МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И.Т. Трубилина»

КАФЕДРА СТАТИСТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания и задания для практических занятий и самостоятельной работы для магистров по направлению 38.04.08 Финансы и кредит

Краснодар
КубГАУ
2017

Математическое обеспечение финансовых решений: метод. указания и задания для практических занятий и самостоятельной работы по направлению 38.04.08 «Финансы и кредит» / А.Е. Жминько, И.А. Кацко, А.Е. Сенникова – Краснодар : КубГАУ, 2017

Введение

В рыночной экономике от специалиста требуется умение оценивать возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. При этом следует учитывать, что принятие управленческих решений финансового характера всегда осуществляется в условиях неопределенности.

Цель изучения курса «Математическое обеспечение финансовых решений» – дать целостную концепцию количественного финансового анализа условий и результатов финансово-кредитных и коммерческих сделок, связанных с предоставлением денег в долг.

Рекомендуется следующий порядок изучения дисциплины: ознакомиться с программой, изучить рекомендованную литературу, разобраться с методикой решения типичных задач, выполнить письменную контрольную работу.

Рекомендуемая литература

1. Ильичев Е.В. Элементарные основы квантовых вычислений. Упражнения и задачи [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Е.В. Ильичев, Я.С. Гринберг— Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014. — 28 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45209.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю

2. Синицын Е.В. Приемы финансовых вычислений в условиях определенности. Практикум [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Е.В. Синицын— Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2014. — 64 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68279.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю.

3. Учебно-методическое пособие по дисциплине Основы финансовых вычислений [Электронный ресурс]/ — Электрон. текстовые данные.— М.: Московский технический университет связи и информатики, 2016.— 40 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61519.html.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

Тема 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ. КОНВЕРСИИ РЕНТ

В практике встречаются случаи, когда члены потока платежей изменяются в течение срока ренты. Изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка, а иногда и случайными факторами.

Поток последовательных платежей, члены которого не являются постоянными величинами, называется ***переменной рентой***. Изменение величины платежей может быть описано каким-либо законом или носить нерегулярный характер. При этом определяются параметры следующих видов рент:

а) ренты с разовыми изменениями платежей

Наращенная сумма годовой ренты

$$S = R_1 \cdot s_{n_1;i_1} \cdot (1+i_1)^{n-n_1} + R_2 \cdot s_{n_2;i_2} \cdot (1+i_2)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k \cdot s_{n_k;i_k}, \qquad (1.1)$$

где $s_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коэффициент наращения годовой ренты.

Современная величина годовой ренты

$$A = R_1 \cdot a_{n_1;i_1} + R_2 \cdot a_{n_2;i_2} \cdot v^{n_1} + \ldots + R_k \cdot a_{n_k;i_k} \cdot v^{n-n_k}, \qquad (1.2)$$

где $a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$v = \dfrac{1}{(1+i)}$ – дисконтный множитель по ставке i;

n – срок ренты, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_к$;

$n_1, n_2, \ldots, n_к$ – продолжительность временных отрезков;

$R_1, R_2, \ldots, R_к$ - годовой платеж в соответствующем временном отрезке;

$i_1, i_2, \ldots, i_к$ – процентные ставки.

Если платежи вносятся несколько раз в году, то коэффициенты наращения ($s_{n;i}^{(p)}$) или приведения ($a_{n;i}^{(p)}$) рассчитываются как для p-срочной ренты.

б) ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов

Наращенная сумма переменной ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов составит:

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right), \qquad (1.3)$$

где d – разность арифметической прогрессии (величина абсолютного годового изменения членов ренты с соответствующим знаком),

R – первый член ренты.

Современная величина данной ренты составит:

$$A = R \cdot a_{n;i} + \frac{d}{i}\left(a_{n;i} - nv^n\right). \qquad (1.4)$$

Зная значение постоянного прироста d, процентной ставки i, наращенной суммы S или текущей суммы долга A, определяется размер первого платежа R:

$$R = \frac{S - \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right)}{s_{n;i}}; \quad (1.5)$$

$$R = \frac{A - \frac{d}{i}\left(a_{n;i} - nv^n\right)}{a_{n;i}}. \quad (1.6)$$

Величина абсолютного прироста d определяется по формулам:

$$d = \frac{i\left(S - R \cdot s_{n;i}\right)}{s_{n;i} - n};$$

$$d = \frac{i\left(A - R \cdot a_{n;i}\right)}{a_{n;i} - nv^n}. \quad (1.7)$$

Для переменной p-срочной ренты с постоянным абсолютным приростом платежей наращенная сумма и современная стоимость определяются по формулам:

$$S = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{d}{p}(t-1)\right)(1+i)^{n-t/p}; \quad (1.8)$$

$$A = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{d}{p}t\right)v^{t/p}. \quad (1.9)$$

в) ренты с постоянным относительным приростом платежей

Наращенная сумма и современная стоимость ренты составят:

а) при ежегодных платежах

$$S = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}; \quad (1.10)$$

$$A = R\frac{(qv)^n - 1}{q - (1+i)}, \quad (1.11)$$

где q – знаменатель прогрессии, т.е. коэффициент роста;

б) при p-срочной ренте

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}}; \quad (1.12)$$

$$A = R\frac{q^{np}v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}}. \quad (1.13)$$

Расчеты по коммерческим сделкам могут предусматривать изменение условий оплаты, которое называется ***конверсией финансовых рент***. Простейшими случаями конверсии являются ***выкуп*** ренты (замена ренты разовым платежом) и ***рассрочка*** платежа (замена разового платежа рентой).

Замена нескольких рент одной, параметры которой надо определить, называется ***консолидацией*** рент. Современная величина вновь образованной консолидированной ренты должна быть равна сумме современных величин консолидируемых рент:

$$A=\sum_{q=1}^{K}A_q=\sum_{q=1}^{K}R_q\cdot a_{n_q;i_q}\ , \tag{1.14}$$

где А – современная величина консолидированной ренты;

A_q – современная величина q-ой заменяемой ренты, q=1, 2, …, K;

K – число консолидируемых рент;

R_q – член q-ой ренты;

n_q и i_q – соответственно продолжительность и процентная ставка q-ой ренты.

Член консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$R=\frac{A}{a_{n;i}}=\frac{\sum_{q=1}^{K}A_q}{a_{n;i}}=\frac{\sum_{q=1}^{K}R_q\cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n;i}}\ , \tag{1.15}$$

где $a_{n;i}$ – коэффициент приведения консолидированной ренты.

Член консолидированной отсроченной ренты определяется по формуле:

$$R_{отсроч.}=\frac{A}{a_{n-t;i}\cdot v^t}=\frac{\sum_{q=1}^{K}A_q}{a_{n-t;i}\cdot v^t}=\frac{\sum_{q=1}^{K}R_q\cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n-t;i}\cdot v^t}, \tag{1.16}$$

где $a_{n-t;i}=\frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{i}$ – коэффициент приведения отсроченной консолидированной ренты;

t – продолжительность отсрочки, лет;

i – процентная ставка консолидированной ренты;

$v^t=\frac{1}{(1+i)^t}$ – дисконтный множитель за период t, на который отложена рента.

Срок консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$n=\frac{-\ln\left(\frac{1}{K}\sum_{q=1}^{K}\frac{1-(1+i_q)^{-n_q}}{i_q}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{1.17}$$

Если процентные ставки объединяемых рент и вновь создаваемой равны между собой, т.е. $i_1=i_2=\ldots=i_q=i$, то

$$n=\frac{\ln K-\ln\sum_{q=1}^{K}(1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}. \tag{1.18}$$

Замена немедленной ренты на отсроченную, т.е. когда первый платеж по ренте переносится на более поздний срок в t лет. При этом возможны следующие варианты конверсии:

1) общая продолжительность ренты остается прежней, т.е. $n_1 = n_2 = n$, рентный платеж составит:

$$R_2 = \frac{A_1}{a_{n;i} \cdot v^t} = \frac{R_1}{v^t} = R_1 (1+i)^t, \tag{1.19}$$

где R_1 и R_2 – годовые платежи соответственно первоначальной и отсроченной ренты;

$a_{n;i}$ – коэффициент приведения первоначальной годовой ренты;

t - продолжительность отсрочки;

2) общая продолжительность ренты изменяется, т.е. $n_1 \neq n_2$, рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = \frac{A_1 \cdot (1+i)^t}{a_{n_1;i}} = R_1 \cdot \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} \cdot (1+i)^t, \tag{1.20}$$

где $a_{n_1;i}$ и $a_{n_2;i}$ – коэффициенты приведения соответственно первоначальной и отложенной рент;

3) члены ренты остаются неизменными, т.е. $R_1 = R_2$, тогда срок отложенной ренты составит:

$$n_2 = \frac{-\ln\left(1 - \left(1 - (1+i)^{-n_1}\right)(1+i)^t\right)}{\ln(1+i)}.$$

Замена годовой ренты на р-срочную. Годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1 заменяется на p-срочную с параметрами R_2, n_2, p. Если заданы срок заменяющей ренты, ее периодичность и ставка, то

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}^{(p)}}, \tag{1.21}$$

где $a_{n_1;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n_1}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$a_{n_2;i}^{(p)} = \dfrac{1-(1+i)^{-n_2}}{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}$ – коэффициент приведения p-срочной ренты.

Если $n_1 = n_2 = n$, то

$$R_2 = R_1 \frac{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}{i}. \tag{1.22}$$

При ***изменении продолжительности ренты*** размер нового рентного платежа составит

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}. \tag{1.23}$$

При ***изменении срочности ренты*** (числа выплат в году) годовой рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n;i}^{(p_1)}}{a_{n;i}^{(p_2)}} = R_1 \frac{p_1\left((1+i)^{1/p_1} - 1\right)}{p_2\left((1+i)^{1/p_2} - 1\right)}, \qquad (1.24)$$

где p_1 и p_2 – характеристики срочности двух рент.

Пример 1.1 По условиям контракта платежи вносятся в конце года, первый платеж составляет 2 млн. руб., каждый год его величина возрастает на 200 тыс. руб., срок выплат 4 года, процентная ставка 8%. Определить наращенную сумму.
Решение. Параметры ренты:

$$R = 2000000 \text{ руб.}; \ n = 4; \ i = 0{,}08; \ d = 200000 \text{руб.};$$

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}08)^4 - 1}{0{,}08} = 4{,}506112.$$

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right) = 2000000 \cdot 4{,}506112 + \frac{200000}{0{,}08}(4{,}506112 - 4) = 10277504 \text{ руб.}$$

Пример 1.2 Клиентом получен кредит сроком на 7 лет, при следующих условиях погашения: первый платеж 2 млн. руб., каждый следующий возрастает на 10%, платежи вносятся два раза в году, процентная ставка 8% годовых. Определить размер полученного кредита и сумму долга, подлежащую возврату.
Решение. Параметры ренты:

$$R = 2000000 \text{ руб.}; \ n = 7; \ i = 0{,}08; \ p = 2; \ q = 1{,}1.$$

Размер полученного кредита – это современная стоимость ренты.

$$A = R\frac{q^{np} v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000 \frac{1{,}1^{14} \cdot 1{,}08^{-7} - 1}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 40000000 \text{ руб.}$$

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000 \frac{1{,}1^{14} - 1{,}08^7}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 68576300 \text{ руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1 Предприятием был получен кредит на 10 лет. Условия погашения кредита следующие: в первые пять лет платежи размером 6 млн. руб. вносятся каждый год под 11% годовых; следующие три года платежи размером 4 млн. руб. вносятся по полугодиям под 9% годовых. Последние два года ежеквартально вносятся платежи размером 3 млн. руб. под 8% годовых. Определите наращенную сумму долга по кредиту. Рассчитайте современную стоимость кредита.

1.2 Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 7 лет: а) в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 60 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 3000 руб.; б) каждое полугодие будут поступать платежи, первый из которых составит 35 тыс. руб., а каждый последующий будет увеличиваться на 1700 руб. Определите наращенную стоимость и приведенную величину этого аннуитета, если банк применяет процентную ставку 12% годовых, а сложные проценты начисляются один раз в конце года.

1.3 По условиям контракта на счет клиента в банке поступают в течение 6 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 150 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 11%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 10% годовых.

1.4 За 5 лет необходимо накопить 1000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 15%, а процентная ставка равна 11% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Как изменится величина первого вклада, если предполагается ежеквартальный рост поступлений на 6%?

1.5 За 10 лет необходимо накопить 5000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 10000 руб., а процентная ставка равна 10% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 150 тыс. руб.

1.6 Три немедленные годовые ренты постнумерандо, с характеристиками: $R_q = 130$; 220 и 300 тыс. руб.; $n_q = 5$; 12 и 8 лет; $i_q = 14$; 22 и 18% ; заменяются: а) одной немедленной рентой постнумерандо со сроком 10 лет и процентной ставкой 20% годовых; б) одной отсроченной на 3 года рентой с общим сроком 10 лет, включая отсрочку, и процентной ставкой 20% годовых. Определите величину годового платежа консолидированной ренты.

1.7 Объединяются три ренты со сроками $n_q = 7$; 4 и 9 лет, члены рент равны между собой, а $R_q = 500$ тыс. руб.; процентные ставки также равны и составляют $i_q = 8\%$. Размер консолидированного годового платежа равен 1,5 млн. руб., процентная ставка сохраняется на уровне 8% годовых. Определите срок новой ренты.

1.8 Фирма по торговле недвижимостью продает объект стоимостью 3,5 млн. руб. При этом предлагаются следующие варианты оплаты: а) оплата в течение трех лет равными платежами, вносимыми в конце года под 9% годовых; б) оплата с отсрочкой платежа в один год, остальные условия аналогичны предыдущему варианту; в) оплата с отсрочкой в один год, но срок ренты возрастает до четырех лет. Определите финансовые последствия для каждого варианта.

1.9 По условиям договора немедленная годовая рента сроком четыре года, величиной годового платежа 200 тыс. руб. и процентной ставкой 10 % годовых, заменяется отсроченной на два года рентой. Определите срок новой ренты при сохранении остальных параметров.

1.10 По условиям соглашения между кредитором и заемщиком годовая рента постнумерандо с величиной годового платежа 180 тыс. руб., сроком три года и ставкой 14% годовых, заменяется на квартальную при сохранении остальных параметров. Оцените новый аннуитет. Как изменятся параметры аннуитета, если срок ренты увеличится до четырех лет?

Вопросы для самоконтроля.

1. Какой аннуитет называется переменным?
2. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
3. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным относительным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
4. Перечислите виды конверсии ренты.
5. Что такое консолидация ренты?
6. Что такое отсроченная рента?

Тема 2. ПОГАШЕНИЕ ДОЛГОСРОЧНЫХ КРЕДИТОВ

В банковской практике стран со стабильной экономикой и невысокой инфляцией (до 10% в год) среднесрочным считается кредит, выданный на срок от 2 до 5 лет, если срок кредита составляет 5 и более лет, то он является долгосрочным.

Стороны сделки выбирают удобные для них условия погашения долгосрочных кредитов в виде постоянных и переменных финансовых рент, а также нерегулярных потоков платежей. Затем, в соответствии с условиями контракта, составляется план погашения задолженности. Одним из важных элементов этого плана является определение числа срочных выплат и их величины.

Срочные выплаты – это денежные средства, предназначенные для погашения как основного долга, так и текущих процентных платежей. Величина срочных уплат зависит от суммы кредита, его срока, наличия и продолжительности льготного периода, размера процентной ставки и других условий.

Погашение долга в рассрочку

а) Погашение займа производится равными срочными выплатами, когда каждая срочная выплата Y является суммой двух величин: годового расхода по погашению основного долга R и процентного платежа по займу I, т.е. $Y = R + I$.

Величина долгосрочного кредита D равна сумме всех дисконтированных платежей, т.е. является современной величиной всех срочных выплат:

$$D = \frac{Y_1}{(1+i)} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}$$

Если все срочные выплаты по кредиту равны между собой, т.е. $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n$ с одинаковой процентной ставкой , то величина кредита составит:

$$D = Y\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}, \qquad (2.1)$$

а величина срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}. \quad (2.2)$$

Зная первую процентную выплату $I_1 = i \cdot D$ и величину срочной выплаты Y, можно определить сумму первого погашения основного долга $R_1 = Y - I_1$. Это, в свою очередь, дает остаток долга на второй расчетный период $D_2 = D - R_1$, который является базой для начисления процентов в следующем году $I_2 = i \cdot D_2$, что позволит определить величину платежа основного долга во втором году $R_2 = Y - I_2$ и т.д.

Выплата основного долга R_k в k-ом периоде времени

$$R_k = Y(1+i)^{-n+k-1}, \quad (2.3)$$

где $k = 1,2,...n$ - порядковый номер расчетного периода времени.

Остаток основной суммы задолженности в k-ом периоде

$$D_k = \frac{D((1+i)^n - (1+i)^{k-1})}{(1+i)^n - 1}. \quad (2.4)$$

Сумма начисленных процентов в k-ом периоде времени

$$I_k = Y(1-(1+i)^{-n+k-1}). \quad (2.5)$$

Если процентная ставка по займу изменяется во времени, то величина годовой срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y_k = D_k \frac{i_k(1+i_k)^{n-k+1}}{(1+i_k)^{n-k+1} - 1}. \quad (2.6)$$

б) Погашение займа производится равными выплатами основного долга, то в этом случае размеры платежей по основному долгу будут равными

$$R_1 = R_2 = ... = R_k = ... = R_n = \frac{D}{n}, \quad (2.7)$$

а остаток основного долга в начале k-го расчетного периода определится как

$$D_k = D - R(k-1), \quad (2.8)$$

где D – величина всего долга.

Величина срочной выплаты в k-ом расчетном периоде равна:

$$Y_k = D_k \cdot i + R = (D - R(k-1)) \cdot i + R. \quad (2.9)$$

Величина процентного платежа для k-го расчетного периода находится по формуле:

$$I_k = D_k \cdot i = (D - R(k-1)) \cdot i. \quad (2.10)$$

в) Погашение займа производится переменными выплатами основного долга, а выплаты изменяются в арифметической прогрессии, то есть контрактом предусмотрено погашение основного долга осуществлять платежами, возрастающими или убывающими в арифметической прогрессии с разностью d, тогда выплаты основного долга в k-ом периоде составляют

$$R_k = R_1 \pm (n-k) \cdot d. \quad (2.11)$$

Для возрастающей арифметической прогрессии величина первого платежа по погашению основной суммы долга по займу составит:

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d\,, \tag{2.12}$$

а для убывающей арифметической прогрессии

$$R_1 = \frac{D}{n} + \frac{n-1}{2} \cdot d\,. \tag{2.13}$$

Если выплаты изменяются в геометрической прогрессии, то погашение основного долга производится платежами, каждый из которых больше или меньше предыдущего в q раз. Эти платежи являются членами возрастающей или убывающей геометрической прогрессии, где q – знаменатель прогрессии.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}, \text{ при } q > 1; \tag{2.14}$$

$$R_1 = D \cdot \frac{1-q}{1-q^n}; \text{ при } 0 < q < 1. \tag{2.15}$$

Конверсия займов

Конверсией называется изменение условий займов, когда могут меняться сроки их погашения, процентные ставки и т.п.

Обозначим параметры займов:

n – первоначальный срок погашения займов до конверсии;

n_1 – срок, на который продлен период погашения в результате конверсии;

k – число оплаченных расчетных периодов до конверсии;

i – процентная ставка до конверсии;

i_1 – процентная ставка после конверсии;

Y – величина срочной выплаты до конверсии;

Y_1 – величина срочной выплаты после конверсии;

D – величина основного долга;

D_{n-k} – остаток долга на момент конверсии.

Для составления плана погашения конверсионного займа определяют:

а) величину срочной выплаты по старым условиям:

$$Y = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; \tag{2.16}$$

б) остаток долга на момент конверсии:

$$D_{n-k} = Y\frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \cdot i}; \tag{2.17}$$

в) величину срочной выплаты по новым условиям:

$$Y_1 = D_{n-k}\,\frac{i(1+i)^{n-k+n_1}}{(1+i)^{n-k+n_1} - 1}. \tag{2.18}$$

Льготные кредиты

При льготном долгосрочном кредитовании заемщик фактически получает субсидию, а кредитор теряет определенную сумму в результате данной сделки. Эта добровольно упущенная выгода кредитора называется ***грант-элементом*** и может быть рассчитана в виде абсолютной или относительной величины.

Обозначим параметры льготных займов:

D – сумма предоставленного кредита;

n – срок кредита, лет;

g – льготная процентная ставка, по которой предоставлен кредит;

i – общепринятая процентная ставка ($i > g$);

$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i;

$a_{n;g} = \frac{1-(1+g)^{-n}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g;

$a_{L;i} = \frac{1-(1+i)^{-L}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком L;

L – продолжительность льготного периода погашения кредита, лет;

$a_{n-L;i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком $n-L$;

$a_{n-L;g} = \frac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g со сроком $n-L$;

$v^L = \frac{1}{(1+i)^L}$ – дисконтный множитель по ставке i;

w – относительный грант-элемент;

W – абсолютный грант-элемент.

Для всех вариантов льготного кредитования абсолютный грант-элемент может быть рассчитан по формуле:

$$W = D \cdot w. \tag{2.19}$$

Варианты льготного кредита:

а) кредит предоставляется по льготной ставке:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}; \tag{2.20}$$

б) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого выплачиваются только проценты:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot v^L + g \cdot a_{L;i} \right); \tag{2.21}$$

в) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого проценты не выплачиваются:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \right) \cdot \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^L ; \tag{2.22}$$

г) беспроцентный кредит:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{n} ; \tag{2.23}$$

д) беспроцентный кредит с наличием льготного периода погашения:

$$w = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{n} \cdot v^L . \tag{2.24}$$

Пример 6.1 Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 300 тыс. руб. на 5 лет под 10% годовых. Начисление процентов производится раз в году. Погашение кредита должно производиться: а) равными срочными выплатами; б) равными выплатами основного долга; в) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 10 тыс. руб.; г) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 5%. Составить план погашения займа для каждого варианта.

Решение. Параметры кредита: D = 300000 руб.; n = 5; i = 0,1; d = 10000 руб.; q = 1,05.

а) Определяется величина срочной выплаты

$$Y = D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 300000 \frac{0,1 \cdot (1+0,1)^5}{(1+0,1)^5 - 1} = 79139 \text{ руб.}$$

Далее последовательно рассчитываются процентные платежи, годовой расход по погашению основной суммы долга, остаток долга за каждый год и составляется план погашения задолженности.

Таблица 2.1 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, *D*	Процентный платеж, *I*	Годовой расход по погашению основного долга, *R*	Годовая срочная выплата, *Y*
1	300000	30000	49139	79139
2	250861	25086	54053	79139
3	196808	19681	59458	79139
4	137350	13735	65404	79139
5	71946	7193	71946	79139
Итого	—	95695	300000	395695

б) Определяем величину годового расхода по погашению основной суммы долга

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_k = \ldots = R_n = \frac{D}{n} = \frac{300000}{5} = 60000 \text{ руб.}$$

Остальные параметры сделки определяются последовательно по годам и составляется план погашения кредита.

Таблица 2.2 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	60000	90000
2	240000	24000	60000	84000
3	180000	18000	60000	78000
4	120000	12000	60000	72000
5	60000	6000	60000	66000
Итого	—	90000	300000	390000

в) Определяем величину первого платежа для возрастающей арифметической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d = \frac{300000}{5} - \frac{5-1}{2} \cdot 10000 = 40000 \text{ руб.}$$

Таблица 2.3 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	40000	70000
2	260000	26000	50000	76000
3	210000	21000	60000	81000
4	150000	15000	70000	85000
5	80000	8000	80000	88000
Итого	—	100000	300000	400000

г) Определяем величину первого платежа для возрастающей геометрической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 300000 \frac{1{,}05-1}{1{,}05^5 - 1} = 54292 \text{ руб.}$$

Таблица 2.4 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, D	Процентный платеж, I	Годовой расход по погашению основного долга, R	Годовая срочная выплата, Y
1	300000	30000	54292	84292
2	245708	24571	57007	81578
3	185851	18585	59857	78442
4	125994	12599	62850	75449
5	63144	6314	65994	72308
Итого	—	92069	300000	392069

Пример 2.2 Льготный заем в сумме 500000 руб. выдан на 10 лет под 8% годовых. Обычная ставка для подобных займов составляет 14%. Погашение займа предусматривает льготный период 2 года, в течение которых будут выплачиваться

только проценты. Определить абсолютную и относительную величину грант-элемента.

Решение. По условию задачи имеем: D=500000 руб., n=10; i=14%; g= 0,08; L=2,

$$a_{L;i} = \frac{1-(1+i)^{-L}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-2}}{0{,}14} = 1{,}646661;$$

$$a_{n-L;i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-(10-2)}}{0{,}14} = 4{,}638864;$$

$$a_{n-L;g} = \frac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g} = \frac{1-(1+0{,}08)^{-(10-2)}}{0{,}08} = 5{,}746639;$$

$$v^L = \frac{1}{(1+i)^L} = \frac{1}{(1+0{,}14)^2} = 0{,}769468.$$

Определяем величину относительного грант-элемента:

$$w = 1-\left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}}\cdot v^L + g\cdot a_{L;i}\right) = 1-\left(\frac{4{,}638843}{5{,}746639}\cdot 0{,}769468 + 0{,}08\cdot 1{,}646661\right) = 0{,}2471$$

или 24,11%.

Абсолютная величина грант-элемента, т.е. добровольно упущенной выгоды кредитора, составит:

$$W = D\cdot w = 500000\cdot 0{,}2411 = 123550 \text{ руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1 Банк выдал долгосрочный кредит в сумме (таблица 6.5) на несколько лет под 12% годовых. Погашение кредита должно производиться равными срочными выплатами при ежегодном начислении сложных декурсивных процентов. Составьте план погашения кредита.

Таблица 6.5 – Размер и срок кредита

Вариант	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.	Вариант	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.
1	80	7	16	29	7
2	70	6	17	35	10
3	100	5	18	40	8
4	88	7	19	99	9
5	50	6	20	60	6
6	55	8	21	75	9
7	68	5	22	89	8
8	39	8	23	90	7
9	45	7	24	97	10
10	92	9	25	85	8
11	59	6	26	77	7
12	63	7	27	41	9
13	38	10	28	65	7
14	59	7	29	87	6
15	20	8	30	71	9

2.2 Составьте план погашения кредита по данным таблицы 6.5 если банк выдал долгосрочный кредит под 14% годовых. Начисление процентов производится раз в году. Погашение кредита должно производиться равными выплатами основного долга.

2.3 Составьте план погашения кредита по данным таблицы 6.5 если банк выдал долгосрочный кредит под 9% годовых. Выплаты основного долга должны ежегодно возрастать на 3 млн. руб. проценты начисляются один раз в году.

2.4 Кредит в размере (таблица 6.5) должен быть погашен в течение нескольких лет ежегодными выплатами. Процентная ставка сложных декурсивных процентов составляет 15% годовых. Платежи основного долга ежегодно возрастают на 7%. Составьте план погашения кредита.

2.5 Клиентом банка получен кредит в размере 10 млн. руб. сроком на 7 лет. Первые два года ставка составляет 8% годовых, следующие два года – 10%, последние три года – 15%. Погашение основного долга и выплата процентов осуществляется в конце года. Составьте план погашения займа.

2.6 Кредит в сумме 40 млн. руб., выданный на 5 лет под 6% годовых, погашается равными срочными выплатами в конце каждого года. После погашения третьего платежа кредитор и заемщик договорились о продлении срока погашения займа на 2 года и увеличении процентной ставки с момента конверсии до 10%. Составьте план погашения оставшейся части долга.

2.7 Льготный заем в сумме (таблица 6.5) выдан на несколько лет под 7% годовых. Обычная ставка для подобных займов 12%. Погашение долга предусматривается равными срочными выплатами. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 3 года, в течение которого выплачиваются только проценты; в) имеется льготный период 3 года, в течение которого проценты не выплачиваются.

2.8 Предоставлен льготный беспроцентный заем в размере (таблица 6.5) на несколько лет. Существующая процентная ставка на момент выдачи займа 9%. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 2 года.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие кредиты считаются кратко, средне и долгосрочными?
2. Что такое срочные выплаты?
3. От каких параметров зависит величина срочных выплат?
4. Назовите варианты погашения долгосрочного кредита в рассрочку.
5. Что такое конверсия займов?
6. Что представляет собою грант-элемент?
7. Перечислите варианты льготных кредитов.

Тема 3. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Решение проблемы измерения и сравнения степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета условной годовой ставки для каждого вида операций с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения.

Расчетная процентная ставка, отражающая общую доходность финансовой операции, имеет различные названия. В простых депозитных и ссудных операциях она называется *эффективной,* в расчетах по оценке облигаций ее часто называют *полной доходностью,* в анализе производственных инвестиций для аналогичного по содержанию показателя применяется термин – *внутренняя норма доходности.* В целом для всех случаев, кроме анализа производственных инвестиций, эта годовая ставка называется – *полной доходностью.*

<u>*Минимальная полная доходность*</u> – это расчетная ставка процента, при которой капитализация всех видов доходов от операции равна сумме инвестиций и, следовательно, капиталовложения окупаются. Чем выше полная доходность, тем больше эффективность операции.

Ссудные операции. Доходность этих операций измеряется с помощью эквивалентной годовой ставки сложных процентов.

Условные обозначения:

D – размер ссуды;

n – срок ссуды, выраженный в годах;

G – сумма удержанных комиссионных;

$i_э$ – ставка полной доходности;

D – G – размер фактически выданной суммы.

Наращение величины D – G по ставке полной доходности $i_э$ должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке простых процентов – i, т.е.

$$(D-G)(1+i_э)^n = D(1+ni).$$

Так как сумма удержанных комиссионных G определяется в процентах от номинальной стоимости кредита D, то G=Dq, где q – доля комиссионных в сумме кредита, тогда:

$$i_э = \left(\frac{1+ni}{1-q}\right)^{1/n} - 1. \tag{3.1}$$

Если полная доходность финансовой операции измеряется в виде ставки простых процентов, получим:

$$i_{эп} = \frac{1+ni}{(1-q)n} - 1. \tag{3.2}$$

Когда ссуда выдается под сложные проценты i, то исходное уравнение для определения сложной процентной ставки полной доходности $i_э$, имеет вид:

$(D-G)(1+i_э)^n = D(1+i)^n$, откуда

$$i_э = \frac{1+i}{(1-q)^{1/n}} - 1. \qquad (3.3)$$

Пример 7.1 При выдаче ссуды на 200 дней под 12 % годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,8 % от суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов, если кредит выдан: а) по простым процентам; б) по сложным процентам.
Решение. По условию задачи: n = 200/365; i = 0,12; q = 0,008.
Используя формулы (7.1) и (7.2), получим:

а) $i_э = \left(\frac{1+0{,}12 \cdot \frac{200}{365}}{1-0{,}008} \right)^{\frac{365}{200}} - 1 = 0{,}1398$ или 13,98%;

б) $i_э = \frac{1+0{,}12}{(1-0{,}008)^{365/200}} - 1 = 0{,}1365$ или 13,65%.

Учетные операции. При определении ставки доходности операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$**,** если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке d, с удержанием комиссионных и дисконта, то заемщик получит сумму D (1 – n'd – q) или D – Dn'd – Dq.
D – номинальная стоимость векселя;
Dn'd - дисконт;
G = Dq – сумма комиссионных удержаний;
d – простая учетная ставка;
$n^{/}$ - временной интервал между датой учета и датой погашения векселя.

Тогда D (1 – n'd – q) $(1 + i_э)^n$ = D, отсюда:

$$i_э = (1 - n'd - q)^{-\frac{1}{n}} - 1. \qquad (3.4)$$

Если эффективность измеряется в виде ставки простых процентов – $i_{эп}$., то D (1 – n'd – q) (1 + $ni_{эп}$) = D, отсюда

$$i_{эп} = \frac{1}{(1 - n'd - q)n} - 1. \qquad (3.5)$$

Пример 7.2 Вексель учтен в банке по учетной ставке 8 % годовых за 90 дней до даты погашения. При учете с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 % (К=360 дней). Определить полную доходность операции по ставке сложных процентов.

Решение. По условию задачи $n' = \frac{90}{360}$, d = 0,08; q = 0,004.

$$i_э = (1 - \frac{90}{360} 0{,}08 - 0{,}004)^{-\frac{360}{90}} - 1 = 0{,}102 \text{ или } 10{,}2\%.$$

Покупка и продажа векселя (простая учетная ставка).

Если вексель или другое долговое обязательство через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить с помощью ставок простых и сложных процентов.

Финансовая результативность операции здесь связана с разностью цен купли-продажи, которые в свою очередь определяются сроками этих активов до погашения векселя и уровнем учетных ставок.

Обозначим:

S – номинал векселя;

К = 365 дней; К' = 360 дней;

d_1 – учетная ставка, по которой вексель был куплен;

t_1 – число дней до наступления срока погашения векселя;

t_2 – число дней, до продажи векселя;

d_2 – учетная ставка, по которой вексель был продан;

P_1 – цена векселя в момент его покупки (учета);

P_2 – цена продажи векселя;

$t_1 - t_2$ – время между моментом покупки и продажи векселя.

Доходность купли продажи (в виде ставки простых процентов $i_{эп}$).

$$i_{эп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1(t_1 - t_2)} \cdot K \text{ или } i_{эп} = \frac{(t_1 d_1 - t_2 d_2)}{(K' - t_1 d_1)} \cdot \frac{K}{(t_1 - t_2)} \qquad (3.6)$$

При использовании годовой сложной процентной ставки доходность сделки составит:

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1 \text{ или } i_э = \left(\frac{K' - t_2 d_2}{K' - t_1 d_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1. \qquad (3.7)$$

Пример 7.3 Вексель номинальной стоимостью 1 млн. руб. был учтен в банке за 120 дней до его погашения по учетной ставке 9%. Через 30 дней он был переучтен в другом банке по учетной ставке 8%. Определить эффективность данной операции в виде простой и сложной ставки.

Решение. По условию: S = 1 млн. руб., t_1 = 120 дней; t_2 = 120-30 = 90 дней; d_1 = 0,09; d_2 = 0,08.

Найдем эффективность сделки по формуле (7.6):

$$i_{эп} = \frac{(120 \cdot 0{,}09 - 90 \cdot 0{,}08)}{(360 - 120 \cdot 0{,}09)} \cdot \frac{365}{(120 - 90)} = 0{,}125.$$

Эффективность операции составляет 12,5%.

Если использовать ставку сложных процентов, то эффективность сделки определяется по формуле (7.7):

$$i_э = \left(\frac{360 - 90 \cdot 0{,}08}{360 - 120 \cdot 0{,}09}\right)^{\frac{365}{30}} - 1 = 0{,}133.$$

Эффективность операции составляет 13,3%.

Операции с депозитными сертификатами.

Если депозитный сертификат, или другой подобного рода краткосрочный инструмент, через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения вновь продан, то доходность такой операции можно измерить в виде ставки простых или сложных процентов.

Если сертификат с разовым начислением процентов, со сроком погашения t_1, покупается по номиналу, продается за t_2 дней до погашения, а процентная ставка сертификата изменилась с i_1 до i_2, то эффективность по простой ставке находится по формуле:

$$i_{эп} = \left(\frac{1 + \frac{t_1}{K} i_1}{1 + \frac{t_2}{K} i_2} - 1 \right) \frac{K}{t_1 - t_2}, \text{ где К = 365 или 360 дней.} \qquad (3.8)$$

Если мерой эффективности служит сложная процентная ставка, то:

$$i_э = \left(\frac{K + t_1 i_1}{K + t_2 i_2} \right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1. \qquad (3.9)$$

Сертификат покупается после выпуска и погашается в конце срока:
P_1 – номинал финансового инструмента;
P_2 – цена приобретения финансового инструмента;
i – объявленная эмитентом процентная ставка.

$$i_{эп} = \left(P_1 \frac{1 + \frac{t_1}{K} i}{P_2} - 1 \right) \frac{K}{t_2}; \qquad (3.10)$$

$$i_э = \left(\frac{P_1 \left(1 + \frac{t_1}{K} i \right)}{P_2} \right)^{365/t_2} - 1. \qquad (3.11)$$

Пример 7.4 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 185 дней до срока его погашения и продан через 120 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была 15,0 %, в момент продажи – 12,7 %. Определить доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.
Решение. По условию t_1 = 185 дней, t_2 = 120 дней, i_1 = 0,15; i_2 = 0,127. Используем формулу (7.9)

$$i_э = \left(\frac{365 + 185 \cdot 0{,}15}{365 + 120 \cdot 0{,}127} \right)^{365/(185-120)} - 1 = 0{,}1993 \text{ или } 19{,}93\%.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1 Банк предоставил кредит в сумме 200 тыс. руб. на 250 дней под 18,0 % годовых простых процентов. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,8 % от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности простых и сложных процентов.

3.2 Банком предоставлен кредит на 300 дней под 12,0 % годовых в сумме 180 тыс. рублей. При выдаче кредита были удержаны комиссионные в сумме 0,5 %. Определите годовую ставку полной доходности сложных процентов, если проценты начислялись: а) по простым процентам; б) по сложным процентам.

3.3 Банком предоставлен кредит сроком на 5 лет в сумме 245 тыс. рублей, под 11,8 % годовых (проценты сложные). При выдаче кредита были удержаны комиссионные в размере 0,7% от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности операции по сложным процентам. На какую величину повысилась стоимость кредита для заемщика вследствие удержания комиссионных?

3.4 Вексель учтен в банке по учетной ставке 12,0 % годовых за 130 дней до его оплаты. При учете векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 %. Определите доходность операции в виде простых и сложных процентов.

3.5 Вексель куплен за 158 дней до его погашения с учетной ставкой 8,0 % годовых. Через 67 дней его реализовали по учетной ставке 7,3 %. Определите эффективность операции в виде простой и сложной ставки.

3.6 Вексель стоимостью 140 тыс. рублей учтен банком по учетной ставке 18,0 % годовых за 140 дней до оплаты. Через 60 дней банк переучел его в другом банке по учетной ставке 14,7 % годовых. Определите эффективность данной финансовой операции для банка по простой и сложной ставке. Как изменится эффективность операции, если переучет векселя проведен по учетной ставке 19,8 % годовых?

3.7 Банком выпущен депозитный сертификат номинальной стоимостью 400 тыс. рублей сроком на 11 месяцев по ставке 17,0 % годовых. Определите эффективность следующих финансовых операций:

- клиент приобрел сертификат по номиналу в момент его выпуска и продал его через 90 дней после приобретения по ставке 14,0 % годовых;
- клиент приобрел сертификат через 45 дней после его выпуска и погасил его в конце установленного срока;
- клиент приобрел сертификат через 50 дней после выпуска под 17,0 % годовых, а через 180 дней после приобретения реализовал его по ставке 15,8 % годовых.

3.8 Сертификат с номиналом 140 тыс. рублей, с объявленной доходностью 12,7 % (простые проценты) сроком 640 дней куплен за 165 тыс. рублей за 190 дней до его оплаты. Какова доходность инвестиции?

3.9 Денежный сертификат был приобретен за 170 дней до срока погашения в сумме 90 тыс. рублей и продан за 115 тыс. рублей через 90 дней. Определите доходность операции, если применялась простая и сложная ставка процентов.

3.10 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 250 дней до срока его погашения и продан через 140 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была равна 14,7 %, в момент продажи – 12,5 %. Определите доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под полной доходностью финансовой операции?
2. Как определяется годовая ставка полной доходности в виде ставки простых и сложных процентов?
3. Из какого уравнения выводится показатель доходности учетных операций?
4. Как определяется доходность операций с векселями?
5. Как оценивается доходность перепродажи депозитного сертификата?