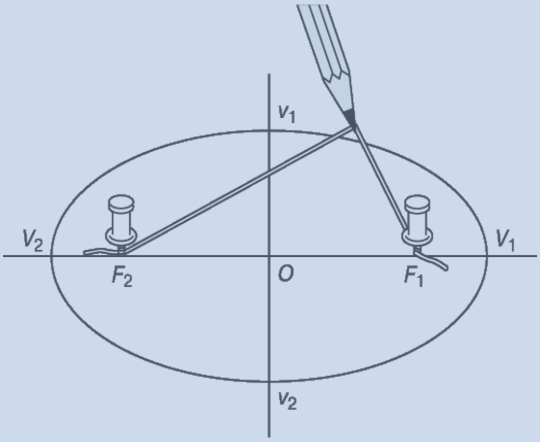
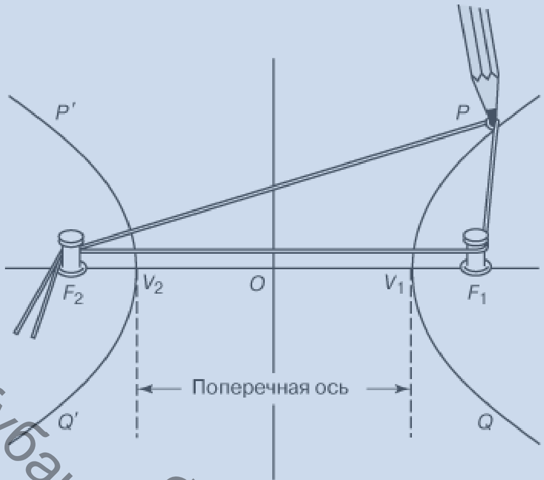
МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.М. Смоленцев

Линейная алгебра и аналитическая геометрия:





типовые расчеты и методические указания

Краснодар 2010

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.М. СМОЛЕНЦЕВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ:

типовые расчеты

и методические указания

Краснодар 2010

УДК 512.64 + 514.12 (075.8)
ББК 22.1
С51

Рецензенты:

В.Г. Григулецкий, доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики КубГАУ

Смоленцев В.М.

С51 Линейная алгебра и аналитическая геометрия: типовые расчеты и методические указания/ В.М. Смоленцев. — Краснодар: КубГАУ, 2010. — 61 с.

Настоящее пособие содержит контрольные задания по основным темам курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», составленные по тридцативариантной системе, а также указания и решения примеров, представленных в типовых расчетах.

Пособие предназначено для студентов специальности 230201 «Информационные системы и технологии» высших учебных заведений.

Содержание

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Данный типовой расчет предназначен для студентов специальности 230201 «Информационные системы и технологии», изучающих курс алгебры и геометрии дисциплины «Высшая математика».

К выполнению каждого расчета следует приступать только после прослушивания соответствующей лекции или самостоятельного изучения необходимого материала по рекомендуемым источникам (стр. 61). Следует внимательно разобрать решения тех задач, которые приводятся в данном пособии к каждой теме. При этом следует руководствоваться следующими указаниями:

— каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студента, выполнившего типовой расчет, шифр группы и наименование дисциплины;

— решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Все вычисления, включая вспомогательные, необходимо делать **полностью**;

— типовой расчет должен выполняться **самостоятельно**. Если будет установлено, что та или иная часть расчета выполнена несамостоятельно, то она не будет зачтена, даже если все задачи работы решены верно;

— студент выполняет тот вариант типового расчета, который определен преподавателем.

Тема 1. *Элементы линейной алгебры*

Задание 1. Найти значение матричного многочлена:
(E – *единичная матрица*)

1. $D = -2A^2 - 5A^{\mathrm{T}} + 7E$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. $D = 3A^{\mathrm{T}} + 5A^2 - 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,.

3. $D = 2E - 8A^{\mathrm{T}} + 6A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $D = -6A^{\mathrm{T}} + 8E - 3A^2$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $D = 7E + (3A)^{\mathrm{T}} - 4A^2$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $D = -9A^2 - 6E + (2A)^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $D = (2A)^2 + 3E + 2A^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $D = -4E + (3A)^2 + (7A)^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $D = (3A)^2 - 7E + (4A)^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

10. $D = -3E + 7A^2 - 4A^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $D = 3A^{\mathrm{T}} + 5A^2 - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $D = -6A^2 + (3E)^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $D = (5A)^2 - (7E)^{\mathrm{T}} - 3A^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $D = (2A)^{\mathrm{T}} - 2A^2 - 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

15. $D = 7A^2 + (7E)^{\mathrm{T}} - 7A^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

16. $D=(3A)^2-4E+(3A)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $D=-A^2+2A^{\mathrm{T}}-4E$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

18. $D=-8A^{\mathrm{T}}-(4A)^2+(7E)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $D=3A^2-4E+(5A)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

20. $D=(3E)^{\mathrm{T}}-2A^2+4A^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $D=-(2A)^{\mathrm{T}}+(3A)^2-6E$, если $A=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

22. $D=(3A)^2-2E+(4A)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $D=-6E-(3A)^2+3A^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $D=(3A)^{\mathrm{T}}+(4A)^2-5E$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

25. $D=-4A^2-6E+(3A)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -2\\ -2 & 6 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

26. $D=-2A^2+(4A)^{\mathrm{T}}-(3E)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

27. $D=(3E)^{\mathrm{T}}-A^2+3A^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}0 & -5 & 2\\ -3 & -4 & 5\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

28. $D=-5A^2-6E+(7A)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -3\\ -3 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

29. $D=(9E)^{\mathrm{T}}-(3A)^2-8A^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}$.

30. $D=-8A^2-(7A)^{\mathrm{T}}-6E$, если $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 6\end{pmatrix}$.

Решение типового примера.

Пусть требуется найти значение матричного многочлена

$D = 3A^{\mathrm{T}} - 2A^2 + 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица.

Единичная матрица в данном случае имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Подставим данные матрицы в многочлен и последовательно произведем необходимые действия:

$$D = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}^2 + 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -3 & 0 & -6 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1+2+12 & -1+0-8 & 4-1+12 \\ -2+0+3 & 2+0-2 & -8+0+3 \\ 3+4+9 & -3+0-6 & 12-2+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -6 & 9 \\ -3 & 4 & -6 \\ 12 & 3 & 13 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 15 & -9 & 15 \\ 1 & 0 & -5 \\ 16 & -9 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 9 \\ -3 & 4 & -6 \\ 12 & 3 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & -18 & 30 \\ 2 & 0 & -10 \\ 32 & -18 & 38 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -23 & 12 & -21 \\ -5 & 4 & 4 \\ -20 & 21 & -25 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $D = \begin{pmatrix} -23 & 12 & -21 \\ -5 & 4 & 4 \\ -20 & 21 & -25 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определитель четвертого порядка:

а) разложением по элементам ряда;

б) сведением к треугольному виду.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -9 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -5 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -7 & -1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -7 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} -7 & 4 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -5 & -2 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & -7 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -6 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 29. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение типового примера.

Пусть требуется вычислить определитель вышеупомянутыми способами: разложением по элементам ряда и сведением к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Первый способ. Разложим определитель согласно следствию теоремы Лапласа: ***определитель квадратной матрицы равен сумме***

произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{is},$$

где a_{is} – *элемент определителя, стоящий в i-ой строке в столбце s;*

A_{is} – *алгебраическое дополнение элемента* a_{is}.

Для этого выберем строку (столбец) по которой будет проводиться разложение. Чтобы облегчить процесс вычисления, выбираем строку (столбец) содержащую наибольшее количество нулей (если нулей нет, то выбирается произвольная строка/столбец). Так, например, разложение по первому столбцу примет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} + (-2) \cdot A_{41} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (56 - 10 + 6 + 56 + 4 - 0) + (12 + 6 + 16 -$$

$$-4 + 16 + 18 + 2 \cdot (0 - 4 + 14 + 1 - 0 + 42) = 122 + 64 + 106 = 292.$$

Ответ. 292.

Второй способ. Данный способ вычисления определителей основан на следующем свойстве: ***определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{n-1n-1}\cdot a_{nn}$$

Таким образом, необходимо привести определитель к треугольному виду. Для этого воспользуемся еще одним свойством, а именно: ***определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторое число.***

В первом столбце во второй позиции имеется один нуль. Получим, не изменяя величины определителя, еще два нуля на третьей и четвертой позиции (обведены кружком) помощью элемента, стоящего на первой позиции a_{11} (обведен квадратом).

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Для этого умножим все элементы первой строки на -1 и прибавляем к соответствующим элементам третьей строки. Так получаем нуль на третьей позиции в первом столбце.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \leftarrow + \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 9 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Далее, умножая все элементы первой строки на 2 и прибавляя к соответствующим элементам четвертой строки, получим нуль на четвертой позиции первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 9 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \\ \\ \leftarrow \end{matrix} + = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 9 & -1 \\ 0 & 10 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Далее, поступая аналогичным образом, получим нули во втором столбце в третьей и четвертой позициях, с помощью элемента a_{22}:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 9 & -1 \\ 0 & 10 & -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 2 \quad \times(-5) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \quad + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 16 \end{vmatrix}$$

Осталось получить последний нуль на месте элемента a_{43}, для этого умножим элементы третьей строки на $\frac{6}{11}$ и прибавим к соответствующим элементам четвертой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times \frac{6}{11} \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{146}{11} \end{vmatrix}$$

Полученный определитель имеет треугольный вид, значит, он равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.

$$\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 11 \cdot \frac{146}{11} = 2 \cdot 146 = 292.$$

Ответ. 292.

Задание 3. Решить матричное уравнение

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}.$

28. $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}.$

29. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}.$

30. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}.$

Решение типового примера.

Пусть требуется решить следующее матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перепишем данное уравнение в виде:

$$A \cdot X \cdot B = C \qquad (3.1)$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Умножим обе части равенства (3.1) слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot X\cdot B=A^{-1}\cdot C;\qquad E\cdot X\cdot B=A^{-1}\cdot C;\qquad X\cdot B=A^{-1}\cdot C.$$

Аналогично, умножим обе части последнего равенства справа на матрицу B^{-1}, обратную матрице B:

$$X\cdot\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{E}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1};\qquad X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

Таким образом, чтобы решить исходное матричное уравнение, необходимо умножить его, сначала на обратную матрицу A^{-1} с левой и на матрицу B^{-1} с правой стороны.

Найдем нужные матрицы A^{-1} и B^{-1}.

Для матриц второго порядка можно использовать формулу:

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{a\cdot d-b\cdot c}\cdot\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Значит:

$$A^{-1}=\frac{1}{2\cdot 3-1\cdot(-1)}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix};$$

$$B=\frac{1}{3\cdot(-2)-(-1)\cdot 1}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Перемножив полученные матрицы с матрицей C определенным выше образом, получим матрицу X, являющуюся решением данного уравнения:

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=-\frac{1}{35}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{35}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 14\\ -3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{35}\cdot\begin{pmatrix} -24 & 47\\ 6 & -3\end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = -\frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 47 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Исследовать систему на совместность и решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным способом;

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -5, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

Решение типового примера.

Пусть требуется исследовать на совместность и решить следующую систему уравнений вышеуказанными способами:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Исследование системы на совместность проведем в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли: ***система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.***

Составим расширенную матрицу системы и проведем над ней элементарные преобразования.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-2)\ \times(-4) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, $r\left(\overline{A}\right)=3$ (матрица имеет ступенчатый вид, а количество строк в матрице такого вида определяет ее ранг).

Проводя аналогичные преобразования над матрицей системы можно также привести ее к ступенчатому виду, и убедиться что ранг матрицы системы также равен трем, $r\left(A\right)=3$.

Значит, условие теоремы Кронекера-Капелли выполняется, таким образом, исходная система имеет единственное решение.

Теперь решим ее указанными способами.

I способ: по формулам Крамера.

Эти формулы имеют следующий вид: $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Составим и вычислим определители Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta=\left|A\right|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-1&2\\4&1&4\end{vmatrix}=6. \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}-1&1&2\\-4&-1&2\\-2&1&4\end{vmatrix}=6;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-4&2\\4&-2&4\end{vmatrix}=12; \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&-4\\4&1&-2\end{vmatrix}=-12.$$

(определитель Δ составлен из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений, а определители Δ_i — из определителя Δ, замены соответствующего i-го столбца на столбец свободных членов).

Таким образом, решение:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{6}=1;\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{12}{6}=2;\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-12}{6}=-2..$$

Ответ. $\{1;\ 2;\ -2\}$.

II способ: матричный способ.

Перепишем систему в матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Полученное матричное уравнение решим, умножив обе части равенства на обратную матрицу A^{-1} с левой стороны:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем эту обратную матрицу, используя следующий ***алгоритм нахождения обратной матрицы***:

1. Вычислить $|A|$ — определитель матрицы A.
   - если $|A| = 0$, матрица вырожденная, то обратной не существует;
   - если $|A| \neq 0$, то переходим к следующему пункту.
2. Транспонировать матрицу A.
3. Найти присоединенную матрицу A^*.
4. Составить обратную матрицу, согласно формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^*$.

Проводим последовательно нужные вычисления.

1. $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$ существует обратная матрица.

2. $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

(транспонированная матрица, получается из исходной заменой строк матрицы на столбцы).

3. $A^* - ?$

Присоединенной матрицей A^*, называется матрица, составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} транспонированной матрицы A. Значит, необходимо вычислить алгебраические дополнения каждого элемента транспонированной матрицы.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Отсюда, $A^* = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Значит:

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2.$ ***Ответ.*** $\{1;\ 2; -2\}$.

III способ: метод Гаусса.

Перепишем исходную систему в соответствии с расширенной матрицей, приведенной к ступенчатому виду:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\2&-1&2&-4\\4&1&4&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\0&-3&-2&-2\\0&-3&-4&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\0&-3&-2&-2\\0&0&-2&4\end{array}\right).$$

(*элементарные преобразования аналогичны проведенным ранее, см. стр. 23*)

Исходная система примет вид:

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1,\\-3x_2-2x_3=-2,\\-2x_3=4.\end{cases}$$

Последнее уравнение дает неизвестное x_3, подставляя его во второе уравнение, определим неизвестное x_2, а затем из первого уравнения найдем неизвестное x_1:

$$\begin{cases}x_1+x_2-4=-1,\\-3x_2+4=-2,\\x_3=-2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2=3,\\x_2=2,\\x_3=-2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2,\\x_3=-2.\end{cases}$$

Ответ. $\{1;\ \ 2;-2\}$.

Задание 5. Исследовать на совместность и решить систему:

1. $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-4x_4=1,\\4x_1+5x_2-2x_3-x_4=3,\\3x_1+4x_2+x_3+3x_4=2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+2x_4=3,\\x_1-3x_2-2x_3+4x_4=3,\\2x_1+3x_2+2x_3+6x_4=5.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-2x_4=5,\\3x_1-x_2-3x_3+x_4=10,\\2x_1-3x_2-7x_3+3x_4=5.\end{cases}$

4. $\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3,\\3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6,\\6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8.\end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3+5x_4=3, \\ 5x_1+2x_2-5x_3-3x_4=-1, \\ 7x_1-5x_2+3x_3+x_4=4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=5, \\ x_1+x_2-3x_3-2x_4=-7, \\ 2x_1-2x_2+4x_3-3x_4=-9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=5, \\ 4x_1+3x_2-2x_3-x_4=2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-3x_4=-5, \\ 4x_1-x_2-4x_3+x_4=-1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-5x_4=3, \\ 3x_1-x_2-x_3-4x_4=3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=5, \\ 3x_1-4x_2+3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+x_2-2x_3+4x_4=4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=4, \\ 3x_1+2x_2+4x_3-x_4=5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3-3x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+2x_3+2x_4=5, \\ 5x_1-8x_2+17x_3-19x_4=5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-x_2+7x_3-2x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+8x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+2x_2+19x_3+x_4=8. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=7, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=-1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+2x_4=3, \\ x_1-3x_2-2x_3+4x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+6x_4=5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+9x_4=4, \\ x_1-3x_2+x_3+9x_4=3, \\ 3x_1-8x_2+3x_3+24x_4=7. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=0, \\ -2x_1+5x_3-2x_4=-3. \end{cases}$

19. $$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3+4x_4=2,\\ 2x_1-3x_2-4x_3+6x_4=3,\\ 2x_1-5x_2-5x_3+8x_4=6. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} x_1-3x_2-3x_3+9x_4=3,\\ 3x_1-8x_2-9x_3+24x_4=7,\\ 3x_1-10x_2-10x_3+27x_4=12. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} x_1-6x_2+2x_3+36x_4=6,\\ 2x_1-11x_2+5x_3+72x_4=14,\\ x_1-7x_2+2x_3+42x_4=7. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=5,\\ x_1+x_2+2x_3-6x_4=-2,\\ 4x_1+3x_2-2x_3-3x_4=1. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3-5x_4=10,\\ x_1-x_2+5x_3-15x_4=0,\\ 2x_1-x_2+3x_3-6x_4=2. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3-x_4=10,\\ 5x_1-x_2-4x_3-7x_4=8,\\ x_1-2x_2-5x_3+7x_4=-4. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3+15x_4=26,\\ 5x_1+3x_2+2x_3+11x_4=34,\\ 4x_1-x_2+3x_3+15x_4=24. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+4x_4=-2,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+6x_4=-7,\\ 2x_1+5x_2+5x_3+8x_4=-2. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3+3x_4=-5,\\ 5x_1+4x_2-5x_3+9x_4=-19,\\ x_1+4x_2-2x_3+2x_4=-4. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2,\\ x_1+x_2-2x_3+4x_4=-1,\\ 2x_1+3x_2-2x_3+6x_4=-1. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} 3x_1+5x_2-6x_3+10x_4=-3,\\ 2x_1+3x_2-5x_3+8x_4=-2,\\ x_1+2x_2-2x_3+4x_4=-2. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+6x_4=2,\\ x_1-2x_2-x_3+4x_4=2,\\ x_1-x_2-x_3+2x_4=3. \end{cases}$$

Решение типового примера.

Пусть требуется исследовать на совместность и решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3-4x_4=-10, \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3-3x_4=2. \end{cases}$$

Исследование системы на совместность проведем в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли (*см. стр. 21*).

Составим расширенную матрицу системы и проведем над ней элементарные преобразования

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix}\times(-2)\ \ \times(-3) \\ + \qquad\quad + \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 21 \\ 0 & -10 & 11 & 9 & 32 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \times\frac{1}{7} \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & 9 & 32 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \times(-10) \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, $r\left(\overline{A}\right)=3$.

Проводя аналогичные преобразования над матрицей системы можно также привести ее к ступенчатому виду, и убедиться что ранг матрицы системы также равен трем, $r\left(A\right)=3$. Значит, условие теоремы Кронекера-Капелли выполняется, следовательно, исходная система имеет решение — совместная.

Выясним теперь определенная исходная система или неопределенная. Для этого сравним ранг полученных матриц с числом неизвестных переменных.

Поскольку ранг рассмотренных матриц равен 3, а число неизвестных переменных 4, т. е. $r=3<n=4$, то делаем вывод о неопределенности данной системы линейных уравнений.

Так как $r = 3$, значит, три неизвестные исходной системы являются основными, и одна — вспомогательная. Выберем основные неизвестные. Переменные могут быть основными, если определитель, составленный из коэффициентов при них, отличен от нуля.

Проверим, являются ли основными неизвестные x_1, x_2, x_3? Составим по матрице ступенчатого вида, определитель из коэффициентов при выбранных переменных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3$$ — основные неизвестные, а x_4 — вспомогательная переменная.

Далее, по матрице ступенчатого вида составим систему уравнений и разрешим ее относительно основных переменных.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -10, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 - x_4 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4\cdot(x_4 + 2) - 4x_4 = -10, \\ -x_2 + (x_4 + 2) + x_4 = 3, \\ x_3 = x_4 + 2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3\cdot(2x_4 - 1) - 8x_4 = -2, \\ x_2 = 2x_4 - 1, \\ x_3 = x_4 + 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_4 + 1, \\ x_2 = 2x_4 - 1, \\ x_3 = x_4 + 2. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид:

$$\{2x_4 + 1;\ 2x_4 - 1;\ x_4 + 2;\ x_4\}.$$

Ответ. $\{2x_4 + 1;\ 2x_4 - 1;\ x_4 + 2;\ x_4\}$.

Задание 6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

1. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-7x_3=0, \\ 5x_1+x_2-6x_3=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1-5x_2+3x_3=0, \\ 5x_1-4x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3=0, \\ 5x_1+4x_2-6x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-6x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-7x_3=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-x_3=0, \\ 3x_1+6x_2-4x_3=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 5x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1-5x_2+3x_3=0, \\ 5x_1-4x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x_1-6x_2-x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2-5x_3=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+2x_3=0, \\ 7x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 9x_1+x_2+8x_3=0, \\ 2x_1+8x_2-x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+3x_3=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-7x_2+5x_3=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ 5x_1+4x_2-6x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-1x_3=0, \\ x_1-3x_2+5x_3=0, \\ 4x_1+x_2+4x_3=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=0, \\ 4x_1-9x_2+2x_3=0, \\ -x_1+5x_2-3x_3=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1-8x_2+7x_3=0, \\ 3x_1+5x_2-4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+3x_2+7x_3=0, \\ -x_1+4x_3=0, \\ 3x_1+6x_2+10x_3=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$
23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$
24. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$
26. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$
27. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$
29. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$
30. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Решение типового примера.

Пусть требуется исследовать на совместность и решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений однородная, следовательно, заведомо совместная, поскольку имеет нулевое решение $\left(x_1 = x_2 = x_3 = 0\right)$, значит, осталось выяснить определенная она или неопределенная. Для этого вычислим ранг матрицы системы, и сравним с числом неизвестных переменных.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \quad \times(-2) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица имеет две линейно независимые строки, значит $r\left(A\right)=2$. Так как ранг меньше числа неизвестных переменных $\left(r=2<n=3\right)$, то делаем вывод о неопределенности данной однородной системы линейных уравнений.

Поскольку $r=2$, две неизвестные переменные — основные, одна — вспомогательная.

Проверим, являются ли основными неизвестные x_1, x_2?

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow x_1, x_2$ — основные неизвестные, а x_3 — вспомогательная переменная.

По матрице ступенчатого вида составим систему уравнений и разрешим ее относительно основных переменных.

$$\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3=0,\\ x_2+2x_3=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+3\cdot\left(-2x_3\right)+3x_3=0,\\ x_2=-2x_3.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=3x_3,\\ x_2=-2x_3.\end{cases}$$

Таким образом, общее решение исходной однородной системы имеет вид:

$$\left\{\,3x_3;-2x_3;x_3\right\},$$

или

$$\left\{\,3t;-2t;t\,\right\},$$

где t — произвольное действительное число.

Ответ. $\left\{\,3t;-2t;t\,\right\}$.

Тема 2. *Элементы векторного анализа и аналитической геометрии*

Задание 7. Даны координаты точек A, B и C в системе xOy. Найти:

а) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, их разложение по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и их модули;

б) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

в) направляющие косинусы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

г) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

1. $A(8;10), B(-8;-3), C(4;-12)$.
2. $A(11;20), B(-5;7), C(7;-2)$.
3. $A(-2;-4),\ B(10;5),\ C(8;-9)$.
4. $A(2;5), B(14;-4), C(18;18)$.
5. $A(1;2), B(-11;11), C(-9;-3)$.
6. $A(-5;0), B(7;9), C(5;-5)$.
7. $A(-7;2), B(5;11), C(3;-3)$.
8. $A(-6;-2), B(6;7), C(4;-7)$.
9. $A(-8;-4), B(4;5), C(2;-9)$.
10. $A(0;-1), B(12;8), C(10;-6)$.
11. $A(-6;1), B(6;10), C(4;-4)$.
12. . $A(2;3), B(4;5), C(6;7)$
13. $A(-3;0), B(9;9), C(7;-5)$.
14. $A(-3;3), B(9;-6), C(7;8)$.
15. $A(-7;-1), B(-5;-10), C(3;4)$.
16. $A(-4;1), B(8;-8), C(6;6)$.
17. $A(1;2), B(13;-7), C(11;7)$.
18. $A(-2;2), B(10;-7), C(8;7)$.
19. $A(-8;4), B(4;-5), C(2;9)$.
20. $A(0;3), B(12;-6), C(10;8)$.
21. $A(-7;1), B(5;-8), C(3;6)$.
22. $A(-7;5), B(5;-4), C(3;10)$.
23. $A(-5;2), B(7;-7), C(5;7)$.
24. $A(-9;-2), B(3;7), C(1;-7)$.
25. $A(0;3), B(12;-6), C(10;8)$.
26. $A(-2;1), B(10;10), C(8;-4)$.
27. $A(-4;-1), B(8;8), C(6;-6)$.
28. $A(-1;0), B(11;9), C(9;-5)$.
29. $A(-3;-3), B(9;6), C(7;-8)$.
30. $A(3;0), B(-9;9), C(-7;-5)$.

Решение типового примера.

Пусть даны координаты точек $A(4;3)$; $B(16;-6)$; $C(20;16)$.

а) Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, их разложение по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и их модули.

Известно, что произвольный вектор $\vec{a}$, отнесенный к прямоугольной системе координат xOy, может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}.$$

Данное представление вектора $\vec{a}$ называется его ***разложением по ортам координатных осей*** $\vec{i}$, $\vec{j}$.

Если вектор задан начальной $M_1(x_1;y_1)$ и конечной точкой $M_2(x_2;y_2)$, то данное разложение может быть представлено в виде:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j}.$$

В нашем случае имеем:

$$\overrightarrow{AB} = (16-4)\cdot\vec{i} + (-6-3)\cdot\vec{j} = 12\vec{i} - 9\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}(12;-9),$$

$$\overrightarrow{AC} = (20-4)\cdot\vec{i} + (16-3)\cdot\vec{j} = 16\vec{i} + 13\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC}(16;13).$$

Зная координаты вектора $\vec{a}(a_x;a_y)$ можно найти модуль вектора по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

В нашем случае имеем:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{12^2 + (-9)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15\,(\textit{лин. ед.}),$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16^2 + 13^2} = \sqrt{256+169} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}\,(\textit{лин. ед.}).$$

б) Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Воспользуемся формулой

$$\cos\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|},$$

где $\vec{a}\cdot\vec{b}$ — скалярное произведение векторов, которое вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y.$$

В нашем случае имеем:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{12\cdot16+(-9)\cdot13}{15\cdot5\sqrt{17}}=\frac{75}{75\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

то есть $\cos\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\sqrt{17}}{17}\approx0,242\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)\approx76^{\circ}$.

в) Найти направляющие косинусы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Направление произвольного вектора $\vec{a}$ определяется углами α,β образованными им с координатными осями. Косинусы этих углов называются ***направляющими косинусами*** и определяются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\quad\cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}.$$

В нашем случае имеем:

1. $\overrightarrow{AB}(12;-9)$: $\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$; $\cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{-9}{15}=-\frac{3}{5}$.

2. $\overrightarrow{AC}(16;13)$: $\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{16}{5\sqrt{17}}$; $\cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{13}{5\sqrt{17}}$.

г) Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

Воспользуемся формулой

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\ \vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}.$$

В нашем случае имеем:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}}\ \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{12\cdot 16+(-9)\cdot 13}{5\sqrt{17}} = \frac{75}{5\sqrt{17}} = \frac{15}{\sqrt{17}}.$$

Задание 8. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты и координаты направляющих и нормальных векторов соответственно;

в) угол $\angle C$ треугольника ABC;

г) уравнение высоты AL и ее длину;

д) уравнение медианы BK;

е) уравнение прямой, проходящей через точку L, параллельно стороне AB;

ж) координаты точки T, расположенной симметрично точке C относительно высоты AL;

з) сделать рисунок.

1. $A(4;12)$, $B(-12;-1)$, $C(0;-10)$.
2. $A(11;20)$, $B(-5;7)$, $C(7;-2)$.
3. $A(13;10)$, $B(3;5)$, $C(15;-4)$.
4. $A(17;5)$, $B(7;0)$, $C(19;-9)$.
5. $A(3;15)$, $B(-7;10)$, $C(5;1)$.
6. $A(15;8)$, $B(5;3)$, $C(17;-6)$.
7. $A(7;15)$, $B(-3;10)$, $C(9;1)$.
8. $A(15;19)$, $B(-1;6)$, $C(11;-3)$.
9. $A(18;14)$, $B(2;1)$, $C(14;-8)$.
10. $A(15;14)$, $B(-1;1)$, $C(11;-8)$.
11. $A(2;13)$, $B(-14;0)$, $C(-2;-9)$.
12. $A(9;8)$, $B(-7;-5)$, $C(5;-14)$.

13. $A(5;14),\ B(-5;9),\ C(7;0)$.
14. $A(10;8),\ B(0;3),\ C(12;-6)$.
15. $A(3;9),\ B(-7;4),\ C(5;-5)$.
16. $A(14;6),\ B(4;1),\ C(16;-8)$.
17. $A(7;15),\ B(-3;0),\ C(9;1)$.
18. $A(6;17),\ B(-4;12),\ C(8;3)$.
19. $A(0;10),\ B(-10;5),\ C(2;-4)$.
20. $A(13;11),\ B(3;6),\ C(15;-3)$.
21. $A(4;13),\ B(-6;8),\ C(6;-1)$.
22. $A(8;12),\ B(-2;7),\ C(10;-2)$.
23. $A(15;17),\ B(-1;4),\ C(11;-5)$.
24. $A(18;18),\ B(2;5),\ C(14;-4)$.
25. $A(12;23),\ B(-4;10),\ C(8;1)$.
26. $A(17;13),\ B(1;0),\ C(13;-9)$.
27. $A(7;19),\ B(-9;6),\ C(3;-3)$.
28. $A(16;15),\ B(0;2),\ C(12;-7)$.
29. $A(6;22),\ B(-10;9),\ C(2;0)$.
30. $A(8;10),\ B(-8;-3),\ C(4;-12)$.

Решение типового примера.

Пусть даны координаты вершин треугольника:

$$A(4;3);\ B(16;-6);\ C(20;16).$$

а) Найти длины сторон треугольника ABC.

Используем формулу, определяющую расстояние d между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (8.1)$$

Тогда, по формуле (8.1) получим:

$$|AB|=\sqrt{(16-4)^2+(-6-3)^2}=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{225}=15\ (\textit{лин. ед.});$$

$$|BC|=\sqrt{(20-16)^2+(16+6)^2}=\sqrt{4^2+22^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}\ (\textit{лин. ед.});$$

$$|AC|=\sqrt{(20-4)^2+(16-3)^2}=\sqrt{16^2+13^2}=\sqrt{425}=5\sqrt{17}\ (\textit{лин. ед.}).$$

б) Найти уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты и координаты направляющих и нормальных векторов соответственно.

Используем формулу уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (8.2)$$

Подставляя в формулу (8.2) координаты соответствующих вершин треугольника ABC, определим искомые уравнения сторон.

$$(AB): \quad \frac{x-4}{16-4}=\frac{y-3}{-6-3}; \quad \frac{x-4}{12}=\frac{y-3}{-9}; \quad \frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3};$$

или

$$-3\cdot(x-4)=4\cdot(y-3); \quad -3x+12=4y-12; \quad \underline{\underline{3x+4y-24=0}} \quad (AB)$$

Получили общее уравнение прямой *AB*. Разрешим это уравнение относительно переменной y, тогда коэффициент перед переменной x является угловым коэффициентом прямой *AB*:

$$3x+4y-24=0 \;\Rightarrow\; 4y=-3x+24; \quad y=-\frac{3}{4}x+6 \;\Rightarrow\; k_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Если прямая задана своим общим уравнением $Ax+By+C=0$, то нормальный $\left(\vec{n}\right)$ и направляющий $\left(\vec{p}\right)$ вектора этой прямой, имеют следующие координаты:

$$\vec{n}=(A;B) \text{ и } \vec{p}=(-B;A) \qquad (8.3)$$

Значит, для прямой *AB*:

$$\vec{n}_{AB}=(3;4), \quad \vec{p}_{AB}=(-4;3).$$

Аналогично, используя формулы (8.2) и (8.3) определим уравнения сторон BC и AC и координаты их нормальных и направляющих векторов соответственно.

$$(BC):\quad \frac{x-16}{20-16}=\frac{y+6}{16+6};\quad \frac{x-16}{4}=\frac{y+6}{22};\quad \frac{x-16}{2}=\frac{y+6}{11};$$

$$11\cdot(x-16)=2\cdot(y+6);\quad 11x-176=2y+12;\quad \underline{\underline{11x-2y-188=0}}\quad (BC)$$

$$11x-2y-188=0\ \Rightarrow\ y=\frac{11}{2}x-94\ \Rightarrow\ k_{BC}=\frac{11}{2}.$$

Координаты нормальных и направляющих векторов:

$$\vec{n}_{BC}=(11;-2)\text{ и }\vec{n}_{BC}=(2;11).$$

$$(AC):\quad \frac{x-4}{20-4}=\frac{y-3}{16-3};\quad \frac{x-4}{16}=\frac{y-3}{13};\quad 13(x-4)=16(y-3);$$

$$13x-52=16y-48;\quad \underline{\underline{13x-16y-4=0}}\quad (AC)$$

$$13x-16y-4=0\ \Rightarrow\ y=\frac{13}{16}x-\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ k_{AC}=\frac{13}{16}.$$

Координаты нормальных и направляющих векторов:

$$\vec{n}_{AC}=(13;-16)\text{ и }\vec{n}_{AC}=(16;13).$$

в) Определить величину угла $\angle B$ треугольника ABC.

Если две прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $l_1:\ y=k_1x+b_1$ и $l_2:\ y=k_2x+b_2$, то угол между ними можно найти по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \qquad (8.4)$$

В нашем случае: $k_1=k_{AB}=-\dfrac{3}{4}$, $k_2=k_{BC}=\dfrac{11}{2}$, значит:

$$\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{\frac{11}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}\right|=\left|\frac{\frac{25}{4}}{1-\frac{33}{8}}\right|=\left|\frac{\frac{25}{4}}{-\frac{25}{8}}\right|=2.$$

Таким образом, $\mathrm{tg}\varphi=2\ \Rightarrow\ \varphi=\mathrm{arctg}2\approx 64^{\circ}$.

г) Найти уравнение высоты CD и ее длину.

Поскольку CD является высотой треугольника ABC, значит $CD\perp AB$. Используем условие перпендикулярности двух прямых: ***прямые перпендикулярны, если их угловые коэффициенты обратно пропорциональны и взяты с противоположными знаками***, т.е.

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_{l_1}=-\frac{1}{k_{l_2}}.$$

В нашем случае: $CD\perp AB\Leftrightarrow k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{-\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{3}$.

Далее, используем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0\left(x_0;\,y_0\right)$ в заданном направлении (оно определяется угловым коэффициентом):

$$y-y_0=k\cdot\left(x-x_0\right)\qquad(8.5)$$

В нашем случае известна точка $C\left(20;16\right)$ — точка, через которую проходит высота CD, и угловой коэффициент этой прямой $k_{CD}=\dfrac{4}{3}$. Тогда получим:

$$y-16=\frac{4}{3}\cdot\left(x-20\right);\quad 3y-48=4x-80;\quad \underline{\underline{4x-3y-32=0}}\quad (CD)$$

Для определения длины высоты CD, используем формулу (6.1), но сначала найдем координаты точки D. Поскольку точка D является пересечением прямых CD и AB, то для определения её координат необходимо решить совместно уравнения этих прямых, т.е.

$$\begin{matrix}(AB)\\(CD)\end{matrix}\begin{cases}3x+4y-24=0, & \times(-4)\\ 4x-3y-32=0. & \times 3\end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases}3x+4y-24=0,\\ -25y=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=8,\\ y=0.\end{cases}$$

Значит, точка D имеет следующие координаты: $D(8;0)$.

Теперь по формуле (8.1) получим:

$$|CD|=\sqrt{(20-8)^2+(16-0)^2}=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{400}=20\ (\text{лин. ед.}).$$

д) Найти уравнение медианы BK.

Так как BK является медианой, то точка K — середина отрезка AC. Определим координаты середины отрезка AC по формуле:

$$\begin{cases}x_K=\dfrac{x_A+x_C}{2},\\ y_K=\dfrac{y_A+y_C}{2}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_K=\dfrac{20+4}{2},\\ y_K=\dfrac{16+3}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_K=12,\\ y_K=9{,}5.\end{cases} \Rightarrow K(12;9{,}5).$$

Далее, использую формулу (8.2), найдем уравнение медианы BK:

$$\frac{x-16}{12-16}=\frac{y+6}{9{,}5+6};\quad \frac{x-16}{-4}=\frac{y+6}{\frac{31}{2}};\quad 31\cdot(x-16)=-8\cdot(y+6);$$

$$31x-496=-8y-48;\quad \underline{\underline{31x+8y-448=0}}\quad (BK)$$

е) Найти уравнение прямой, проходящей через точку D, параллельно стороне AC.

Пусть l искомая прямая. Тогда, по условию она параллельна прямой AC. Используем условие параллельности двух прямых: ***две прямые параллельны, если они имеют равные угловые коэффициенты,*** т. е.

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_{l_1}=k_{l_2}.$$

В нашем случае: $k_l = k_{AB} = \dfrac{13}{16}$.

Также, по условию, известно, что прямая l, проходит через точку *D*. Тогда используя формулу (8.5), определим уравнение искомой прямой:

$$\left.\begin{array}{l} D(8;0) \\ k_l = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right| \overset{(8.5)}{\Rightarrow} y - 0 = \frac{13}{16}\cdot(x-8);\quad 16y = 13x - 104;\quad \underline{\underline{13x - 16y - 104 = 0}} \quad (l)$$

ж) Найти координаты точки T, расположенной симметрично точке B относительно высоты CD.

По условию, точка *T* симметрична точке *B*, относительно высоты *CD*, значит, точка *T* лежит на прямой *AB* и длины отрезков *BD* и *DT* равны между собой. То есть, точка *D* является серединой отрезка *BT*:

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + x_T}{2}, \\ y_D = \dfrac{y_B + y_T}{2}. \end{cases}$$

Отсюда, найдем искомые координаты точки *T*.

$$\begin{cases} x_T = 2\cdot x_D - x_B, \\ y_T = 2\cdot y_D - y_B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_T = 2\cdot 8 - 16, \\ y_T = 2\cdot 0 + 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = 0, \\ y_T = 6. \end{cases} \Rightarrow T(0;6).$$

з) Чертеж (рис.1)

Замечание. Для построения прямой l (пункт **е**) необходимо выбрать дополнительную точку. Например, $x = 16 \Rightarrow y = 6{,}5 \Rightarrow F(16;6{,}5)$.

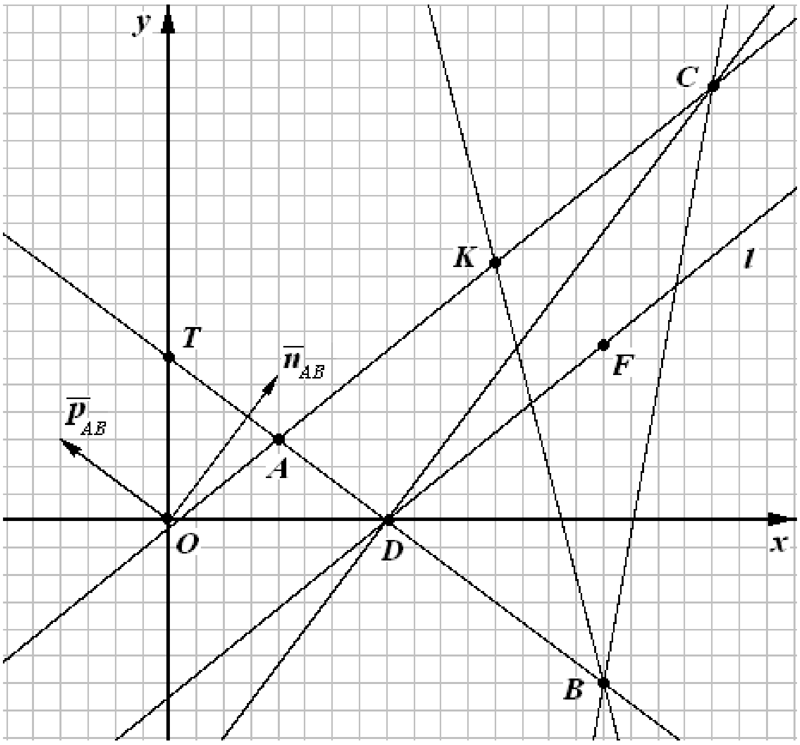


Рисунок — 1

Задание 9. Даны точки $A\left(x_1;\,y_1\right)$ и $B\left(x_2;\,y_2\right)$. Требуется:

№№ 1 – 15.

а) составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки A и B, найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис. Сделать чертеж.

б) составить уравнение гиперболы, фокусы и вершины которой находятся соответственно в вершинах и фокусах найденного в п. а) эллипса. Найти её асимптоты, директрисы, эксцентриситет. Сделать чертеж.

в) составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A\left(x_1;\,y_1\right)$. Найти её фокус, уравнение директрисы. Сделать чертеж.

1. $A\left(2\sqrt{3};2\sqrt{6}\right)$; $B\left(\sqrt{6};-2\sqrt{7}\right)$. 2. $A(8;4)$; $B\left(4\sqrt{7};-2\right)$.

3. $A\left(4\sqrt{2};2\sqrt{6}\right)$; $B\left(4\sqrt{5};2\sqrt{3}\right)$. 4. $A\left(6;2\sqrt{6}\right)$; $B\left(3\sqrt{2};6\right)$.

5. $A\left(\sqrt{6};2\sqrt{11}\right);\ B\left(4\sqrt{6};-4\right).$
6. $A\left(2\sqrt{2};\sqrt{6}\right);\ B(1;2).$
7. $A\left(4;2\sqrt{7}\right);\ B\left(4\sqrt{6};2\sqrt{2}\right).$
8. $A\left(\sqrt{3};\sqrt{6}\right);\ B\left(3;\sqrt{2}\right).$
9. $A\left(3;\sqrt{42}\right);\ B\left(3\sqrt{6};2\sqrt{3}\right).$
10. $A(4;-2);\ B\left(2;\sqrt{7}\right).$
11. $A\left(2;-\sqrt{7}\right);\ B\left(2\sqrt{2};-\sqrt{6}\right).$
12. $A\left(\sqrt{6};-2\right);\ B\left(-3;\sqrt{2}\right).$
13. $A\left(\sqrt{6};2\right);\ B\left(-\sqrt{3};\sqrt{6}\right).$
14. $A\left(2\sqrt{6};-4\right);\ B\left(6;2\sqrt{2}\right).$
15. $A(2;-4);\ B\left(\sqrt{7};2\right).$

№№ 16 – 30.

а) составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки A и B, если фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс. Найти её полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать чертеж.

б) составить уравнение эллипса фокусы и вершины большей оси которого находятся соответственно в вершинах и фокусах найденной в п. а) гиперболы. Найти его оси и уравнения директрис. Сделать чертеж.

в) составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $A\left(x_1;y_1\right)$, найти ее фокус, уравнение директрисы. Сделать чертеж.

1. $A\left(\sqrt{6};-2\right);\ B\left(2\sqrt{2};2\sqrt{3}\right).$
2. $A(4;6);\ B\left(6;4\sqrt{6}\right).$
3. $A\left(2\sqrt{7};6\sqrt{2}\right);\ B\left(2\sqrt{5};-4\sqrt{3}\right).$
4. $A(8;12);\ B\left(-6;2\sqrt{15}\right).$
5. $A(-8;12);\ B\left(4\sqrt{3};-2\sqrt{6}\right).$
6. $A(3;4);\ B\left(-5;4\sqrt{5}\right).$
7. $A\left(-6;4\sqrt{6}\right);\ B\left(2\sqrt{3};-2\sqrt{6}\right).$
8. $A(3;4);\ B\left(-\sqrt{6};2\right).$
9. $A\left(4\sqrt{2};4\sqrt{3}\right);\ B\left(4\sqrt{3};2\sqrt{6}\right).$
10. $A(-8;6);\ B\left(8\sqrt{2};2\sqrt{15}\right).$

11. $A\left(3\sqrt{2}\,;2\sqrt{3}\right)$; $B(-8;-9)$.

12. $A(-4;3)$; $B(8;9)$.

13. $A(-8;9)$; $B\left(3\sqrt{2}\,;-2\sqrt{3}\right)$.

14. $A(8;6)$; $B\left(10;-3\sqrt{10}\right)$.

15. $A\left(10;3\sqrt{10}\right)$; $B\left(-4\sqrt{10}\,;-6\sqrt{5}\right)$.

Решение типового примера.

Пусть даны точки $A\left(6;-2\sqrt{2}\right)$; $B\left(-2\sqrt{3}\,;2\sqrt{6}\right)$. Требуется:

а) Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки *A* и *B*, найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис. Сделать чертеж.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{9.1}$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипса.

По условию, эллипс проходит точки *A* и *B*, значит, их координаты удовлетворяют уравнению эллипса.

С одной стороны координаты точки *A*, удовлетворяют уравнению эллипса, т. е.

$$\frac{6^2}{a^2}+\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1; \quad \frac{36}{a^2}+\frac{8}{b^2}=1.$$

С другой стороны координаты точки *B*, удовлетворяют уравнению эллипса, т.е.

$$\frac{\left(-2\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(2\sqrt{6}\right)^2}{b^2}=1; \quad \frac{12}{a^2}+\frac{24}{b^2}=1.$$

Решим совместно полученные два уравнения, откуда определим значения a и b.

$$\begin{cases} \dfrac{36}{a^2}+\dfrac{8}{b^2}=1, \\ \dfrac{12}{a^2}+\dfrac{24}{b^2}=1. \quad \times(-3) \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{64}{b^2}=-2, \\ \dfrac{12}{a^2}+\dfrac{24}{b^2}=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=32, \\ \dfrac{12}{a^2}+\dfrac{24}{32}=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2=32, \\ \dfrac{12}{a^2}=\dfrac{1}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=32, \\ a^2=48. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4\sqrt{3}, \\ b=4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Тогда уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{\left(4\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(4\sqrt{2}\right)^2}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{32}=1.$$

Фокусы эллипса имеют координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

В нашем случае: $c=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{48-32}=\sqrt{16}=4$.

Значит, фокусы имеют координаты: $F_1(-4;0)$ и $F_2(4;0)$.

Эксцентриситет эллипса равен: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$.

В нашем случае: $\varepsilon=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Уравнения директрис эллипса имеют вид: $\begin{cases} d_1: \quad x=-\dfrac{a}{\varepsilon}, \\ d_2: \quad x=\dfrac{a}{\varepsilon}. \end{cases}$

В нашем случае: $d_1: \quad x=-\dfrac{4\sqrt{3}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=-12$, и $d_2: \quad x=12$.

Вершины эллипса имеют координаты:

$$A_1\left(-4\sqrt{3}\,;0\right);\quad A_2\left(4\sqrt{3}\,;0\right);\quad B_1\left(0;-4\sqrt{2}\,\right);\quad B_2\left(0;4\sqrt{2}\,\right).$$

Чертеж (рис. 2).

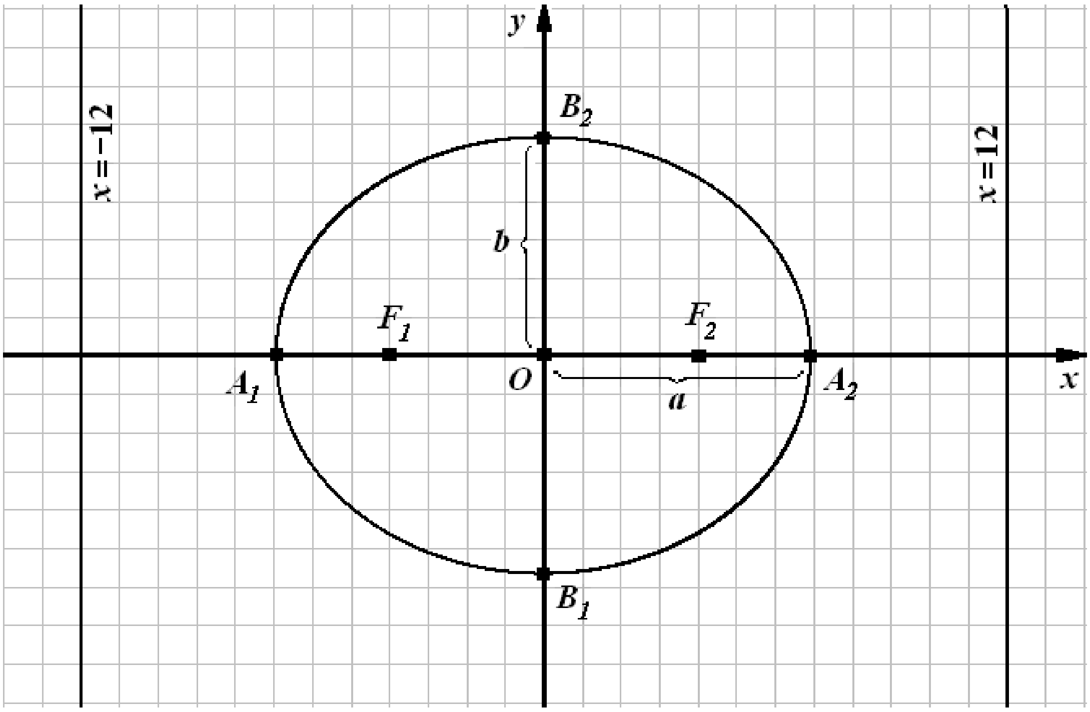


Рисунок — 2

б) Составить уравнение гиперболы, фокусы и вершины которой находятся соответственно в вершинах и фокусах найденного в п. а) эллипса. Найти её асимптоты, директрисы, эксцентриситет. Сделать чертеж.

По условию, вершины гиперболы совпадают с фокусами, найденного в пункте а) эллипса, т. е. точки

$$F_1(-4;0)\text{ и }F_2(\,4;0),$$

являются вершинами гиперболы. Значит, большая полуось гиперболы равна 4, $a=4$.

Далее по условию, фокусы гиперболы совпадают с вершинами эллипса, лежащими на оси Ox, т.е. с точками

$$A_1\left(-4\sqrt{3}\,;0\right);\quad A_2\left(4\sqrt{3}\,;0\right).$$

Соответственно координаты фокусов гиперболы будут:

$$F_1\left(-4\sqrt{3}\,;0\right);\quad F_2\left(4\sqrt{3}\,;0\right),$$

Отсюда получаем, что $c=4\sqrt{3}$.

Т.к. $c^2=a^2+b^2$ имеем, что

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-4^2}=4\sqrt{2}\,.$$

Соответственно уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{(4)^2}-\frac{y^2}{\left(4\sqrt{2}\right)^2}=1,\quad \text{или}\quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{32}=1.$$

Эксцентриситет гиперболы также равен: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$.

В нашем случае: $\varepsilon=\dfrac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$.

Уравнения директрис гиперболы также имеют вид: $\begin{cases} d_1:\quad x=-\dfrac{a}{\varepsilon}, \\ d_2:\quad x=\ \dfrac{a}{\varepsilon}. \end{cases}$

В нашем случае:

$$d_1:\quad x=-\frac{4}{\sqrt{3}}=-\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \text{ и }\ d_2:\quad x=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид:

$$l_1:\quad y=-\frac{b}{a}\cdot x\ \text{ и }\ l_2:\quad y=\frac{b}{a}\cdot x.$$

В нашем случае:

$$l_1:\quad y=-\frac{4\sqrt{2}}{4}x=-\sqrt{2}\,x\ \text{ и }\ l_2:\quad y=\sqrt{2}\,x.$$

Чертеж (рис. 3).

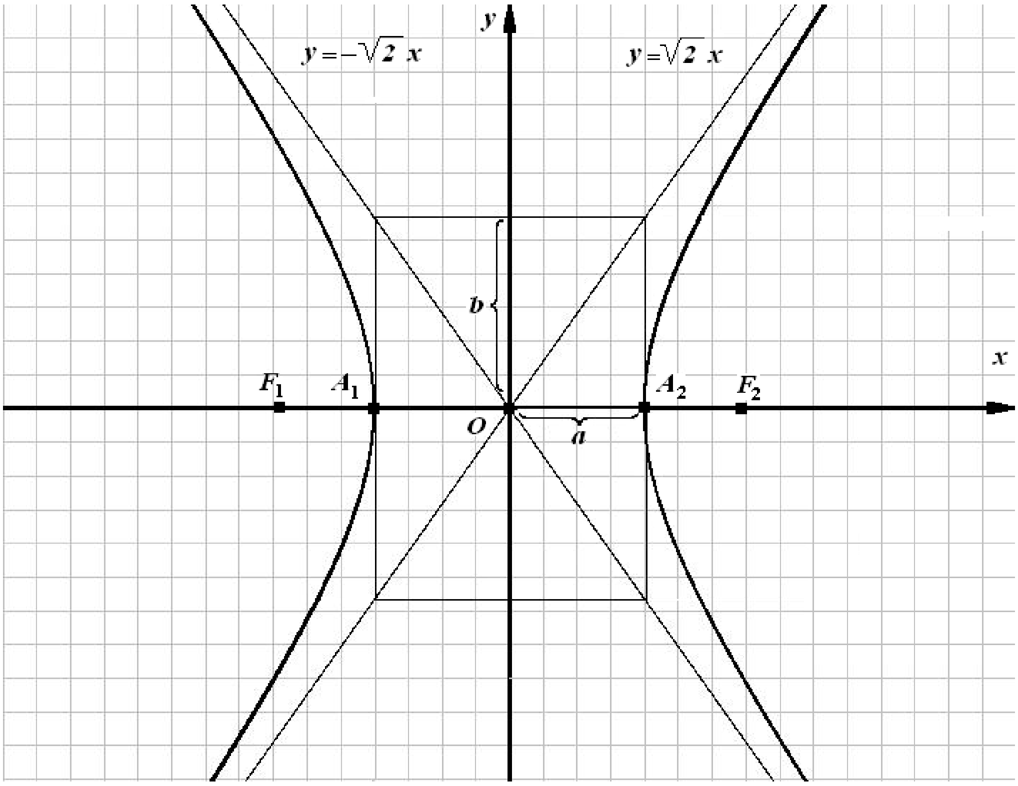


Рисунок — 3

в) Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A\left(6;-2\sqrt{2}\right)$. Найти её фокус, уравнение директрисы. Сделать чертеж.

Поскольку ветви параболы симметричны оси Ox, и она проходит через точку $A\left(6;-2\sqrt{2}\right)$, т. е. ветви направлены влево от начала координат, то её уравнение имеет вид: $y^2=2px$.

Так как координаты точки A, удовлетворяют уравнению параболы, то получим: $\left(-2\sqrt{2}\right)^2=2p\cdot 6;\quad 8=12p;\quad p=\dfrac{2}{3}$.

Таким образом, искомое уравнение данной параболы имеет вид:

$$y^2=\frac{4}{3}x \quad \text{или} \quad x=\frac{3}{2}y^2.$$

Фокус данной параболы имеет координаты: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. В нашем случае: $F\left(\frac{1}{3};0\right)$. Уравнение директрисы d: $x=-\frac{p}{2}$. Соответственно, в нашем случае: $x=-\frac{1}{3}$.

Чертеж (рис. 4)

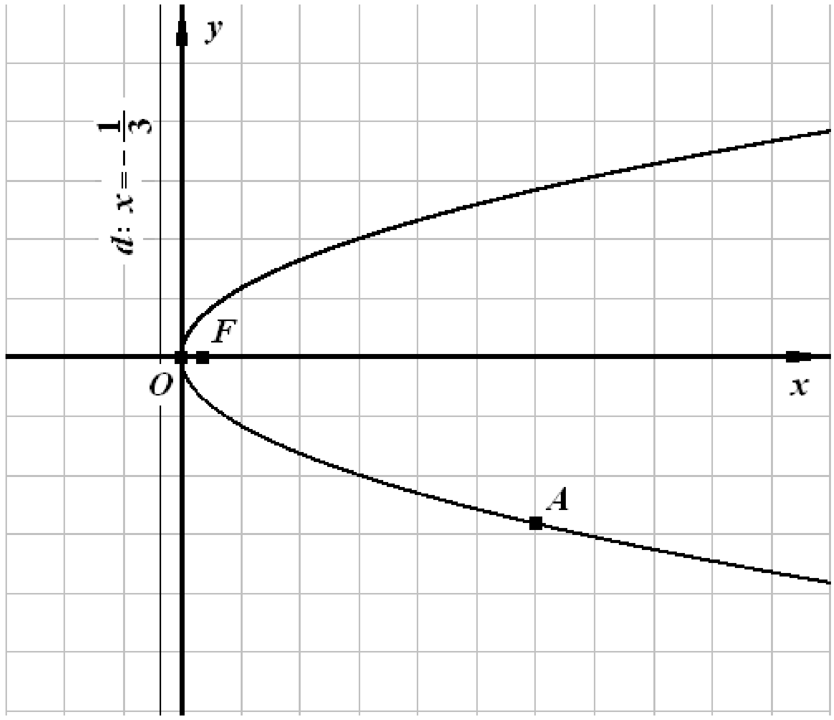


Рисунок — 4

Задание 10. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$ с вершиной в точке D. Найти:

а) площадь грани ABC;

б) объем пирамиды $ABCD$;

в) уравнения ребер AD и BD, указав координаты направляющих векторов;

г) уравнения граней ABC и ABD, указав координаты их нормалей;

д) длину высоты DK;

е) угол между плоскостью основания ABC и боковым ребром AD;

ж) угол между плоскостью основания ABC и боковой гранью ABD;

з) уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно основанию ABC;

и) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно ребру AD;

к) уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости основания ABC;

л) угол между боковыми ребрами AD и BD.

1. $A(2;-1;-1)$; $B(5;-1;2)$; $C(3;0;3)$; $D(6;0;-1)$.
2. $A(-4;1;-3)$; $B(0;1;2)$; $C(-2;3;-2)$; $D(-1;3;0)$.
3. $A(2;2;0)$; $B(1;2;5)$; $C(-3;3;1)$; $D(1;4;3)$.
4. $A(-1;-2;1)$; $B(0;-1;5)$; $C(-4;0;1)$; $D(-2;1;3)$.
5. $A(5;-1;2)$; $B(2;-1;2)$; $C(-1;0;5)$; $D(1;1;4)$.
6. $A(2;1;-2)$; $B(3;3;3)$; $C(1;1;2)$; $D(-1;-2;-3)$.
7. $A(5;1;-4)$; $B(1;2;-1)$; $C(3;3;-4)$; $D(2;2;2)$.
8. $A(3;1;0)$; $B(0;7;2)$; $C(-1;0;-5)$; $D(4;1;5)$.
9. $A(0;0;2)$; $B(3;0;5)$; $C(1;1;0)$; $D(4;1;2)$.
10. $A(-7;3;-2)$; $B(0;2;1)$; $C(4;-1;0)$; $D(-1;0;-3)$.
11. $A(3;1;0)$; $B(0;1;2)$; $C(-1;0;-5)$; $D(4;5;1)$.
12. $A(0;0;-1)$; $B(1;3;4)$; $C(5;0;-3)$; $D(4;4;1)$.
13. $A(-1;2;5)$; $B(0;-4;5)$; $C(-3;2;1)$; $D(1;2;4)$.
14. $A(2;-4;5)$; $B(-1;-3;4)$; $C(5;5;-1)$; $D(1;-2;2)$.
15. $A(2;-3;1)$; $B(6;1;-1)$; $C(4;8;-9)$; $D(2;-1;2)$.

16. $A(5;-1;-4)$; $B(9;3;-6)$; $C(7;10;-14)$; $D(5;1;-3)$.

17. $A(1;-4;0)$; $B(5;0;-2)$; $C(3;7;-10)$; $D(1;-2;1)$.

18. $A(-3;-6;2)$; $B(1;-2;0)$; $C(-1;5;-8)$; $D(-3;-4;3)$.

19. $A(-1;1;-5)$; $B(3;5;-7)$; $C(1;12;-15)$; $D(-1;3;-4)$.

20. $A(-4;2;-1)$; $B(0;6;-3)$; $C(-2;13;-11)$; $D(-4;4;0)$.

21. $A(0;4;3)$; $B(4;8;1)$; $C(2;15;-7)$; $D(0;6;4)$.

22. $A(-2;0;-2)$; $B(2;4;-4)$; $C(0;11;-12)$; $D(-2;2;-1)$.

23. $A(3;3;-3)$; $B(7;7;-5)$; $C(5;14;-13)$; $D(3;5;-2)$.

24. $A(4;-2;5)$; $B(8;2;3)$; $C(6;9;-5)$; $D(4;0;6)$.

25. $A(-5;0;1)$; $B(-4;-2;3)$; $C(6;2;11)$; $D(3;4;9)$.

26. $A(-3;4;-3)$; $B(-2;2;-1)$; $C(8;6;7)$; $D(5;8;5)$.

27. $A(-2;-3;2)$; $B(-1;-5;4)$; $C(9;-1;12)$; $D(6;1;10)$.

28. $A(-4;5;-5)$; $B(-3;3;-3)$; $C(7;7;5)$; $D(4;9;3)$.

29. $A(2;-1;-4)$; $B(3;-3;-2)$; $C(13;1;6)$; $D(10;3;4)$.

30. $A(-8;3;-1)$; $B(-7;1;1)$; $C(3;5;9)$; $D(0;7;7)$.

Решение типового примера.

Пусть даны координаты вершин пирамиды $ABCD$:

$$A(5;-3;9);\ B(5;3;3);\ C(1;-1;5);\ D(1;-1;9).$$

а) Вычислить площадь грани ABC.

Для вычисления площади грани ABC, используем формулу определяющую площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \qquad (10.1)$$

где $\vec{a}\times\vec{b}$ — векторное произведение векторов $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_x\right)$ и $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, которое может быть найдено следующим образом:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_x\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

В нашем случае, грань ABC, можно определить как треугольник, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Значит формула (10.1) примет вид:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Найдем координаты необходимых векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их векторное произведение.

$$\overrightarrow{AB}=\left(5-5;3+3;3-9\right)=\left(0;6;-6\right);$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(1-5;-1+3;5-9\right)=\left(-4;2;-4\right).$$

Тогда:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 6 & -6\\ -4 & 2 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}6 & -6\\ 2 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0 & -6\\ -4 & -4\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & 6\\ -4 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot\left(-24+12\right)-\vec{j}\cdot\left(0-24\right)+\vec{k}\cdot\left(0+24\right)=-12\cdot\vec{i}+24\cdot\vec{j}+24\cdot\vec{k}.$$

Далее, найдем длину вектора, равного векторному произведению $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left(-12\right)^2+24^2+24^2}=12\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}=12\cdot\sqrt{9}=36$$

Таким образом, площадь грани ABC, равна:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 36=18\left(\text{кв. ед.}\right).$$

б) Вычислить объём пирамиды $ABCD$.

Объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ можно вычислить по формуле:

$$V_{пир.} = \pm\frac{1}{6}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\,, \qquad (10.2)$$

где

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ — смешанное произведение векторов $\vec{a}=\left(a_x; a_y; a_x\right)$, $\vec{b}=\left(b_x; b_y; b_z\right)$ и $\vec{c}=\left(c_x; c_y; c_z\right)$, которое можно вычислить следующим образом:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

В нашем случае, пирамида $ABCD$, можно рассматривать как пирамиду, построенную на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Вычислим смешанное произведение этих векторов. Для этого найдем координаты вектора $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AD} = (1-5; -1+3; 9-9) = (-4; 2; 0)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0+96+48-48-0-0 = 96.$$

Таким образом, объем пирамиды $ABCD$:

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot 96 = 16\,(куб.\,ед.)$.

в) Найти уравнения ребер AD и BD, указав координаты направляющих векторов.

Уравнение ребра можно найти как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$ и $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$ по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \qquad (10.3)$$

где $\vec{s}=\left(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\right)$ — направляющий вектор прямой.

В нашем случае:

$$(AD):\ \frac{x-5}{1-5}=\frac{y+3}{-1+3}=\frac{z-9}{9-9};\quad \frac{x-5}{-4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-9}{0};\quad z-9=0.$$

Направляющий вектор соответственно: $\vec{s}_{\overline{AD}}=(-4; 2; 0)$.

$$(BD):\ \frac{x-5}{1-5}=\frac{y-3}{-1-3}=\frac{z-3}{9-3};\quad \frac{x-5}{-4}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-3}{6};$$

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{3-z}{3}.$$

Направляющий вектор: $\vec{s}_{\overline{BD}}=(2; 2; 3)$.

г) Найти уравнения граней ABC и ABD, указав координаты их нормалей.

Уравнение грани можно определить как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$, $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$ и $M_3\left(x_3; y_3; z_3\right)$ по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (10.4)$$

В нашем случае, по формуле (10.4) получим:

$$\left(ABC\right): \begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-9 \\ 5-5 & 3+3 & 3-9 \\ 1-5 & -1+3 & 5-9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-9 \\ 0 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-5)\cdot(-24+12)-(y+3)\cdot(0-24)+(z-9)\cdot(0+24)=0;$$

$$-12\cdot(x-5)+24\cdot(y+3)+24\cdot(z-9)=0;$$

$$-(x-5)+2\cdot(y+3)+2\cdot(z-9)=0;$$

$$-x+5+2y+6+2z-18=0; \qquad \underline{\underline{x-2y-2z+7=0}} \quad \left(ABC\right)$$

Аналогично, найдем уравнение грани ABD.

$$\left(ABD\right): \begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-9 \\ 5-5 & 3+3 & 3-9 \\ 1-5 & -1+3 & 9-9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-9 \\ 0 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-5)\cdot(0+12)-(y+3)\cdot(0-24)+(z-9)\cdot(0+24)=0;$$

$$12\cdot(x-5)+24\cdot(y+3)+24\cdot(z-9)=0;$$

$$1\cdot(x-5)+2\cdot(y+3)+2\cdot(z-9)=0;$$

$$x-5+2y+6+2z-18=0; \qquad \underline{\underline{x+2y+2z-17=0}} \quad \left(ABD\right)$$

д) Найти длину высоты DK.

Длину высоты пирамиды определим из формулы для нахождения объёма пирамиды, а именно:

$$V_{пир.} = \frac{1}{3}\cdot S_{основ.}\cdot h,$$

где h – длина высоты, опущенной на основание пирамиды.

В нашем случае: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot |DK|.$

Выразим отсюда искомую длину высоты:

$$\left|DK\right| = \frac{3 \cdot V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}}.$$

В пункте а) и б) были вычислены соответствующие значения площади грани ABC $\left(S_{\Delta ABC} = 18\right)$ и объём пирамиды $V_{ABCD} = 16$. Тогда, длина высоты DK, составит:

$$\left|\,DK\,\right| = \frac{3 \cdot 16}{18} = \frac{48}{18} = \frac{8}{3}\ \left(\text{лин. ед.}\right).$$

Замечание. *Длину высоты DK, можно также определить как расстояние от точки D до плоскости ABC по формуле:*

$$d = \frac{\left|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где $Ax + By + Cz + D$ *– уравнение плоскости,* $\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ *– координаты точки.*

В нашем случае: $\left|\,DK\,\right| = \dfrac{\left|1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 9 + 7\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{8}{3}\left(\text{лин. ед.}\right).$

е) Вычислить значение угла между плоскостью основания ABC и боковым ребром AD.

За угол между прямой и плоскостью принимают угол между этой прямой и её проекцией на данной плоскость. Он может быть вычислен по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{s}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|},$$

где $\vec{n}\left(A;\, B;\, C\right)$ — нормальный вектор плоскости, $\vec{s} = \left(m;\, n;\, p\right)$ — направляющий вектор прямой.

Эту формулу можно записать в координатном виде:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\,A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p\,\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

В нашем случае, плоскость ABC имеет следующее уравнение: $x-2y-2z+7=0$, значит, её нормальный вектор имеет координаты $\vec{n}=\left(1;-2;-2\right)$. А ребро AD имеет направляющий вектор $\vec{s}_{\overrightarrow{AD}}=\left(-4;\,2;\,0\right)$ (*см. пункты в) и г)*). Тогда получим:

$$\sin\varphi=\frac{\left|1\cdot(-4)+(-2)\cdot 2+(-2)\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2+0^2}}=\frac{\left|-4-4\right|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{20}}=\frac{8}{3\sqrt{20}},$$

или

$$\sin\varphi=\frac{8}{3\sqrt{20}}\approx 0,6\Rightarrow\varphi=\arcsin\left(0,6\right)\approx 37^{\circ}.$$

ж) Вычислить значение угла между плоскостью основания ABC и боковой гранью ABD.

За угол между двумя плоскостями можно принять угол между их нормальными векторами, который может быть вычислен по формуле:

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}.$$

В нашем случае нормальные вектора плоскостей ABC и ABD имеют координаты: $\vec{n}_{ABC}=\left(1;-2;-2\right)$ и $\vec{n}_{ABD}=\left(1;\,2;\,2\right)$, тогда:

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_{ABC};\vec{n}_{ADD}}\right)=\frac{1\cdot 1+(-2)\cdot 2+(-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{-7}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}},$$

или

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_{ABC};\vec{n}_{ADD}}\right)=-\frac{7}{9}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{n}_{ABC};\vec{n}_{ADD}}\right)=\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)\approx 2,462.$$

з) Найти уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно основанию ABC.

Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ уравнение искомой плоскости P. По условию плоскость P параллельна плоскости ABC. Используем условие параллельности плоскостей: ***две плоскости параллельны, если координаты их нормальных векторов пропорциональны,*** т. е.

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\lambda .$$

В нашем случае, нормальный вектор плоскости ABC имеет координаты $\vec{n}_{ABC}=(1;-2;-2)$. Поскольку искомая плоскость параллельна плоскости ABC, то $\lambda=1$, а значит, координаты нормального вектора искомой плоскости также: $\vec{n}_P=(1;-2;-2)$. То есть уравнение плоскости P имеет вид:

$$x-2\cdot y-2\cdot z+D=0.$$

Также по условию известно, что плоскость P, проходит через точку D, а значит, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости, т. е.

$$1-2\cdot(-1)-2\cdot 9+D=0; \quad \Rightarrow \; D=15.$$

Окончательно, уравнение плоскости P, параллельной грани ABC, имеет вид: $\underline{\underline{x-2y-2z+15=0}}$.

и) Найти уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно ребру AD.

Используем формулу, определяющую канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}, \tag{10.5}$$

где $(x_1;y_1;z_1)$ — координаты произвольной точки прямой, $(m;n;p)$ — координаты любого её направляющего вектора.

Поскольку искомая прямая l, по условию, параллельна прямой *AD*, то в качестве её направляющего вектора, может быть взят направляющий вектор ребра *AD*: $\vec{s}_l = \vec{s}_{\overline{AD}} = \left(-4;\, 2;\, 0\right)$.

Также, по условию, прямая l, проходит через вершину *C*, то по формуле (10.5) имеем:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{0}; \qquad \underline{\underline{z-5=0}} \qquad (l).$$

к) Найти уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости основания ABC.

Как и в предыдущем пункте, используем канонические уравнения прямой в пространстве (10.5). Точка *A* — точка прямой, а в качестве направляющего вектора искомой прямой g возьмем нормальный вектор плоскости ABC: $\vec{n}_{ABC} = \left(1; -2; -2\right)$. Получим:

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-9}{-2}; \qquad \underline{\underline{10-2x = y+3 = z-9}} \qquad (g).$$

л) Вычислить значение угла между боковыми ребрами AD и BD.

Угол между двумя прямыми l_1 и l_2 определим как угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = \left(m_1; n_1; p_1\right)$ и $\vec{s}_2 = \left(m_2; n_2; p_2\right)$ по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{m_1\cdot m_2 + n_1\cdot n_2 + p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

В нашем случае, $\vec{s}_1 = \vec{s}_{AD} = \left(-4;\, 2;\, 0\right)$, $\vec{s}_2 = \vec{s}_{BD} = \left(2;\, 2;\, 3\right)$, тогда:

$$\cos\varphi = \frac{-4\cdot 2 + 2\cdot 2 + 0\cdot 3}{\sqrt{\left(-4\right)^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+3^3}} = \frac{-4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}} \approx -0,22.$$

Откуда, $\varphi = \arccos\left(-0,22\right) \approx 1,39$.

Литература

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука,1978.— 320 с.

2. Высшая математика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. проф. Ф.Д. Берковича; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. — Новочеркасск: ЮРГТУ, 2004. — 119 с.

3. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971. — 271 с.

4. *Григулецкий В.Г., Кондратенко Л.Н., Гетман В.Н., Стеганцова К.Г.* Задачник практикум по математике. — Краснодар: КубГАУ, 2006. — 180 с.

5. *Гунько В.Д., Суховеева Л.Ю., Смоленцев В.М.* Сборник индивидуальных типовых расчетов по курсу высшей математики для студентов инженерно-технических специальностей. — Краснодар: КубГАУ, 2008. — 125 с.

6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1965. — 431 с.

7. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. — М.: Айрис-пресс, 2004. — 608 с.

Учебно-методическое пособие

Смоленцев Виталий Михайлович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ:

типовые расчеты и методические указания

Подписано в печать 12.12.2009 г. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.

Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 3,8 Тираж 300 экз.

Заказ № 1090

Типография
Кубанского государственного аграрного университета
350044, г. Краснодар, ул. им. Калинина, 13