МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И. Т. Трубилина»

Архитектурно-строительный факультет

Кафедра сопротивления материалов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по дисциплине
и для самостоятельной работы студентов специальности
08.05.01 Строительство уникальных
зданий и сооружений

Краснодар
КубГАУ
2019

Составители: П. Г. Пасниченко, А. Д. Гумбаров.

Нелинейные задачи строительной механики : метод. указания по дисциплине и для самостоятельной работы / сост. П. Г. Пасниченко, А. Д. Гумбаров. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – 26 с.

Данные методические указания содержат задания для самостоятельного выполнения, указания по выполнению расчетов для студентов по дисциплине «Нелинейные задачи строительной механики».

Предназначено для студентов специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией архитектурно-строительного факультета Кубанского государственного аграрного университета, протокол № 2 от 22.10.2019.

Председатель
методической комиссии А. М. Блягоз

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача строительной механики - совершенствование известных и создание новых методов расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.
При этом алгоритмы расчета должны отвечать противоречивым требованиям: с одной стороны должна быть обеспечена безопасность сооружения, с другой – экономичность, причем понятие экономичности содержит не только приемлемую стоимость возведения и эксплуатации сооружения, но и стоимость проектных работ

Более точные механические модели позволяют глубже проникнуть в физическую сущность работы конструкции, более правильно оценить распределение внутренних усилий, жесткость сооружения и, как следствие, позволяет повысить экономичность проектного решения. Одним из факторов уточнения расчетных схем сооружения является учет нелинейно-упругих и упруго-пластичных свойств материала. Известно, что, начиная с определенного уровня напряженно-деформированного состояния (н.д.с) сооружения, закон Гука, закон прямой пропорциональности у всех материалов перестает соблюдаться и заменяется нелинейной зависимостью между напряжениями (σ) и деформациями (ε).

Использование нелинейной зависимости между σ и ε в расчетах сооружения составляет сущность так называемой физической нелинейности.

Решение нелинейно-упругих и упруго-пластичных задач сопряжено со значительными математическими трудностями [6] .Многие задачи за пределами упругости до сих пор не имеют решения. Поэтому в нелинейной теории упругости и теории пластичности еще в большей степени, чем в теории упругости, имеют значение приближенные методы решения.
Наиболее распространенными из них являются методы, в которых нелинейная задача сводится к последовательности линейно-упругих задач. Впервые один из вариантов такого метода был предложен А.А.Илюшиным. В дальнейшем эта идея была развита в трудах И.А.Биргера

. В настоящем пособии рассматривается расчет статически неопределимых ферм, выполненных из нелинейно-упругого и упруго-пластического материала. При решении используется обобщенный метод переменных параметров упругости , описанный в работе.

В первой части данной работы излагается теория расчета ферм методом сил и методом перемещения, приводятся несложные иллюстрированные примеры. Материал первой части рекомендуется при изучении темы строительной механики : «Расчет строительных конструкций с учетом нелинейных свойств материала».

Во второй части работы приводятся более сложные примеры, формулируются темы УИРС.

§ 1 . Зависимости между напряжениями и деформациями

На рис 1 показаны типичные экспериментальные диаграммы растяжения для различных металлов (стали , алюминиевые и медные сплавы)

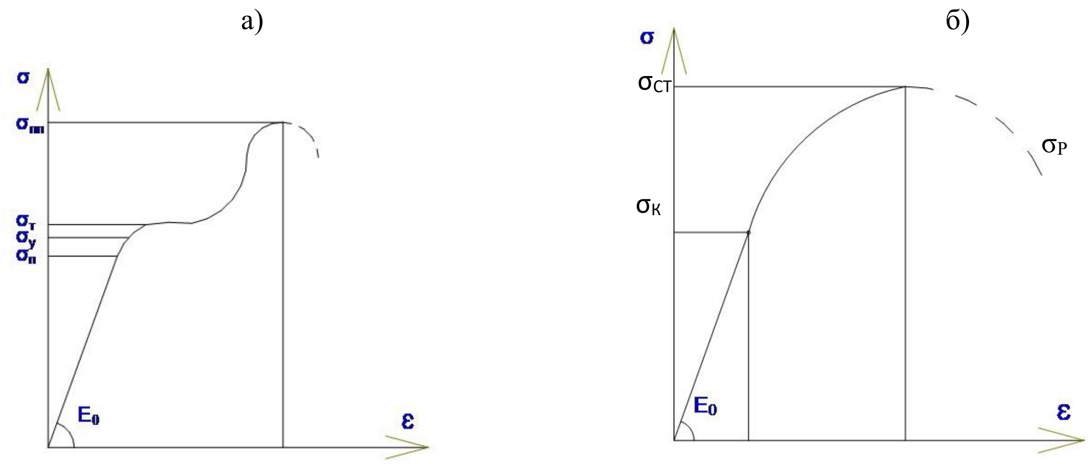


Рис . 1

Эксперементальные диаграммы имеют несколько характерных точек.

Предел пропорциональности $\sigma_п$ определяет верхний предел напряжений , при которых соблюдается закон Гука .

Предел упругости $\sigma_у$ - верхний предел напряжений , при которых материал при полной разгрузке не имеет остаточных деформаций . Разница между $\sigma_у$ и $\sigma_п$ невелика , поэтому эти точки иногда отождествляются .

Предел текучести $\sigma_т$ – граница между упруго-пластическими и чисто пластическими деформациями. Эта точка определяет начало так называемой площадки текучести.

Предел прочности $\sigma_{пп}$ – соответствует точке максимума функции $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ в стадии упрочнения . Участок разрушения на рис.1 показан пунктиром .

Многие материалы не имеют четко выраженной площадки текучести (рис.1 б) участок нелинейной упругости плавно переходит в участок упруго-пластических деформаций. На таких диаграммах отмечается точка $\sigma=\sigma_к$ в которой кривизна функции $\sigma(\varepsilon)$ имеет минимальное значение (радиус кривизны стремится к бесконечности). Напряжение $\sigma_к$ в практических расчетах играет роль условного предела текучести .

Характкрным напряжением, описанным выше, соответствуют деформации, которые обозначаются буквой ε с такими же индексами , что и у напряжений . Например , $\varepsilon_т$ – деформация предела текучести. Величины $E_K = \frac{d\sigma}{d\varepsilon\varepsilon}$; $E_C = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ являются важными механическими характеристиками материала и называются соответственно касательными и секущими модулями (рис. 2)

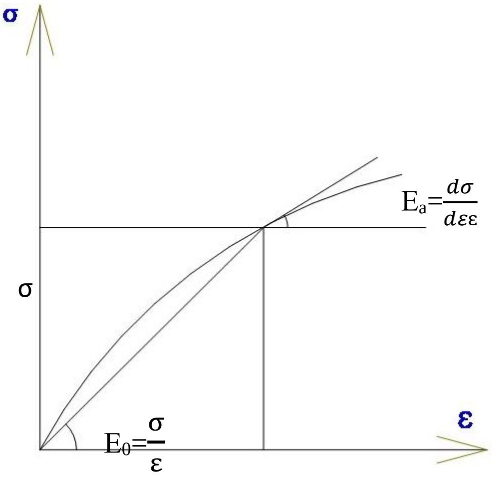


Рис . 2 .

В начале координат (ε =0) касательный и секущий модули совпадают.

$E_0=\frac{d\sigma}{d\varepsilon\varepsilon}\Big| = \frac{\sigma}{\varepsilon}\Big|_{\varepsilon\varepsilon=0}$

Величина E_0 называется начальным модулем упругости . На площадке текучести E_K=0 .

Реальные диаграммы деформирования , имеющие иногда довольно сложный вид , как , например , диаграммы, изображенные на рис I а , в практических расчетах аппроксимируют (заменяют в каком-либо смысле) близкими кривыми , описываемыми несложными аналитическими формулами. Приведем некоторые простейшие из них .

Степенной закон Бюльфингера (рис.3а)

$\sigma=A^K$, (0<K<1) . (1)

А, К – константы материала . Величина А имеет размерность напряжений; к- безразмерная величина. При к=0 и $A=\sigma_T$ – закон деформирования для жестко-пластического тела, т.е тела , для которого предполагают , что материал является абсолютно жестким до достижения в нем напряжения σ_T и идеально пластичным после.

Недостаток зависимости (1) заключается в том , что в начале диаграммы $E_{0=\infty}$

$$E_0=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\text{К}A\varepsilon^{\text{к}-1}\Big|_{\varepsilon=0}=\infty$$

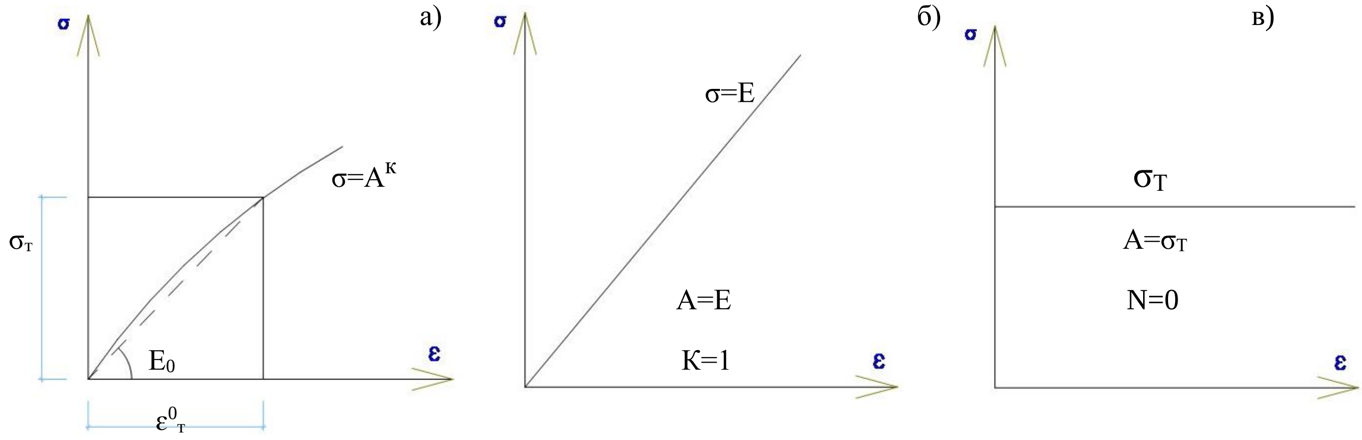


Рис . 3.

Этот недостаток исправляется введением начальной ветви диаграммы в виде прямой (на рис. 3а прямая изображена пунктиром) до точки , соответствующей условному пределу текучести .

Кубическая парабола

$$\sigma=E_0\text{-}A^3 \qquad (2)$$

Постоянная материала А определяется из условия , когда касательный модуль при $\varepsilon=\varepsilon_{пп}$ равняется нулю

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{пп}}=E_0-3A\varepsilon_{пп}^2=0\ ;$$

Откуда

$$A=\frac{E_0}{3\varepsilon_{пп}} \qquad (3)$$

Принимая во внимание , что при $\varepsilon=\varepsilon_{пп}$ - $\sigma=\sigma_{пп}$ после подстановки (3) В (2) , получим

$$\sigma_{пп}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{E_0^3}{3A}}$$

Откуда следует вторая формула для определения постоянной А

$$A=\frac{4}{27}\frac{E_0^3}{\sigma_{пп}^2}$$

Формула (2) обладает рядом достоинств. Она обеспечивает симметричность диаграммы относительно растяжения-сжатия; при $E\to0$ $E_К\to E_0$; $E_C\to E_0$. Недостаток : формула (2) довольно приближенно аппроксимирует реальные диаграммы при больших деформациях .

Диаграмма с линейным упрочнением является едва ли не самой распространенной в практических расчетах (рис 4а) .

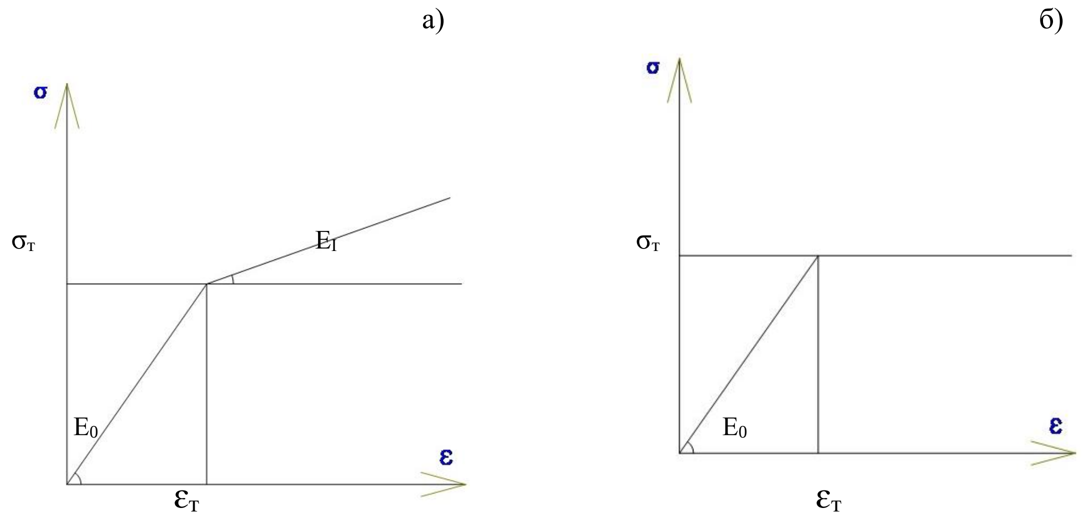


Рис . 4.

Если модуль упрочнения положить равным нулю (E_I=0) , то получается диаграмма Прандтля для упруго-пластического тела , которую принимают для материалов с ярко выраженной площадкой текучести.

Настоящий параграф написан по книге [I0] , в которой достаточно подробно написаны наиболее распространенные аппроксимации экспериментальных диаграмм.

§2. Обобщенный метод переменных параметров упругости

Известно, что в шарнирно-стержневой системе при узловой нагрузке возникают только постоянные по длине стержней продольные силы. В дальнейшем изложении предполагается , что в пределах одного стержня его площадь поперечного сечении постоянна , поэтому постоянными будут напряжения (σ) и деформации (ε) .

Рассмотрим дифференциальный элемент произвольного r-го стержня фермы (рис 5а)

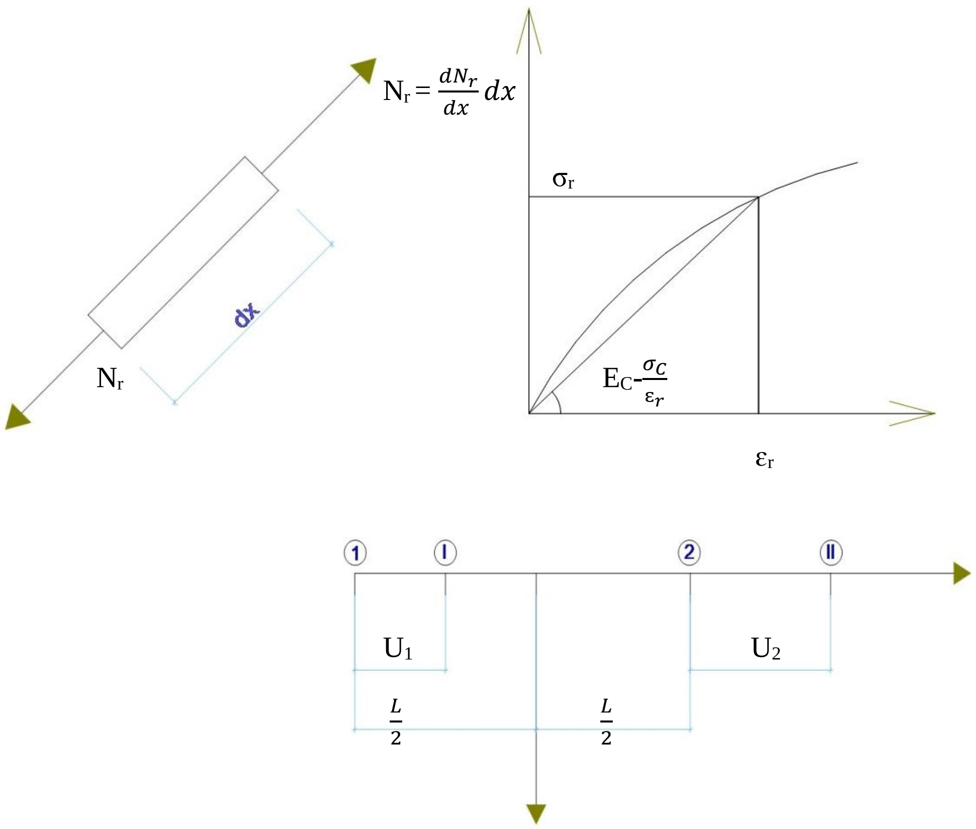


Рис.5.

Из условия равновесия $\sum x = 0$ имеем $\frac{dN_r}{dx}$=0, но N_r=$F_r\sigma_r$, потому $\frac{d\sigma_r}{dx} = 0$,

Т.е σ_r=const в пределах r-го элемента , а по диаграмме деформирования (рис.56)

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_{cr}} = const \qquad (5)$$

Геометрическая зависимость для r-го стержня

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dX}$$

Принимая во внимание (5) , приходим к выводу , что

$$U = a_o + a_1 x_p \qquad (6)\backslash$$

Т.е осевое перемещение произвольного стержня изменяется по линейному закону .

Коэффициенты a_0 , a_1 в (б) обычно выражают через концевые перемещения u_1 и u_2 стержня (рис.5в). На рисунке шифрами I и 2 обозначены положения узлов до , а I и II- после деформации стержня . Принимая во внимание , что при x= - $\frac{l}{2}$ $u=u_1$ а при x= $-\frac{l}{2}$ $u=u_2$, составим следующую систему уравнений $\begin{cases} a_0 - a_1\frac{l}{2} = u_1\,; \\ a_0 + a_1\frac{l}{2} = u_2\,; \end{cases}$

Решение которой

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Подставим в выражение (6) и в результате получим

$$u = \{1 \;\; x\} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (6а)$$

Полная потенциальная энергия для шарнирно-стержневой системы может быть представлена в виде

$$P_1 = \sum_{r=1}^{s} F_r \int_{(e)} U_r dx - \sum_{k=1}^{m} U_K P_K \qquad \text{(функция Лагранжа) ,} \qquad (7)$$

Где U_r –удельная потенциальная энергия деформации r-го стержнях ;

U_K- узловые перемещения фермы в общей системе координат ;

P_K- внешние узловые силы в общей системе координат;

S- число стержней фермы;

m-число узловых перемещений, определяющих деформированное состояние фермы ;

Первое слагаемое в (7) – потенциал деформации в целом для всей фермы; второе слагаемое- потенциал внешних сил.

Удельная потенциальная энергия деформирования U_r – представляет собой площадь криволинейного треугольника (рис 6) ,заштрихованного вертикальными линиями

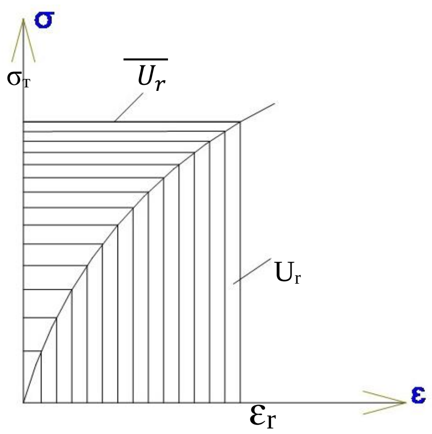


Рис . 6 .

Полную дополнительную энергию для фермы при отсутствии принудительных перемещений запишем в виде

$P_2=\sum_{r=1}^{s} F_r \int_{(l)} \overline{U_r} dx,$ (функционал Кастилиано) (8)

Где $\overline{U_r}$ − удельная дополнительная энергия деформации r-го стержня .

На диаграмме σ~ε (рис.6) $\overline{U_r}$ представляет собой площадь, заштрихованную горизонтальными линиями .

Сущность обобщенного метода переменных параметров упругости заключается в следующем: вблизи некоторого значения перемещений U^n функционал полной потенциальной энергии системы P_1 разлагается на ряд Тейлора , причем в разложении учитывается только квадратичные члены.

$$P_1 :\approx \Pi_1=\sum_r F_r \int \left[U(\varepsilon_r^n) + (U')^n \bigtriangleup \varepsilon_r + \frac{1}{2}(U')^n(\bigtriangleup \varepsilon)^2\right] dx - \sum_k U_k P_K. \qquad (9)$$

В (9) $U_r = \int_o^n \sigma_r d\varepsilon_r$, а в заданная нелинейная функция представляется в виде

$$\sigma_r = E_{cr}\varepsilon_r . \qquad (10)$$

Если материал для всех стержней ферм одинаков , то индекс в выражении (10) можно опустить.

Первая производная от удельной потенциальной энергии деформации по ε определяется выражением

$$U' = \frac{dU}{d\varepsilon} = \sigma = E_C\varepsilon \qquad (11)$$

Вторая производная

$$U'' = \frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_K. \qquad (12)$$

$\bigtriangleup\varepsilon_r=\varepsilon_r-\varepsilon_r^n$-приращение деформации в r-м стержне выражается через функцию перемещений по формуле

$$\bigtriangleup\varepsilon_r=\frac{dU}{dX} - \frac{dU^h}{dX} = \frac{d}{dx} \bigtriangleup U , \qquad (13)$$

Где $\bigtriangleup U=U-U^n$ – приращение перемещения.

Принимая во внимание (11),(12) перепишем (9) следующим образом

П$_1$=$\sum_r F_2 \int_{(l)} \left[U(\varepsilon_z^n) + \varepsilon^n E_c^n \bigtriangleup \varepsilon + \frac{1}{2} E_c^n (\bigtriangleup \varepsilon)^l\right] dx - \sum_k U_K P_K,$ (9!)

Разрешающие уравнения метода перемещений получим из условия стационарности квадратичного функционала (9!) . Предварительно необходимо деформации выразить через узловые перемещения по формуле (6а).

Условие стационарности функционала (см.,например , вариационное уравнение Лагранжа (9)) имеет вид

$$\delta\Pi_1=0$$

и эквивалентно вариационному уравнению

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial U_2}\delta U_2 + \cdots + \frac{\partial \Pi_1}{\partial U_m} = 0,$$

Откуда в силу независимости и произвольности вариаций получим систему уравнений

$\frac{\partial \Pi_1}{\partial U_Х}=0$ (К=1,2,…,m) (14)

Т.к функционал (9!) квадратичный , то система уравнений (14) линейна.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (14) принимается за новое приближение U_k^{n+1}. По значениям U_k^{n+1} вычисляются ε_z^{n+1}, σ_z^{n+1} ,E_{cz}^{n+1}, E_{KZ}^{n+1} и по (14) определяется новое значение U_k^{n+2}. В начальном приближении полагается E_{cz}^0=E_{cz}^0=E_{oz} , т.е касательный и секущий модули заменяются начальным модулем упругости.

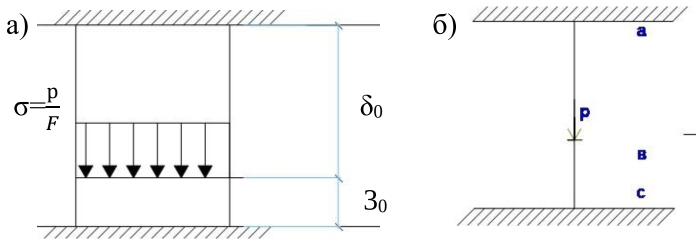
Линеаризованные уравнения , применяемые в методе Ильюшина А.А., можно получить из итерационных уравнений (14) ,если в выражении для П$_1$заменить касательный модуль$\left({d\sigma}/{d\varepsilon}\right) = E_{К}^{П}$ на начальный модуль $\left({d\sigma}/{d\varepsilon}\right) = E_0$, а итерационные уравнения, применяемые в методе Бигера И.А., получаются из (14) , если в приближенном функционале П$_1$ заменить касательный модуль E_k^n на секущий E_c^n.

При решении задач методом сил нелинейный функционал Кастилиано так же , как и в методе перемещений , аппроксимируется квадратичным функционалом

Р$_2$:≈ П$_2$=$\sum_{r=1}^{s} F_r \int_{(l2)} \left[\overline{U}(\sigma_z^n) + (\overline{U}')\ {}^n\Delta\sigma_2 + \frac{1}{2}(\overline{U}'')^n(\Delta\sigma_2)^2\right] dl,$ (15)

Который должен быть определен на классе статистически возможных векторов внутренних усилий . Подобное изложение применение метода сил будет дано в §4.

В качестве иллюстрации примера примера обобщенного метода переменных параметров упругости рассмотрим задачу об определении н.д.с. стержня, изображенного на рис. 7. Нелинейная зависимость σ~ε принята в виде диаграммы Прандтля с линейным упрочнением. Начальный модуль E_0=200; модуль упрочнения E_1=20; деформация текучести $\varepsilon_т$ =10^{-3}; отношение величины нагрузки к площади стержня $P/_F = 0.8$,



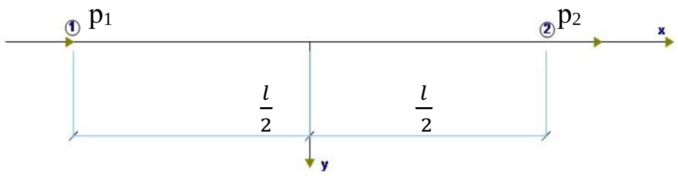


Рис .7.

Рис .8.

Решение линейных задач проводится методом конечных элементов в форме метода перемещений . В соответствии с предлагаемым методом Лагранжа линеаризованной задачи для одного элемента (рис.8) запишем так

$$\Pi_1=\int_{(v)} U_r(\varepsilon^n)+\sigma^n\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^n dv - U_1P_1 - U_2P_2.$$

Разрешающая функция U в рассматриваемом случае может быть принята в виде линейного полинома(6а)

$$U=\{1X\}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}$$

U_1,U_2 – узловые перемещения ; при этом деформация ε в элементе постоянна

$$\varepsilon=\frac{dU}{dX} = \{01\}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}.$$

Матричная зависимость между узловыми перемещениями и силами ,которая может быть получена из приближенного вариационного уравнения $\delta\Pi_1 = 0$ и имеет следующий вид

$k_k\Delta U^{n+1}=\Delta P$,

где $k_k = \frac{E_k^n F}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\Delta P \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} - \frac{E_c^n F}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \end{Bmatrix}$

Теперь условие равновесия узла в (рис. 7б)

$$\sum x = 0,$$

Принимая во внимание граничные условия задач ($U_1=U_2=0$). Можно записать в виде

$$\left(\frac{E_{k1}^n F_1}{l_1} + \frac{E_{k2}^n F_2}{l_2}\right)\Delta U_b^{n+1} = P - \left(\frac{E_{C1}^n F_1}{l_1} + \frac{E_{C2}^n F_2}{l_2}\right) U_B^n.$$

Откуда, после подстановки всех величин из условия получим

$$\Delta U_B^{n+1} = \frac{48-\left(E_{C1}^n + 2E_{C2}^n\right)U^n}{E_{k1}^n + 2E_{k2}^n}.$$

В первом приближении $E_K=E_C=200$; $U_B^0 = 0$ $U_B^0 = 0$

$$U_B^1 = \frac{48}{200 + 2 \cdot 200} = 0.08$$

$$\varepsilon_1' = \frac{U_B}{60} = 0{,}001333;\ \ \sigma_1' = 20 \cdot 0{,}001(3) + 0{,}18 = 0{,}20(6);$$

$$\varepsilon_2' = \frac{U_B}{30} = -0{,}002(6);\ \ \sigma_1' = -20 \cdot 0{,}002(6) - 0{,}18 = -0{,}2(3);$$

$E_{C1}' = \frac{\sigma_1'}{\varepsilon_1'} = 155{,}0$; $E_{k1}'=20$;

$E_{C2}' = \frac{\sigma_2'}{\varepsilon_2'} = 87{,}5$; $E_{k2}'=20$;

Во втором приближении

$\Delta U_B^2 = 0{,}3599 \approx 0{,}36$; $U_B^2 = U_B^1 + \Delta U_B^2 = 0{,}44.$

В третьем приближении $\Delta U_B^3 = 0$, т.е окончательное решение задачи

$U_B=0{,}44$ ($\sigma_1 = 0{,}32(6)$).

Итерационный процесс Биргера получим из (15) , если положить

$E_K=E_e$ и $U^n=0$

$$U_b^{n+1} = \frac{48}{E_{C1}^n + 2E_{C2}^n}$$

В табл.1 сведены результаты расчета по формуле (16); Для получения приемлемой точности по методу Биргера понадобилось девять итераций (U=0,437) , по предлагаемому методу-две итерации.

Нелинейное разрешающее уравнение рассматриваемой задачи можно получить, используя «точное» вариационное уравнение $\Delta\Pi_1$=0

R=$(2E_{c2}+E_{c1})$U-48=0.

На рис.9 показан график зависимости R=R(U) , сплошной тонкой линией – итерационный процесс Бигера, пунктирной тонкой линией – предлагаемый итерационный процесс.

Таблица 1

№ N	U	ε_1^U	ε_2^U	E_{C1}^{Π}	E_{C2}^{Π}
1	0,08	0,001333	-0,00267	155	87,5
2	0,1454	0,002424	-0,004848	94,26	57,13
3	0,2302	0,003837	-0,007673	66,92	43,46
4	0,3120	0,005200	-0,01040	54,61	37,31
5	0,3714	0,006190	-0,01236	49,08	34,54
6	0,4063	0,006771	-0,01354	46,58	33,29
7	0,4241	0,007069	-0,01413	45,46	32,73
8	0,4327	0,007212	-0,01442	44,96	32,48
9	0,4367	0,007278	-0,01456	44,73	32,37
	0,44	0,007(3)	-0,014(6)	446(54)	32(27)

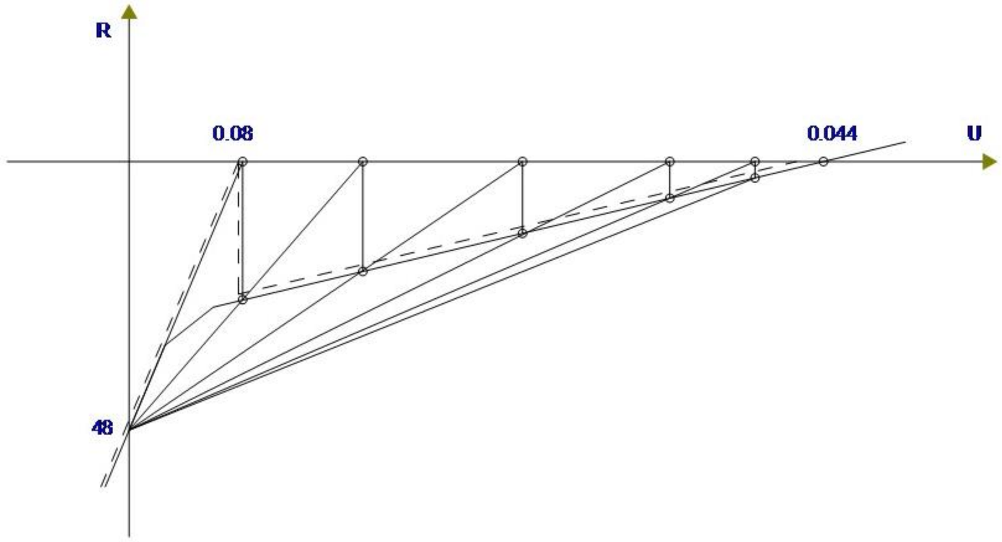


Рис.9.

Решим эту же задачу методом сил. Принимаем распределение напряжений внутри каждого элемента постоянным- в первом элементе σ=σ_1 ; во втором σ=σ_2 . При этом уравнение равновесия внутри каждого элемента

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0, \epsilon V$$

Удовлетворительная ; кроме того, из условия равновесия узла В

$\sigma_2 = \sigma_1 - 0{,}8$, ЄS,

Таким образом вектор напряжений $\sigma^{т}=\{\sigma_1 \sigma_2\}$ является статически возможным .

Приближенный функционал Кастилиано

Π_2= - $\left[\frac{Fl_1}{E_{c1}^n}\sigma_1^n \cdot \Delta\sigma_1 + \frac{1}{2}\frac{Fl_1}{ER_1}\Delta\sigma_1^2 + \frac{Fl_2}{E_{c2}^n}(\sigma_1^n - 0{,}8)\Delta\sigma_1 + \frac{1}{2}\frac{Fl_2}{E_{k2}^n}\Delta\sigma_1^2\right]$. (17)

Разрешающее уравнение получим из условия стационарности функционала (17)

$\frac{d\Pi_2}{d\sigma_1} = \frac{\sigma_1^n F}{E_{c1}^n E_{c2}^n}(E_{c2}^n l_1 + E_{c1}^n l_2) - \frac{0{,}8F}{E_{c2}^n} + \Delta\sigma_1 F \frac{E_{k2}^n l_1 + E_{k1}^n l_2}{E_{k1}^n E_{k2}^n}$.

Откуда,

$\Delta\sigma_1 = \frac{E_{k1}^n E_{k2}^n}{E_{c1}^n E_{c2}^n}\left[\frac{0.8E_{c1}^n}{2E_{k2}^n + E_{k1}^n} - \sigma_1^n \frac{2E_{c2}^n + E_{c2}^n}{2E_{k2}^n + E_{k1}^n}\right]$ (18)

В первом приближении

$\sigma_1^0 = 0$; $\sigma_2^0 = -0.8$;

E_{c1}^0=200; E_{c2}^0=20 $\frac{\sigma_1 - 0.8}{\sigma_1 - 0.62} = 25.61$

E_{k1}^{0}=200; E_{k2}^{0}=20;

$\Delta\sigma_1^1$=0,51(6).

Во втором приближении

σ_1^1=0,51 (6) ; σ_2^1=-0.26 (3) ;

$E_0^1 = 30.693;\ E_{c2}^1 = 54{,}839;$

E_{K1}=20; E_{K2}=20;

$\Delta\sigma_1^2$=0,19.

В третьем приближении $\Delta\sigma_1^3$=0.

Окончательно $\sigma_1=\sigma_1^n + \Delta\sigma_1^1 + \Delta\sigma_1^2 = 0.32(6)$

(«точное» решение).

§3 Расчет ферм из физически-нелинейного материала обобщенным методом переменных параметров упругости с использованием метода перемещений.

Связь между узловыми усилиями и перемещениями , полученная в §2, имеет вид

$$\frac{E_k^n F}{l} L_1 \Delta U^{n+1} + \frac{E_c^n F}{l} L_1 U^n = P, \qquad (19)$$

Где

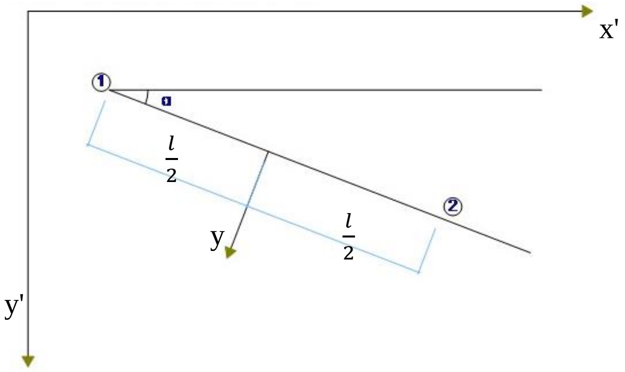


Рис.10.

Для произвольно ориентированного стержня плоской фермы (рис.10) после преобразования характеристик элемента от местной к общей системе координат зависимость типа(18) запишем так

$$\frac{E_k^n F}{l} \mathrm{L}\Delta U^{n+1} + \frac{E_c^n F}{l} \mathrm{L} U^n = P, \qquad (20)$$

Где $U^T=\{u_1 v_1 u_2 v_2\}$; $P^T=\{P_1 Q_1 P_2 Q_2\}$;

$$L=\begin{bmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 & -m_1^2 & -m_1 m_2 \\ m_1 m_2 & m_2^2 & -m_1 m_2 & -m_2^2 \\ -m_1^2 & -m_1 m_2 & m_1^2 & m_1 m_2 \\ -m_1 & -m_2^2 & m_1 m_2 & m_2^2 \end{bmatrix};$$

$m_1 m_2$ -направляющие косинусы (косинусы углов, образованных положительными направлениями осей стержня и X' общей системы координат).

Зависимость (20) позволяет использовать стандартные способы формирования ОМЖ и нагрузочного вектора.

В учебных целях для ручного расчета целесообразно использовать каноническую форму метода перемещений. Система канонических уравнений на (n+1) шаге итерационного процесса имеет следующий вид

$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}^{n}\Delta z_j^{n+1} + \sum_{j=1}^{k} \bar{r}_{ij}^{n} z_j^{n} + R_{ip} = 0$;(i=1,2…,k), (20)

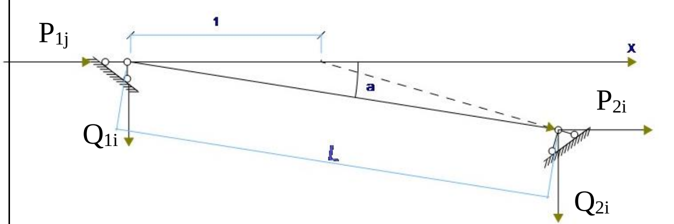
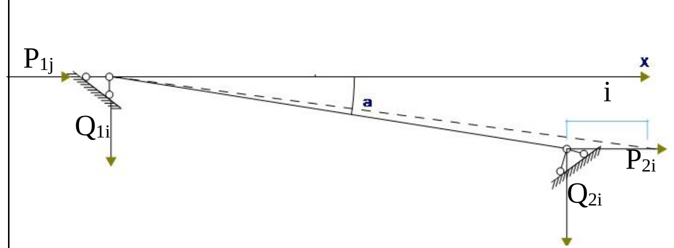
Где $r_{ij}^{h}, \bar{r}_{ij}^{h}$ – реакция в i-й наложенной связи от j-го единичного перемещения , вычисленные по касательному и секущему модулю упругости соответственно:

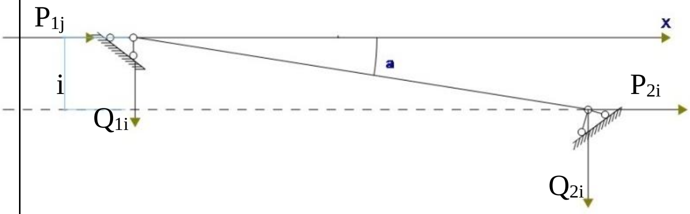
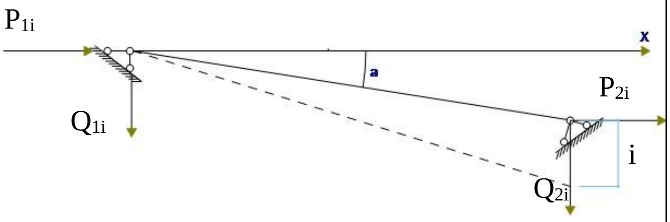
ΔZ_j^{n+1}=$Z_j^{n+1} - Z_j^{n}$;

Z_j^{n+1}- искомое перемещение в направлении j-й наложенной связи , определенное на предыдущем n-м шаге итерационного процесса;

R_{ip}-реакция в i-й наложенной связи , вызванная заданной внешней нагрузкой .

Матричная зависимость (19) имеет всю необходимую информацию для составления таблиц метода перемещений . Ниже приводится таблица реакций в стержне фермы как в элементе основной системы.

Концевые силы / схема	P_{1i}	Q_{1i}	P_{2i}	Q_{2i}
	$k_i m_1^2$	$k_i m_1 m_2$	-$k_i m_1^2$	-$k_i m_1 m_2$
	-$k_i m_1^2$	-$k_i m_1 m_2$	$k_i m_1^2$	$k_i m_1 m_2$

	$k_i m_1 m_2$	$k_i m_1^2$	-$k_i m_1 m_2$	-$k_i m_1^2$
	-$k_i m_1 m_2$	-$k_i m_1^2$	$k_i m_1 m_2$	$k_i m_1^2$

В таблице индекс I принимает значение 1 и 2

$K_1=\frac{E_k^n F}{l}$; $K_2=\frac{E_k^n F}{l}$; $m_1=\cos a$; $m_2=\sin a$;

$P_{a1}=P_1$; $P_{a2}=P_2$;

$Q_{a1}=Q_1$; $Q_{a2}=Q_2$;

В начальном приближении в (20) полагается $E_K=E_C=E_0$. т.е. рассчитывается ферма из линейно-деформируемого материала с начальным модулем $E_{0=.}$ Узловые перемещения на (n+1) шаге определяются по формуле

$$Z^{n+1}=Z^0+\sum_{I=1}^{n+1} \Delta z^i.$$

Окончание итерационного процесса можно назначить либо по относительной погрешности перемещений в каждом узле

$$\frac{\Delta Z^{n+1}}{Z^n}<\mu, \qquad (21)$$

Либо по относительной сосредоточенности погрешности перемещений.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\Delta Z_i^{n+1}\right)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(Z_i^{n}\right)^2} < \mu_2 \qquad (22)$$

Где μ_1, μ_2 – заранее заданные числа . Условие (22) менее жесткое м обычно применяется в тех задачах , где предполагается большой разброс в абсолютных величинах перемещений .

Основной проверкой, как и при решении линейных задач , является статическая ; выполняется она на последнем шаге итерационного процесса. Если погрешность статических уравнений в проверке не удовлетворяет заданной точности , то необходимо уменьшить число μ_1 (или μ_2) и продолжить итерационный процесс.

Пример 1. Определить н.д.с. фермы (рис.11.) . Все стержни фермы имеют одинаковую площадь F .Диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ материала фермы показана на рис.12. Начальный модуль упругости $E_0=2\ 10^6$;

Модуль упрочнения $E_1=2\ 10^3$; $\varepsilon_T=10^{-3}$; $\sigma_T=2\ 10^3$.

Номера стержней показаны на рис 11 в кружках. Внешняя нагрузка P численно равна 2800F.

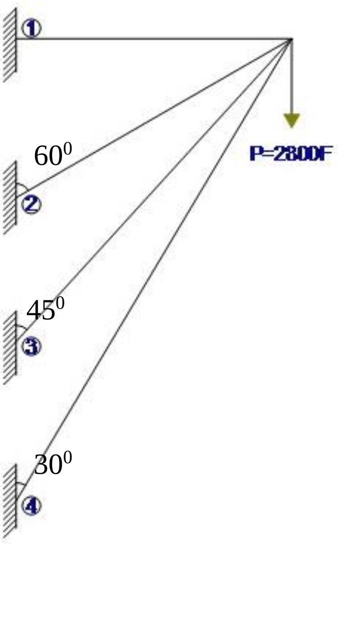


Рис.11.

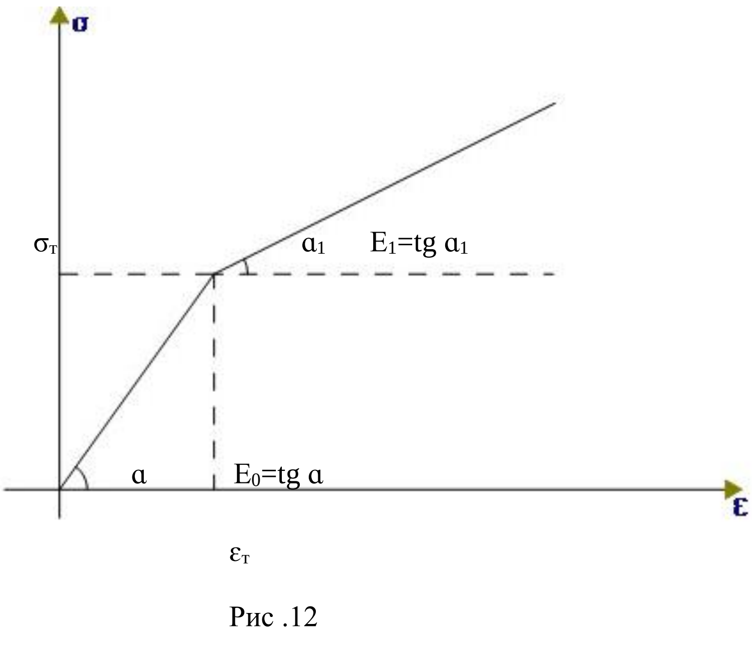


Рис .12

Напряжения вычисляются по формулам

Если $-10^{-3}<\varepsilon<10^3$, то $\sigma=2\cdot 6^6\,\varepsilon$.

Если $\varepsilon \geq 10^{-3}$, то $\sigma= 2\cdot 10^3(\varepsilon+0,999)$.

Если $\varepsilon >-10^{-3}$, то $\sigma= 2\cdot 10^3(\varepsilon+0,999)$.

Деформация в произвольном элементе фермы

$$\varepsilon = \frac{1}{l}\{-m_1 - m_2 m_1 m_2\} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_1 \end{Bmatrix}.$$

В первом приближении система уравнений (20) имеет следующий вид

$$\frac{E_0 F}{l}\begin{bmatrix} 0.9451 & -0.9451 \\ -0.9451 & 2.128 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix};$$

Решение $-z_1^0 = 1.903\frac{pl}{E_0 F}$; $\quad -z_2^0 = 0.8453\frac{pl}{E_0 F}$.

Во втором приближении

$$\frac{E_0 F}{l}\begin{bmatrix} 0.9451 & -0.9451 \\ -0.9451 & 1.129 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta z_1^1 \\ \Delta z_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1304P \end{Bmatrix},$$

Решение $\Delta Z_1^1 = \Delta Z_2^1 = 0.7087\frac{PL}{E_0 F}$.

В третьем приближении

$$\frac{E_0 F}{l}\begin{bmatrix} 0.5704 & -0.7288 \\ -0.7288 & 1.004 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta Z_1^2 \\ \Delta Z_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02447P \\ 0.01368P \end{Bmatrix}.$$

Решение $\Delta Z_1^2 = 0.3501\frac{PL}{E_0 F}$; $\Delta Z_2^2 = 0.2404\frac{PL}{E_0 F}$.

В четвертом приближении

$\Delta Z_1^3 \approx 0$; $\qquad \Delta Z_2^3 \approx 0$;

В табл.3 приведены результаты вычисления перемещений на каждом шаге итерационного процесса . Индекс при ε,σ, указывает номер стержня , в котором эта величина определена . В знаменателях дробей в первой колонке приведены напряжения линейно-упругого решения (E_K=E).

Статическая проверка (рис .13) $\sum x = 0; \sum y = 0;$

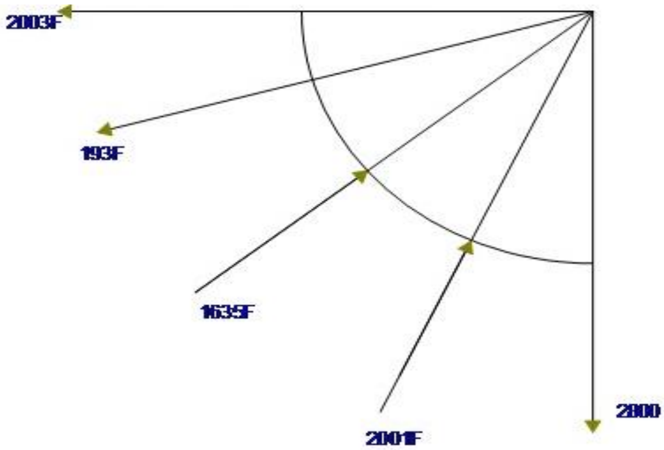


Рис. 13

Компоненты н.д.с.	Номер итерации		
	1	2	3
Z_1	1.903	2.612	2.692
Z_2	0.8453	1.552	1.794
ε_1	$0.1183 \cdot 10^{-2}$	$0.2176 \cdot 10^{-2}$	$0.2512 \cdot 10^{-2}$
ε_2	$-0.2663 \cdot 10^{-3}$	$0.4817 \cdot 10^{-4}$	$0.9750 \cdot 10^{-4}$
ε_3	$-0.7407 \cdot 10^{-3}$	$-0.7407 \cdot 10^{-3}$	$-0.8174 \cdot 10^{-3}$
ε_4	$-0.8580 \cdot 10^{-3}$	$-0.1040 \cdot 10^{-2}$	$0.1163 \cdot 10^{-2}$
σ_1	$\frac{2000}{2366}$	2003	2003
σ_2	$\frac{-532.6}{-532.6}$	96.3	194
σ_3	$\frac{-1481}{-1481}$	-1481	-1635
σ_4	$\frac{-1716}{-1716}$	-2001	-2001

Анализ результатов счета показывает , что учет физической нелинейности материала позволяет уточнить не только количественные характеристики н.д.с. ,но и выявить новые качественные результаты - напряжение во втором стержне в линейном расчете этот стержень растянут.

§4. Метод сил

Построение итерационного процесса основано на представлении нелинейного функционала в виде квадратичного

$$\Pi_2 = -\int_{(v)} \left[\bar{u}(\sigma^n) + \bar{u}^1(\sigma^n)\Delta\sigma + \frac{1}{2}\Delta\sigma^{\mathrm{T}} H_2^n \Delta\sigma \right] dv. \qquad (23)$$

Обозначаем продольные силы , возникающие в стержнях фермы, через $X_r = \sigma_r \cdot F_r$. По-прежнему предполагается в пределах одного стержня площадь F_r постоянна. Приближенный функционал Кастилиано (23), принимая во внимание принятое обозначение , для ферм приобретает следующий вид

$$\Pi_2 = \sum_{r=1}^{3} \int_{(v)} \bar{u}_r(\sigma_r^n) dv + (\Delta x^{n+1})^T \cdot L_C X^n + \frac{1}{2}(\Delta x^{n+1})^T L_K \Delta X^{n+1}. \qquad (24)$$

В (24) приняты обозначения

$X^{\mathrm{T}} = \{X_1 X_2 \ldots X_S\}$

$$L_a=\begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_{a1}F_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{L_S}{E_{aS}F_S} \end{bmatrix} (a = C.K);$$

S-число стержней фермы.

Внутри одного элемента уравнение равновесия $\frac{d\sigma}{dx}$=0 удовлетворяется ,т.к в пределах любого r-го стержня $\sigma_r = const$. Уравнение совместности усилий на

$A_S^T \sigma = g_s$ єs,

В рассматриваемом случае является уравнениями статики, которые можно записать в виде

$$\underset{(mxs)}{c} \cdot \underset{(sx1)}{x} = \underset{(mx1)}{p}, \quad (25)$$

Где m- число линейно-независимых уравнений статики.

Для статически определимых и геометрически неизменяемых систем матрица С квадратная и невырождена ; внутренние усилия в стержнях фермы определяются решением уравнения

(25)-x=c^{-1} p, В статически неопределимых фермах матрица С прямоугольная размером

m $_x$ s(m<s) . Выберем в C_m столбцов так, чтобы определитель матрицы C_1 , составленный из этих столбцов, был отличен от нуля . Иными словами, вектор внутренних усилий X представим в виде «зависимых» y и «независимых» x внутренних сил. Такое разделение внутренних сил соответствует в строительной механике стержневых систем выбору основной системы или назначению лишних неизвестных

Перепишем (25) в следующем виде

$O_1y+c_2x=p.$ (26)

Откуда y = c_1^{-1}(p-c_2x)

Введем обозначения $C_1^{-1}P = Br$; -c_1^{-1}. $C_2=B_0$

Тогда (26) перепишем так

$У=B_0X+B_P.$ (27)

Подставляя (27) в (24) получим

$$П_2=\sum_{r=1}^{S}\int_{(v)}\bar{u}_r(\sigma^n)dv+\begin{bmatrix} B_0\Delta X^{n+1} \\ \Delta X^{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{C1} & 0 \\ 0 & L_{C2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0X^h+B_0 \\ X^n\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} B_0\Delta X^{n+1} \\ \Delta X^{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{C1} & 0 \\ 0 & L_{C2}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} B_0\Delta X^{n+1} \\ \Delta X^{n}\end{bmatrix}\right]$$

Или

$П_2=\sum_{r=1}^{S}\int \bar{u}_r(\sigma^n)dv + (\Delta x^{n+1})\,(L_{c2}+B_0^T L_{C1}B_0)X^0 + (\Delta X^{n+1})^T B_0^T L_{C1}B_P + \frac{1}{2}(\Delta X^{n+1})(L_{C2} + B_0^T L_{C1}B_0)\Delta X^{n+1}$.

Подставим выражение $L_{k2}+B_0^T L_{k1}B_0$ в следующем виде

$$L_{k2}+B_0^T L_{k1}B_0=\begin{bmatrix}B_0\\E\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}L_{k1} & 0\\0 & L_{k2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\E\end{bmatrix}. \qquad (29)$$

Где Е- единичная матрица размером (ЛхЛ); Л-число лишних неизвестных

Элементы матрицы $\begin{bmatrix}B_0\\E\end{bmatrix}=\bar{N}_0$ (30)

Представляют собой внутренние усилия в стержнях основной системы фермы, возникающие от единичных значений лишних неизвестных.

Принимая во внимание (30), перепишем (29) в виде

$$L_{K2}+B_0^T L_{K1}B_0=\bar{N}_0^T L_K\bar{N}_0; \qquad (31)$$

Аналогично

$$L_{c2}+B_0^T L_{c1}B_0=\bar{N}_0^T L_c\bar{N}_0 \qquad (32)$$

И

$$B_0^T L_{c1}B_p=\bar{N}_0^T L_c N_C, \qquad (33)$$

Где $N_P=\begin{bmatrix}B_P\\0\end{bmatrix}$ - усилия в стержнях основной системы фермы, возникающие от заданной внешней нагрузки. Последние Л строк матрицы N_P равны нулю. Элементы этих строк являются величинами усилий в устраненных связях от заданной внешней нагрузки.

Подставляя (31)-(33) в (28), получим

$$П_2=\sum_{r=1}^{S}\int \bar{u}_r(\sigma^n)dv + (\Delta x^{n+1})\,\bar{N}_0^T L_C\bar{N}_0X^h + (\Delta X^{n+1})^T N_0^T L_C N_0 + \frac{1}{2}(\Delta X^{n+1})^T\bar{N}_0 L_K\bar{N}_0\Delta X^{n+1}.. \qquad (34)$$

Функционал (34) теперь определен на классе статически возможных векторов внутренних усилий. Принятое распределение внутренних усилий удовлетворяет уравнениям равновесия внутри любого стержня и условиям совместимости усилий на S_1.

Разрешающее уравнение метода сил получим из условия стационарности функционала (34).

$$\frac{dП_2}{d(\Delta X^{n+1})}=0$$

Или

$\overline{N}_0^T L_K \overline{N}_0 \Delta X^{n+1} + \overline{N}_0^T L_c \overline{N}_0 \Delta X^n + \overline{N}_0^T L_c N_P = 0.$ (35)

Характер экстремума функционала (34) можно определить , исследовав знак второй производной

$\frac{d\Pi^2}{d(\Delta X^{n+1})^2} = \overline{N}_0^T L_k \overline{N}_0.$ (36)

Квадратичная форма (36) положительно определена , если выполнены условия

$E_{nr} > 0$. (r=1,2…s),

Т.е угол наклона касательной в любой точке графика функции σ=σ(ϵ) должен быть положительным.

Таким образом , функционал Π_2 достигает минимума на решении задачи, если выполнены условия (37).

В соответствии с теоремой Кастилиано по механическому смыслу уравнения (35) представляют собой условия совместимости перемещений на каждом шаге итерационного процесса по направлению устраненных связей или, что эквивалентно , по направлению лишних неизвестных обобщенных сил равны нулю.

Вычислительный процесс по (35) ведется до стабилизации решения с заданной точностью , либо до выявления его нестабильности . Окончательные значения усилий в установленных связях определяются по формуле

$X_r^{n+1} = X_r^0 + \sum_{i=1}^{n=1} \Delta X_r^i,$

Продольные силы в стержнях фермы на (n+1) шаге итерационного процесса

$N^{n+1} = \overline{N}_0 X^{n+1} + N_P$

Основной проверкой правильности решения в методе сил , является кинематическая проверка. После определения н.д.с. системы материал в сооружении можно считать линейно упругим , но в каждой расчетной точке или области (для фермы – в каждом стержне , имеющим свой модуль упругости – секущий модуль ,- определенный в процессе решения задачи. Поэтому перемещения в любой точке фермы могут быть определены по формуле Мора

$\tilde{\Delta}_{ip} = \sum_{r=1}^{s} \frac{\overline{N}_{ir} N_r l_r}{E_{cr} l_r},$ (38)

Где $\overline{N}_{ir}$ - продольная сила в r-м стержне , определенная в любой основной системе метода сил от единичной силы, приложенной по направлению i-й установленной связи.

Каноническая форма уравнения (35) может быть представлена в следующем виде

$\sum_{j=1}^{л} \delta_{ij}^{n+1} \Delta X_j^{n+1} + \sum_{j=1}^{л} \delta_{ij}^{n} \Delta X_j^{n} + \Delta_{ip} = 0.$ (39)

I=(1,2…л),

Где $\delta_{ij}^{n+1} = \sum_{r=1}^{s} \frac{\bar{N}_{ir} \bar{N}_{Jr} l_r}{F_{kr} F_r}$

-перемещение точки приложения силы X_J по ее направлению , вызванное силой X_J=I;

Величина $\Delta_i = \sum_{j=1}^{л} \delta_{ij}^{n} X_j^{n} + \Delta_{ip}$ –перемещение точки приложения силы X_I по ее направлению , обусловленное несоответствием достигнутого уровня внутренних сил т внешней нагрузки.

Пример 2. Расчет фермы, по условию примера 1. Методом сил приводит к тому, что на некотором итерационном шаге система разрешающих уравнений (39) становится плохо обусловленной, а затем вырождается . Объясняется это тем, что при формировании коэффициентов канонических уравнений δ_{ij} вклад одного стержня , находящегося на стадии упрочнения , становится очень большим и поэтому податливости этого стержня становятся настолько велики , что доминируют над всеми остальными. Поэтому в качестве иллюстрированного примера рассчитывается ферма с геометрическими параметрами по пример 1. а модуль упрочнения принят $E=1\cdot 10^6$. Напряжение в r-м стержне на (n+1) шаге итерационного процесса определяется по формуле $\sigma_r^{n+1} = \frac{x_i^{n+1}}{F}$;

Деформации в стадии упрочнения подсчитываются по формуле

$\epsilon^{n+1} = \frac{\sigma^{n+1} \pm \sigma_T}{E_K} \pm \epsilon_T$.

Здесь, верхний (нижний) знак применяются при определении деформации растяжения (сжатия) . Основная система показана на рис 14. Результаты расчета сведены в табл 4.

На третьем итерационном шаге ΔX^3=0

Параметры н.д.с	В основной системе	Номер итерации	
		1	2
X_1	0	-0,3086	-0,1598
X_2	0	-0,7106	-0,5291
N_1	0.5774	-0,9679	0,8277
N_2	0	-0,3086	-0.1598
N_3	0	-0,7106	-0.5291
N_4	-1,1547	-0,3963	-0,6304
σ_1	1616,6	2710.1	2317,7
σ_2	0	-864.1	-447,5
σ_3	0	-1989.8	-1481,4
σ_4	-3233,2	-1109.6	-1765,2

При счете в мантиссе каждого числа оставлялось семь значащих цифр, а в таблице приведены округленные значения .

Основная система метода сил для кинематической проверки показана на рис 15.

Относительная погрешность при определении $\tilde{\Delta}_{ip}$ составила≈$4.2\cdot10^{-4}$ % при определении $\tilde{\Delta}_{zp}$ – $1.6\cdot10^{-6}$%.

Выводы.

В заключение отметим следующий факт, подтвержденный следующими экспериментами : метод сил рекомендуется применять в расчетах системы из размягчающего материала со слабой нелинейностью зависимости $\sigma - \varepsilon$. либо для систем из затвердевшего материала у которого касательный модуль в стадии упрочнения больше секущего. Наоборот, метод перемещений дает лучшие результаты по технической сходимости итерационного процесса в сравнении с методом сил для размягчающихся материалов ($E_K<E_C$) . Наиболее распространенные строительные материалы: металл, бетон, дерево и т.д имеют диаграммы $\sigma - \varepsilon$, у которых $E_K<E_C$, поэтому при решении более сложных задач целесообразно применять метод перемещений .

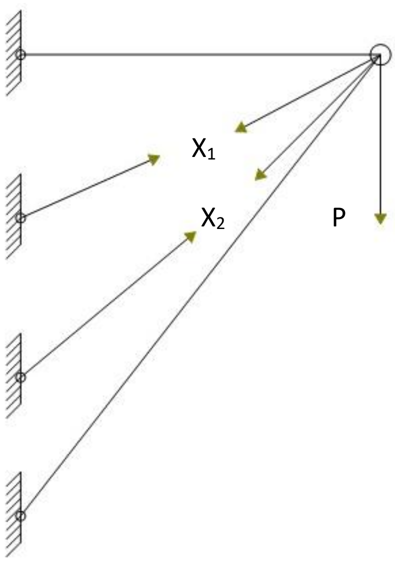


Рис.14

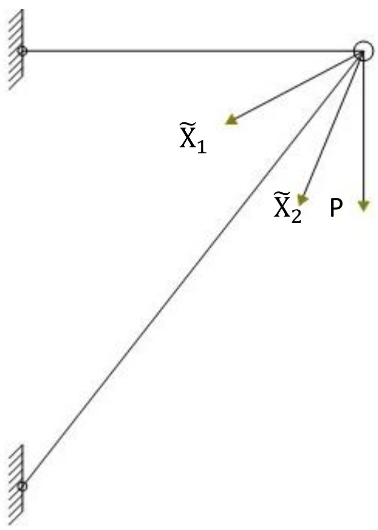


Рис.15.