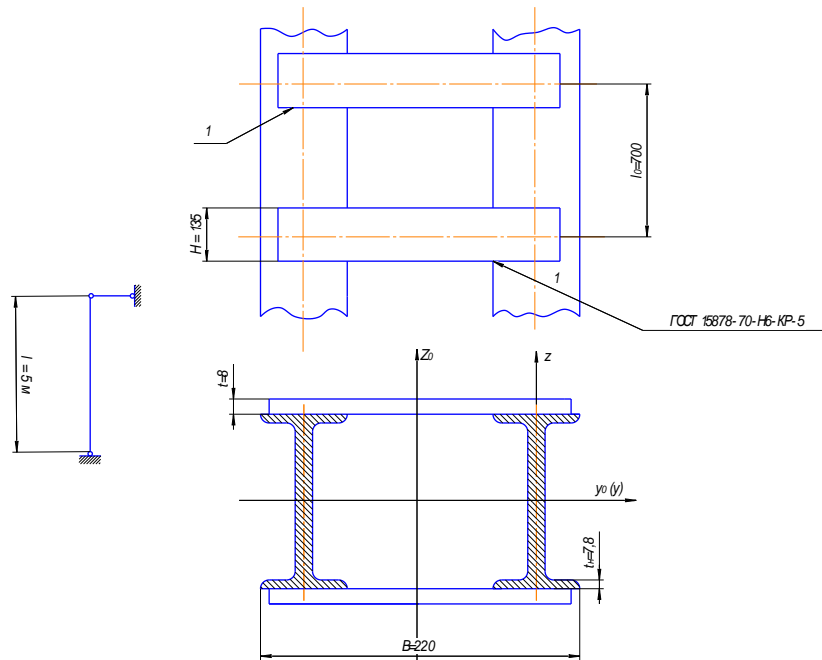


Рисунок 6.1

При проектировочном расчете (подбор потребного диаметра стержня) задача решается методом последовательных приближений. Выбираем в первом приближении  $\varphi_1 = 0,5$  из интервала  $0 < \varphi < 1$  и определяем потребную площадь поперечного сечения стержня в первом приближении.

1.1 Первое приближение  $\varphi_1 = 0,5$ .

Находим требуемую площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot \sigma_{сж}} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По сортаменту прокатной стали ГОСТ 8239-72 подбираем двутавр № 22,  $A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $I_y = 2790 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $i_y = 0,0922 \text{ м}$ .

Определяем гибкость стойки по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

где  $\lambda$  - гибкость стойки;

$\mu$  - коэффициент длины, отражающий влияние условий закрепления;

$l$  - длина стойки, м;

$i_{\min}$  - минимальный радиус инерции, м.

Для определения  $i_{\min}$  необходимо знать минимальные моменты инерции поперечного сечения стойки. При увеличении расстояния между двутаврами момент инерции сечения стойки  $I_{z_0}$  относительно оси  $Z_0$  будет увеличиваться, а относительно оси  $Y_0$  изменяться не будет и останется равным  $I_{y_0} = 2I_y$ , где  $I_y$  - момент инерции сечения одной ветви стойки относительно центральной оси двутавра. Поэтому в качестве минимального момента инерции поперечного сечения стойки принимается  $I_y$ , тогда:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2790 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 32,8 \cdot 10^{-4}}} = 0,092 \text{ м}.$$

Полученное значение совпадает с табличным значением  $i_y = 0,0922 \text{ м}$  и надобность в его вычислении отпадает. Для стойки, составленной из углов или тонкостенного стержня, гибкость определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,092} = 54,3.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\lambda = 50 - \varphi = 0,89, \quad \lambda = 60 - \varphi = 0,86.$$

Интерполируя получим:

$$\varphi_1 = \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot 5,7 + 0,86 = 0,8771.$$

Вычислим напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1 \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,8771 \cdot 65,6 \cdot 10^{-4}} = 87 \text{ МПа}.$$

Материал значительно недогружен.

1.2 Перейдем ко второму приближению, приняв

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,8771}{2} = 0,688.$$

Искомая площадь

$$A = \frac{F}{\varphi_2 \cdot \sigma_{сж}} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,688 \cdot 160 \cdot 10^6} = 45,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Подбираем двутавр № 18,  $A = 23,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $i_y = 0,074 \text{ м}$ .

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,074} = 67,4.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi_2 = \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 2,6 + 0,81 = 0,823.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2 \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,823 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4}} = 130 \text{ МПа}.$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160 - 130}{160} \cdot 100 = 18,8\% > 1\%,$$

что недопустимо.

1.3 Переходим к третьему приближению, приняв

$$\varphi_3 = \frac{0,688 + 0,823}{2} = 0,755.$$

Искомая площадь

$$A = \frac{500 \cdot 10^3}{0,755 \cdot 160 \cdot 10^6} = 41,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По таблице ГОСТ 8239-72 получаем двутавр № 18.

В дальнейших расчетах принимаем двутавр № 16,  $A = 20,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,

$$I_y = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, I_z = 58,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, i_y = 0,0657 \text{ м}, i_z = 0,017 \text{ м}, B = 0,081 \text{ м}.$$

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 5}{0,0657} = 76.$$

По таблице для стали марки Ст 3 ГОСТ 380-71:

$$\varphi_3 = \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 4 + 0,75 = 0,774.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{500 \cdot 10^3}{0,774 \cdot 40,4 \cdot 10^{-4}} = 159,9 \text{ МПа}.$$

Недогружение составляет:

$$\frac{160-159,9}{160} \cdot 100 = 0,0625\% < 1\% ,$$

Окончательно принимаем для стойки двутавра № 16.

2. Определяем ширину сечения стойки  $B$ , рисунок 6.2

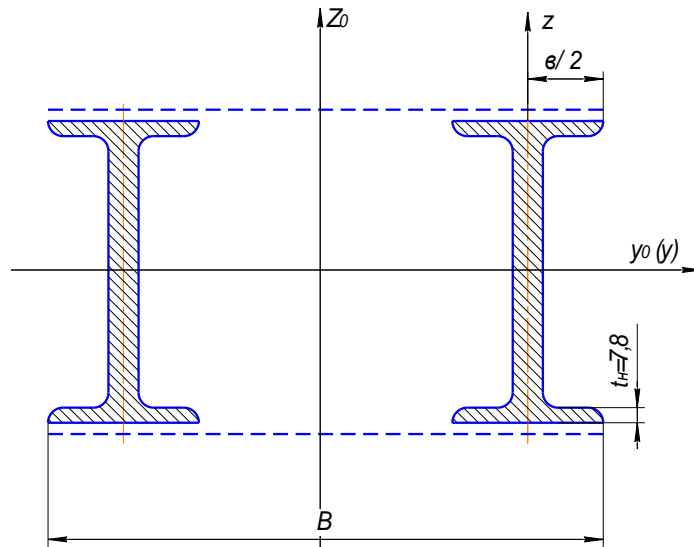


Рисунок 6.2

Для обеспечения равно устойчивого положения принимаем:  $I_{z_0} = I_{y_0}$ ,

тогда:

$$I_{z_0} = 2 \left[ I_z + A \cdot \left( \frac{B}{2} - b \right)^2 \right] = 2I_y ,$$

$$I_z + A \cdot \left( \frac{B}{2} - \frac{b}{2} \right)^2 = I_y ,$$

$$\left( \frac{B}{2} - \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{I_y - I_z}{A} ,$$

$$B = 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{I_y - I_z}{A}} + \frac{b}{2} \right) .$$

Подставляя известные значения, получим:

$$B = 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{873 \cdot 10^{-8} - 58,6 \cdot 10^{-8}}{20,2 \cdot 10^{-4}} + \frac{8,1 \cdot 10^{-2}}{2}} \right) = 0,208 \text{ м} .$$

Принимаем  $B = 0,208\text{ м}$ .

3. Определим расстояние между соединительными планками  $l_0$ , ширину  $H$  и толщину  $t_{II}$  соединительных планок (для стойки состоящей из нескольких профилей).

Согласно строительным нормам и правилам (СНиП) максимальная гибкости отдельных ветвей между планками не должна превышать 40, т.е.  $\lambda \leq 40$ . Рассматривая участок ветви между планками как стержень с шарнирно - закрепленными концами ( $\mu = 1$ .), получим:

$$\lambda = \frac{l_0}{\mu \cdot i_{\min}} \leq 40,$$

откуда

$$l_0 \leq \mu \cdot i_{\min} \cdot 40,$$

где  $i_{\min}$  - минимальный радиус инерции одной ветви стойки.

В нашем случае  $i_{\min} = i_z$ , тогда

$$l_0 = 1 \cdot 0,017 \cdot 40 = 0,68\text{ м}.$$

Округляем:  $l_0 = 0,7\text{ м}$ .

Размеры соединительных планок принимаем из конструктивных соображений.

$$H = (0,6 \dots 0,8) \cdot B.$$

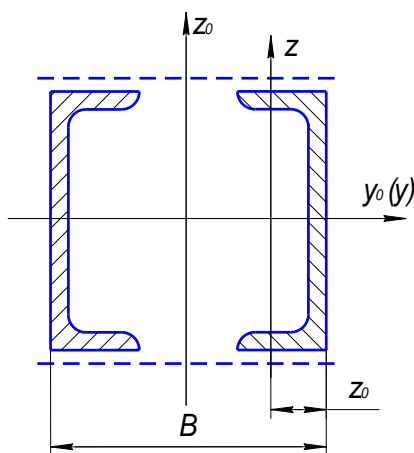
Принимаем  $H = 135\text{ мм}$ .

$$t_{II} \cong t = 0,008\text{ м},$$

где  $t$  - средняя толщина полки, м

# СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ СЕЧЕНИЙ

## 1. Стойка, состоящая из двух швеллеров



Для обеспечения устойчивости

$$I_{Z_0} = I_{y_0},$$

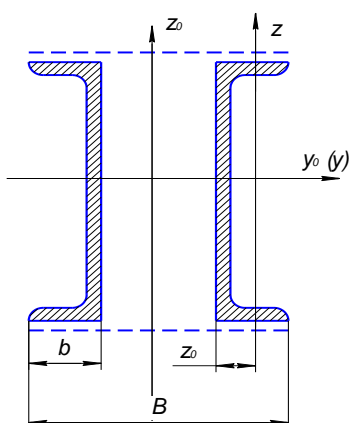
$$I_{Z_0} = 2 \left[ I_z + A \cdot \left( \frac{B}{2} - Z_0 \right)^2 \right] = 2I_y,$$

откуда  $B = 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{I_y - I_z}{A}} + Z_0 \right),$

где  $I_y, I_z$  - осевые моменты инерции;

$A$  - площадь швеллера;

$Z_0$  - расстояние между полкой и центром тяжести сечения (приводиться в таблице).

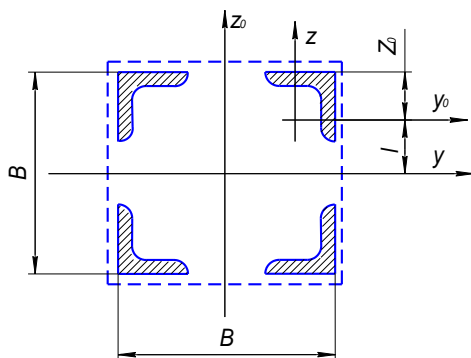


$$I_{Z_0} = I_{y_0},$$

$$I_{Z_0} = 2 \left[ I_z + A \cdot \left( \frac{B}{2} - Z_0 \right)^2 \right] = 2I_y,$$

откуда  $B = 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{I_y - I_z}{A}} + b - Z_0 \right).$

## 2. Стойка из четырех углов



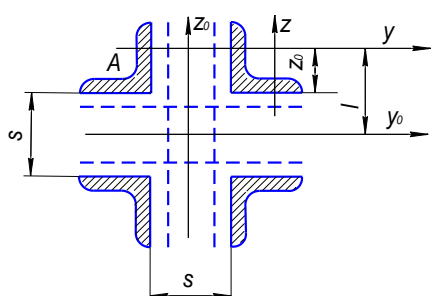
$$I_{Z_0} = I_{y_0},$$

$$i = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A_{ос}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (I_y + A \cdot l^2)}{4 \cdot A}} = \sqrt{\frac{I_y + A \cdot l^2}{A}},$$

где  $l = \frac{S}{2} + Z_0;$

$S$  - расстояние между ветвями;

$A$  - площадь уголка.



$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{I_y + A \cdot l^2}{A}},$$

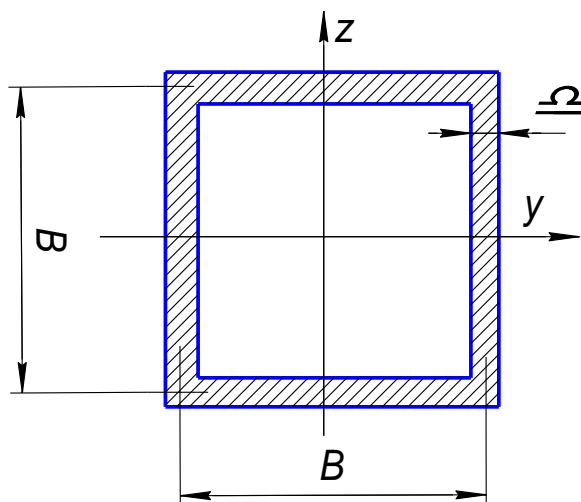
где  $l = \frac{B}{2} - Z_0;$

$B$  - сечение стойки (ширина).



## ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

### 1. Квадрат



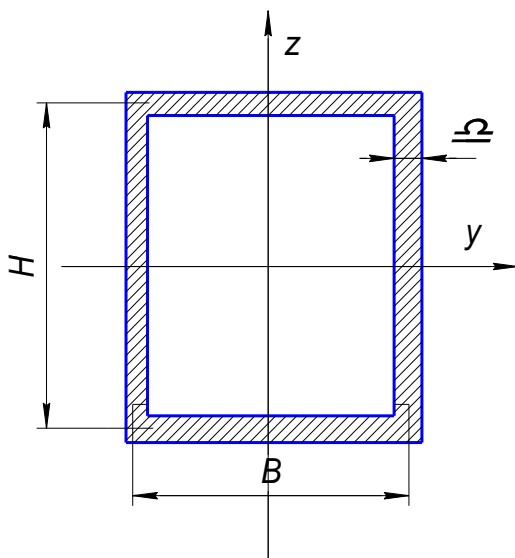
$$A = 4 \cdot B \cdot \delta,$$

$$I_y = I_z = \frac{2}{3} \cdot B^3 \cdot \delta,$$

$$i_y = i_z = \frac{B}{\sqrt{6}} = 0,406 \cdot B,$$

при  $\delta < \frac{B}{15}$ .

### 2. Прямоугольник



$$A = 2 \cdot \delta \cdot (B + H),$$

$$I_y = \frac{\delta \cdot H^3}{6} \cdot \left( \frac{3 \cdot B}{H} + 1 \right),$$

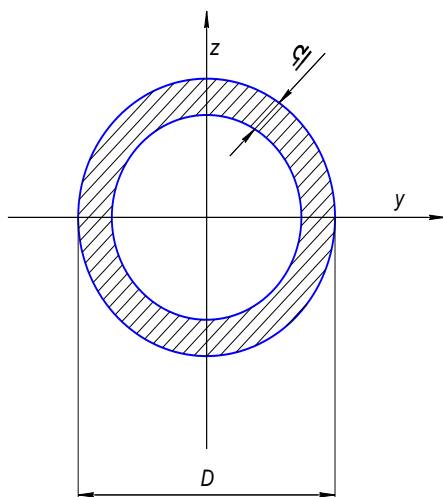
$$I_z = \frac{\delta \cdot B^3}{6} \cdot \left( \frac{3 \cdot H}{B} + 1 \right),$$

$$i_y = 0,298 \cdot H \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot B + H}{B + H}},$$

$$i_z = 0,298 \cdot B \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot H + B}{H + B}},$$

при  $\delta < \frac{H}{15}$ .

### 3. Кольцо



$$A = \pi \cdot D \cdot \delta,$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot \delta}{8} = 0,3926 \cdot D^3 \cdot \delta,$$

$$i_y = i_z = \frac{D}{2\sqrt{2}} = 0,353 \cdot D,$$

при  $\delta < \frac{D}{10}$ .