МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. Т. ТРУБИЛИНА»

УЧЕТНО-ФИНАНСОВЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра статистики и прикладной математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Практикум
для контактной и самостоятельной работы
обучающихся по направлению подготовки «Экономика»

КРАСНОДАР 2021

УДК 519.2(076.5)
ББК 22.172
Т 338

Р е ц е н з е н т:

Л. И. Ниворожкина, заведующая кафедрой статистики, эконометрики и оценки рисков Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), доктор экон. наук, проф., заслуженный деятель науки РФ

Коллектив авторов:
И. А. Кацко, Н. Х. Ворокова, А. Е. Жминько, А. Е. Сенникова

Т338 Теория вероятностей и математическая статистика: практикум для контактной и самостоятельной работы обучающихся по направлению подготовки «Экономика» /И. А. Кацко [и др.]. – Краснодар: КубГАУ, Издательство: Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2021. – 102 с.

Содержание и тематика методических рекомендаций и заданий соответствует действующей программе по теории вероятностей и математической статистике. Отдельные задачи носят условный характер, значительная часть составлена по реальным данным организаций Краснодарского края. Задания предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, при самостоятельном изучении учебников и учебных пособий студентами, обучающихся по направлению подготовки «Экономика», направленности «Экономика предприятий и организаций»

УДК 519.2(076.5)
ББК 22.172

Оглавление

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Событие есть возможный результат опыта или испытания. Простейшие неразложимые результаты опыта называются элементарными событиями.

Достоверным называется событие *U*, которое в данном опыте обязательно произойдет.

Невозможным называется событие *V*, которое в данном опыте не может произойти.

Случайным называется событие, которое в данном опыте или испытании может произойти, а может и не произойти. События обозначаются первыми буквами латинского алфавита *A, B, C,* и т. д. или A_1, A_2, A_3, и т. д.

События называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление других в данном опыте. Если события не могут появиться в одном опыте, то они называются **несовместными**. Несколько событий называются **попарно-несовместными**, если никакие два из них не могут появиться вместе в данном опыте.

События называются **единственно-возможными**, если в результате испытания обязательно произойдет какое-то из этих событий.

Совокупность несовместных и единственно возможных событий образуют **полную группу событий**.

События являются **равновозможными**, если имеются основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Вероятность события *A* обозначается *P(A)* и находится по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где n – общее число элементарных исходов (событий) в опыте или испытании; m – число элементарных исходов (событий), благоприятствующих появлению события A.

$$\mathrm{P(U) = 1;\ P(V) = 0;}\ 0 < P(A) < 1, \tag{1.2}$$

где U – достоверное событие; *V*– невозможное событие; A – случайное событие.

Вероятность любого события *A* заключена между нулем и единицей,

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.3}$$

При определении вероятностей событий часто используются формулы комбинаторики, позволяющие подсчитать число различных способов выбора k элементов из n элементного множества по схеме без возвращений и с возвращениями.

Число размещений из n элементов по k элементов в каждом без возвращений

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1), \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.4}$$

Число перестановок из n элементов, каждое из которых содержит все n элементов без возвращений

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n; \tag{1.5}$$

Число сочетаний из n элементов по k элементов в каждом без возвращений

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.6)$$

$0! = 1;\ C_n^0 = 1;\ C_n^k = C_n^{n-k};\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}; C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$

Различные размещения отличаются друг от друга или порядком или составом своих элементов. Различные сочетания отличаются друг от друга только составом своих элементов. Перестановки отличаются порядком своих элементов.

Число перестановок, размещений и сочетаний с возвращениями определяется по формулам:

$$\overline{P_к} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!};\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n;\ \overline{A_n^k} = n^k;\ \overline{C_n^к} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+к-1)!}{k!(n-1)!}. \quad (1.7)$$

Относительной частотой или статистической вероятностью события А называется число исходов, в которых появилось событие А к общему числу проведенных исходов.

$$W(A) = \frac{M}{N}, \quad 0 \le W(A) \le 1. \quad (1.8)$$

Если число элементарных исходов бесконечно, то используют геометрическое определение вероятности. Вероятность попадания точки в область g, брошенной в область G равна отношению меры (mes) области g к мере области G.

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}. \quad (1.9)$$

1. Являются ли несовместными следующие события:

а) Опыт – бросание двух монет;
события: A_1 – появление двух гербов; A_2 – появление двух цифр.

б) Опыт – три выстрела по мишени;
события: B_1 – хотя бы одно попадание; B_2 – хотя бы один промах.

в) Опыт – бросание двух игральных костей;
события: C_1 – хотя бы на одной кости появилось три очка; C_2 – появление четного числа очков на каждой кости.

г) Опыт – извлечение двух шаров из урны, содержащей белые и черные шары;
события: $Д_1$ – взято два белых шара; $Д_2$ – оба извлеченных шара одного цвета.

д) Опыт – студент сдает три экзамена;
события: E_1 – студент сдает хотя бы один экзамен; E_2 – студен не сдает хотя бы один экзамен;

е) Опыт – лифт отправляется с 10 пассажирами и останавливается на пяти этажах;

события: F_1 – на первых четырех остановках вышло не более 9 человек; F_2 – на последней остановке вышел хотя бы один человек.

2. Образуют ли полную группу следующие события:

а) Опыт – два выстрела по мишени;
события: A_1 – два попадания в мишень; A_2 – хотя бы один промах по мишени.

б) Опыт – бросание двух игральных костей;
события: B_1 – сумма очков на верхних гранях больше 3; B_2– сумма очков на верхних гранях равна 3.

в) Опыт – посажено четыре зерна;
события: C_1– взошло одно зерно; C_2 – взошло два зерна; C_3– взошло три зерна; C_4– взошло четыре зерна.

г) Покупатель посещает три магазина;
события: $Д_1$ – покупатель купит товар хотя бы в одном магазине; $Д_2$– покупатель не купит товар ни в одном магазине.

д) Опыт – студент сдает три экзамена;
события: E_1 – студент сдаст хотя бы один экзамен; E_2 – студент не сдаст хотя бы один экзамен.

3. Являются ли равновозможными следующие события:

а) Опыт – выстрел по мишени;
события: A_1 – попадание при выстреле; A_2 – промах при выстреле.

б) Опыт – бросание двух игральных костей;
события: B_1 – произведение очков на верхних гранях равно 12; B_2 – сумма очков на верхних гранях равна 9.

в) Бросание двух монет;
события: C_1– появление двух гербов; C_2 – появление двух цифр; C_3 – появление одного герба и одной цифры.

г) Опыт – извлечение двух карт из колоды;
события: $Д_1$– обе карты одинаковой масти; $Д_2$– обе карты разных мастей.

4. Брошены 3 монеты.
Составить события, образующие полную группу.
Сколько равновозможных исходов образует полную группу событий?
Укажите события единственно – возможные, не образующие полной группы событий?

5. Приведите примеры:
а) трех событий, образующих полную группу событий;
б) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы событий;
в) двух событий, несовместных и образующих полную группу событий, но не равновозможных.

6. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на ее верхней грани появится: а) шесть очков; б) нечетное количество очков; в) не менее четырех очков; г) не более двух очков; д) более трех очков.

7. Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

8. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) на обеих костях появится одинаковое число очков;
б) хотя бы на одной кости появится два очка;
в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение шести очкам;
г) сумма очков, выпавших на обеих костях, не превзойдет 5.

9. Из 10150 человек, проживающих в населенном пункте, 71 человек имеет возраст свыше 80 лет. Определить статистическую вероятность появления лиц с возрастом свыше 80 лет. Какой процент лиц, имеет возраст до 80 лет?

10. Относительная частота (частость) работников предприятия, имеющих высшее образование, равна 0.15. Определить: а) число работников, имеющих высшее образование, если всего на предприятии работает 40 человек; б) число работников предприятия, если с высшим образованием работает 30 человек.

11. Имеются две урны. В первой – 10 красных и 6 черных шаров. Во второй – 4 красных и 6 черных шаров. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут красными; б) из первой урны будет вынут красный шар, а из второй – черный; в) хотя бы один из вынутых шаров черный.

12. Из коробки, содержащей 5 пронумерованных жетонов, вынимают один за другим все находящиеся в ней жетоны и укладывают рядом. Найти вероятность того, что номера вынутых жетонов будут идти по порядку 1, 2, 3, 4, 5.

13. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

14. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты, колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

15. На отдельных одинаковых карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все девять карточек перемешивают, после чего наугад берут четыре карточки и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность получить при этом: а) четное число; б) число 1234; в) 6789?

16. Какова вероятность, что на трех карточках, вынутых по одной и положенных в порядке их появления, получим число 325, если всего карточек было шесть с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6?

17. Восемь различных книг расставляются наугад на полке. Найти вероятность того, что: а) три определенные книги окажутся поставленными рядом; б) две определенные книги окажутся поставленными рядом.

18. Среди изготовленных 15 деталей имеется 5 нестандартных. Определить вероятность того, что взятые наугад три детали окажутся стандартными.

19. В партии готовой продукции из 10 изделий имеется 7 изделий повышенного качества. Наудачу отбираются шесть изделий. Какова вероятность того, что четыре из них будут повышенного качества?

20. Какова вероятность того, что два определенных студента будут посланы на практику в Лабинск, если предоставлено 6 мест в г. Лабинск, 10 – в г. Анапу и 4 – в г. Тимашевск?

21. Из 25 студентов группы, 12 занимаются научной работой на кафедре бухгалтерского учета, 7 – экономического анализа, остальные – на кафедре статистики. Какова вероятность того, что два случайно отобранных студента занимаются научной работой на кафедре статистики?

22. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдут: а) две женщины и один мужчина; б) все женщины.

23. Среди 20 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрываются 5 билетов в театр. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся три девушки или две девушки.

24. Определить вероятность того, что участник лотереи «Спортлото – 5 из 36» угадает правильно: а) все 5 номеров; б) 3 номера.

25. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок открывается в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Какова вероятность того, что замок откроется, если установить произвольную комбинацию цифр?

26. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включается случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

27. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

28. В квадрат с длиной стороны «а» вписан круг. Наудачу в квадрат бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадает в круг.

29. В прямоугольник с вершинами *А* (1;1), *В* (1;3), *С* (4;3), *Д* (4;1) наудачу брошена точка *К (х; у)*. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y \le x - 1$.

30. В прямоугольник с вершинами *А* (0;0), *В* (0;5), *С* (6;5), *Д* (6;0) наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9, \\ y \le 6 - x. \end{cases}$

31. Найти вероятность того, что при подбрасывании пяти игральных костей на всех гранях выпадет разное число очков.

32. На отрезок [1;7] наудачу брошены две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними больше двух.

2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Суммой двух событий A и B называется событие $C=A+B$, заключающееся в появлении или события A или события B или в совместном их появлении. Суммой нескольких событий называется событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из этих событий. Если события несовместные, то их суммой называется событие, состоящее в появлении одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (2.1)$$

Для n несовместных событий теорема имеет вид:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.2)$$

Следствие 1. Сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу событий, равна 1.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \text{ или } p + q = 1. \qquad (2.3)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (2.4)$$

События называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого события.

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B);\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (2.5)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности наступления первого события на условную вероятность второго события при условии, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A); \qquad (2.6)$$

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). (2.7)$$

Теорема наступления хотя бы одного из событий. Вероятность наступления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) \qquad (2.8)$$

Следствие. Если события A_i имеют одинаковую вероятность появиться p, то вероятность появления хотя бы одного события из n независимых событий:

$$P(A)=1-q^n, \text{ где } p + q = 1. \qquad (2.9)$$

Формула волной вероятности. Пусть событие A может появиться вместе с одним из попарно несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$ образующих полную группу событий. События $B_1, B_2, ..., B_n$ будем называть гипотезами для события A. Тогда вероятность наступления события A определяется по формуле:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + ... + P(B_n) \cdot P(A/B_n), \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1. \tag{2.11}$$

Формулы Бейеса. Условная вероятность наступления события B_i , при условии, что событие A произошло, определяется по формуле:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = 1, \tag{2.13}$$

где $P(A) \neq 0$ - находится по формуле полной вероятности.

1. Производится три выстрела по мишени. Рассматриваются события: A_1 – попадание в цель первым выстрелом; A_2 – попадание в цель вторым выстрелом; A_3– попадание в цель третьим выстрелом. Определить, каким событиям равносильны следующие события: 1) $A_1 + A_2 + A_3$; 2) $A_1 A_2 A_3$;

3) $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$; 4) $\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3$; 5) $A_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3 + \overline{A}_1\ A_2\ \overline{A}_3 + \overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_3$; 6) $\overline{\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3}$;

7) $A_1 + \overline{A}_1\ A_2 + \overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_3$; 8) $(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)A_3$; 9) $A_1 A_2 A_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$.

2. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события A_i – появление герба при i – ом подбрасывании ($i = 1, 2, 3$). Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий A_i и $\bar{A}_i$ следующие события: A – появились все три герба; B – появились все три цифры; C – появился хотя бы один герб; D – появилась хотя бы одна цифра; E– появился только один герб; F – появилась только одна цифра.

3. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4. Найти вероятность: а) попадания в первую или третью зоны; б) промаха по мишени.
4. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 0,6. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на следующий выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,3. Определить вероятность поражения второй мишени.
5. В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из отобранных наудачу трех студентов: а) все три девушки; б) первые две девушки, третий - юноша; в) все три юноши?

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Выстрелы производятся по одному до первого попадания. Определить вероятность того, что придется производить четвертый выстрел.

7. Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Перед выездом из гаража автомобиль осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность, равна 0,8, а второй – 0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправляется в ремонт. Найти вероятность того, что: а) автомобиль будет допущен к работе; б) автомобиль не будет допущен к работе.

8. Вероятность одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

9. Из 40 деталей в ящике 5 бракованных. Какова вероятность того, что взятые наудачу две детали не будут бракованными?

10. В коробке 12 карандашей трех цветов, по четыре карандаша каждого цвета. Наудачу вынимают три карандаша. Найти вероятность того, что все три карандаша окажутся разного цвета. Решить задачу при условии: а) карандаши возвращают в коробку; б) карандаши не возвращают в коробку.

11. Из урны, содержащей четыре красных и шесть черных шаров, вынимают два шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты: а) оба шара черного цвета; б) красный и черный в любой последовательности; в) второй шар будет черным; г) оба шара одного цвета?

12. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

13. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна 0,6. Производится по одному выстрелу одновременно из трех орудий. Цель будет поражена, если в нее попадут не менее двух орудий. Найти вероятность: а) поражения цели; б) промаха одним или двумя орудиями.

14. Слово «машина» составлено из букв разрезной азбуки. Какова вероятность того, что, перемешав буквы и укладывая их в ряд по одной, получим слово: а) «машина»; б) «шина»; в) «маша»?

15. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупки; г) по крайней мере два совершат покупки; д) хотя бы один купит товар.

16. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии.

17. В продаже имеется 12 акций одного предприятия, 8 другого и 10 третьего. Клиент покупает три акции. Найти вероятность того, что клиентом будут куплены: а) акции одного предприятия; б) все три акции разных предприятий.

18. Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у которого первым появится шесть очков. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.

19. Через автобусную остановку проходят автобусы семи маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов №1, №5, №7. Какова вероятность, что нужный ему автобус будет одним из первых трех подошедших к остановке?

20. Читатель в поисках нужной книги обходит три библиотеки. Вероятность того, что книга имеется в очередной библиотеке, равна 0,3. Что вероятнее – найдет читатель книгу или нет?

21. В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы на один из трех приобретенных билетов?

22. В урне 10 красных, 5 зеленых и 3 черных шара. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут: а) одного цвета; б) разных цветов.

23. На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 первого сорта. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность, что оба содержат овощи: а) первого сорта; б) разного сорта; в) одного сорта?

24. Читатель разыскивает книгу в трех библиотеках. Одинаково вероятно, есть или нет в фонде очередной библиотеки книга и также одинаково вероятно, выдана она или нет. Чему равна вероятность того, что читатель найдет нужную книгу?

25. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7, для второго - 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) одним студентом; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?

26. Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй – 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) хотя бы один ответит верно; в) правильно ответит только первый студент.

27. Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее четырех очков?

28. В первой бригаде 6 тракторов, во второй – 9. В каждой бригаде один трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) один требует ремонта; в) трактор из второй бригады исправен.

29. На предприятии имеется три автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9, второго – 0,7, третьего – 0,8. Найти вероятности всех возможных значений числа автомобилей, работающих безотказно в течение определенного времени.

30. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность одного промаха при трех выстрелах.

31. В круг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна вероятность того, что поставленные наудачу внутри круга две точки окажутся внутри заданного прямоугольника?

32. В шар радиуса R вписан прямой конус наибольшего объема. Чему равна вероятность того, что из поставленных наудачу внутри шара двух точек хотя бы одна окажется внутри конуса.

33. Вероятность спортсменом взять в одной попытке высоту 1,8 м равна 0,6, высоту 2 м – 0,2, высоту 2 м10 см – 0,1. Спортсмен, не взявший предыдущую высоту, выбывает из соревнований. Спортсмену на каждую высоту дается три попытки. Определить вероятность того, что спортсмен закончит соревнования, взяв высоту: а) 1,8 м; б) 2 м; в) 2 м10 см.

34. В первой урне 5 красных, 3 белых и 2 черных шара. Во второй 3 белых и 2 черных шара. Из первой урны взято 2 шара, а из второй один. Определить вероятность того, что среди них: а) все шары одного цвета; б) все шары разного цвета.

35. При исследовании жирности молока коров все стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70%, во второй 23% и в третьей 7% всех коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы коров соответственно равна 0,6; 0,4 и 0,1. Определить вероятность того, что для взятой наудачу коровы жирность молока составит не менее 4%. Взятая наудачу корова дает молоко жирностью не менее 4%. Найти вероятность того, что эта корова из первой группы.

36. В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь. Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из первой урны, нестандартная?

37. Имеются две урны. В первой – семь красных шаров и три черных, во второй – три красных и четыре черных. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны переложили в первую урну один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется красным.

38. Торговая фирма получает однотипные товары от трех поставщиков. Объемы поставок товаров относятся как 1 : 2 : 3. Известно, что удельный вес товаров высокого качества от первого поставщика составляет 2/3 , второго 3/4 и третьего 5/6 . Найти вероятность того, что взятая случайно единица товара будет высокого качества. Если взятая единица товара высокого качества, то наиболее вероятно, от какого поставщика она поступила?

39. Предприятие использует для производства продукта сырье трех других предприятий. Объем поступающего сырья относится в пропорции 1: 2: 5. Известно, что первое предприятие поставляет 60 % сырья высокого качества, второе 70 % и третье 90 %. Случайно взятая единица сырья оказалась высокого качества. Найти вероятность того, что она поступила от второго или третьего предприятия.

40. В первом ящике из 20 деталей 4 бракованных, во втором из 30 деталей 5 бракованных. Из первого во второй переложили две детали. Найти вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второго ящика, бракованная.

41. Исследование рынка хлебобулочных изделий показало, что на долю фирмы А приходится 40 % объема реализации продукции, фирмы В – 32 % и фирмы С – 28 %. Известно, что на долю хлеба приходится 65 % реализованной продукции фирмы А, 40 % - фирмы В и 70 % - фирмы С. Определить долю каждой фирмы на рынке хлеба.

42. Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы, из которых 20% семян 1-го сорта, 30% - 2-го сорта, 10% - 3-го сорта и 40% - 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для первого сорта равна 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,2, для четвертого – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен.

43. Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов по 20 вопросов, трое по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность, что он из тех трех студентов, которые подготовили по 10 вопросов?

44. Запасная деталь может находиться в одной из трех партий с вероятностями $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}3$. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что: а) взятая наудачу деталь проработает положенное время; б) деталь, проработавшая положенное время, взята из второй или третьей партии.

45. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

46. В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады, равна 0,7, для второй – 0,8. Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной. Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность, что она из второй бригады?

47. Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине составляет 0,4, во втором - 0,3, в третьем - 0,2. Определить вероятность того, что покупатель купит товар. Пусть покупатель купил товар в одном из магазинов. Какова вероятность того, что он купил товар во втором или в третьем магазине?

48. Вероятность получения заказа на производство товара организацией равна 0,7. Если заказ будет получен, то вероятность получения высокого дохода составит 0,8. Если же заказ не будет получен, то вероятность получения высокого дохода составит 0,25. Чему равна вероятность получения высокого дохода организацией.

3 ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Схема испытаний Бернулли. Пусть опыт повторяется в неизменных условиях n раз. В каждом опыте некоторое событие A может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность того, что это событие наступит в n испытаниях ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \qquad (3.1)$$

Вероятности $P_n(k)$ называются биноминальными вероятностями, где $k=0,1,\dots,n$.

При больших значениях n пользуются приближенными формулами.

Локальная формула Муавра – Лапласа. Если вероятность наступления некоторого события A в n независимых испытаниях постоянна, отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, причем $npq \geq 10$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз, приближенно равна (чем больше n и p ближе к 0,5, тем точнее):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (3.2)$$

Значение $\varphi(x)$, при заданном значении x, находят по таблице (приложениеA_1), причем $\varphi(-x) = \varphi(x)$, при $x > 5$, $\varphi(x) = 0$.

Формула Пуассона. Точность приближенной формулы Муавра – Лапласа снижается по мере приближения вероятности p к нулю. В таких случаях пользуются приближенной формулой Пуассона. Если вероятность наступления каждого события в независимых испытаниях постоянна и мала, а число испытаний достаточно велико, причем $npq < 10$, то вероятность того, что вn независимых испытаниях событие A наступит k раз, находится по формуле:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (3.3)$$

где $\lambda = np$.

Интегральная формула Муавра-Лапласа. При больших значениях n вероятность того, что число появления события A будет находиться в некотором интервале от k_1 до k_2 раз, вычисляют по интегральной формуле Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события. A в каждом из n независимых испытаний постоянна, отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что в n испытаниях событие Aпроизойдет от k_1 до k_2 раз, определяется по формуле:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad (3.4)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ - функция Лапласа, } z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}; \quad (3.5)$$

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$, при $x > 5$, $\Phi(x) = 0{,}5$.

Наивероятнейшее число появления события в независимых испытаниях. Наивероятнейшее число появления события A в повторных независимых испытаниях (k_o) определяется из неравенств:

$$np - q \le k_o \le np + p. \quad (3.6)$$

Наивероятнейшее число k_o – число целое. Если $(np - q)$ – целое число, то имеется два наивероятнейших числа.

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях. Вероятность того, что в независимых испытаниях абсолютное отклонение относительной частоты от постоянной вероятности не превзойдет некоторого числа $\varepsilon > 0$, определяется по формуле:

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (3.7)$$

1. Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости 5 очков появится: а) два раза; б) хотя бы один раз; в) не менее 3 раз.
2. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) пять семян; б) не менее четырех; в) не более одного.
3. Контрольная работа по теории вероятностей состоит из трех задач. Вероятность успешного решения студентом каждой задачи составляет 0,7. Найти вероятность того, что студент успешно решит: а) все три задачи; б) хотя бы одну задачу; в) одну или две задачи.
4. В семье 5 детей. Считая вероятности рождений мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков.
5. Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми: а) три изделия; б) не более двух; в) не менее двух изделий.
6. Станок автомат делает детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется: а) 4 бракованных; б) не менее двух бракованных.
7. Установлено, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверенном аудитором документе составляет 0,1. Определить вероятность того, что из 10 проверенных документов ошибка будет содержаться в одном. Вычислить по формулам Бернулли, Лапласа, Пирсона. Сравнить результаты.

8. На факультете 900 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Найти вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

9. Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если сдают экзамен 100 студентов.

10. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты правильно сработает, равна 0,999. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа случаев, если будет опущено 2000 монет.

11. Всхожесть клубней картофеля равна 80 %. Сколько нужно посадить клубней, чтобы наивероятнейшее число взошедших из них было равно 100?

12. Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50?

13. Два равносильных противника играют в шахматы. Для каждого из них, что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти. Ничьи во внимание не принимаются.

14. Бланк программированного опроса состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность, что методом угадывания студенту удастся выбрать по крайней мере четыре правильных ответа?

15. Вероятность того, что хотя бы одно изделие из 100 будет бракованным, составляет 0,1. Какой процент бракованных изделий выпускается предприятием.

16. При аудиторской проверке акционерного общества аудитор случайным способом отобрал 20 документов. Вероятность того, что документ имеет ошибку, равна 0,05. Определить вероятность того, что будет содержать ошибку: а) только два документа; б) хотя бы один документ. Решить с помощью формул Бернулли и Пуассона и сравнить результаты.

17. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников. Численность работников составляет 500 человек.

18. Вероятность успешной сдачи экзамена студентом составляет 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов сдаст экзамен: а) 96 студентов; б) хотя бы 70 студентов; в) число сдавших экзамен составит от 70 до 90.

19. Известно, что 80 % специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет: а) не менее 70; б) от 65 до 90 человек.

20. Вероятность заболевания гриппом в осенне-зимний период для населения поселка составляет0,4. Найти вероятность того, что из 800 человек число заболевших составит: а) от 300 до 500; б) более половины населения.

21. Найти такое число *k,* чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что среди 900 новорожденных более *k* мальчиков. Вероятность рождения мальчика 0,515.

22. В автопарке 70 машин. Вероятность поломки машины 0,2. Найти наивероятнейшее число исправных автомобилей и вероятность этого числа.

23. Всхожесть хранящегося на складе зерна равна 80 %. Определить вероятность того, что среди 100 зерен: а) число всхожих составит от 68 до 90 шт.; б) доля (частость) всхожих зерен будет отличаться от вероятности 0,8 по абсолютной величине не более, чем на 0,1?

24. Два стрелка одновременно делают выстрелы по мишени. Сколько нужно произвести залпов, если наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, равно 8? Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первого стрелка равна 0,5, а второго – 0,8.

25. Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,1. Сколько нужно купить билетов, чтобы с вероятностью 0,99 выиграл хотя бы один из них?

26. Два стрелка производят по n выстрелов, причем каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,5.

27. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определенный момент времени.

28. Всхожесть зерна 90 %. Определить вероятность того, что для отобранных случайным образом 100 зерен относительная частота всхожести будет отличаться от вероятности взойти $p = 0,9$ по абсолютной величине не более, чем на 0,1.

29. Вероятность что случайно взятый избиратель проголосует за данного кандидата, составляет 0,4. Найти вероятность того, что: а) из 100 опрошенных избирателей более половины проголосует за данного кандидата: в) доля избирателей, проголосовавших за данного кандидата, будет отклоняться от постоянной вероятности не более чем на 0,05?

30. Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найти границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

31. Известно, что 10 % делянок под овощами плохо обработано. Сколько нужно проверить делянок, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что относительная частота засоренных делянок будет отличаться от вероятности засоренности по модулю не более чем на 0,01?

32. Для определения степени поражения винограда вредителями было обследовано 400 кустов. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,03. Определить границы, в которых с вероятностью 0,9545 будет заключено число кустов, не пораженных вредителями.

33. По экспертной оценке, доля семей с очень высокими доходами составляет 0,1. Каков должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью не менее 0,99, погрешность в оценке неизвестной вероятности роста была не более 0,0025?

34. Страховая компания заключила 5000 договоров определенного вида. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти: а) вероятность того, что страховых случаев будет не более 120; б) наивероятнейшее число страховых случаев; в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения доли договоров со страховым случаем, будет отклоняться от постоянной вероятности не более чем на 0,5 %.

4 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем до опыта заранее неизвестно, какое именно значение она примет. Случайные величины подразделяются на одномерные и многомерные.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные значения, а непрерывная величина принимает все значения на заданном промежутке.

Законом или таблицей распределения дискретной случайной величины называют упорядоченный перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

X	x_1	x_2	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	. . .	p_n

, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

На графике в прямоугольной системе координат наносят точки (x_i; p_i), которые соединяют отрезками прямых. Полученную ломанную линию называют многоугольником распределения.

Математическим ожиданием *M(X)* дискретной случайной величины *X* называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \qquad (4.1)$$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат дисперсия и среднее квадратическое отклонение. **Дисперсией** *D(X)* дискретной случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \text{ или } D(X) = M(X^2) - M^2(X), \qquad (4.2)$$

где

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \,. \tag{4.3}$$

Средним квадратическим (стандартным) отклонением случайной величины X называют корень квадратный из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X - числа появления события A в nнезависимых испытаниях k раз ($k = 0,1,2,\ldots, n$), если вероятность появления события в k-ом испытании равна p, а вероятность возможного значения $X = k$ (числа появления события) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; M(X) = np, D(X) = npq. \tag{4.4}$$

Если число независимых испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытании очень мала, то применяют формулу Пуассона, а полученный закон называется **законом распределения вероятностей Пуассона:**

$$P_n(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np, \quad M(X) = \lambda, \; D(X) = \lambda. \tag{4.5}$$

Геометрическим называют закон распределения дискретной случайной величины X - числа появления события A в nнезависимых испытаниях k раз ($k = 1,2,\ldots,n$), если вероятность появления события в k-ом испытании равна p, а испытания проводятся до первого положительного исхода. Тогда вероятность возможного значения $X = k$ находится по формуле:

$$P_n(X = k) = p\, q^{k-1}, M(X) = \frac{1}{p}, \; D(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{4.6}$$

Пусть имеется совокупность, состоящая из N элементов, из которых M обладает необходимым свойством, Из общей совокупности элементов случайным образом отбирается n элементов по схеме без возвращения. Тогда вероятность того, что среди nэлементов окажется k с нужным свойством определяется по формуле (4.7), составляющей **гипергеометрический** закон распределения.

$$P_n(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \tag{4.7}$$

$$M(X) = n\frac{M}{N}, \; DX = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right). \tag{4.8}$$

1. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X – числа комбайнов, работавших безотказно. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.
2. Вероятность рождения мальчика 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
3. Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа покупателей,

совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Построить график распределения вероятностей.

4. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3 спортсмена. Составить закон распределения случайной величины X – числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

5. В группе, состоящей из $(2N + 1)$ студентов, N девушек. Составить закон распределения случайной величины X – числа девушек из случайно отобранных трех студентов (N – номер студента в группе).

6. В партии из $(N+5)$ изделий $(N+1)$ изделие высокого качества. Случайно отбирается 3 изделия. Составить закон распределения случайной величины X – числа изделий высокого качества среди отобранных.

7. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X – числа выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7. Найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

8. Покупатель посещает магазины до момента приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые посетит покупатель из пяти возможных. Найти наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

9. Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения случайной величины X – числа купленных билетов, если он имеет возможность купить только 5 билетов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

10. На спортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствия с вероятностями, равными соответственно 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. При первой неудаче спортсмен в дальнейших состязаниях не участвует. Составить закон распределения случайной величины X – числа взятых препятствий. Найти математическое ожидание случайной величины X.

11. Имеется 10 билетов: 1 билет в партер стоимостью 2500 руб., 3 билета в амфитеатр по 1000 руб. и 6 билетов на балкон по 300 руб. После реализации части билетов осталось три билета. Составить закон распределения случайной величины X – стоимости непроданных билетов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

12. Две компании участвуют в аукционе по реализации трех инвестиционных проектов. Вероятность выиграть аукцион для первой компании по первому проекту составляет 0,6, по второму – 0,95 и по третьему проекту 0,4. Возможная прибыль от реализации каждого проекта составляет 12 млн. руб. Определить ожидаемую прибыль для каждой компании.

13. Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен, если он его первый раз не сдал. Найти математическое ожидание случайной величины X.

14. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.
По одному варианту построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

X	Значения вероятностей по вариантам											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,1	0,2	0,05	0,15	0,1	0,2	0,25	0,1	0,4	0,05	0,15	0,12
3	0,2	0,25	0,15	0,2	0,3	0,4	0,3	0,15	0,3	0,1	0,25	0,23
5	0,4	0,3	0,2	0,25	0,3	0,3	0,2	0,25	0,2	0,15	0,25	0,46
7	0,2	0,15	0,4	0,25	0,2	0,05	0,15	0,35	0,08	0,25	0,2	0,14
9	0,1	0,1	0,2	0,15	0,1	0,05	0,1	0,15	0,02	0,45	0,15	0,05

15. Предприниматель рассматривает возможность покупки акций трех предприятий, по каждой из которых известна доходность, как отношение величины получаемого дохода за определенный период времени к цене акции и вероятности возможных значений доходности.

Акции какого предприятия следует считать более доходными, если руководствоваться средним значением (математическим ожиданием) доходности? Акции какого предприятия являются менее рискованными (считая, что чем выше колеблемость доходности акций, тем больше их рискованность)?

Предприятие 1		Предприятие 2		Предприятие 3	
Доходность,% (*X*)	Вероятность, (*Px*)	Доходность, % (*У*)	Вероятность, (*Py*)	Доходность, % (*Z*)	Вероятность, (*Pz*)
5	0,2	3	0,1	1	0,1
7	0,3	7	0,4	6	0,4
9	0,4	10	0,3	10	0,25
11	0,1	15	0,2	20	0,25

16. Бросают 12 игральных костей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

17. Математическое ожидание случайной величины X равно 8. Найти математическое ожидание случайных величин: а) $X–4$; б) $X+6$; в) $3X–4$; г) $4X+3$.

18. Дисперсия случайной величины X равна 8. Найти дисперсию следующих величин: а) $X–2$; б) $X+6$; в) $3X-2$; г) $2X+7$.

19. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:
а) Z = 4X-2У; б) Z = 2X-4У; в) $Z = 3X+5У$; г) $Z = 0,5X+3У$ если $M(X)$=5, $M(У)$ = 3, D(X) = 4, $D(У)$ = 6. Случайные величины X и У независимы.

20. Случайные величины X и У независимы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) Z = 4X+2У; б) Z = 5X-3У; в) Z = 3X-У, г) Z = 2X + 4У если M(X) = 6, M(У)= 5, D(X)= 7, D(У)= 4.

21. Вероятность изготовления бракованной детали автоматом равна 0,002. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X - числа бракованных деталей, если деталей изготовлено 1000. Определить вероятность того, что из 1000 деталей будет изготовлено: а) не более двух бракованных; б) хотя бы одна бракованная.

22. Независимые случайные величины X и $У$ имеют распределения:

X	2	4	6
p_x	0,3	0,5	0,2

$У$	3	4
p_y	0,4	0,6

Составить закон распределения случайных величин: а) Z=X+У; б) V=XУ. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин Z и V.

23. В бригаде два звена тракторов. В первом звене 3 трактора, причем вероятность безотказной работы каждого из них в течение смены равна 0,9. Во втором звене 2 трактора, вероятность безотказной работы первого из них равна 0,8, а второго 0,7. Составить закон распределения случайной величины X – числа тракторов, работавших безотказно в бригаде. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X**.**

24. Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна $N: (N+5)$, вторым $N: (N+2)$. Составить закон распределения случайной величины $Z=X+У$, где X ─ число поражений мишени первым стрелком, $У$ – число поражений мишени вторым стрелком. Найти числовые характеристики случайной величины Z.

25. Случайные величины X – площадь посева овощей на хозяйство (га) и $У$ – урожайность овощей с 1 га (т) имеют следующие распределения:

X	1	2	3
p_x	0,1	0,6	0,3

$У$	10	15	20
p_y	0,2	0,5	0,3

Определить средний валовой сбор овощей на хозяйство, дисперсию и среднее квадратическое отклонение валового сбора овощей.

26. Два независимо работающих станка могут выпускать бракованные изделия за 1 час в соответствии со следующими законами распределения:

1 станок

X	0	1	2
p_x	0,1	0,6	0,3

2 станок

$У$	0	1	2
p_y	0,2	0,6	0,2

Найти закон распределения случайной величины Z – числа единиц выпуска бракованных изделий для двух одновременно работающих станков.

Построить график распределения случайной величины Z. Найти *M(Z), D(Z),* σ*(Z)*.

27. В учреждении заработная плата служащих на начало января текущего года имела следующий закон распределения:

X	33000	34000	35000	36000
p	0,1	0,15	0,6	0,15

где *X* – величина заработной платы для определенной категории служащих, руб.; р – доля служащих определенной категории.

В первом полугодии заработную плату повысили на 30 %, во втором полугодии заработная плата возросла по каждой категории служащих на 300 руб.

Составить закон распределения случайной величины У - заработной платы на конец года. Определить изменение среднего уровня заработной платы за год.

28. Дискретная случайная величина *X* принимает три возможных значения: $x_1=1$ с вероятностью $p_1=0,2$; $x_3=5$ с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью p_2. Найти x_2 и p_2, если известно, что *M (X)*=3.

29. Вероятность сдать экзамен студентом на «отлично» равна 0,3, на «хорошо» – 0,4. Определить вероятности получения других оценок (2;3), если известно, что *M(X)*=3,9.

30. Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,02. Найти *M(X)* и σ *(X)* - числа выигранных билетов, если их было приобретено 100.

31. По одному тиражу лотереи куплено 100 билетов. Среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно трем. Найти вероятность выигрыша по одному билету лотереи.

32. Подброшены две игральные кости. Найти *M(X),* где *X* – сумма числа очков, которые могут появиться на двух выпавших гранях.

33. Организация продает крупный рогатый скот живым весом x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$). Вероятность того, что скот будет продан весом x_1 равна 0,4. Найти закон распределения случайной величины *X* – веса крупного рогатого скота, если математическое ожидание составило 4,60 ц, а дисперсия 0,24.

34. Совокупность семей имеет следующее распределение по числу детей:

X	x_1	x_2	2	3
p	0,1	p_2	0,4	0,35

Определить x_1, x_2, p_2, если известно, что M(X)=2, D(X)=0,9.

35. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	x_2	x_3	8
p	0,1	p_2	0,5	0,1

Найти x_2, x_3, p_2, если известно, что $M(X) = 4$, $M(X^2) = 20,2$.

36. Совокупность студентов имеет следующее распределение по результатам сдачи сессии:

X	2	3	4	5
p	0,1	p_2	p_3	p_4

Найти вероятности получения удовлетворительных, хороших и отличных оценок, если известно, что математическое ожидание (среднее значение) результатов сдачи экзаменов составило 3,7, а среднее квадратическое отклонение 0,9.

37. По данным задачи 14 определить модальное и медианное значения случайной величины *X*, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

38. По данным задачи 25 определить модальное и медианное значение валового сбора, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

5 НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Непрерывная случайная величина *X* принимает значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Она может быть задана функцией распределения вероятностей (интегральной функцией) или плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией).

Функцией распределения вероятностей (интегральной функцией) случайной величины *X* называют функцию *F(x),* определяющую для каждого значения *X* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньше *x*, т.е. $F(x) = P(X < x)$. Функция распределения имеет следующие свойства:

1) $F(-\infty) = 0$;

2) $F(+\infty) = 1$;

3) $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$. (5.1)

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией) непрерывной случайной величины *X* называют первую производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Функция плотности вероятностей имеет следующие свойства:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3) $P(a \le x < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$; (5.2)

4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. (5.3)

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$. Если $x\in(a;b)\Rightarrow M(X)=\int\limits_{a}^{b} x f(x)dx$. (5.4)

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))^2 f(x)dx$, или $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X)$. (5.5)

Если $x\in(a;b)\Rightarrow D(X)=\int\limits_{a}^{b}x^2 f(x)dx-M^2(X)$. (5.6)

Среднее квадратическое отклонение определяется как корень квадратный из дисперсии:

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$. (5.7)

1. Даны законы распределения дискретной случайной величины:

а)

X	1	4	6	8
p	0,1	0,3	0,4	0,2

б)

X	-2	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

2. По данным задачи 5, темы 4 составить функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

3. По данным задачи 6, темы 4 составить функцию распределения случайной величины X и начертить ее график

4. По одному варианту задачи 14, темы 4 составить функцию распределения случайной величины X и начертить ее график.

5. Найти функцию распределения случайной величины X – числа попаданий в цель, если произведено три выстрела с вероятностью попадания в цель при каждом выстреле 0,8.

6. Вероятность сдачи первого экзамена студентом составляет 0,7, второго 0,6 и третьего 0,8. Найти функцию распределения случайной величины X – числа экзаменов, сданных студентом. Определить *M(X)*.

7. Случайная величина X задана функцией распределения:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & при\ -2<x\le 2,\\ 1, & при\ x>2.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -2,\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{3}, & при\ -2<x\le 4,\\ 1, & при\ x>4.\end{cases}$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение: а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1;
г) в интервале (0;2).

8. Дана функция распределения случайной величины X:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^6}{4}, & \text{при } 0<x\le\sqrt[3]{2},\\ 1, & \text{при } x>\sqrt[3]{2}.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^5}{32}, & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$

Найти вероятность того, что в результате шести испытаний случайная величина X два раза примет значение, принадлежащее интервалу (0;1).

9. Случайная величина задана функцией:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{8}, & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 4,\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}-1, & при\ 4<x\le 16,\\ 1, & при\ x>16.\end{cases}$

Найти: а) плотность распределения вероятностей случайной величины X; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

10. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -2a,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{2}, & при\ -2a<x\le(4-2a),\\ 1, & при\ x>(4-2a).\end{cases}$$

а) Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (-а; а).

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

11. Случайная величина X задана функцией распределения:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le A,\\ \dfrac{x^3}{8}, & при\ A<x\le B,\\ 1, & при\ x>B.\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le A,\\ \dfrac{x^4}{16}, & при\ A<x\le B,\\ 1, & при\ x>B.\end{cases}$

Найти значения A и B, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

12. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1,\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}, & при\ 1<x\le 2,\\ 1, & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины X; б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу $(1;1{,}5)$;

в) начертить графики функций.

13. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x\le 2,\\ \dfrac{x^3-8}{19}, & при\ 2<x\le 3,\\ 1, & при\ x>3. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5; 3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*; г) моду и медиану величины *X*. Построить графики функций.

14. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<0,\\ \dfrac{4a-2x}{3a^2}, & при\ 0\le x<a,\\ 0, & при\ x\ge a. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения *F(x)*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{a}{6};\frac{a}{3}\right)$.

15. Случайная величина *X* задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<0,\\ x^3+x, & при\ 0\le x<\sqrt{\sqrt{5}-1},\\ 0, & при\ x\ge\sqrt{\sqrt{5}-1}. \end{cases}$$

Определить: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;1,2). Начертить графики функций *F(x)* и *f(x).*

16. Случайная величина *X* задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<\ln 2,\\ \dfrac{1}{2}e^{2x}, & при\ \ln 2\le x<\dfrac{3}{2}\ln 2,\\ 0, & при\ x\ge\dfrac{3}{2}\ln 2. \end{cases}$$

Определить: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (ln2; 1,2ln 2). Начертить графики функций *F(x)* и *f(x).*

17. Случайная величина *X* задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<0,\\ \dfrac{4}{a^2}x^3, & при\ 0\le x<\sqrt{a}\ ,\\ 0, & при\ x\ge\sqrt{a}. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* примет значение, заключенное в интервале $\left(\sqrt{\frac{a}{4}};\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

18. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}e^{3x}, & при\ x<\ln 2,\\ 0, & при\ x\ge \ln 2.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины *X* и начертить её график; б) вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

19. Случайная величина *X* задана функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1,\\ a(x-1)^2, & при\ 1<x\le 3,\\ 1, & при\ x>3.\end{cases}$$

Определить: а) значение а; б) математическое ожидание; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2). Построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

20. Дана функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -\frac{\pi}{2},\\ 0{,}5(1+Sinx), & \text{при } -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Построить графики функций *F(x)* и *f(x)*. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

21. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1,\\ \frac{3x^2-2x}{c}, & при\ 1<x\le 4,\\ 0, & при\ x>4.\end{cases}$$

Найти: а) постоянную *c*; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

22. Случайная величина *X* задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{2c}{e^x+e^{-x}},\ \text{при}\quad -\infty<x<+\infty.$$

Найти значение постоянной *c*.

23. Случайная величина *X* задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & при\ x\le 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & при\ x>0.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (-1;3).

24. Случайная величина *X* задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ Cxe^{-x}, & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

Найти: а) значение параметра С; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

25. Случайная величина *X* задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0.\\ 0{,}5\, sinx, & \text{при } 0<x\le\pi,\\ 0, & \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

6 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При решении практических задач наиболее часто применяются законы равномерного, нормального и показательного распределения вероятностей непрерывных случайных величин.

Равномерным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, если на интервале *(a,b)*, которому принадлежат все возможные значения случайной величины *X*, плотность распределения сохраняет постоянное значение:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le a,\\ \frac{1}{b-a}, & при\ a<x\le b,\\ 0 & при\ x>b.\end{cases} \qquad (6.1)$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & при\ a<x\le b,\\ 1 & при\ x>b.\end{cases} \qquad (6.2)$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, Д(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X)=\frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}. \qquad (6.3)$$

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, плотность распределения которого имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ M(x)=a, D(x)=\sigma^2. \qquad (6.4)$$

Вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha; \beta$):

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (6.5)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_o^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа,

причем $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, при $x>5, \Phi(x)=0{,}5$.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания будет меньше положительного числа δ, определяется по формуле:

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (6.6)$$

В частности, если $a = 0$, то $P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. (6.7)

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}0\ при\ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}\ \ при\ x\geq 0,\end{cases} \qquad (6.8)$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x<0,\\ 1-e^{-\lambda x},\ при\ x\geq 0.\end{cases} \qquad (6.9)$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в интервал (a, b), распределенной по показательному закону:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}, \qquad (6.10)$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, Д(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (6.11)$$

Непрерывная случайная величина *X* имеет **логарифмически нормальное распределение,** если $X = e^Y$, причем $Y = ln\ X$ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами μ и σ. Логарифмически нормальная случайная величина принимает только положительные значения.

Если $X<x$, то $\ln X<lnx$, а функция распределения вероятностей случайной величины имеет вид:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{lnx} e^{\frac{(z-lna)^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{lnx-lna}{\sigma}\right). \qquad (6.12)$$

Плотность распределения вероятностей логнормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lnx-lna)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (6.13)$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины X, распределенной по логарифмически нормальному закону, определяются по следующим формулам:

математическое ожидание $M(X) = ae^{\frac{\sigma^2}{2}}$; (6.14)

дисперсия $D(X) = a^2e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$; (6.15)

мода $Mo(X) = ae^{-\sigma^2}$; (6.16)

медиана $Me(X) = a$. (6.17)

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (α,β) определяется по формуле

$$\mathrm{P}(\alpha < x < \beta) = P(ln\alpha < lnx < ln\beta) = \Phi\left(\frac{ln\beta - \overline{lnx}}{\sigma_{lnx}}\right) - \Phi\left(\frac{ln\alpha - \overline{lnx}}{\sigma_{lnx}}\right). \qquad (6.18)$$

1. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-2; N)$. Найти: а) плотность распределения случайной величины X; б) функцию распределения случайной величины X; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(-1; \frac{N}{2}\right)$; г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X(N-число по указанию преподавателя).

2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале: а) (5; 11); б) (–3; 5); в) (0;8); г) (–4;4). Начертить графики этих функций.

3. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(a;b)$, причем $M(X)$=1; $D(X)$=3. Найти: а) функцию и плотность распределения вероятностей случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (0;3). Начертить графики функций.

4. Для исследования продуктивности определенной породы домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 5 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти вероятность того, что: а) диаметр взятого наудачу яйца будет заключен в границах от 4,7 до 6,2 см; б) отклонение диаметра от среднего не превзойдет по абсолютной величине 0,6 см.

5. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 г и математическим ожиданием 1000 г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет: а) от 900 до 1300 г; б) не более 1500 г; в) не менее 800 г; г) отличаться от среднего веса по модулю не более чем на 200 г; д) начертить график дифференциальной функции случайной величины X.

6. Урожайность озимой пшеницы по совокупности участков распределяется по нормальному закону с параметрами: а = 50 ц/га, σ = 10 ц/га. Определить: а) какой процент участков будет иметь урожайность свыше 40 ц/га; б) процент участков с урожайность от 45 до 60 ц/га.

7. Выборочным методом измеряется засоренность зерна, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 0,2 г и математическим ожиданием а = 0. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 0,3 г.

8. Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределенная случайная величина X, имеющая математическое ожидание 60 кг и среднее квадратическое отклонение 1,5 кг. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина X. Написать дифференциальную функцию этой случайной величины.

9. С вероятностью 0,9973 было установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой головы крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найти среднее квадратическое отклонение живого веса скота, считая, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.

10. Урожайность овощей по участкам является нормально-распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 300 ц/га и средним квадратическим отклонением 30 ц/га. С вероятностью 0,9545 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на участках.

11. Нормально-распределенная случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{32}}.$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (3; 9); б) моду и медиану случайной величины X.

12. Торговая фирма продает однотипные изделия двух производителей. Срок службы изделий подчиняется нормальному закону. Средний срок службы изделий первого производителя составляет 5,5 тыс. часов, а второго 6 тыс. часов. Первый производитель утверждает, что с вероятностью 0,95 срок службы его изделия находится в границах от 5 до 6 тыс. часов, а второй, с вероятностью 0,9, в границах от 5 до 7 тыс. часов. Изделия какого производителя имеют большую колеблемость срока службы.

13. Месячная заработная плата работников предприятия распределяется по нормальному закону с математическим ожиданием a = 40 тыс. руб. Известно, что 80 % работников предприятия получает заработную плату от 32 до 48 тыс. руб. Определить, какой процент работников предприятия имеет месячную заработную плату от 30 до 55 тыс. руб.

14. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если: а) параметр $\lambda = 2$; б) $\lambda = 5$; в) $\lambda = 0{,}5$. Начертить графики функций.

15. Случайная величина *X* распределена по показательному закону, причем $\lambda = 2$. Найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал: а) (0; 1); б) (2; 4). Найти *М(X), Д(X),* σ *(X).* Начертить графики функций.

16. Найти *М(X), Д(X),* σ *(X)* показательного закона распределения случайной величины X заданной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

если: а) $\lambda = 0{,}4$; б) $\lambda = 3$; в) $\lambda = 4$.

17. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность безотказной работы первого имеет показательнее распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 20 часов: а) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) откажет хотя бы один элемент; г) оба элемента откажут.

18. Вероятность того, что оба независимых элемента будут работать в течении 10 суток равна 0,64. Определить функцию надежности для каждого элемента, если функции одинаковы.

19. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы равно 2. Найти вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает: а) 4 ошибки; б) не менее двух ошибок; в) хотя бы одну ошибку.

20. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) 4 вызова; б) не менее трех вызовов.

21. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Определить: а) функцию распределения вероятностей случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (-$\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$).

22. Случайная величина *X* распределена по закону Релея

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2), при а = 1; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

23. Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<a,\\ 1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^{\beta}, & при \quad x\ge a,\ \beta>0.\end{cases}$$

Определить: а) размер годового дохода, который для случайно взятого лица будет превышен с вероятностью 0,8; б) функцию плотности вероятностей случайной величины *X*; в) математическое ожидание случайной величины *X*, при $\beta>1$.

24. Случайная величина *X* распределена по закону прямоугольного треугольника (рисунок 1) в интервале (0; а). Найти: а) плотность распределения случайной величины *X*; б) функцию распределения вероятностей; в) вероятность попадания случайной величины в интервал

$(\frac{a}{4};\frac{a}{2})$; г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

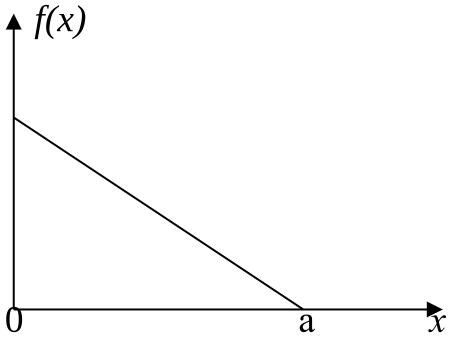

Рисунок 1.

25. Случайная величина *X* распределена по закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») (Рисунок 2) на интервале (-а; а).

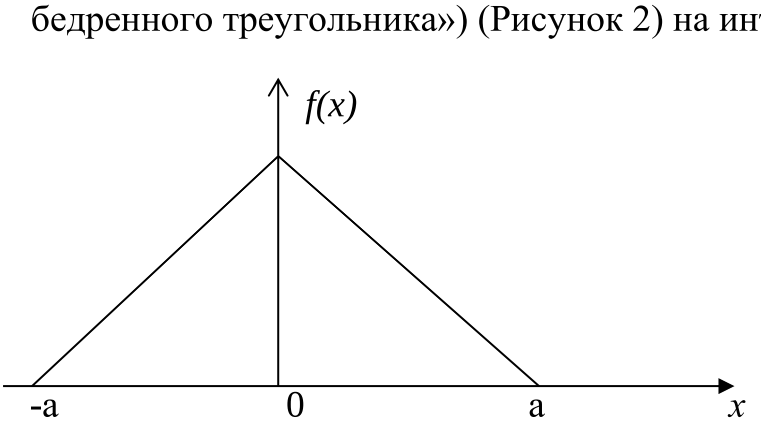

Рисунок 2.

Найти: а) функцию плотности распределения вероятностей случайной величины *X*; б) функцию распределения и построить ее график; в) вероятность попадания случайной величины в интервал ($-\frac{a}{2};\frac{a}{2}$); г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

26. Мишень имеет форму круга с радиусом 6 см, причем вероятность попадания при стрельбе в любой концентрический круг пропорциональна площади этого круга. Обозначим через R расстояние от точки попадания пули до центра круга. Найти: а) функцию распределения случайной величины R; б) плотность распределения dthjznyjcntq; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины R.

27. Личные подсобные хозяйства населения региона по размеру площади земельных участков распределяются по логарифмически нормальному закону с параметрами а = 12,62 сотки земли и $\sigma^2 = 0{,}478$; $\overline{lnx} = 2{,}654$. Определить: а) средний размер приусадебного участка; б) дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) медианное и модальное значения площади участков; г) какой процент личных подсобных хозяйств населения имеет площадь от 6 до 15 соток.

28. Крестьянские (фермерские) хозяйства и индивидуальные предприниматели региона по численности работников распределяются по логарифмически нормальному закону с параметрами: а = 1,667, $\sigma^2 = 0{,}4076$, $\overline{lnx} = 0{,}7336$.

Определить: а) среднюю численность работников на одно хозяйство (математическое ожидание); б) дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) медианное и модальное значения; г) какой процент крестьянских (фермерских) хозяйств и индивидуальных предпринимателей имеют численность работников от 3 до 6 человек.

29. Совокупность сельскохозяйственных предприятий региона по среднегодовой стоимости основных средств на одно предприятие распределяется по логарифмически нормальному закону с параметрами: а = 181167 тыс. руб., $\sigma^2 = 0{,}931225$, $\overline{lnx} = 12{,}201$.

Определить: а) среднюю стоимость основных средств на одно предприятие (математическое ожидание); б) дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) медианное и модальное значения; г) какой процент сельскохозяйственных предприятий имеет среднюю стоимость основных средств от 100000 до 500000 тыс. руб.

30. Случайная величина X распределена по закону Лапласа, с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x-\beta|}, -\infty < x < \infty,$$

где $\alpha > 0$ – параметр масштаба,
$-\infty < \beta < \infty$ – параметр сдвига.

Найти: а) функцию распределения вероятностей; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

7 ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

а) Функция одного случайного аргумента.

Если каждому возможному значению случайной величины *X* соответствует одно возможное значение случайной величины *Y*, то случайную величину *Y* называют функцией случайного аргумента *X*, т. е. $Y = \varphi(X)$.

Пусть аргумент *X*– дискретная случайная величина. Тогда случайная величина $Y = \varphi(X)$ также дискретная случайная величина.

Если аргумент *X* принимает значение x_i с вероятностьюp_{x_i}, то случайная величина *Y* принимает значение $y_i = \varphi(x_i)$ с той же вероятностью $p_{y_i} = p_{x_i}$.

Пусть аргумент *X* – непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения *f(x)*. Если y = φ(x) – дифференцируемая, строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения *g(y)* случайной величины *Y* находится:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|. \qquad (7.1)$$

Если функция $Y = \varphi(X)$ в интервале возможных значений случайной величины *X* не монотонна, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция $\varphi(x)$ монотонна, и найти плотности распределения $g_i(y)$ для каждого из интервалов монотонности, а затем представить *g(y)* в виде суммы:

$$g(y) = \sum g_i(y). \qquad (7.2)$$

Например, если функция $\varphi(x)$ монотонна на двух интервалах, в которых соответствующие обратные функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ то

$$g(y) = f[\Psi_1(y)] \cdot |\Psi_1'(y)| + f[\Psi_2(y)] \cdot |\Psi_2'(y)| \qquad (7.3)$$

б) Функция двух случайных аргументов.

Если каждой паре возможных значений случайных величин *X* и *Y* соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов *X* и *У*.

$$Z = \varphi(X, Y). \qquad (7.4)$$

Если *X* и *У* – дискретные независимые случайные величины, то для того чтобы найти распределение функции $Z = X + Y$ надо найти все возможные значения $z_k = x_i + y_j$и их вероятности$p_{z_k} = p_{x_i} \cdot p_{y_i}$.

Если *X* и *Y* – непрерывные случайные величины, то плотность распределения g(z) суммы $Z = X + Y$, при условии, что плотность распределения хотя бы одного из аргументов задана в интервале (–∞; ∞), находится по формуле:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx \text{, или } \quad g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy, \qquad (7.5)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – плотности распределения аргументов X и *Y*.

Если возможные значения аргументов неотрицательны, то плотность распределения $g(z)$ величины $Z = X + Y$ находят по формуле:

$$g(z)=\int_{o}^{z} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx \text{, или } \quad g(z)=\int_{o}^{z} f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy. \qquad (7.6)$$

Если *X* и *Y* – независимые случайные величины, заданные соответствующими плотностями распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, то вероятность попадания случайной точки (*X, Y*) в область *S* равна:

$$P[(x;y)\in S]=\iint_{(S)} f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy. \qquad (7.7)$$

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	0	1	4
p	0,3	0,5	0,2

Найти закон распределения случайной величины *Y*, где: а) $Y=2X-1$; б) $Y=X+5$; в) $Y=X^2-2$; г) $Y=\sqrt{X}$. Определить *M(Y)*.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–2	–1	0	1
p	0,2	0,4	0,1	0,3

Найти закон распределения случайной величины *Y*, где: а) $Y=2X+1$; б)$Y=X^3-1$; в) $Y=X^2$; г) $Y=\sqrt{X+2}$. Определить *M(Y)*.

3. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	1	2	4	5
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *Y*, если: а) $Y=4X-4$; б) $Y=X^2$.

4. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
p	0,2	0,7	0,1

Найти: а) закон распределения случайной величины $Y=\sin^2 X$;

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *Y*.

5. Случайная величина *X* равномерно распределена на интервале (2;10). Найти функцию плотности распределения случайной величины: а) $Y = 0{,}5X - 1$; б) $Y = X^2$; в)$Y=\sqrt{X-1}$. Определить *M(Y), Д(Y), σ(Y).*

6. Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Найти плотность распределения случайной величины: а) $Y = sinX$; б) $Y= cosX$.

7. Случайная величина *X* распределена нормально с параметрами: $a = 2,\ \sigma =1$. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины: а) $Y=2X + 6$; б) $Y=X^3$.

8. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<\sqrt{3}\\ \dfrac{x^3-3x}{2}, & при\ \sqrt{3}\le x<2,\\ 1, & при\ x\ge 2.\end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины: а) $Y=\dfrac{1}{X}$; б) $Y=\sqrt{X}$.

9. Непрерывная случайная величина *X* задана плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}c(4-x^2), \text{при } |x|\le 2,\\ \quad 0, \text{при } |x|>2.\end{cases}$$

Определить значение постоянной «*c*». Найти *M(X), D(X), σ(X).* Найти плотность распределения случайной величины *Y*, если: а) $Y=2X+1$; б) $Y= X^2$.

10. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти плотность вероятностей случайной величины *Y*, если: а) Y=2X–1; б) $Y=\sqrt{X};$ в) $Y=1-e^{-2x}$.

11. Независимые случайные величины *X* и *Y* распределены равномерно. Случайная величина *X* распределена в интервале (0; 2), а случайная величина *Y* в интервале (0;10). Найти функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины $Z=X+Y$. Построить графики функций случайной величины *Z*.

12. Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале (-4; 1), а случайная величина *Y* равномерно распределена в интервале (1; 6). Найти плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$, начертить ее график.

13. Независимые случайные величины X и У заданы функциями:

$$f_1(x)=e^{-x}, \qquad при \quad 0\le x<\infty,$$

$$f_2(y)=0{,}5e^{-0{,}5y}, \quad при \quad 0\le y<\infty.$$

Найти функцию плотности распределения случайной величины Z=X+У.

14. Независимые случайные величины X и У распределены по нормальному закону:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины Z=X+У. Показать, что случайная величина Z распределяется по нормальному закону.

15. Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с центром рассеивания α и средним квадратическим отклонением σ. Найти плотность распределения случайной величины X.

8 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Закон больших чисел представляет собой наиболее общий принцип, в результате которого количественные закономерности, присущие массовым случайным явлениям, отчетливо проявляются при достаточно большом числе наблюдений.

Лемма Чебышева (Маркова). Если случайная величина *X* принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание *M(X)*, то для любого $\alpha>0$ имеет место неравенство:

$$P(X\ge\alpha)\le\frac{M(X)}{\alpha}. \tag{8.1}$$

Неравенство Чебышева. Если случайная величина *X* имеет математическое ожидание *M(X)* и дисперсию *D(X)*, то для любого $\varepsilon>0$ имеет место неравенство:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\ge1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{8.2}$$

Это неравенство может быть использовано в виде следующего неравенства:

$$P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{8.3}$$

Если случайная величина *X* – число появления события *A* в независимых испытаниях, имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием *M(X)=np* и дисперсией *D(X)=npq*, то неравенство Чебышева имеет вид

$$P(|m-np|<\varepsilon)\ge1-\frac{npq}{\varepsilon^2}. \tag{8.4}$$

Для относительной частоты $\frac{m}{n}$ события *A* в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью *p*, неравенство Чебышева принимает вид

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (8.5)$$

Теорема Чебышева. Если случайные величины$X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно независимы и имеют конечные математические ожидания, а дисперсии каждой из них ограничены сверху постоянной C = const, ($D(X_i) \leq C$ (i=1, 2,…,n)), то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 0, \qquad (8.6)$$

то есть среднее арифметическое случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Воспользовавшись неравенством Чебышева, получаем

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1-\frac{D(\bar{x})}{\varepsilon^2} \geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (8.7)$$

Законы больших чисел не позволяют уменьшить неопределённость в каждом конкретном случае, они утверждают лишь о существовании закономерности при достаточно большом числе опытов. Например, если при подбрасывании монеты десять раз появился герб, то это не означает, что в одиннадцатый раз появится цифра.

1. Цена акций коммерческой фирмы, реализуемых на фондовом рынке, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 6 тыс. руб. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки цена акций превысит 10 тыс. руб.

2. Число дождливых дней в году для данной местности является случайной величиной X с $M(X)$ =100. Оценить вероятность того, что в следующем году в данной местности будет меньше 140 дождливых дней.

3. Количество электроэнергии, потребляемой поселком в течение суток, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 4 тыс. кВт.- ч. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление энергии: а) превысит 8 тыс. кВт.- ч.; б) не превысит 6 тыс. кВт.- ч.

4. Общая стоимость всех букетов в цветочном киоске составляет 18 тыс. руб. Вероятность того, что стоимость взятого наугад букета не превышает 300 руб., равна 0,7. Что можно сказать о количестве букетов в киоске?

5. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян число взошедших окажется от 3750 до 4250, если известно, что $M(X)$ = 4000. Определить вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

6. Вероятность вызревания семян овощной культуры в данной местности составляет 0,8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 растений, число растений с вызревшими семенами составит от 750 до 850. Определить вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

7. В организации имеется 100 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них в течение определенного времени составляет 0,9. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что: а) отклонение числа безотказно работавших автомобилей за определенный период времени от его математического ожидания не превзойдет по модулю 5; б) отклонение доли безотказно работающих автомобилей от постоянной вероятности 0,9 по модулю будет меньше 0,06.

8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	6	9
p	0,1	0,4	0,3	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| > 3$.

9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–1	0	1	3	5
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 2{,}5$.

10. Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{6} x^{-\frac{1}{3}}, & при \quad 0 < x \le 8, \\ 0, & при \quad x > 8. \end{cases}$$

а) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 4$. б) Определить вероятность того, что $|X - M(X)| < 4$.

11. Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{a^2}, & при \quad a < x \le 2a, \\ 1, & при \quad x > 2a. \end{cases}$$

а) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < \dfrac{a}{2}$. б) Определить вероятность того, что $|X - M(X)| < \dfrac{a}{2}$.

12. Случайная величина задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4a^2} & при \quad 0 < x \le 2a, \\ 1 & при \quad x > 2a. \end{cases}$$

а) Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < a$; б) определить вероятность того, что $|X - M(X)| < a$.

13. Выборочным способом определяют вес колосьев ячменя. Сколько необходимо отобрать колосьев, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99, можно было утверждать, что средний вес случайно отобранных колосьев будет отличаться от среднего веса колосьев во всей партии (принимаемого за математическое ожидание) не более чем на 0,1 г? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса не превышает 0,2 г.

14. Сколько человек необходимо отобрать для определения удельного веса лиц со специальным образованием, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что отклонение относительной частоты лиц со специальным образованием от их доли, принимаемой за постоянную вероятность, не превышало по модулю 0,04.

15. В населенном пункте проживает 5040 жителей. В течение года каждый десятый житель обращается в администрацию поселения по интересующим жителей вопросам. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что в ближайший месяц в администрацию населенного пункта обратится от 34 до 50 жителей.

16. Применима ли к последовательности независимых случайных величин X_1, X_2, …,X_n теорема Чебышева, если закон распределения каждой из случайных величин X_n (n=1,2,3,…) имеет вид:

а)

X_n	$-na$	0	na
p	$1/(4n^2)$	$1-1/(2n^2)$	$1/(4n^2)$

б)

X_n	$-n^{-1}$	n^{-1}
p	0,5	0,5

где $a > 0$.

9 МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Многомерной случайной величиной называют совокупность случайных величин, определенных на одном и том же пространстве элементарных событий. Она задается несколькими числами, рассматриваемыми совместно.

Многомерные случайные величины могут быть дискретными, непрерывными и смешанными.

Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задается таблицей распределения, как совокупность пар возможных значений ($X = x_i$, $Y = y_j$) и соответствующих им вероятностей $P_{ij} = P(x_i, y_j) = P(X = x_i, У = y_j)$, $i = 1,2,..., n,\ j = 1,2,..., m$.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = 1; P(X = x_i) = P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j); P(У = y_j) = P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j);$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1, \sum_{j=1}^{m} P(y_j) = 1. \qquad (9.1)$$

Условные вероятности двумерной дискретной случайной величины $P(x_i / y_j)$и $P(y_j / x_i)$ находятся по формулам:

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}; P(y_j, x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}. \qquad (9.2)$$

Двумерная непрерывная случайная величина задается функцией распределения$F(x, y)$ и плотностью совместного распределения$f(x, y)$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y),\ f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}; \qquad (9.3)$$

$$P(x_1 \le X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y); P(X < x, y_1 \le Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1);$$

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = (F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)) - (F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)); \qquad (9.4)$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dx dy. \qquad (9.5)$$

Для характеристики двумерной случайной величины используют математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения составляющих X и Y, а также корреляционный момент (ковариацию) *cov(x,y)* и коэффициент корреляции (r)

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M((x - M(X)(y - M(Y)) = M(XY) - M(X)M(Y). \qquad 9.10)$$

Для дискретных случайных величин X, $У$:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(x_i, y_j) - M(X) \cdot M(Y). \qquad (9.11)$$

Для непрерывных случайных величин X, $У$:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y). \qquad (9.12)$$

Коэффициент корреляции случайных величин X и $У$:

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}, -1 \le r_{xy} \le 1. \qquad (9.13)$$

1. В группе 8 мужчин и 5 женщин. Наугад отбирается 2 человека из группы. Составить совместный закон распределения случайных величин (*X, У*), где *X* – случайная величина, отобран мужчина, *Y*– отобрана женщина. Определить коэффициент корреляции между *X* и *Y*.
2. В первой группе 8 мужчин, из которых 5 занимаются спортом, во второй 6 женщин, из которых две занимаются спортом. Из каждой группы случайно отобрано по одному человеку. Составить совместное распределение случайных величин (*X, Y*), где *X* – отобранный из первой группы мужчина занимается спортом, *Y* – отобранная из второй группы женщина занимается спортом. Зависимы ли случайные величины *X* и *Y*?
3. Задана двумерная дискретная случайная величина *XY*:

а)

Y	*X*	
	2	4
0	0,1	0,3
5	0,2	0,15
10	0,15	0,1

б)

Y	*X*	
	2	4
1	0,1	0,25
3	0,15	0,2
5	0,05	0,25

Определить: а) законы распределения составляющих случайных величин; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение составляющих X и У; в) условный закон распределения случайной величины У, если X = 2; г) условный закон распределения случайной величины X, если У = 5.

4. Задана двумерная дискретная случайная величина *XY*:

а)

Y	*X*		
	0	5	20
0	0,15	0,2	0,10
10	0,10	0,3	0,15

б)

Y	*X*		
	-1	*0*	1
1	0,1	0,15	0,1
3	0,05	0,4	0,2

Определить:

а) законы распределения составляющих;

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение составляющих случайных величин *X* и *Y*.

5. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & при \quad x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & при \quad x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Определить:

а) двумерную плотность вероятностей системы (*X, Y*);

б) вероятность попадания случайной точки (*X, Y*) в прямоугольник, ограниченный прямыми x = 0, x = 2, y = 1, y = 3.

6. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми x = 1, x = 2, y = 3, y = 5, если известна функция распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & при\ x\geq 0;\ y\geq 0\\ 0, & при<0;\ y<0\end{cases}$$

7. Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & при\quad x\geq 0,\ y\geq 0,\\ 0, & при\quad x<0,\ y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы (X, Y).

8. Имеется распределение хозяйств по затратам средств на 1 га посева и урожайности озимой пшеницы:

Производственные затраты на 1га посева, тыс. руб.	Урожайность, ц с 1 га			
	до 40	40-45	45-50	Свыше 50
до 10	9	*а*	3	-
10-15	*а*	11	20	7
свыше 15	-	*а*	8	16

Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин урожайности (X) и доз внесения удобрений (Y), (*а* – число по указанию преподавателя).

9. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)=a\sin(x+y)$ в квадрате $0\leq x\leq\frac{\pi}{2};\ 0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ и

$f(x,y)=0,$ вне квадрата.

Определить: а) коэффициент а; б) $M(X)$, $M(Y)$; в) $D(X)$, $D(У)$.

10. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x,y)=cosx\cdot\cos y$ в квадрате $0\leq x\leq\frac{\pi}{2};\ 0\leq y\leq\frac{\pi}{2};$ и $f(x,y)=0,$ вне квадрата. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

11. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно внутри треугольника с вершинами О (0,0), A (0,6) и B (6,0). Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих систем.

12. Система случайных величин (X,Y) распределена равномерно внутри квадрата со стороной *а*, диагонали которого совпадают с осями координат. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих системы.

13. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}36xye^{-(x^2+y^2)}, & при\ x>0;\ y>0,\\ 0, & при\le 0;\ y\le 0.\end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

14. Система случайных величин (X,Y) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми x=0, y=0, x+y = *a* (*a*>0). Определить:
а) математические ожидания и дисперсии случайных величин *X* и *Y*,
б) корреляционный момент.

15. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной случайной величины (*X,Y*):

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ 2e^{-2x}, & при\ x>0,\end{cases}\quad f(y)=\begin{cases}0, & при\ \ y\le 0,\\ 5e^{-5y}, & при\ y>0.\end{cases}$$

Найти: а) плотность совместного распределения системы; б) функцию распределения системы.

16. Доказать, что. если *X* и *Y* связаны линейной зависимостью, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна 1.

10 ЦЕПИ МАРКОВА

Результаты различных экспериментов или испытаний могут быть представлены в виде определенной последовательности букв или цифр, которые рассматриваются как процессы перехода от одного состояния в другое. Можно оценить вероятность такого перехода. Модель случайного процесса объединяет множество состояний и множество вероятностей перехода из одного состояния в другое.

Множество (пространство) состояний может быть конечным и бесконечным. Последовательность состояний образует цепь Маркова, если в отдельном испытании система принимает одно из возможных состояний, не зависящее от результатов ранее произведенных испытаний.

Вероятность $P_{ij}(S)$, есть условная вероятность перехода случайного процесса из состояния S_i в состояние S_j за один шаг. Так как она не зависит от номера испытания, то может обозначаться через P_{ij}. Первый индекс указывает номер предшествующего, а второй – последующего состояния. Если известны вероятности для любой пары состояния, то они могут быть представлены квадратной матрицей перехода.

$P_1=\lfloor P_{ij}\rfloor$, где P_{ij} - элемент (вероятность), стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

$$\sum_{i=1}^{k}P_{ij}=1, i=\overline{1,k},\quad j=\overline{1,k}\,. \qquad (10.1)$$

Вероятность перехода процесса из состояния S_i в состояние S_j за n шагов обозначается $P_{ij}^{(n)}$, а квадратная матрица всех этих вероятностей обозначается P_n. Вероятность перехода процесса из состояния i в состояние j за два шага вычисляется по формуле полной вероятности.

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{z=1}^{m} P_{iz} \cdot P_{zj} \text{ или в матричной записи } P_2 = P_1 \cdot P_1 = P_1^2. \qquad (10.2)$$

Аналогично получается матрица перехода за три шага $P_3 = P_1^3$ и за n – шагов $P_n = P_1^n$. (10.3)

1. Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова задаются матрицей:

а) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ б) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Найти число состояний системы. Построить граф, соответствующий матрице р.

2. Задана матрица вероятностей переходов

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-S & S \end{bmatrix}.$$

Каковы пределы изменений p и S?

3. В урне имеется 5 белых и черных шаров. Из урны случайно извлекается один шар, а обратно в урну возвращается один шар другого цвета. Опыт повторяется неоднократно. Найти матрицу переходных вероятностей, состояниями которой является количество белых шаров в урне. Найти вероятности перехода за два шага.

4. Игральная кость перекладывается многократно с равной вероятностью случайным образом с одной грани на любую из соседних четырех граней, независимо от исхода предыдущего испытания. К какому пределу стремится при $t \to \infty$ вероятность того, что в момент времени t игральная кость лежит на грани «5», если в момент времени t=0, она находится в этом же положении?

5. Имеется пять стульев, расположенных один возле другого. Человек пересаживается с одного стула на рядом стоящий, причем эти перемещения определяются бросанием правильной игральной кости. Стулья обозначены буквами *А,В,С,Д,Е*. Вначале он сидит на среднем стуле *С*. Если человек сидит на крайнем стуле, то: возвращается на стул *С*, когда выпадет четное число очков; остается на том же месте при выпадении нечетного числа очков.

Если человек сидит не на крайнем стуле, то: перемещается налево при выпадении одного или двух очков; перемещается направо при выпадении

трех или четырех очков; остается на том же месте при выпадении пяти или шести очков. Найти: а) матрицу вероятностей переходов за один шаг;
б) вероятности следующих последовательностей: *С,Д,Е,С,Д,А,С; С,В,Д,Е,Е,А; С,В,А,А,С,Д; С,Д,Е,С,Е,С; С,В,С,Д,Е,Е.*

6. Студент, для получения профессионального образования, обучается в колледже в течение трех лет. Ежегодно он сдает комплексный экзамен. Если студент успешно сдаст экзамен, то он переводится на следующий курс или заканчивает колледж с дипломом специалиста. Если студент экзамен не сдает, то он остается на соответствующем курсе второй год. Вероятность успешной сдачи экзамена на первом году обучения составляет 0,7; втором – 0,8; третьем – 0,9. Указать подходящее число состояний системы. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг для ежегодных передвижений студента по курсам (первый, второй, третий год обучения, окончание колледжа). Определить вероятность, что студент будет обучаться на третьем курсе после сдачи второго экзамена. Определить среднее число лет, которые студент проводит в колледже.

7. По некоторой цели производятся выстрелы в моменты времени t_1 , t_2 , t_3,…Возможные состояния системы (цели):
s_1 – цель невредима,
s_2 – цель повреждена (но может функционировать),
s_1 – цель полностью поражена (не может функционировать).

Матрица переходных вероятностей $\left[P_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}.$

Сколько надо сделать выстрелов, чтобы вероятность поражения цели оказалась не менее 0,6?

11 ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ

Ряд значений (вариант) признака, расположенных в порядке возрастания или убывания с соответствующими им весами (частотами или частостями), называется **вариационными рядом** (рядом распределения). **Частота** (n_i) показывает, сколько раз встречается тот или иной вариант (значение признака) в статистической совокупности. **Частость** (относительная частота) (w_i) показывает, какая часть единиц совокупности принимает определенное значение или из интервала значений. В дискретных рядах перечисляются возможные значения признака x_i. Если признак непрерывный или число значений дискретного признака велико, то строят интервальный ряд распределения, в котором значения признака задаются в виде интервалов. При построении интервального ряда распределения число интервалов можно определить по формуле Стерджесса:

k=1+3,322 $lg\ n$, (8.1)

где n – число единиц совокупности.

Величина интервала (h) определяется по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \qquad (8.2)$$

Дискретный ряд распределения изображается графически в виде полигона распределения частот или частостей. В этом случае по оси абсцисс откладывают значения признака, а по оси ординат – соответствующие им частоты или частости. Полученные точки соединяются отрезками.

Интервальные ряды изображают в виде гистограммы – фигуры, состоящей из прямоугольников. По оси абсцисс откладываются значения признака (границы интервалов), по оси ординат – частоты или частости.

Дискретные и интервальные ряды можно графически представить в виде кумуляты или огивы. При построении кумуляты, в отличии от полигона, по оси ординат откладываются накопленные частоты или частости. При построении огивы на оси абсцисс наносятся точки, соответствующие накопленным частотам или частостям, а по оси ординат значения признака.

Основной числовой характеристикой вариационного ряда является **средняя арифметическая:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ – простая}, \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n} \text{ – взвешенная.} \qquad (8.3)$$

Модой вариационного ряда называется значение признака, которое имеет наибольшую частоту.

Медиана – значение признака у той единицы совокупности, которая делит вариационный ряд пополам.

В интервальных вариационных рядах с равным интервалами мода и медиана определяется по следующим формулам:

$$Mo = x_{Mo} + h\frac{n_2 - n_1}{(n_2 - n_1) + (n_2 - n_3)} \qquad (8.4)$$

$$M_e = x_{Me} + h\frac{\frac{n}{2} - S_{Me-1}}{n_{Me}} \qquad (8.5)$$

где x_{Mo} и x_{Me} – нижняя граница модального и медианного интервалов;

h – величина модального и медианного интервалов;

n_1, n_2, n_3 – соответственно частота интервала перед модальным, модального и после модального;

n_{Me} – частота медианного интервала;

S_{Me-1} – накопленная частота интервала, предшествующего медианному интервалу.

Колеблемость признака характеризуется с помощью показателей вариации, к которым относятся: размах вариации, среднее линейное отклонение, среднее квадратическое отклонение.

Дисперсия: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$ – простая; (8.6)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x})^2 \text{– взвешенная.} \quad (8.7)$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. (8.8)

Коэффициент вариации: $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%.$ (8.9)

Если V > 33%, то считается, что совокупность может быть статистически неоднородной в отношении данного признака.

Характеристики вариационного ряда могут быть рассчитаны с помощью моментов распределения. **Моментом распределения** *k*-го порядка называется средняя арифметическая *k*-ых степеней отклонений значений признака от определенной величины *C*.

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - c)^k n_i}{n}. \quad (8.10)$$

Обычно k= 0,1,2,3,4.

Если $C = 0$, то момент называется начальным

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^k n_i}{n}; M_1 = \frac{\sum x_i n_i}{n}; M_2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n}; M_3 = \frac{\sum x_i^3 n_i}{n}; M_4 = \frac{\sum x_i^4 n_i}{n}. \quad (8.11)$$

Если C = $\bar{x}$, то момент называется центральным

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^k n_i}{n}; m_2 = \sigma^2; m_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 n_i}{n}. \quad (8.12)$$

Центральные моменты можно рассчитать через начальные, используя формулы:

$$m_k = M_k - C_k^1 M_{k-1} M_1 + C_k^2 M_{k-2} M_1^2 - C_k^3 M_{k-3} M_1^3 + \ldots \pm M_1^3, \quad (8.13)$$

$$m_3 = M_3 - 3M_1 M_2 + 2M_1^3;\ m_4 = M_4 - 4M_1 M_3 + 6M_1^2 M_2 - 3M_1^4. \quad (8.14)$$

В качестве меры симметричности ряда распределения применяется **коэффициент асимметрии**:

$$K_A = \frac{m_3}{\sigma^3}, \qquad (8.15)$$

где m_3- центральный момент третьего порядка.

Если K_A= 0, то вариационный ряд является симметричным;
если K_A< 0, то вариационный ряд с левосторонней асимметрией;
если K_A> 0, то вариационный ряд с правосторонней симметрией.

Мерой крутости (островершинной) ряда распределения является **эксцесс**:

$$Э = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3, \qquad (8.16)$$

где m_4 – центральный момент четвертого порядка.
Если $Э \approx 0$, то распределение средне вершинное;
если $Э$ < 0, то распределение островершинное;
если $Э$ > 0, то распределение плосковершинное.

1. По списку на предприятии числится 110 рабочих, которые имеют разряды: 1,5,2,4,3,4,6,4,5,1,2,2,3,4,5,3,4,5,2,1,4,5,5,4,3,4,6,1,2,4,4,3,5,6,4,3, 3,1,3,4,3,1, 2,4,4,5,6,1,3,4,5,3,4,4,3,2,6,1,2,4,5,3,3,2,3,6,4,3,4,5,4,3,3,2,6,3,3,4, 5,4,4,3,3, 2, 1,2,1,6,5,4,3,2,3,4,4,3,5,6,1,5,4,3,2,4,1,3,5,4,6,5.

Составить ряд распределения рабочих по разрядам. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически. Определить средний разряд рабочего, модальный и медианный разряд, дисперсию и среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс.

2. Имеются следующие данные о числе производственных рабочих в каждом из 95 крестьянских (фермерских) хозяйств:

3,4,5,6,5,3,4,2,2,4,3,4,5,3,4,6,7,4,5,3,3,4,2,6,5,4,7,2,3,4,4,5,4,3,4,6,6,5,2,3,4,3, 7,2,4,3,4,5,4,6,7,2,5,3,5,4,3,7,2,4,3,4,5,4,3,2,6,7,6,4,3,2,3,4,5,4,3,5,4,3,2,6,4,5, 7,5,5,4,3,4,5,7,4,3,4.

Составить ряд распределения крестьянских (фермерских) хозяйств по числу производственных рабочих на одно хозяйство. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически. Определить: среднее число производственных рабочих на одно хозяйство, модальное и медианное значения числа рабочих, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации, коэффициент асимметрии и эксцесс.

3. Используя данные приложения Б, по одному из следующих показателей, составить интервальный вариационный ряд с равными (или неравными) интервалами:

1) площадь посева озимой пшеницы на одно предприятие, га; 2) валовой сбор зерна, тыс. ц; 3) затраты на продукцию, млн. руб.; 4) прямые затраты труда, тыс. чел.-ч; 5) реализовано зерна, тыс. ц; 6) полная себестоимость, млн. руб.; 7) выручка от реализации, млн. руб.; 8) производственная себестоимость 1 ц зерна, руб.; 9) полная себестоимость 1 ц зерна, руб.; 10)

урожайность озимой пшеницы с 1 га, ц; 11) производственные затраты на 1 га посева, тыс. руб.; 12) прямые затраты труда на 1 ц зерна, чел.-ч; 13) выручка от реализации на 1 га посева, тыс. руб.; 14) цена реализации 1 ц зерна, руб.; 15) выручка на 1 руб. затрат, руб.

Найти накопленные частоты и частости. Ряд распределения изобразить графически. Определить моду, медиану, среднее значение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс. Сделать выводы по результатам расчетов.

4. Используя данные приложения В по одному из показателей составить интервальный вариационный ряд с равными (или неравными) интервалами:

1) среднегодовая численность работников, чел.; 2) среднегодовая стоимость основных средств, млн. руб.; 3) основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.; 4) основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.; 5) затраты на реализованную продукцию, млн. руб.; 6) площадь сельскохозяйственных угодий, га; 7) затраты на продукцию, млн. руб.; 8) валовая продукция, млн. руб.; 9) валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.; 10) валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.; 11) валовая продукция на 100 руб. затрат, руб.; 12) валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.; 13) выручка от продажи продукции, тыс. руб.; 14) выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.; 15) выручка на среднегодового работника, тыс. руб.; 16) выручка на 100 руб. затрат, руб.; 17)численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

Найти накопленные частоты и частости. Ряд распределения изобразить графически. Определить моду, медиану, среднее значение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс. Сделать выводы по результатам расчетов.

5. Определить абсолютную и относительную плотность распределения работников предприятия по стажу их работы.

Таблица 1- Распределение работников предприятия по стажу работы

Стаж работы, лет	До 1	1-5	5-10	10-20	20-40	Всего
Число работников, чел.	8	22	46	34	10	120

Найти средний стаж работы, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

6. Путем устного опроса изучалось качество продукции, выпускаемой фирмой и реализуемой в магазине этой фирмы. Посетители давали оценку качества по десятибалльной шкале.

Таблица 2- Бальная оценка продукции предприятия

Оценка качества продукции, балл	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10
Число случаев	3	8	36	89	45

Определить средний балл качества продукции, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, показатели асимметрии и эксцесса.

7. Имеются следующие данные о площади посева овощей в сельскохозяйственных организациях по совокупности районов (таблица 3). Дать сравнительную оценку колеблемости площади посева овощей в организациях двух районов.

Таблица 3 - Площадь посева овощей на одну организацию, га

№ района	Номер хозяйства								
1	8	10	12	6	15	30	21	18	23
2	32	16	26	41	44	38	24	-	-
3	101	65	96	144	84	76	90	109	-
4	22	30	44	18	16	31	27	36	25
5	10	7	4	3	12	7	6	9	8
6	25	36	38	27	45	51	44	-	-
7	121	84	96	110	161	143	112	132	144
8	34	16	44	21	36	8	17	42	-
9	46	41	48	52	50	58	62	54	47
10	15	24	86	144	34	114	24	73	401

8. По данным распределения студентов по результатам сдачи экзаменов определить: а) средний балл успеваемости студентов по каждому предмету и по всем предметам; б) дисперсии балла успеваемости по предмету и в целом по всем предметам; в) межгрупповую дисперсию. Найти общую дисперсию успеваемости, используя правило сложения дисперсий.

Таблица 4 – Распределение студентов группы по результатам сдачи экзаменов

Оценка	Число студентов, получивших оценку по предметам			
	1	2	3	4
2	2	4	4	3
3	6	10	8	8
4	10	8	9	9
5	7	3	4	5

9. Работники предприятия сгруппированы по возрасту.

Таблица 5 - Распределение работников предприятия по возрасту

Категория работников	Возраст работников, лет					Всего работников
	До 30	30-40	40-50	50-60	Свыше 60	
Рабочие	43	141	216	127	52	579
Руководители	2	4	6	8	4	24
Специалисты	3	18	30	34	12	97
Всего работников	48	163	252	169	68	700

Определить: а) средний возраст работников предприятия в целом и по категориям: б) модальное и медианное значения возраста работников по категориям и предприятию; в) дисперсию и среднее квадратическое отклонение возраста по категориям работников и предприятию; г) межгрупповую дисперсию возраста работников. Найти общую дисперсию возраста работников, используя правило сложения дисперсий.

10. В таблице 6 приведено распределение численности работников организаций региона по размерам начисленной месячной заработной платы по видам экономической деятельности (по данным выборочного обследования за апрель 2019 г.).

Таблица 6 – Распределение численности работников организаций по размеру начисленной заработной платы (в % к общей численности)

Вид деятельности	Группы работников по месячной заработной плате, тыс. руб.							Итого
	10 −14,7	14,7 −27,1	27,1 −40,0	40,0 −60,0	60,0 −100,0	100,0 −500,0	Свыше 500,0	
Сельское хозяйство	15,3	39,1	25,2	13,1	5,1	2,1	0,1	100,0
Добыча полезных ископаемых	0,9	7,1	15,4	24,4	30,4	21,5	0,3	100,0
Обрабатывающие производства	3,9	22,0	28,5	25,9	14,4	5,2	0,1	100,0
Обеспечение газом, электроэнергией, паром	3,8	24,0	27,9	23,3	14,7	6,2	0,1	100,0
Строительство	5,3	16,7	29,3	26,1	22,0	10,5	0,1	100,0
Торговля	6,7	27,5	26,3	19,4	11,7	8,0	0,4	100,0
Транспорт и связь	9,8	20,5	21,9	23,1	17,1	7,4	0,2	100,0
Информация и связь	3,9	19,8	21,4	19,5	16,8	18,1	0,5	100,0

Продолжение таблицы 6								
Финансовая и страховая деятельность	1,7	11,6	20,3	23,8	21,2	20,5	0,9	100,0
Государственное управление, соцобеспечение	6,7	23,4	21,4	25,2	16,6	6,7	0,0	100,0
Образование	20,0	35,0	21,7	13,0	7,2	3,1	0,0	100,0
Здравоохранение, соц. услуги	10,5	33,2	24,2	16,7	11,0	4,4	0,0	100,0
По всем организациям	9,4	26,1	23,5	20,2	13,6	7,0	0,2	100,0

Определить: а) среднюю месячную заработную плату работников организаций по каждому виду экономической деятельности и в целом по всем организациям; б) медианное значения месячной заработной платы работников организаций по каждому виду экономической деятельности и в целом по всем организациям; в) дисперсию и среднее квадратическое отклонение месячной заработной платы работников организаций по каждому виду экономической деятельности и в целом по всем организациям

12 ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Выборочным называется наблюдение, при котором обследованию подвергается часть единиц совокупности, отобранных на основе научно разработанных принципов, а показатели, найденные по отобранной части единиц, должны достаточно точно характеризовать всю совокупность единиц.

Совокупность единиц, из которой производится отбор, называется **генеральной совокупностью.** Часть единиц генеральной совокупности, отобранная для исследования, образует **выборочную совокупность.** Отбор единиц из генеральной совокупности может быть произведен повторным или бесповторным способом. Если отобранная единица возвращается в генеральную совокупность и может снова попасть в выборку, то отбор −**повторный**. Если же отобранная единица в генеральную совокупность не возвращается, то отбор – **бесповторный**. Расхождения между характеристиками генеральной и выборочной совокупности называются ошибками репрезентативности или представительности, их абсолютная величина должна быть минимальной.

Генеральная доля $\mathrm{p} = \frac{M}{N}$, выборочная доля $\mathrm{w} = \frac{m}{n}$. где M и m – число единиц генеральной и выборочной совокупности, обладающих определенным свойством; N и n – объемы генеральной и выборочной совокупности соответственно.

Отбор единиц производится случайным, механическим, типическим, серийным, комбинированным и другими способами.

Случайным называется отбор единиц из генеральной в выборочную совокупность, при котором каждая единица имеет одинаковую вероятность попасть в выборку. При **механическом** отборе единицы из генеральной в выборочную совокупность отбираются через определенный интервал. При **типическом** отборе генеральная совокупность вначале разбивается на однородные группы по одному или нескольким признакам, а затем из каждой выделенной группы отбор производится случайным или механическим способом. Основной задачей выборочного метода является количественная оценка параметров генеральной совокупности по данным выборки. Статистическая оценка – это приближенное значение параметра генеральной совокупности, установленное по выборке. Для того, чтобы статистическая оценка давала «хорошее» приближение оцениваемых параметров генеральной совокупности по выборке, она должна обладать свойствами несмещенности, эффективности и состоятельности.

Оценка параметров генеральной совокупности может быть точечной и интервальной. Точечная оценка задается одним числом. Выборочные средняя, доля, среднее квадратическое отклонение являются точечными оценками аналогичных характеристик генеральной совокупности. Оценка, задаваемая двумя числами (границами интервала), называется интервальной.

Доверительный интервал рассчитывается по формуле:

для доли $$w-\Delta_w \le p \le w+\Delta_w; \tag{12.1}$$

для средней $$\bar{x}_в-\Delta_{\bar{x}} \le \bar{x}_г \le \bar{x}_в+\Delta_{\bar{x}}, \tag{12.2}$$

где Δ_w и $\Delta_{\bar{x}}$ - предельные ошибки выборки для доли и средней соответственно.

Таблица 7 – Формулы расчета предельной ошибки выборки при случайном отборе

Предельная ошибка	Повторный отбор	Бесповторный отбор
Для средней	$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$
Для доли	$\Delta_{\bar{p}} = t \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$	$\Delta_{\bar{p}} = t \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$

В больших выборках (n> 60) t находится по таблице значений функций Ф (x) при заданном уровне доверительной вероятности $\gamma = 2\Phi(x)$. Если $\gamma = 0{,}95$, t=1,96; если $\gamma = 0{,}99$, t=2,58.

В малых выборках $(n \le 60)$ значение t находится по таблице t- распределения Стьюдента в соответствии с заданным уровнем доверительной вероятности γ и числом степеней свободы k = n – 1. Оценкой генеральной дисперсии служит «исправленная» выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}. \qquad (12.3)$$

Таблица 8– Формулы расчета необходимой численности выборки при случайном отборе

Предельная ошибка	Повторный отбор	Бесповторный отбор
Для средней	$n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}$	$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{N\Delta^2 + t^2 \cdot \sigma^2}$
Для доли	$n = \frac{t^2 \cdot w(1-w)}{\Delta^2}$	n=$\frac{t^2 N w(1-w)}{N\Delta^2 + t^2 w(1-w)}$

1. Для определения потерь зерна при уборке случайным способом проведено 100 измерений. Средняя величина потерь составила 1,8 ц с одного гектара посевов, при среднем квадратическом отклонении 0,5 ц с га. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя величина потерь зерна с 1 га и возможная величина потерь, если площадь уборки зерновых составила 640 га.

2. С помощью случайной выборки изучалось время выполнения производственной операции рабочими бригады. На основании 60 наблюдений установлено, что в среднем на выполнение производственной операции затрачивалось 0,5 часа, при среднем квадратическом отклонении 0,12часа. Считая время выполнения производственной операции нормально - распределенной случайной величиной, определить границы, в которых находится среднее время выполнения производственной операции всех рабочих с доверительной вероятностью:
а) 0,9; б) 0,95.

3. Случайным бесповторным способом изучались остатки горюче-смазочных материалов на складе предприятий. Обследовано 110 предприятий из 750. Средние остатки составили 150 т, при среднем квадратическом отклонении 42 т. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будут находиться средние остатки горюче-смазочных материалов на одно предприятие и общие остатки горюче-смазочных материалов.

4. Считая данные задачи 1 темы 11 результатом 20% выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения разряда рабочих; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал $(0{,}95\bar{x}_в;\ 1{,}05\bar{x}_в)$ покроет математическое ожидание разряда рабочего; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 1,5 раза, при сохранении значений остальных характеристик.

5. Считая данные задачи 2 темы 11 результатом 20% выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения числа производственных рабочих в расчете на одно крестьянское (фермерское) хозяйство; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,9; в) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,9 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении значений остальных характеристик.

6. Считая данные задачи 3 темы 11 результатом 20% случайной бесповторной выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения изучаемого параметра; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал $(0{,}95\,\overline{x}_в;\ 1{,}05\,\overline{x}_в)$ покроет математическое ожидание изучаемого параметра; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза, при сохранении значений остальных характеристик.

7. В районе имеется 10000 дачных участков населения. В результате выборочного обследования 300 дачных участков оказалось, что средняя выборочная урожайность овощей составила 250 ц с гектара при среднем квадратическом отклонении 60 ц с га. Известно, что 40% общей площади посевов овощей занимали помидоры. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на всех дачных участках и удельный вес посевов помидор. Сколько необходимо обследовать участков, чтобы предельная ошибка выборки по признакам уменьшилась в 1,5 раза?

8. Для определения влажности зерна случайным способом было взято 25 проб. Средний процент влажности зерна составил 16%, а выборочное среднее квадратическое отклонение 2,5%. Определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения; б) интервал, который покроет математическое ожидание с доверительной вероятностью, 0,95.

9. Вероятность изготовления продукции высшего качества фирмой составляет 0,9. Сколько необходимо обследовать единиц продукции, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля продукции высшего качества по выборке будет отклоняться от постоянной вероятности по модулю не более чем на 0,03?

10. Случайным бесповторным способом проведено выборочное обследование семей района. Из 1400 семей обследовано 140, по которым определен душевой доход на члена семьи, представленный в виде интервального вариационного ряда (таблица 9).

Таблица 9 - Распределение семей по величине месячного дохода на одного члена семьи

Группы семей по месячному доходу на члена семьи, тыс. руб.	До 10,0	10,0-20,0	20,0-30,0	30,0-40,0	Свыше 40,0
Число семей	13	26	44	37	20

С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средний месячный доход на одного члена семьи по району, а также доля семей с доходами менее 10,0 тыс. руб. на одного члена семьи.

11. В фирме проведен выборочный опрос 10% работников по вопросам изменения условий труда. Из 90 работников основного производства за изменение условий труда высказалось 65 человек, из 30 работников вспомогательного производства – 20, а из 25 работников, занятых управлением фирмой – 21. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля работников фирмы, поддерживающих изменение условий труда.

12. Для определения влияния микроэлементов на результаты откорма свиней проведен опыт на 8 группах животных. Рационы отличаются набором и дозами микроэлементов (таблица 10).
С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться среднесуточный прирост свиней по каждому рациону и по опыту в целом.

Таблиц 10 - Результаты откорма свиней в опыте

Рацион	Поголовье свиней, гол.	Среднесуточный прирост живой массы, г	Среднее квадратическое отклонение, г
1	2	3	4
1	90	500	40
2	75	575	45
3	100	610	54
4	50	450	52
5	70	590	65
6	60	650	70
7	110	490	48
8	80	540	62

13. Социологической организацией проведен опрос 500 избирателей по вопросам предстоящих выборов в региональные органы власти. Из опрошенных 22 % избирателей готовы поддержать кандидата А, а 36 % - кандидата Б.
а) Определить 95 % доверительные интервалы для доли избирателей, которые отдадут свои голоса за кандидатов А и Б. б) Как изменится

доверительный интервал для кандидата А, если предположить, что в выборах примут участие по первому варианту прогноза 30% избирателей, а по второму – 60%.

13 ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистической гипотезой называется всякое предположение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке. Статистические гипотезы делятся на: параметрические – сформулированные относительно параметров (среднего значения, доли, дисперсии и др.) распределения известного вида;
непараметрические – сформулированные относительно вида распределения (например, оценка по выборке нормальности генеральной совокупности).

Выдвигаемая гипотеза называется основной или нулевой (H_0). Гипотеза, противоположная нулевой, называется конкурирующей или альтернативной гипотезой (H_1).

Так как проверка статистических гипотез осуществляется по выборочным данным, то возникает возможность принятия ошибочных решений. Различают ошибки первого и второго рода.

Ошибка первого рода заключается в том, что будет отвергнута правильная гипотеза, т.е. когда в действительности верна H_0 гипотеза, а в результате проверки она была отвергнута и принята гипотеза H_1. Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости и обозначается α .

$$\alpha = P\ (H_1/H_0). \tag{13.1}$$

Чем меньше уровень значимости α, т. е. вероятности совершить ошибку первого рода, тем меньше вероятность отклонить верную нулевую гипотезу. Уровень значимости задается заранее.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, т.е. в действительности верна некоторая альтернативная гипотеза, а по выборочным данным была принята неверная гипотеза H_0. Вероятность ошибка второго рода обозначается β.

$$\beta = P(H_0/H_1) \tag{13.2}$$

Существует правильное решение двух видов:

$$\mathrm{P}(H_0/H_0) = 1 - \alpha, \text{ а также } \mathrm{P}(H_1/H_1) = 1 - \beta. \tag{13.3}$$

Вероятность $1 - \beta$ называется мощностью критерия. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Статистическим критерием (K) называют случайную величину, с помощью которой принимают решение о принятии или отклонений нулевой гипотезы.

Проверка статистических гипотез обычно осуществляется в определенной последовательности.

1. Располагая выборочными данными, формулируют нулевую и конкурирующую гипотезы.

2. Задают уровень значимости α (обычно принимают α =0,1; 0,01; 0,05; 0,001).

3. Выбирают критерий К, по которому будет проверяться выдвинутая гипотеза. Обычно используют следующие распределения критериев:

u–нормальное распределение;

χ^2 – распределение Пирсона (хu – квадрат);

t – распределение Стьюдента;

F – распределение Фишера - Снедекора.

4. На основании выборочных данных определяют фактически наблюдаемое значение критерия $К_н$.

5. В зависимости от вида альтернативной гипотезы находят, по соответствующей таблице, критические значения критерия для двусторонней $К_{1-\frac{\alpha}{2}}$ и $К_{\frac{\alpha}{2}}$ или односторонней области ($К_{1-\alpha}$ или $К_{\alpha}$). Если фактически наблюдаемые значения критерия попадают в критическую область, то нулевая гипотеза отвергается. В противном случае принимается нулевая гипотеза и считается, что она не противоречит выборочным данным (при этом существует возможность ошибки с вероятностью равной α).

Проверка гипотезы о среднем значении нормально распределенной генеральной совокупности. Пусть имеется генеральная совокупность, которая распределена по нормальному закону по признаку X. Математическое ожидание неизвестно, но можно предположить, что оно равно некоторому значению, т. е. генеральная средняя a, заранее неизвестная, равна некоторому значению a_0. Дисперсия признака по генеральной совокупности известна и равна σ^2. Для проверки данной гипотезы, из генеральной совокупности взята случайная выборка объема n, по которой найдена выборочная средняя $\bar{X}$.Так как выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней, то выдвигается нулевая гипотеза H_0: $\bar{X} = a_0$. Если нулевая гипотеза неверна, то выборочная средняя может быть больше или меньше значения генеральной средней.

а) Проверим нулевую гипотезу H_0: $\bar{X} = a_0$, при H_1: $\bar{X} \neq a_0$.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы используется U – нормальное распределение. Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$U_{н} = \frac{\bar{X} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (13.4)$$

Критическое значение критерия находится по таблице распределения Ф(х), представленных в приложении А1, для двухсторонней критической области, исходя из равенства:

$$\Phi\left(u_{\text{кр}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}. \qquad (13.5)$$

Затем сравнивается наблюдаемое значение критерия с критическим.

Если $|U_{\text{н}}| > U_{\text{кр}}$,то нулевая гипотеза отвергается, выборочная средняя значимо отличается от генеральной средней.

Если $|U_{\text{н}}| < U_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза принимается, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

б) Проверим нулевую гипотезу H_0: $\bar{X} = a_0$, при H_1: $\bar{X} > a_0$.

При конкурирующей гипотезе H_1: $\bar{X} > a_0$ критическая область является правосторонней. Критическую точку находят из равенства

$$\Phi\left(u_{\text{кр}}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}. \qquad (13.6)$$

Если $U_{\text{н}} > U_{\text{кр}}$,то выдвинутая нулевая гипотеза отвергается, выборочная средняя значимо отличается от генеральной средней.

Если $U_{\text{н}} < U_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза принимается, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

в) Проверим нулевую гипотезу H_0: $\bar{X} = a_0$, при H_1: $\bar{X} < a_0$.

Наблюдаемое значение находится по формуле (13.4). Критическую точку находят из равенства (13.6), учитывая, что она левосторонняя.

Если $U_{\text{н}} < U_{\text{кр}}$,то выдвинутая нулевая гипотеза отвергается, выборочная средняя значимо отличается от генеральной средней.

Если $U_{\text{н}} > U_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза принимается, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Учитывая, что $U_{\text{кр. левост.}} = -\ U_{\text{кр. правост.}}$, то вывод можно формулировать, как и в пункте (б).

Пусть генеральная совокупность распределена по нормальному закону, но числовые характеристики непосредственно неизвестны. Несмещенными их оценками служат выборочная средняя и «исправленная» выборочная дисперсия s^2. Тогда в качестве критерия проверки нулевой гипотезы используется $t-$распределение Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$t_{\text{н}} = \frac{\bar{X} - a_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{s}. \qquad (13.7)$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы, как рассмотрено выше. При заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k = n - 1$ по таблице распределения Стьюдента (приложение 3) находится критическое значение критерия для односторонней или двухсторонней критической области. Сравнивая наблюдаемое значение критерия с критическим значением, формулируется вывод.

Проверка гипотезы о числовом значении генеральной доли. Пусть производится n независимых испытаний, вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p, которая заранее неизвестна. Число испытаний достаточно велико. Необходимо проверить гипотезу, что неизвестная вероятность p равна значению p_0. Доля единиц, обладающих данным признаком в выборочной совокупности $w = \frac{m}{n}$, где m – число единиц, обладающим данным признаком в выборочной совокупности.

Требуется определить, значимо или нет различаются относительная частота и генеральная доля. При большом числе испытаний, относительная частота имеет асимптотически нормальный закон распределения с $M\left(\frac{m}{n}\right) = p$ и $\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$. В качестве критерия проверки гипотезы используется нормально распределенная случайная величина U.

Если выдвигается нулевая гипотеза H_0: $p = p_0$, при H_1: $p \neq p_0$, то наблюдаемое значение критерия U находится по формуле:

$$U_{\text{н}} = \frac{w - p_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}. \tag{13.8}$$

Критическое значение критерия находится по таблице распределения *Ф(х),* представленных в приложении А1, для двухсторонней критической области, исходя из равенства:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2}. \tag{13.9}$$

Затем сравнивается наблюдаемое значение критерия с критическим.

Если $|U_{\text{н}}| > U_{\text{кр}}$,то нулевая гипотеза отвергается, выборочная доля значимо отличается от генеральной доли.

Если $|U_{\text{н}}| < U_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза принимается, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $\text{p} > p_0$ или H_1: $\text{p} < p_0$, то критическую точку находят для правосторонней или левосторонней критической области, исходя из равенства

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}. \tag{13.10}$$

Проверка гипотезы о дисперсиях двух нормально распределенных генеральных совокупностей. Пусть имеются две независимые нормально распределенные генеральные совокупности X_1 и X_2 , дисперсии которых σ_1^2 и σ_2^2. Необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ или H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Из первой совокупности образована случайная выборка объема n_1, а из второй – объема

n_2. В качестве оценок σ_1^2 и σ_2^2 используются «исправленные» выборочные дисперсии

$$s_1^2 = \sigma_{1\text{выб.}}^2 \frac{n_1}{n_1-1} \text{ и } s_2^2 = \sigma_{2\text{выб.}}^2 \frac{n_2}{n_2-1}. \tag{13.11}$$

Нулевая гипотеза о равенстве дисперсий s_1^2 и s_2^2 при конкурирующей гипотезе H_1: $s_1^2 > s_2^2$ проверяется с помощью F– критерия Фишера–Снедекора.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле

$$F_\text{н} = \frac{s_1^2}{s_2^2}. \tag{13.12}$$

Критическое значение F– критерия находится по таблице (приложение А3) при уровне значимости α и числе степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ соответственно большей и меньшей дисперсий.

Если $F_\text{н} > F_\text{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, дисперсия признака по первой совокупности значимо больше дисперсии по второй совокупности.

Если $F_\text{н} < F_\text{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, дисперсии признака по двум совокупностям различаются не значимо.

Проверка гипотезы о равенстве двух средних независимых нормально распределенных генеральных совокупностей. Пусть имеются две независимые нормально распределенные генеральные совокупности X_1 и X_2 , дисперсии которых известны и равны σ_1^2 и σ_2^2. Из первой генеральной совокупности образована случайная выборка объема n_1, а из второй – объема n_2. По этим выборкам найдены выборочные средние $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Выборочные средние будем рассматривать как нормально распределенные независимые случайные величины $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$, у которых $D(\bar{X}_1) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}$, $D(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$. При уровне значимости α необходимо проверить нулевую гипотеза о равенстве математических ожиданий H_0: $M(X_1) = M(X_2)$.

Выборочные средние являются несмещенными оценками генеральных средних, поэтому нулевая гипотеза будет иметь вид H_0: $M(\bar{X}_1) = = M(\bar{X}_2)$ или H_0: $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$.

Наблюдаемое значение критерия U определяется по формуле:

$$U_\text{н} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}. \tag{13.13}$$

Критическое значение критерия находится по таблице (приложение А1). Если конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ или H_1: $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$, то критическую точку находят для правосторонней или левосторонней критической области

$$\Phi(u_\text{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}.$$

Если конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $\bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$, то критическая точка находится для двухсторонней критической области

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Затем сравнивается наблюдаемое значение критерия с критическим.

Если $|U_{н}| > U_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, выборочные средние значения различаются значимо.

Если $|U_{н}| < U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

В большинстве практических задач дисперсии генеральных совокупностей неизвестны. Если объемы обеих выборок большие, то выборочные дисперсии мало отличаются от дисперсий генеральных совокупностей. Проверка нулевой гипотезы проводится аналогично изложенному выше. В формуле (13.13) в качестве дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 необходимо взять выборочные дисперсии.

Пусть имеются две независимые нормально распределенные генеральные совокупности X_1 и X_2, дисперсии которых неизвестны. Из первой генеральной совокупности образована случайная выборка объема n_1, а из второй – объема n_2. По этим выборкам найдены выборочные средние $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Если предположить, что обе выборки имеют одинаковые дисперсии, то для проверки нулевой гипотезы используется критерий Стьюдента. Если дисперсии не равны, то нулевую гипотезу о их равенстве необходимо проверить, используя критерий Фишера-Снедекора.

При условии справедливости нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий, наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$t_{н} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)}} \sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)n_1 n_2}{n_1+n_2}}, \quad (13.14)$$

где s_1^2 и s_2^2 – «исправленные» выборочные дисперсии.

В зависимости от вида конкурирующей гипотезы строится критическая область. Если конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$, то критическая точка находится для двухсторонней критической области, чтобы вероятность попадания критерия в каждый интервал была равна $\alpha/2$: $\mathrm{P}(\mathrm{t} < t_{левост.}) = = \frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{P}(\ \mathrm{t} > t_{правост.}) = \frac{\alpha}{2}$. Так как критерий Стьюдента симметричен относительно нуля, то $t_{правост.}(\alpha, k) = -t_{левост.}(\alpha, k)$, поэтому достаточно найти одну критическую точку. Если $|t_{н}| < t_{кр}$., то нулевая гипотеза принимается. Уровень значимости берется по верхней строчке таблицы А2, при заданном уровне значимости и числе степеней свободы k=$n_1 + n_2 - 2$. Если $|t_{н}| > t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, средние значения различаются значимо.

Если конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: \bar{X}_1 > \bar{X}_2$ или $H_1:\ \bar{X}_1 < \bar{X}_2$, то критическую точку находят для односторонней критической области. Значение $t_{кр}$ находится по таблице А2 при заданном уровне значимости в нижней строке таблицы и числе степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$. Сравнивая наблюдаемое значение критерия с критическим, формулируется вывод.

Проверка гипотезы о равенстве долей двух независимых нормально распределенных генеральных совокупностей. Пусть имеется две независимые генеральные совокупности. Доля единиц, обладающих данным признаком в первой совокупности равна p_1, а по второй p_2. Необходимо при заданном уровне значимости проверить гипотезу о равенстве генеральных долей $H_0: p_1 = p_2$. Конкурирующая гипотеза: а) $H_1: p_1 \neq p_2$; б) $H_1: p_1 > p_2$; в) $H_1: p_1 < p_2$.

Из генеральных совокупностей образованы две независимые выборки: из первой совокупности объема n_1, а из второй – объема n_2. Предполагается что обе выборки достаточно большие по объему. Обозначим m_1– число единиц, обладающих данным признаком по первой совокупности, а m_2– число единиц, обладающих данным признаком по второй совокупности. Тогда выборочные доли по каждой совокупности составят:

$$w_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad w_2 = \frac{m_2}{n_2}.$$

Так как объемы выборок достаточно велики, то выборочные доли приближенно распределяются по нормальному закону с математическими ожиданиями p_1 и p_2, дисперсиями $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимается случайная величина U. Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$U_н = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}. \qquad (13.15)$$

Если конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: p_1 \neq p_2$, то критическая точка находится для двухсторонней критической области, исходя из равенства:

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Если конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: p_1 > p_2$ или $H_1: p_1 < p_2$, то критическую точку находят, исходя из равенства

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Если $|U_н| > U_{кр}$,то нулевая гипотеза отвергается, выборочные доли различаются значимо.

Если $|U_н| < U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Проверка гипотезы о значимости средней разности двух зависимых нормально распре деленных генеральных совокупностей. Пусть имеются две нормально распределенные генеральные совокупности. Единицы наблюдения одной совокупности попарно связаны каким-то общим условием с единицами наблюдения другой совокупности. Из этих совокупностей образованы выборки объема n единиц, взятых попарно. Обозначим через x_{1i}–значения признака по i-той единице первой совокупности, x_{2i} – значения признака по i-той единице второй совокупности. Разность значений $d_i = x_{1i} - x_{2i}$. Находится средняя разность значений

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}. \qquad (13.16)$$

Выдвигается нулевая гипотеза Н_0: $\bar{d} = 0$, при альтернативной гипотезе Н_0: $\bar{d} \neq 0$. Разности значений также распределяются по нормальному закону. Нулевая гипотеза проверяется с использованием t–критерия Стьюдента.

Наблюдаемое значение критерия определяется по формуле

$$t_{\text{н}} = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}}, \qquad s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n(n-1)}}. \qquad (13.17)$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента при уровне значимости α для двухсторонней критической области и числе степеней свободы $k == n - 1$, находится критическое значение t −критерия. Сравнивая наблюдаемое значение критерия с критическим формулируется соответствующий вывод.

Если $|t_{\text{н}}| > t_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза отвергается, средняя разность значений значимо отличается по двум совокупностям.

Если $|t_{\text{н}}| < t_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза принимается, средняя разность значений не значимо отличается по двум совокупностям.

Проверка гипотезы о виде распределения. Проверка гипотезы о виде распределения осуществляется с помощью критериев согласия, к важнейшим из которых относятся хи-квадрат Пирсона, Колмогорова, Романовского, ω^2 и другие. Критерий согласия предназначен для проверки нулевой гипотезы, что случайная выборка X_1, X_2, X_3,…, X_n, образована из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(X)$, вид функции, а соответственно и закон распределения, считается известным, а параметры – неизвестными.

Проверка гипотезы о нормальном распределении может осуществляться в следующей последовательности:

1) Из генеральной совокупности извлекается случайная выборка, по которой составляется вариационный ряд с равными интервалами (интервалы могут быть неравными). Определяется выборочная средняя, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Эти характеристики служат статистическими оценками непосредственно неизвестных математического ожидания и дисперсии нормального распределения.

2) Переходят к стандартизированной случайной величине
$t = (X - \bar{x})/\sigma$, по которой определяют концы интервалов

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}, t_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sigma}. \qquad (13.18)$$

3) Находят теоретические вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в частичный интервал

$$p_i = \Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i) \qquad (13.19)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \qquad (13.20)$$

4) Вычисляют теоретические частоты в предположении справедливости нулевой гипотезы о нормальности распределения

$$n_i' = n \cdot p_i. \qquad (13.21)$$

5) Выбирается критерий, по которому будет проверяться нулевая гипотеза, в данном случае критерий хи-квадрат Пирсона. Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$\chi_{\text{н}}^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i)^2}{n_i'} - n. \qquad (13.22)$$

6) По таблице критических точек χ^2– распределения Пирсона при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k = l - 3$, находится критическое значение критерия для правосторонней критической области.

7) Сравнивая наблюдаемое значение критерия с критическим значением, формулируется вывод о степени различий частот, то есть о законе распределения. Если $\chi_{\text{н}}^2 \geq \chi_{\text{кр}}^2$, то нулевая гипотеза отвергается и считается, что предположение о нормальности распределения не согласуется с имеющимися данными. В противном случае ($\chi_{\text{н}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$) нулевая гипотеза принимается.

1. Имеется распределение сельскохозяйственных предприятий Краснодарского края по урожайности озимой пшеницы. Требуется проверить нулевую гипотезу, что совокупность предприятий по урожайности озимой пшеницы распределяется по нормальному закону. Уровень значимости принять равным 0,05.

Таблица 11 – Распределение предприятий по урожайности озимой пшеницы

Группы хозяйств по урожайности, ц/га	До 58	58-62	62-66	66-70	70-74	74-78	Свыше 78	Всего
Число хозяйств	6	9	15	22	16	14	8	90

2. Выборочным методом изучались цены на картофель на продовольственных рынках города. Получено следующее распределение продавцов по уровню цен.

Таблица 12 – Распределение продавцов по цене на картофель

Группы продавцов по цене за 1 кг, руб.	До 35	35-38	38-41	41-44	44-47	Свыше 47	Всего
Число продавцов	6	11	18	21	15	7	78

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу, что цена на картофель на продовольственных рынках города распределяется по нормальному закону.

3. Сельскохозяйственные предприятия региона по урожайности озимого ячменя распределяются по нормальному закону с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 8{,}2$ ц/га и генеральной средней урожайностью $\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{г}} = 65{,}0$ ц/га. Из генеральной совокупности извлечена выборка 50 предприятий, по которой определена выборочная средняя урожайность $\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{в}} = 68{,}0$ ц/га.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу, что:

а) $\overline{x} = \overline{x}_{\mathrm{в}} = 65{,}0$ при $\mathrm{H}_1 \neq 65{,}0$;

б) $\overline{x} = \overline{x}_{\mathrm{в}} = 65{,}0$ при $\mathrm{H}_1 > 65{,}0$.

4. Производитель печенья утверждает, что вес одной пачки составляет 200 г. Выборочное взвешивание 10 пачек дало следующие результаты: 198; 197; 199; 200; 197; 201; 199; 195; 197; 200. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу, что средний вес пачки печенья действительно составляет 200 г.

5. Сливочное масло фасуется в пачки средним весом 170 г и средним квадратическим отклонением 3 г. Случайная выборка 20 пачек масла показала, что средний вес одной пачки равен 170,3 г. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить статистическую гипотезу о соответствии веса случайно взятой пачки масла установленному весу.

6. Две фирмы производят однотипный товар. Утверждается, что 90% товаров первой фирмы реализуется повышенного качества, а второй фирмы 80 %. При выборочной проверке оказалось, что из 80 единиц товара первой фирмы повышенного качества 75, а из 60 единиц товара второй фирмы оказалось 45 единиц повышенного качества. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезы: а) о соответствии выборочных долей продукции высшего качества заявленной доле; б) о значимости различий в доле продукции высшего качества двух фирм.

7. Провести две случайные выборки по одному из показателей приложения Б, объемами n_1 и n_2. Проверить нулевую гипотезу о равенстве выборочных средних значений при уровне значимости 0,05 (предполагается, что дисперсии неизвестны и одинаковы): а) $n_1 = n_2 = 20$; б) $n_1 = 20$; $n_2 = 25$.

8. Проводилось испытание 9 сортов озимой пшеницы. Каждый сорт высевался на 6 делянках одинаковой площади. При 5% уровне значимости проверить гипотезу о существенности различий в средней урожайности двух сортов озимой пшеницы (номера сортов даются студенту преподавателем).

Таблица 13 - Урожайность озимой пшеницы, ц/га

Повто-рения	Сорт								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	45	54	60	81	63	75	55	60	68
II	44	51	62	85	61	79	53	55	72
III	46	56	61	83	62	78	51	53	70
IV	44	52	56	88	66	83	58	57	69
V	47	54	61	84	62	81	54	54	71
VI	45	52	59	87	64	82	53	56	65

9. Произведено выборочное обследование 10% приусадебных участков девяти районов случайным бесповторным способом. Получены следующие результаты об урожайности овощей.

Таблица 14 – Урожайность овощей в хозяйствах населения

Район	Урожайность с 1 га, ц	Среднее квадратическое отклонение, ц/га	Доля овощей в площади участка, %	Число обследованных участков
1	2	3	4	5
1	215	30	30	75
2	246	35	35	80
3	305	32	40	75
4	220	24	50	90
5	364	36	38	66
6	280	23	65	77
7	340	40	45	94
8	316	36	53	82
9	398	56	48	68

При уровне значимости 0,05 по двум районам проверить гипотезы о равенстве: дисперсий, средних выборочных урожайностей, долей посевов овощей в площади приусадебных участков.

10. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве успеваемости студентов по теории вероятностей и математике.

Таблица 15 – Оценки студентов на экзаменах

Номер студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Теория вероятностей	4	5	3	4	5	3	5	2	4	4	3	2	4	4	5
Математика	3	5	2	3	4	3	5	2	4	3	4	3	4	3	4

11. Результаты выступлений 11 спортсменов оценивались двумя судьями по десятибалльной шкале.

Таблица 16 – Оценки судей результатов соревнований спортсменов

Номер спортсмена		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Оценка судьи	1	8,5	9	7,4	9,4	9,7	6,5	7,1	8,3	9,1	8,0	7,6
	2	8,3	9,1	7,7	9,3	9,2	6,0	7,3	8,1	9,1	7,9	7,4

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о значимости различий в оценке выступлений спортсменов двумя судьями.

12. Имеются данные о числе сорняков в пробах семян помидор

Таблица 17 – Число сорняков в пробах

Число сорняков	0	1	2	3	4
Число проб	250	190	36	18	6

Проверить гипотезу о соответствии данного эмпирического вариационного ряда распределению Пуассона. Уровень значимости принять равным 0,05.

13. По данным задачи 5 темы «Вариационные ряды», проверить гипотезу о нормальности распределения работников предприятия по стажу работы.

14. Используя данные задачи 10 по теме «Выборочный метод» проверить гипотезу о нормальности распределения семей по величине месячного дохода на одного члена семьи.

15. По одному варианту задач 3 и 4 темы «Вариационные ряды» проверить гипотезу, что распределение подчиняется наиболее приемлемому закону распределения.

16. Определенные сорта озимой пшеницы испытывались на одинаковом числе участков, на протяжении восьми лет. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о существенности различий в урожайности двух сортов озимой пшеницы.

Таблица 18 – Урожайность озимой пшеницы по сортам

Год	Урожайность, ц/га								
	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	x_{4i}	x_{5i}	x_{6i}	x_{7i}	x_{8i}	X_{9i}
2005	57	49	54	48	62	75	52	52	71
2006	53	46	50	44	55	70	58	49	66
2007	43	48	41	46	49	71	50	44	68
2008	45	46	43	43	58	73	49	43	76
2009	56	51	52	50	59	76	53	52	72
2010	58	52	56	51	61	79	55	55	70
2012	55	48	43	47	60	69	51	54	75
2013	59	52	57	49	64	68	56	59	74
2014	57	48	52	50	63	72	58	51	71
2015	60	50	53	53	61	75	55	53	77
2016	62	53	51	52	64	74	56	55	72
2017	61	51	54	48	67	77	57	57	78
2018	59	52	55	49	65	79	54	56	79
2019	63	55	57	51	69	80	58	60	82

14 ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Сущность дисперсионного анализа заключается в том, что дисперсия изучаемого признака разлагается на сумму составляющих ее дисперсий, каждое слагаемое которой соответствует действию определенного источника изменчивости.

Например, в однофакторном анализе мы получим разложение вида:

$\sigma_c^2 = \sigma_A^2 + \sigma_z^2$, а в двухфакторном: $\sigma_c^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_Z^2$, (14.1)

где σ_c^2 -общая дисперсия изучаемого признака С;

σ_A^2 - дисперсия, вызванная влиянием фактора А;

σ_B^2 - дисперсия, вызванная влиянием фактора В;

σ_{AB}^2 - дисперсия, вызванная взаимодействием факторов А и В;

σ_z^2 - дисперсия, вызванная неучтенными случайными причинами (случайная дисперсия);

В дисперсионном анализе рассматривается нулевая гипотеза – ни один из рассматриваемых факторов не оказывает влияние на изменчивость признака.

Расчеты проводятся в следующей последовательности:

- определяются необходимые суммы квадратов отклонений результативного признака, в соответствии с моделью дисперсионного анализа;
- находится число степеней свободы вариации по каждому источнику;
- рассчитываются средние квадраты отклонений;
- определяются наблюдаемые и критические значения критерия F – Фишера – Снедекора, формулируются выводы относительно гипотезы H_0;
- оценивается значимость различий групповых средних по вариантам опыта.

Если $F_н > F_{кр}$, то делается вывод о сущности различий результативного признака, обусловленных влиянием признака – фактора, т.е. действие фактора на результативный признак признается статистически достоверным.

Рассмотрим алгоритм однофакторного дисперсионного анализа. Определенный фактор принимает p различных уровней и на каждой уровне сделано nнаблюдений, что дает $N=np$ наблюдений. Модель однофакторного дисперсионного анализа имеет вид:

$$x_{ij} = \bar{x} + A_i + \varepsilon_{ij} \qquad (14.2)$$

где $\bar{x}$ – общая средняя арифметическая;

$A_i -$ эффект фактора А на $i -$ ом уровне;

ε_{ij} – случайная величина или остаток, характеризует влияние прочих неучтенных факторов

Выдвигается нулевая гипотеза: $H: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_p$, при конкурирующей гипотезе – не все средние по уровням фактора равны.

Рассматриваем тождество $\left(x_{ij} - \bar{x}_{..}\right) = (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{..}) + \left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right)$. Суммируя обе части уравнения по i и j и проведя преобразования, получим:

$$\sum_{i,j}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i,j}(\bar{x}_i. - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i,j}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i.)^2 \qquad (14.3)$$

(Точка вместо индекса обозначает усреднение соответствующих наблюдений по этому индексу.)

Иначе можно записать: $SS_o = SS_v + SS_z$. Величина факторной суммы квадратов отклонений SS_v вычисляется по отклонениям p средних от общей средней $\overline{X}..$, поэтому S_v имеет (p–1) степеней свободы. Величина остаточной суммы квадратов отклонений SS_z вычисляется по отклонениям N наблюдений от p выборочных средних и, следовательно, имеет $N-p = np - p = p(n-1)$ степеней свободы. Общая сумма квадратов отклонений SS_o имеет (N–1) степеней свободы.

Данные обычно располагают в виде таблицы результатов X_{ij} $(i = 1,2,\ldots,p;\ j = 1,2,\ldots.,n)$:

Уровень фактора, i	Номер наблюдения, j					
	1	2	...	j	...	n
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{ln}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{il}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_p	x_{pl}	x_{p2}	...	x_{pj}	...	x_{pn}

Таблица 19 - Однофакторный дисперсионный анализ

Источник изменчивости	Суммы квадратов отклонений (SS)	Степени свободы (k)	Средние квадраты (s^2)
Общая	$SS_o = \sum_{i,j}(X_{ij} - \overline{X}..)^2$	N-1	
Различия между уровнями (факторная)	$SS_v = n\sum_i(\overline{X}_{i.} - \overline{X}..)^2$	p-1	$S_v^2 = \dfrac{SS_v}{p-1}$
Различия внутри уровней (остаточная)	$SS_z = \sum_{i,j}(X_{ij} - \overline{X}_{\iota}.)^2$	N-p	$s_2^2 = \dfrac{SS_z}{N-p}$

Если гипотеза о том, что влияние всех уровней одинаково, справедлива, то обе величины s_v^2 и s_z^2 будет несмещенными оценками σ^2. Значит, гипотезу можно проверить, вычислив отношение $s_v^2 : s_z^2$ и сравнив его с F_{kp} имеющего k_l= *(p–1) и* k_2*=(N–p)* степеней свободы.

Если $F_н > F_{кр}$, то будет справедлива гипотеза о значимом влиянии фактора A на результат наблюдений. В этом случае оценивается значимость различий между средними значениями результативного признака по уровням факторного признака. Если $F_н < F_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза о незначимости различий между средними арифметическими значениями по вариантам опыта.

Для оценки существенности частых различий вычисляют:

а) среднюю ошибку средней арифметической

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s_z^2}{n}}; \qquad (14.4)$$

б) ошибку разности средних

$$s_d = s_{\bar{x}} \cdot \sqrt{2} \qquad (14.5)$$

в) наименьшую существенную разность

$$HCP_{\alpha,k_Z} = t_{\alpha,k_{Z_z}} s_d . \qquad (14.6)$$

Сравнивая разности средних значений $\bar{X}_i$ по вариантам с НСР, делают вывод о существенности различий в уровне средних.

1. Оценить существенность различий в успеваемости студентов по четырем предметам и группам. Численность студентов в каждой группе составляет 25 человек.

Таблица 20 - Уровень успеваемости студентов, балл

Пред-мет	Группы							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4,3	4,1	4,1	4,2	4,4	4,5	4,0	4,3
2	4,2	4,0	3,9	4,0	4,3	4,3	3,7	3,9
3	4,4	4,5	4,2	4,2	4,3	4,3	4,4	4,4
4	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,4	4,1	4,2
5	3,6	3,7	3,5	3,8	4,0	3,7	3,4	3,9

2. Доказывает ли опыт влияние различных доз удобрений на урожайность озимой пшеницы

Таблица 21 - Урожайность озимой пшеницы с 1 га по участкам равной площади, ц

Доза удоб-рений	Повторения							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	39	39	37	41	36	38	43	40
2	41	40	39	40	38	38	41	42
3	42	40	39	42	40	39	43	45
4	47	45	43	42	40	41	45	50
5	55	50	60	48	54	53	61	53
6	67	60	64	66	63	70	72	67
7	73	70	77	79	76	65	64	68
8	62	60	57	63	49	51	61	56
9	81	86	74	78	83	80	79	85

3. Оценить различия в среднемесячной начисленной заработной плате механизаторов различной квалификации.

Таблица 22 – Средняя месячная заработная плата механизаторов, тыс. руб.

Класс механизаторов	Бригады									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	48,5	43,8	45,4	42,9	41,8	45,4	43,7	44,9	42,8	39,8
II	39,1	36,8	37,2	36,9	38,3	35,0	36,5	40,0	35,4	38,7
III	28,1	25,1	31,2	25,2	25,1	24,0	33,5	28,3	30,8	27,8

4. По четырем сортам, трем дозам удобрений и пяти повторениям, взятым по указанию преподавателя, оценить существенность влияния различных сортов, доз удобрений и их взаимодействий на урожайность риса.

Таблица 23 - Урожайность риса с 1га, ц

Сорт	Доза удобрений	Повторения							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	42	39	44	41	38	39	37	42
	2	44	47	46	45	43	42	41	44
	3	58	55	53	50	56	57	54	53
2	1	45	42	44	40	44	43	46	45
	2	49	47	49	47	45	47	48	47
	3	57	56	55	50	47	45	47	47
3	1	59	42	44	41	42	40	42	40
	2	68	51	55	53	51	54	53	49
	3	67	59	65	63	62	60	64	60
4	1	41	44	39	40	43	1	43	45
	2	48	49	46	51	52	49	46	51
	3	52	49	47	50	50	48	47	50
5	1	38	40	39	42	44	43	40	41
	2	49	52	50	52	48	49	50	54
	3	53	58	49	50	50	53	49	50
6	1	42	41	43	41	39	40	44	42
	2	49	52	53	53	50	54	53	53
	3	68	66	65	69	70	72	73	76
7	1	64	61	66	64	68	67	61	63
	2	72	74	70	69	73	69	72	71
	3	88	85	89	80	79	78	83	86

5. Оценить существенность различий уровня производительности механизаторов при культивации в различных хозяйствах по пропашным культурам и стажу работы механизаторов.

Таблица 24 - Объем выполненных работ механизаторами за 1 час работы, эт. га

Культура	Стаж работы, лет	Хозяйства			
		1	2	3	4
Кукуруза на зерно	до 5 от 5 до 10 от 10 до 15	0,75 1,40 1,25	0,9 1,55 1,35	0,95 1,35 1,35	1,00 1,50 1,40
Кукуруза на силос	до 5 от 5 до 10 от 10 до 15	0,85 1,50 1,35	0,95 1,40 1,40	0,85 1,55 1,55	1,10 1,45 1,50
Подсолнечник	до 5 от 5 до 10 от 10 до 15	0,80 1,35 1,45	0,90 1,45 1,40	0,75 1,35 1,30	0,85 1,40 1,30

Задачи для самостоятельной работы

№ темы	Тема	Номера задач, предназначенных для самостоятельной работы обучающихся
1	Случайные события	4, 5, 13, 21, 25, 30, 31
2	Основные теоремы и их следствия	3, 9, 21, 26, 39, 42, 48
3	Повторные независимые испытания	3, 7, 11, 18, 24, 28, 33
4	Дискретные случайные величины	2, 4, 8, 15, 23, 30, 34
5	Непрерывные случайные величины	2, 11, 12, 13, 19, 25
6	Законы распределения непрерывных случайных величин	5, 9, 11, 13, 15, 29
7	Функции случайных величин	2, 6, 13
8	Закон больших чисел	2, 4, 7, 9
9	Многомерные случайные величины	3, 6, 8
10	Цепи Маркова	5, 7
11	Вариационные ряды	2, 3, 4
12	Выборочный метод	2, 4, 5, 12
13	Проверка статистических гипотез	2, 4, 8, 16
14	Дисперсионный анализ	4

Вопросы для устного опроса обучающихся

№ темы	Тема	Вопросы для устного опроса
1	Случайные события	1. Предмет и основные понятия теории вероятностей. Алгебра событий. 2. Определения вероятности события.
2	Основные теоремы и их следствия	1. Элементы комбинаторики. 2. Основные теоремы теории вероятностей. 3. Формулы полной вероятности и гипотез.
3	Повторные независимые испытания	1. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. 2. Наивероятнейшее число наступления события в независимых испытаниях. 3. Локальная теорема Муавра-Лапласа. 4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. 5. Формула Пуассона.
4	Дискретные случайные величины	1. Случайные величины и их виды. 2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.

		3. Основные законы распределения дискретных случайных величин. 4. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства. 5. Дисперсия дискретной случайной величины и её свойства. 6. Математическое ожидание и дисперсия числа появления события в независимых испытаниях
5	Непрерывные случайные величины	1. Одинаково распределённые взаимно-независимые случайные величины. 2. Функция распределения вероятностей и ее свойства. 3. Функция плотности распределения вероятностей и ее свойства. 4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
6	Законы распределения непрерывных случайных величин	1. Равномерное распределение. 2. Показательное распределение. 3. Нормальное распределение. 4. Вероятность заданного отклонения. Правило трёх сигм.
7	Функции случайных величин	1.Закон распределения функции случайных величин. 2. Композиция распределений. 3. Распределения хи-квадрат Пирсона, t – Стьюдента, F – Фишера.
8	Закон больших чисел	1 Сущность закона больших чисел. 2. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. 3. Характеристическая функция. Понятие о центральной предельной теореме.
9	Многомерные случайные величины	1. Функция распределения вероятностей многомерной случайной величины. 2 Вероятность попадания двумерной случайной величины в полуполосу и прямоугольник. 3 Плотность вероятности двумерной случайной величины. 4. Числовые характеристики двумерной случайной величины. 5. Коэффициент корреляции и его свойства.
10	Цепи Маркова	1. Цепи Маркова. Понятие о случайных процессах. 2. Понятие марковского процесса
11	Вариационные ряды	1. Предмет и основные задачи математической статистики.

		2. Определение и виды вариационных рядов. Графическое изображение вариационных рядов распределения. 3. Мода и медиана вариационного ряда. 4. Средняя арифметическая ряда распределения и её свойства. 5. Дисперсия ряда распределения и её свойства. 6. Моменты ряда распределения и связь между ними. 7. Асимметрия и эксцесс ряда распределения.
12	Выборочный метод	1. Сущность выборочного метода. Статистические оценки выборочной совокупности и их свойства. 2. Определение доверительного интервала для средней и доли при случайном и типическом отборе. 3. Определение необходимой численности выборки.
13	Проверка статистических гипотез	1. Понятие и виды статистических гипотез. Статистические критерии проверки гипотез. Уровень значимости и мощность критерия. 2. Проверка гипотезы о равенстве двух выборочных средних независимых выборок. 3. Проверка гипотезы о значимости средней разности двух зависимых выборок. 4. Критерии согласия.
14	Дисперсионный анализ	1. Понятие и модели дисперсионного анализа. 2. Однофакторный дисперсионный анализ. 3. Понятие о многофакторном дисперсионном анализе.

ОТВЕТЫ

РАЗДЕЛ 1

1. а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) нет.

2. а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет.

3. а) нет; б) да; в) нет. г) нет.

6. а) 1/6; б) ½; в) ½; г) 1/3. д) ½.

7. 1/90.

8. а) 1/6; б) 11/36; в) 1/18; г) 5/18.

9. а) 0,007; б) 99,3%.

10. а) 6; б) 200.

11. а) 0,25; б) 0,375; в) 0,75.

12. 1/120.

13. 1/120.

14. 0,25.

15. а) 4/9; б) 1/3024. в) 1/3024.

16. 1/120.

17. а)3/28; б) 0,25.

18. 24/91.

19. 0,5.

20. 3/38.

21. 0,05.

22. а)0,087; б) 0,0043.

23. 0,6966.

24. а) 1/376992; б) 0,0123.

25. 0,00077.

26. 0,3.

27. а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

28. $\pi/4$.

29. 1/3.

30. 0,3477.

31. 5/54.

32. 16/49.

РАЗДЕЛ 2

3. а) 0,5; б) 0,15.

4. 0,5.

5. а) 91/460; б) 7/46; в) 6/115.

6. 0,027.

7. а) 0,902; б) 0,098.

8. 0,7.

9. 119/156.

10. а) 2/9; б) 16/55.

11. а) 1/3; б) 8/15; в) 3/5; г) 7/15.

12. 0,271.

13. а) 0,648; б) 0,72.

14. а) 1/360; б) 1/180; в) 1/180.

15. а) 0,189; б) 0,027; в) 0,343; г) 0,216; д) 0,657.

16. а) 0,0105; б) 0,4265; в) 0,558.

17. а) 0,0975; б) 0,236.

18. 6/11 и 5/11.

19. 31/35.

20. Найдет.

21. 0,059.

22. а) 0,379; б) 0,621.

23. а) 0,558; б) 0,385; в) 0,616.

24. 37/64.

25. а) 0,392; б) 0,428; в) 0,904; г) 0,096.

26. а) 0,51; б) 0,94; в) 0,34.

27. 4.

28. а) 0,741; б) 0,241; в) 0,889.

29. 0,006;0,092; 0,398; 0,504.

30. 0,288.

31. 0,4053.

32. 0,5048

33. а) 0,479; б) 0,333; в) 0,124.

34. а) 11/225; б) 4/15.

35 а) 0,519; б) 0,809.

36. 0,197.

37. 0,676.

38. а) 7/9; б) третьего.

39. а) 0,8125; б) 0,908

40. 0,1688.

41. 0,445; 0,219; 0,336.
42. 0,25.
43. 0,61; 0,0203;
44. а) 0,79; б) 0,772.
45. 0,4.
46. а) 0,725; б) 0,276.
47. 0,3; 0,556.
48. 0,635

РАЗДЕЛ 3

1. а) 0,116; б) 0,518; в) 0,016.
2. 0,328; б) 0,738; в) 0,0067.
3. а) 0,343; б) 0,973; в) 0,63.
4. а) 0,31; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,625.
5. а) 0,062; б) 0,926; в) 0,159.
6. 0,09; б) 0,594.
7. 0,387; 0,42; 0,368.
8. 212.
9. 20; 0,0997.
10. 2; 0,2707.
11. 124 или 125.
12. 9≤ n ≤ 305.
13. а) одну из двух; б) не менее двух из четырех.
14. 045.
15. 0,1%.
16. а) 0,1887; 0,1839; б) 0,6415; 0,632.
17. 0,993.
18. а) 0,000033; б) 0,9938; в) 0,9876.
19. а) 0,9938; б) 0,9937.
20. 0,925; б) 0.
21. 444.
22. ; 0,119.
23. 0,992; б) 0,988.
24. От 19 до 21
25. 44
26. $0{,}25^{n}C_{2n}^{n}$
27. $0{,}9\pm0{,}0294$
28. 0,999
29. а) 0,0207; б) 0,6922
30. От 792 до 828
31. 8100
32. От 381 до 395
33. 95852
34. а) 0,9783; б) 100; в) 0,9882

РАЗДЕЛ 4

1. M(x)=3,6; Д(X)=0,36; σ(X)=0,6.
2. M(X)=2,06; Д(X)=0,991; σ(X)=1,0.
3. M(X)=1,2;Д(X)=0,72; σ(X)=0,85.
4. M(X)=1,8.
7. $x_0=1$.
8. $x_0=1$.
9. M(X)=3,1216.
10. M(X)=2,4264.
11. M(X)=751,67.
12. 23,4 и 12,6 млн. руб.
13. M(X)=1,87.
15. Третьего; первого.
16. M(X)=42; Д(X)=35; σ(X)=5,92.
17. а) 4; б)14; в) 20; г) 35.
18. а) 8; б)8; в) 72; г) 32.
19. а) M(Z)=14; D(Z)=88; б)M(Z)=–2; D(Z)=112;в) M(Z)=30; D(Z)=186; г)M(Z)=11.5; D(Z)=55.
20. а) 34 и 96; б)15 и 161; в) 13 и 49;г). 32 и 92.
21. M(X)=2; D(X)=1,44; а) 0,6768; б)0,8646.
22. M(Z)=7.4; Д(Z)=2.2; σ(Z)=1,48;
23. M(X)=4,2; Д(X)=0,64; σ(X)=0,8.

M(V)=13,68;Д(V)=29,3376;
σ(V)=5,4164.

25. 34,1;150,19; 12,26.

26. M(Z)=2,2; D(Z)=0.76; σ (Z)=0,87

27. Рост на 4740 руб.

28. x_2=2,6

29. p(x=2)=0,1; p(x=3)=0,2.

30. M(X)=2; σ (X)=1,4.

31. p=0,1

32. M(X)=7.

33. x_1=4; p_1=0,4;x_2=5; p_2=0,6

34. x_1=0; x_2=1;p_2=0,15.

35. x_2=2; x_3=5; p_2=0,3.

36. p_2=0,3; p_3=0,4; p_4=0,2.

РАЗДЕЛ 5

6. M(X)=2,1.

7. 7а: а) 0,5; б) 0,75; в) 0,25; г) 0,5.
7б: а) 1/3; б) 0,5; в) 0,5; г) 1/3.

8 а) 0,2966; б) 0,0129.

9. а) $M(X)=2\frac{1}{6}$;$D(X)=\frac{11}{36}$; $\sigma(X) = 0{,}553.$
б) $M(X)$=9,333; $D(X)$=12,089;
$\sigma(X)$=3,477.

10. а) 0,5a; б) $M(X)$=2-2a;
$D(X)=\frac{4}{3}$; $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. A=0; B=2; M(X)=1,5;
D(X)=0,15; σ(X)=0,387.
б) A=0; B=2;
M(X)=1,6; D(X)=0,107; σ(X)=0,326.

12. б) 0,847.

13. б) 0,599
в) M(X)=2,566;
D(X)=0,08; σ(X)=0,283.

14. б) 7/36.

15. б) 0,4884.

16. б) 0,3195.

17. б) 3/16; в) M(X)=$0{,}8\sqrt{a}$;
D(X)=$\frac{2}{75}a$; σ(X)=$\frac{\sqrt{6}}{15}a$.

18. б) 0,3335; в) M(X)=0,3598; D(X)=0,51207; σ(X)=0,7156.

19. а) a=0,25; б) M(X)=$2\frac{1}{3}$;
в) 0,25.

20. M(X)=0; D(X)=$\frac{\pi^2}{4}-2$.

21. а) c=48; б) M(X)=199/64; D(X)=0,463.

22. c=$\frac{1}{\pi}$.

23. $$f(x)=\begin{cases}0.5e^{x}, x\le 0,\\ 0.5e^{-x}, x>0,\end{cases}$$
M(X)=0; D(X)=2; P(-1<x<3)=0,79.

24. C = 1; $M(X)$ = 2; $\sigma(X) = \sqrt{2}$.

25. $M(X) = \frac{\pi}{2}; D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2;\ \sigma(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}.$

РАЗДЕЛ 6

2. а) M(X)=8; D(X)=3; б) M(X)=1; D(X)=$5\frac{1}{3}$.в) M(X)=4; D(X)= $5\frac{1}{3}$; г) M(X)=0; D(X)= $5\frac{1}{3}$.

3. б) 0,5.

4. а)0,8413; б) 0,9544.

5. а) 0,7258; б) 0,9996; в) 0,9082; г) 0,8164.

6. а) 84,13%; б) 53,28%.

7. 0,99968.

8. (56,1; 63,9).

9. 10.

10. (240; 360).

11. а) 0,5328; б) Mo=Me=5.

12. Второго производителя.

13. 93,7%.

15. а)0,864; б)0,0018. M(X) = 0.5; D(X) = 0.25; Ϭ(X) = 0.5.

17. а) 0,5466; б) 0,4037; в) 0,9502; г) 0,0498.

19. а) 0,134; б) 0,9826; в) 0,9975.

20. а) 0,134; б) 0,9379.

21. а) F(x) = $\frac{1}{\pi}$arctgx+$\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$.

22. б) 0,4712.
в) M(X)=$a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; D(X)= $a^2(2-\frac{\pi}{2})$;
σ(X)=$a\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}$.

23. а) $x_0=1{,}25^{\frac{1}{\beta}}a$; в) M(X)=$\frac{\beta \cdot a}{\beta-1}$.
при β >1.

24. а)f(x)=
Мест
$$\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right), \text{при } 0 < x \le a, \\ 0, \text{при} x > a. \end{cases}$$
б) F(x) = $\begin{cases} 0, \text{при } x \le a, \\ \frac{x}{a}(2-\frac{x}{a}), \text{при } 0 < x \le a, \\ 0, \text{при } x > a. \end{cases}$

в) $\frac{5}{16}$; г) $M(X) = \frac{a}{3}$; $D(X) = \frac{a^2}{18}, \sigma(X) = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

25. а) f(x)=$\begin{cases} 0, \text{ при } x \le -a, \\ \frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right), \text{при } -a < x \le a, \\ 0, \text{при} x > a. \end{cases}$ б) F(x) = $\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -a, \\ \frac{(a-x)^2}{2a^2}, & \text{при } -a < x \le 0, \\ \frac{a^2+2ax-x^2}{2a^2}, & \text{при } 0 \le x < a, \\ 1, & \text{при } x \ge a. \end{cases}$

в) 0,75; г) M(X) = 0; D(X) = $\frac{a^2}{6}$; $\sigma(X) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

26.а) F(x) = $\begin{cases} 0, \text{ при x } \le 0, \\ \frac{x^2}{36}, \text{при } 0 < \text{x} \le 6, \\ 1, \text{при x} > 6. \end{cases}$ б)f(x) = $\begin{cases} 0, \text{ при x } \le 0, \\ \frac{x}{18}, \text{при } 0 < \text{x} \le 6, \\ 1, \text{при x} > 6. \end{cases}$

в) *M(X)* = 4; *D(X)* = 2; $\sigma(X)$=$\sqrt{2}$.

27. *M(X)* = 16,03; *D(X)* = 157,476; $\sigma(X)$=12,549; *Me(X)*=12,62; *Mo(X)*=7,81; $P(6 < x < 15) = 0{,}42845$.

28. *M(X)* = 2,056; Me = 1,677; Mo = 1,116; *Д(X)* = 2,126; $\sigma(X)$ = 1,458;

$P(3 < x < 6) = 0{,}2358$.

29. *M(X)* = 288549; *Me* = 181167; *Mo* = 194547; *Д(X)* = 128065430179; *σ(X)* = 357862; P(100000<x<500000) = 0,5838 или 58,4 %.

30. а) F(x) - $\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\alpha(x-\beta)}, & \text{при } x \le \beta, \\ 1-\frac{1}{2}e^{-\alpha(x-\beta)}, & \text{при } x > \beta; \end{cases}$ б) $M(X) = \beta. D(X) = \frac{2}{\alpha^2};\ \sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$.

РАЗДЕЛ 7

1. а) 1,6; б) 6,3; в) 1,7; г) 0,9. **2.** а) 0; б) -2,7; в) 1,5; г) 1,061.
3. а) М (У)=10; D(У)=36; σ(Y)=6; б) М (У)=14,5; D(У)=95,85; σ(Y)=9,79.
4. б) M(Y) = 0,475; D(Y) = 0,018; σ(y) = 0,135.
5.а) M(Y) = 2; D(Y) = 1,333; σ(Y) = 1,155; б) M(Y) = 41,333; D(Y) = 791,015; σ(Y) = 28,125; в) M(Y) = 2,17; D(Y) = 0,31; σ(Y) = 0,553.
6. а) g(y) = $\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, при $y \in (-1,1)$; б) g(y) = $\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, при $y \in (0,1)$.
7. а) g(y) = $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(y-10)^2}{8}}$; б) g(y) = $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sqrt[3]{y^2}}e^{\frac{-(\sqrt[3]{y}-2)^2}{2}}$.

8. а) g(y) = $\begin{cases} 0, \text{при } y \le \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}\left(\frac{1}{y^4}-\frac{1}{y^2}\right), \text{ при } \frac{1}{2} < y \le \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ 0, \text{при } y > \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

б) g(y) = $\begin{cases} 0, \text{при } y < \sqrt[4]{3}, \\ 3y^5 - 3y, \text{при} \sqrt[4]{3} \le y < \sqrt{2}, \\ 0, \text{при } y \ge \sqrt{2}. \end{cases}$

9.с=$\frac{3}{32}$; $M(X) = 0; D(X) = 0.8;\ \sigma(X) = 0.8944;$ а) g(y) =
$\begin{cases} 0, \text{при} y < -3, \\ \frac{3}{256}(15+2y-y^2), \text{при} -3 \le y < 5, \\ 0, \text{при} y \ge 5. \end{cases}$

б)g(y) = $\begin{cases} 0, \text{при } y \le 0, \\ \frac{3}{32}\left(\frac{4-y}{\sqrt{y}}\right), \quad \text{при } 0<y \le 4, \\ 0, \text{при } y \ge 4. \end{cases}$

10.а) $g(y) = e^{-(1+y)}$, при **y ≥ –1; б)**g(y)=4ye^{-2y^2}, при y>0; в) равномерное распределение на отрезке [0,1].

11. $g(z)=\begin{cases} 0, при Z\le 0, \\ \frac{z}{20}, при 0<z\le 2, \\ \frac{1}{10}, при 2<z\le 10, \\ \frac{12-z}{20}, при 10<z\le 12, \\ 0, при z>12 \end{cases}$ **12**. $g(z)=\begin{cases} 0, при Z\le 3, \\ \frac{z+3}{25}, при -3<z\le 2 \\ \frac{7-z}{25}, при 2<z\le 7, \\ 0, при z>7. \end{cases}$

13. g(z) = $\begin{cases} 0, \text{при } z \le 0; \\ e^{-\frac{z}{2}}\left(1-e^{-\frac{z}{2}}\right), \text{при } z>0. \end{cases}$ **14.** g(z) =$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2}}$, при z$\in(-\infty.\infty)$.

15. g(x)=$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}=e^{\frac{(Inx-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$, при x > 0.

РАЗДЕЛ 8

1.	$P(x>10)\le 0{,}6$.	2.	P(X<140) >$\frac{2}{7}$.
3.	а) $P(x>8)\le 0{,}5$, б) $P(x\le 6)\ge\frac{1}{3}$.	4.	200
5.	P ≥ 0.9872; p≈1,0.	6.	$P_1\ge 0{,}936$, $P_2=0{,}99996$.
7.	$P\ge 0{,}64$; б) p$\ge 0{,}75$.	8.	P $\le\frac{2}{3}$.
9.	$P\ge 0{,}5456$.	10.	а) $P\ge 0{,}64$, б) $P\ge 0{,}932$.
11.	а) $P\ge\frac{7}{9}$, б) $\frac{35}{36}$.	12.	а) $P\ge\frac{7}{9}$, б) $\frac{35}{36}$.
13.	400.	14.	3125.
15.	P ≥ 0,409.	16.	а) да; б) нет.

РАЗДЕЛ 9

1. r = $\frac{1}{12}$.

2. Не зависимы.

3. а) M(X)=3,1; D(X)=0,99; σ(X)=0,995;
M(Y)=4,25; D(Y)=15,6875; σ(Y)=3,961.
б) M(X)=3,4; D(X)=0,84; σ(X)=0,916;
M(Y)=2,9; D(Y)=2,59; $\sigma(Y)$=1,609.

4. а) M(X)=7,5; D(X)=56,25; σ({)=7,5;
M(Y)=5,5; D(Y)=24,75; σ(Y)=4,975.
б) M(X)=0,15, D(X)=0,4275;σ(X)=65,38;
M(Y)=2,3; D(Y)=0,91; σ(Y)=0,954.

5. а)f(x,y)=
$$\begin{cases} \ln^2 3\cdot 3^{-x-y}, & при\ x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0\qquad\qquad , & при\ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$
б) 64/243

6. 3/128.

7. f(x)=$8\cdot e^{-4x-2y}$, $при\ x \ge 0,\ y \ge 0$;
f(x)=0, $при\ x < 0,\ y < 0$.

9. а) a=0,5; б) M(X)=M(Y)=$\frac{\pi}{4}$;
в) D(X)=D(Y)=$(\pi^2+8\pi-32)/16$.

11 а) f(x,y)=$\frac{1}{18}$;
б) f_1(x)=$\frac{1}{3}-\frac{1}{18x}, 0<x<6$;
f_2(y)=$\frac{1}{3}-\frac{1}{18y}, 0<y<6$;
f(x,y)=$\frac{1}{6-y}, 0<y<6$;
f(x,y)=$\frac{1}{6-x}$, $0<x<6$.

12. f(x,y)=$\frac{1}{a^2}$ внутри квадрата;
f(x,y)=0 вне квадрата;
$$f(x)=\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}-2|x|}{a^2}, & при\ |x|<\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ 0, & при |x|>\frac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$
$$f(y)=\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}-2|y|}{a^2}, & при\ |y|\le\frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0, & при |y|>\frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

13. M(X)=M(У)=$\frac{\sqrt{3\pi}}{6}$;
Д(X)=Д(У)=$\frac{4-\pi}{12}$.

14. M(X)=M(У)=$\frac{a}{6}$; Д(X)=Д(У)=$\frac{a^2}{18}$;
$$\mu_{xy} = -\frac{a^2}{36}.$$

РАЗДЕЛ 10

2. $0 \le P \le 1, \quad 0 \le S \le 1.$

4. 1/6.

5. б) 0; 0;
$(\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{108}$; 0;

$(\frac{1}{3})^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{162}$.

3. $Pi,i+1=\frac{5-i}{5}; \quad Pi,i-1=\frac{i}{5},$
$Pij=0$, для остальных i, j;
$Pij(2)=\frac{5+10i-2i^2}{25}, P_{i,i-2}(2)=\frac{i(i-1)}{25},$
$P_{i,i+2}(2)=\frac{(5-i)(4-i)}{25},$
остальные $Pij=0$.

РАЗДЕЛ 11

1. $\overline{x} = 3{,}51; \quad M_0 = 4; \quad M_e = 4;$
$\sigma = 1{,}425; Э = -0{,}688; Ka = -0{,}065.$

2. $\overline{x} = 4{,}18; \quad M_0 = 4; \quad M_e = 4;$
$\sigma = 1{,}44; Э = -0{,}612; Ka = 0{,}338.$

4. $\overline{x} = 10{,}208; \quad \sigma = 7{,}601; \quad v = 74{,}45\%.$

5. $\overline{x} = 7{,}323; \quad \sigma = 1{,}751; \quad v = 23{,}9\%$
$K_A = -0{,}822; \quad э = 0{,}894.$

РАЗДЕЛ 12

1. (1,702; 1,898); (1089;1215).

2. а) (0,474; 0,526); б) (0,47; 0,53).

3. (142,75; 157,25); (107062,5; 117937,5).

4. а) 3,48; 2,0504; 1,428;
б) (3,23; 3,73); в) 0,826; г) 181.

5. а) 4,24; 2,083; 1,443;
б) (3,99; 4,49); 0,899; в) 219.

7. (243,3; 256,7), (34,6; 45,4), 653.

8. а) 16%; 6,5%; 2,55%;
б) (14,95; 16,05).

9. 385.

10. (17,48; 19,31); (4,7; 13,9)

11. (65,6; 79,2)

Приложение А – Таблицы математической статистики

Таблица А1 - Значения функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ и $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$.

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

Продолжение таблицы А1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	499841
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	499928
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	4999999
69	0957	4545	38	0235	4913			7

Таблица А2 - Критические точки распределения t-Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,7	318,31	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица А3 - Критические точки распределения F Фишера – Снедекора
(k_1 – число степеней свободы большей дисперсии,
k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости a=0,05										
	k_1									
k_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,1	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,51	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	2,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,37	2,20	2,01	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,31	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,94	1,75	1,52	1,00

Таблица А4 – Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α							
	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,00016	0,00098	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,554	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4
80	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3
90	61,75	65,61	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1
100	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8

Приложение Б – Производство и реализация зерна озимой пшеницы в сельскохозяйственных организациях Краснодарского края

№ п/п	Площадь посева, га	Валовой сбор, тыс. ц	Урожайность с 1 га, ц	Производственные затраты на продукцию, тыс. руб.	Производственная себестоимость 1 ц зерна, руб.	Прямые затраты труда, тыс. чел-ч	Реализовано зерна, ц	Полная себестоимость реализованной продукции,	Выручка от реализации зерна, тыс. руб.	Цена реализации 1 ц зерна, руб.	Полная себестоимость 1 ц зерна, руб.	Выручка на 1 руб. затрат, руб.	Прямые затраты труда на 1 ц, чел.-ч	Выручка на 1 га посева, тыс. руб.	Производственные затраты на 1 га посева, тыс. руб.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3301	229146	69,4	123 280	538,0	10,5	324474	174464	334117	1030	538	1,92	0,05	101,2	37,3
2	3023	230310	76,2	146 274	635,1	28	205726	131665	216715	1053	640	1,65	0,12	71,7	48,4
3	2730	211115	77,3	144 218	683,1	37	306697	223836	345354	1126	730	1,54	0,18	126,5	52,8
4	2559	167239	65,4	90 026	538,3	20	126963	72269	129261	1018	569	1,79	0,12	50,5	35,2
5	1565	115150	73,6	62 728	544,8	6	65981	50116	65010	985	760	1,30	0,05	41,5	40,1
6	1732	124486	71,9	64 810	520,6	30	124960	67338	139504	1116	539	2,07	0,24	80,5	37,4
7	1717	115583	67,3	56 452	488,4	15	97226	49903	105690	1087	513	2,12	0,13	61,6	32,9
8	988	78877	79,8	50 188	636,3	18	75874	60265	86582	1141	794	1,44	0,23	87,6	50,8
9	2455	167697	68,3	76 170	454,2	37	150113	64178	160170	1067	428	2,50	0,22	65,2	31,0
10	2107	141069	67,0	75 036	531,9	14	103708	55696	110114	1062	537	1,98	0,10	52,3	35,6
11	859	46279	53,9	25 795	557,4	15	53081	27634	54215	1021	521	1,96	0,32	63,1	30,0
12	2950	175148	59,4	128 011	730,9	18	233868	162177	226258	967	693	1,40	0,10	76,7	43,4
13	792	43482	54,9	23 704	545,1	5	36150	25818	36362	1006	714	1,41	0,11	45,9	29,9
14	4552	308199	67,7	137 456	446,0	131	154205	72344	159809	1036	469	2,21	0,43	35,1	30,2
15	400	30264	75,7	21 704	717,2	15	30264	21704	25440	841	717	1,17	0,50	63,6	54,3
16	1204	73398	61,0	44 555	607,0	14	70438	45534	62263	884	646	1,37	0,19	51,7	37,0
17	1173	70368	60,0	65 665	933,2	49	70186	42328	69892	996	603	1,65	0,70	59,6	56,0
18	1177	78587	66,8	56 603	720,3	10	81280	59682	89505	1101	734	1,50	0,13	76,0	48,1
19	1400	108850	77,8	47 796	439,1	13	110487	70464	113661	1029	638	1,61	0,12	81,2	34,1
20	2465	191189	77,6	86 381	451,8	73	144979	88153	139360	961	608	1,58	0,38	56,5	35,0
21	2901	196282	67,7	153 136	780,2	43	220666	163385	216710	982	740	1,33	0,22	74,7	52,8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22	1054	74316	70,5	41 451	557,8	8	74320	46143	92491	1245	621	2,00	0,11	87,8	39,3
23	742	44590	60,1	40 216	901,9	12	30892	27773	30684	993	899	1,10	0,27	41,4	54,2
24	512	38750	75,7	34 820	898,6	11	27371	24438	28838	1054	893	1,18	0,28	56,3	68,0
25	1042	76415	73,3	67 712	886,1	12	124781	71174	135081	1083	570	1,90	0,16	129,6	65,0
26	866	70944	81,9	65 070	917,2	15	71001	62066	70906	999	874	1,14	0,21	81,9	75,1
27	1432	108236	75,6	79 971	738,9	24	144012	102010	151396	1051	708	1,48	0,22	105,7	55,8
28	2442	183994	75,3	133 065	723,2	36	167363	104204	180262	1077	623	1,73	0,20	73,8	54,5
29	500	35050	70,1	33 344	951,3	8	60769	47416	65314	1075	780	1,38	0,23	130,6	66,7
30	1162	85976	74,0	42 283	491,8	10	97546	50178	107147	1098	514	2,14	0,12	92,2	36,4
31	3519	234575	66,7	88 337	376,6	15	224585	87103	260457	1160	388	2,99	0,06	74,0	25,1
32	1663	124767	75,0	96 172	770,8	20	130942	100745	141372	1080	769	1,40	0,16	85,0	57,8
33	1273	104551	82,1	84 145	804,8	15	104551	72337	103612	991	692	1,43	0,14	81,4	66,1
34	850	70198	82,6	45 715	651,2	31	60708	48245	72561	1195	795	1,50	0,44	85,4	53,8
35	588	43190	73,5	28 980	671,0	10	44441	29766	43949	989	670	1,48	0,23	74,7	49,3
36	2957	194016	65,6	107 432	553,7	27	189143	102701	211138	1116	543	2,06	0,14	71,4	36,3
37	2305	177675	77,1	96 320	542,1	38	221298	121033	214249	968	547	1,77	0,21	92,9	41,8
38	1151	85227	74,0	47 705	559,7	4	83940	47466	76121	907	565	1,60	0,05	66,1	41,4
39	3736	153066	41,0	91 847	600,0	17	157116	100914	160004	1018	642	1,59	0,11	42,8	24,6
40	3000	230565	76,9	125 668	545,0	45,4	243016	141593	226980	934	583	1,60	0,20	75,7	41,9
41	1509	105843	70,1	57 030	538,8	26	165220	119430	158795	961	723	1,33	0,25	105,2	37,8
42	2420	146751	60,6	97 730	666,0	19	174968	115323	198697	1136	659	1,72	0,13	82,1	40,4
43	536	35032	65,4	25 535	728,9	8	33002	26513	31781	963	803	1,20	0,23	59,3	47,6
44	1050	75489	71,9	56 981	754,8	26	65791	53824	57968	881	818	1,08	0,34	55,2	54,3
45	2350	145884	62,1	80 246	550,1	25	138951	83485	145310	1046	601	1,74	0,17	61,8	34,1
46	1800	142300	79,1	67 566	474,8	20	92914	54826	77992	839	590	1,42	0,14	43,3	37,5
47	1850	147288	79,6	87 810	596,2	19	146137	100909	125611	860	691	1,24	0,13	67,9	47,5
48	4600	370218	80,5	293 495	792,8	54	433359	302940	404335	933	699	1,33	0,15	87,9	63,8
49	1265	79291	62,7	36 504	460,4	9	76697	35703	76014	991	466	2,13	0,11	60,1	28,9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

50	4276	373693	87,4	205 828	550,8	35	475530	310311	540508	1137	653	1,74	0,09	126,4	48,1
51	4741	343596	72,5	121 197	352,7	31	511389	249533	492877	964	488	1,98	0,09	104,0	25,6
52	2500	181633	72,7	105 643	581,6	37	212364	142165	194871	918	669	1,37	0,20	77,9	42,3
53	2315	160713	69,4	71 845	447,0	59	148755	73827	148507	998	496	2,01	0,37	64,1	31,0
54	660	49051	74,3	37 380	762,1	14,6	50309	38053	60853	1210	756	1,60	0,30	92,2	56,6
55	1450	108134	74,6	94 637	875,2	20	112251	94939	129712	1156	846	1,37	0,18	89,5	65,3
56	6723	453471	67,5	297 938	657,0	58	459541	297174	472718	1029	647	1,59	0,13	70,3	44,3
57	1306	85612	65,6	40 230	469,9	15	146664	64136	141756	967	437	2,21	0,18	108,5	30,8
58	970	45233	46,6	23 086	510,4	13	36895	18850	39116	1060	511	2,08	0,29	40,3	23,8
59	566	36766	65,0	34 940	950,3	12,8	39611	34940	45812	1157	882	1,31	0,35	81,0	61,8
60	998	58180	58,3	41 259	709,2	8	54043	41259	56864	1052	763	1,38	0,14	57,0	41,3
61	2045	135086	66,1	112 183	830,5	44	210299	157870	195955	932	751	1,24	0,33	95,8	54,9
62	5674	439075	77,4	372 087	847,4	42	671259	536412	690943	1029	799	1,29	0,10	121,8	65,6
63	1866	126434	67,8	69 826	552,3	22	122655	89770	127128	1036	732	1,42	0,17	68,1	37,4
64	1317	88402	67,1	67 328	761,6	22	108998	78691	114910	1054	722	1,46	0,25	87,3	51,1
65	1233	90431	73,3	62 314	689,1	7	63863	66925	84917	1330	1048	1,27	0,08	68,9	50,5
66	2417	166186	68,8	93 703	563,8	5,9	151630	85663	167229	1103	565	1,95	0,04	69,2	38,8
67	420	28560	68,0	20 216	707,8	8	31589	18216	31430	995	577	1,73	0,28	74,8	48,1
68	4210	316831	75,3	186 647	589,1	135	476914	240525	518381	1087	504	2,16	0,43	123,1	44,3
69	527	38645	73,3	25 292	654,5	6	50375	38327	49661	986	761	1,30	0,16	94,2	48,0
70	3065	221207	72,2	126 372	571,3	26	200242	130010	229449	1146	649	1,76	0,12	74,9	41,2
71	2024	153329	75,8	82 884	540,6	8,3	149587	81966	133811	895	548	1,63	0,05	66,1	41,0
72	2791	188973	67,7	173 575	918,5	49	212994	190493	220056	1033	894	1,16	0,26	78,8	62,2
73	1609	110348	68,6	65 233	591,2	30	80455	47977	76928	956	596	1,60	0,27	47,8	40,5
74	941	53133	56,5	40 228	757,1	23	51109	42061	44925	879	823	1,07	0,43	47,7	42,8
75	746	57661	77,3	40 361	700,0	12	52450	36713	51266	977	700	1,40	0,21	68,7	54,1
76	1526	89799	58,8	60 140	669,7	16	92094	70322	83748	909	764	1,19	0,18	54,9	39,4
77	590	39530	67,0	33 222	840,4	7	39530	34245	38567	976	866	1,13	0,18	65,4	56,3

Приложение В – Статистические показатели по сельскохозяйственным организациям Краснодарского края

№ п/п	Среднегодовая численность работников, чел.	Среднегодовая стоимость основных средств, млн. руб.	Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.	Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.	Затраты на реализованную продукцию, млн. руб.	Площадь сельскохозяйственных угодий. Га	Расходы по обычным видам деятельности, млн. руб.	Валовая продукция, млн. руб.	Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.	Валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.	Валовая продукция на 100 руб. затрат, руб.	Валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.	Выручка от продажи продукции, млн. руб.	Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.	Выручка на среднегодового работника, тыс. руб.	Выручка на 100 руб. затрат, руб.	Численность работников на 100 га сельскохозяйственных уго-
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	371	693,0	60,4	1868	566,0	11466	650,2	985,9	86	142,3	151,6	2657	886,1	77,3	2388	156,6	3,24
2	421	641,8	77,9	1524	726,7	8237	685,7	882,8	107,2	137,6	128,7	2097	939,9	114,1	2233	129,3	5,11
3	298	355,0	37,2	1191	671,5	9533	700,4	789,2	82,8	222,3	112,7	2648	732,1	76,8	2457	109	3,13
4	165	270,9	41,9	1642	423,6	6464	376,4	510,2	78,9	188,3	135,5	3092	583,0	90,2	3533	137,6	2,55
5	200	245,9	62,3	1229	330,2	3944	414,0	475,2	120,5	193,3	114,8	2376	390,7	99,1	1954	118,3	5,07
6	578	1913,0	91,9	3310	1228,9	20820	1104,8	1817,1	87,3	95	164,5	3144	1900,4	91,3	3288	154,6	2,78
7	291	382,1	50,9	1313	501,9	7499	738,2	845,6	112,8	221,3	114,6	2906	634,3	84,6	2180	126,4	3,88
8	116	362,3	87	3123	230,0	4163	229,8	334,6	80,4	92,4	145,6	2885	328,6	78,9	2833	142,8	2,79
9	38	181,2	95	4768	128,5	1907	118,0	161,0	84,4	88,8	136,4	4236	169,0	88,6	4448	131,5	1,99
10	155	385,0	93,7	2484	268,6	4109	205,8	321,2	78,2	83,4	156,1	2073	377,0	91,8	2433	140,4	3,77
11	102	150,0	39	1470	206,5	3843	168,7	267,8	69,7	178,6	158,7	2625	292,6	76,1	2869	141,7	2,65
12	168	338,4	52,9	2014	266,0	6399	269,7	486,7	76,1	143,8	180,5	2897	454,9	71,1	2708	171	2,63
13	178	222,9	39	1252	281,1	5713	361,6	477,6	83,6	214,3	132,1	2683	387,7	67,9	2178	138	3,12
14	367	398,7	51,4	1086	420,2	7759	514,8	733,8	94,6	184,1	142,5	2000	625,5	80,6	1704	148,9	4,73
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
15	93	225,7	35,9	2427	335,0	6278	337,4	392,1	62,5	173,7	116,2	4216	388,0	61,8	4172	115,8	1,48
16	25	146,8	100,7	5872	44,1	1458	43,1	55,7	38,2	37,9	129,3	2227	58,3	40	2332	132,3	1,71
17	619	638,1	59,3	1031	892,9	10762	973,9	1142,9	106,2	179,1	117,4	1846	940,5	87,4	1519	105,3	5,75

18	34	50,3	42,7	1480	46,5	1177	42,0	48,7	41,3	96,7	115,7	1431	53,0	45,1	1560	114	2,89
19	47	101,0	29,8	2149	115,4	3388	94,9	100,4	29,6	99,5	105,9	2137	120,9	35,7	2571	104,7	1,39
20	172	271,4	71,4	1578	330,4	3801	203,8	294,2	77,4	108,4	144,4	1710	373,8	98,3	2173	113,1	4,53
21	96	146,5	62,5	1526	151,5	2343	94,3	131,4	56,1	89,7	139,2	1368	178,9	76,4	1864	118,1	4,1
22	120	284,8	54,3	2373	218,2	5247	255,8	311,3	59,3	109,3	121,7	2594	286,9	54,7	2391	131,5	2,29
23	126	148,5	27,7	1179	341,2	5353	288,0	372,2	69,5	250,6	129,2	2954	425,9	79,6	3380	124,8	2,35
24	81	140,9	59,8	1740	229,8	2357	167,5	236,4	100,3	167,8	141,1	2919	294,6	125	3637	128,2	3,44
25	29	40,8	28,9	1406	78,1	1409	66,0	68,4	48,5	167,7	103,5	2358	92,1	65,4	3177	118	2,06
26	20	65,9	65,4	3296	48,5	1008	58,5	67,5	67	102,4	115,4	3375	58,5	58	2925	120,7	1,98
27	22	113,6	55,7	5165	111,0	2040	64,2	128,1	62,8	112,7	199,4	5821	187,3	91,8	8513	168,8	1,08
28	35	111,7	62,8	3191	125,0	1778	123,2	150,6	84,7	134,8	122,2	4302	151,8	85,4	4338	121,4	1,97
29	66	94,7	39,1	1435	183,4	2423	156,9	224,0	92,5	236,5	142,8	3395	231,1	95,4	3501	126	2,72
30	89	373,1	57,2	4192	428,6	6520	300,2	463,8	71,1	124,3	154,5	5212	596,3	91,5	6700	139,1	1,37
31	22	103,4	81,8	4701	96,7	1264	57,6	83,1	65,7	80,3	144,2	3777	131,9	104,3	5994	136,4	1,74
32	222	435,1	53,3	1960	463,2	8162	379,8	588,1	72	135,2	154,8	2649	658,7	80,7	2967	142,2	2,72
33	125	99,1	22,2	793	225,2	4472	273,7	310,9	69,5	313,6	113,6	2487	252,9	56,5	2023	112,3	2,8
34	208	529,8	48,9	2547	597,7	10831	356,9	398,3	36,8	75,2	111,6	1915	678,9	62,7	3264	113,6	1,92
35	47	191,4	86,3	4072	147,6	2217	108,9	133,8	60,4	69,9	122,9	2847	169,1	76,3	3599	114,6	2,12
36	28	81,7	27,2	2919	63,4	3008	69,4	90,9	30,2	111,2	130,9	3245	84,8	28,2	3030	133,8	0,93
37	40	117,2	37,4	2931	113,3	3132	163,1	175,9	56,2	150,1	107,9	4398	126,1	40,3	3153	111,3	1,28
38	32	123,2	51,6	3851	57,3	2387	75,6	116,8	48,9	94,8	154,6	3651	92,5	38,7	2890	161,3	1,34
39	86	171,3	29	1992	278,3	5906	219,1	334,5	56,6	195,2	152,7	3889	377,5	63,9	4389	135,6	1,46
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
40	168	259,1	32,2	1542	299,8	8053	189,7	331,0	41,1	127,8	174,5	1970	419,0	52	2494	139,7	2,09
41	62	123,6	19,5	1993	166,5	6345	163,8	233,0	36,7	188,6	142,3	3759	233,8	36,8	3771	140,4	0,98
42	72	468,9	60,7	6513	211,2	7730	312,6	369,7	47,8	78,8	118,3	5134	256,8	33,2	3567	121,6	0,93
43	179	384,2	48,4	2146	387,1	7946	321,2	425,2	53,5	110,7	132,4	2376	487,2	61,3	2722	125,9	2,25
44	111	142,0	39,8	1280	216,6	3571	184,0	248,0	69,5	174,6	134,8	2234	276,5	77,4	2491	127,7	3,11

45	118	254,0	40	2153	202,0	6345	193,7	335,0	52,8	131,9	172,9	2839	321,9	50,7	2728	159,4	1,86
46	15	20,0	17,1	1334	42,6	1170	43,6	53,4	45,6	266,8	122,5	3560	48,8	41,7	3254	114,5	1,28
47	228	181,3	53,2	795	310,0	3408	257,6	381,7	112	210,6	148,1	1674	340,5	99,9	1493	109,8	6,69
48	364	724,6	107,6	1991	466,3	6733	531,2	606,0	90	83,6	114,1	1665	531,3	78,9	1460	113,9	5,41
49	269	148,9	29,8	554	328,8	4994	365,4	424,8	85,1	285,2	116,3	1579	371,9	74,5	1382	113,1	5,39
50	152	163,0	33	1072	231,7	4933	259,8	321,5	65,2	197,3	123,7	2115	291,8	59,1	1919	125,9	3,08
51	577	927,5	74,9	1607	939,6	12383	1279,6	1513,3	122,2	163,2	118,3	2623	1158,8	93,6	2008	123,3	4,66
52	388	920,6	77,6	2373	1023,5	11864	675,8	1128,2	95,1	122,5	166,9	2908	1445,1	121,8	3724	141,2	3,27
53	511	1201,3	101,6	2351	815,6	11828	910,8	1483,0	125,4	123,5	162,8	2902	1331,5	112,6	2606	163,3	4,32
54	648	298,1	28,7	460	657,7	10372	883,5	934,7	90,1	313,5	105,8	1442	709,0	68,4	1094	107,8	6,25
55	256	163,3	22,4	638	514,2	7301	483,1	601,9	82,4	368,5	124,6	2351	612,0	83,8	2391	119	3,51
56	18	87,0	68,8	4831	49,5	1264	37,3	77,9	61,6	89,6	208,6	4327	84,6	66,9	4697	170,8	1,42
57	98	93,6	28,2	955	162,1	3313	115,8	148,2	44,7	158,4	128	1513	193,5	58,4	1974	119,4	2,96
58	506	830,3	60,7	1641	899,9	13681	968,5	1119,8	81,8	134,9	115,6	2213	1051,2	76,8	2077	116,8	3,7
59	38	66,9	24,7	1762	91,2	2706	77,9	159,2	58,8	237,8	204,5	4190	163,3	60,4	4298	179,1	1,4
60	49	92,8	39,9	1893	74,1	2323	49,5	61,9	26,7	66,8	125,2	1264	86,6	37,3	1767	116,8	2,11
61	26	38,6	33,3	1485	71,0	1160	61,9	75,5	65,1	195,5	121,9	2902	84,6	72,9	3253	119	2,24
62	18	33,1	20	1839	60,7	1653	29,7	45,6	27,6	137,7	153,2	2533	76,6	46,3	4254	126,2	1,09
63	85	108,8	27	1280	255,1	4028	210,3	271,0	67,3	249,2	128,9	3188	311,9	77,4	3669	122,2	2,11
64	535	1136,8	87,4	2125	1233,5	13001	765,1	1012,1	77,8	89	132,3	1892	1461,0	112,4	2731	118,4	4,12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
65	56	206,7	50,1	3690	168,3	4124	267,4	336,7	81,6	162,9	125,9	6012	237,1	57,5	4234	140,9	1,36
66	46	29,5	13,2	642	128,8	2244	104,4	162,9	72,6	551,5	156,1	3541	181,8	81	3951	141,2	2,05
67	192	172,6	46,4	899	255,3	3723	282,0	301,1	80,9	174,4	106,7	1568	278,0	74,7	1448	108,9	5,16
68	154	495,8	39,9	3220	1170,1	12435	451,4	630,0	50,7	127,1	139,6	4091	1301,8	104,7	8453	111,3	1,24
69	223	246,6	42,3	1106	294,2	5826	404,8	493,8	84,8	200,2	122	2214	375,3	64,4	1683	127,6	3,83
70	25	129,3	88,3	5170	72,9	1464	51,9	53,1	36,2	41,1	102,2	2123	73,4	50,1	2934	100,7	1,71
71	554	728,1	68,9	1314	835,1	10560	891,8	1308,2	123,9	179,7	146,7	2361	1212,4	114,8	2188	145,2	5,25

72	638	1319,8	75,1	2069	1132,5	17583	662,3	803,9	45,7	60,9	121,4	1260	1274,1	72,5	1997	112,5	3,63
73	21	30,5	29,8	1451	57,1	1023	44,7	65,3	63,8	214,2	146,1	3108	76,7	75	3654	134,5	2,05
74	130	82,7	13,3	636	297,7	6239	295,3	528,4	84,7	638,7	178,9	4064	505,0	80,9	3884	169,6	2,08
75	170	84,1	20,7	495	144,1	4072	186,2	236,4	58,1	281,1	127	1391	192,4	47,3	1132	133,5	4,17
76	200	110,5	17,1	553	357,2	6453	458,4	534,0	82,8	483,2	116,5	2670	406,2	62,9	2031	113,7	3,1
77	316	246,9	58,2	781	315,0	4239	397,5	473,1	111,6	191,6	119	1497	384,4	90,7	1217	122	7,45

Рекомендуемая литература

1. Бондаренко П. С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / П. С. Бондаренко, Г. В. Горелова, И. А. Кацко; под ред. И. А. Кацко, А. И. Трубилина. – М.: КНОРУС, 2019. – 390 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. - М.: Юрайт, 2016. – 479 с.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2018. – 406 с.
4. Горелова Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel / Г. В. Горелова, И. А. Кацко.- Ростов н/Д.: Феникс, 2006. – 475 с.
5. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: КНОРУС, 2013.– 376 с.
6. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для вузов /Н. Ш. Кремер. – 5-е изд. перераб. и доп. ─ М.: Юрайт, 2019. – 538 с.
7. Калинина В. Н. Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин.– М.: Дрофа, 2002.– 336 с.
8. Ниворожкина Л. И. Теория вероятностей и математическая статистика / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. – М.: Эксмо, 2008. – 432 с.

У ч е б н о е   и з д а н и е

Кацко Игорь Александрович
Ворокова Нодира Хасановна
Жминько Альбина Евгеньевна
Сенникова Алина Евгеньевна

Теория вероятности и математическая статистика

Практикум

для контактной и самостоятельной работы
обучающихся по направлению подготовки «Экономика»

В авторской редакции

Подписано в печать 05.05.2021. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. – 5,93, уч. изд. л.– 4,46 Тираж 100 экз. Заказ №17