Федеральное государственное бюджение образовательное учреждение
высшего профессионального образования
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра «Тракторы, автомобили и техническая механика»

Зеленский С.А., Букаткин Р.Н., Артемов И.И.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Краснодар – 2013

Рецензент:
Петунина Ирина Александровна – доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики КубГАУ

Зеленский С.А.
Теоретическая механика: Исследование механического движения и механического взаимодействия материальных тел: учебное пособие / Зеленский С.А., Букаткин Р.Н., Артемов И.И. . – Краснодар: КубГАУ, 2013. – 91 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов-заочников, обучающихся по агроинженерным специальностям.

Задания подобраны таким образом, чтобы они соответствовали учебным планам агроинженерных специальностей и позволяли студентам самостоятельно использовать законы и теоремы теоретической механики для решения практических инженерных задач.

ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа по теоретической механике оформляется в тетради, страницы которой нумеруются. Допускается компьютерное оформление выполненной контрольной работы на формате А4.

На обложке указываются: название дисциплины, фамилия и инициалы студента, факультет, специальность и домашний адрес студента.

Студент во всех заданиях выбирает номер рисунка по предпоследней цифре зачётки, а номер условия в таблице – по последней. Например, если шифр зачётки заканчивается числом 46, то берётся рис. 4 конкретного задания и условие № 6 из соответствующей таблицы.

Далее, записывается, что дано и, что требуется найти. Текст задания не переписывается. Ниже этих данных следует рисунок, учитывающий условия решаемого варианта задания. Чертёж должен быть крупным, аккуратным и максимально наглядным для заданных условий задачи.

Выполнение указанных рекомендаций значительно облегчает составление математических уравнений, запись которых начинается под рисунком после заголовка «Решение». Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями и подробно излагать весь ход расчетов.

Заканчивается оформление решаемой задачи ответом, в котором указываются полученные результаты, и даётся им краткий комментарий, поясняющий их суть и особенности.

Выполненная контрольная работа регистрируется на факультете заочного обучения и отдаётся лаборанту кафедры «Тракторы, автомобили и техническая механика» (335 мх).

РАЗДЕЛ I

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоская произвольная система сил

Задание С.1. Определение реакций опор твердого тела

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С.1.0 – С.1.9, табл. С.1), закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перегнутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 40$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 80$ кН$\cdot$м и сила, значение, направление и точка приложения которой указаны в табл. С.1.

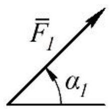
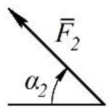
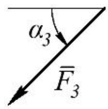
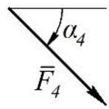
Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,5$ м.

Указания. Задание С.1 – на равновесие тела под действием плоской произвольной системы сил. При решении считать, что трение нити, перекинутой через блок, равно нулю, поэтому натяжения обеих её ветвей будут одинаковыми.

Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей (в данных задачах это – тока A). Чтобы найти плечо силы, надо опустить перпендикуляр из моментной точки на линию действия силы.

Величина этого перпендикуляра и будет являться плечом рассматриваемой силы. При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить её на составляющие $\bar{F}_x$ и $\bar{F}_y$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона: $M_A(\bar{F}) = M_A(\bar{F}_x) + M_A(\bar{F}_y)$. При определении реакции в шарнирно-неподвижной опоре (точка A) её представляют в виде двух составляющих $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$. Реакция шарнирной опоры на катках в точке B направлена перпендикулярно опорной плоскости.

Таблица С.1

Силы								
	$F_1 = 5$ кН		$F_2 = 10$ кН		$F_3 = 15$ кН		$F_4 = 20$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.
0	H	30	–	–	–	–	K	60
1	–	–	D	15	E	60	–	–
2	K	75	–	–	–	–	E	30
3	–	–	K	60	H	30	–	–
4	D	30	–	–	–	–	E	60
5	–	–	H	30	–	–	D	75
6	E	60	–	–	K	15	–	–
7	–	–	D	60	–	–	H	15
8	H	60	–	–	D	30	–	–
9	–	–	E	75	K	30	–	–

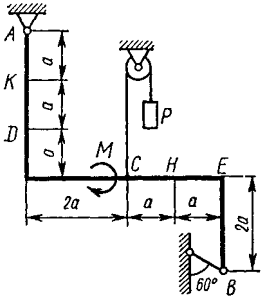


Рис. С.1.0

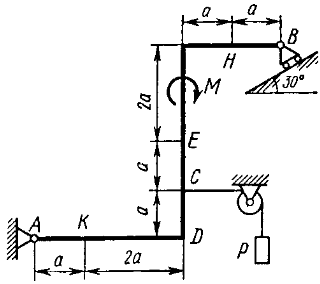


Рис. С.1.1

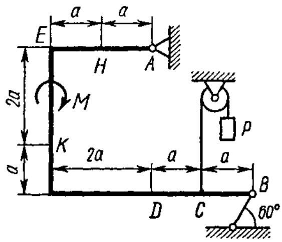


Рис. С.1.2

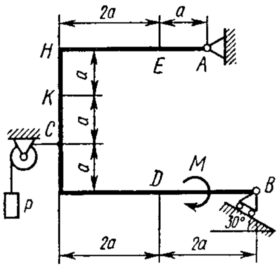


Рис. С.1.3

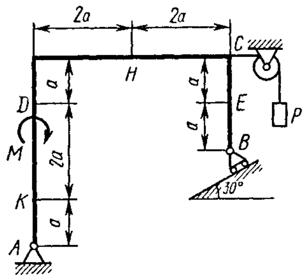


Рис. С.1.4

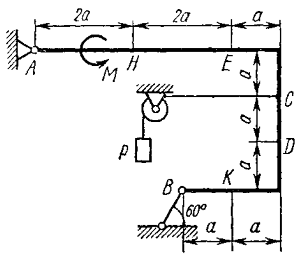


Рис. С.1.5

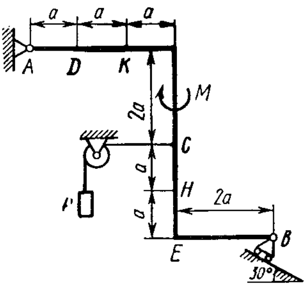


Рис. С.1.6

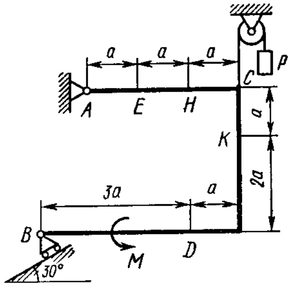


Рис. С.1.7

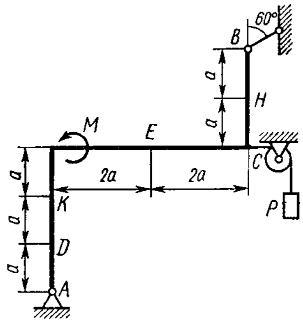


Рис. С.1.8

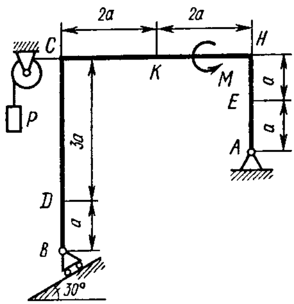


Рис. С.1.9

Пример С.1. Жесткая пластина $ABCD$ (рис. С.1) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 25$ кН, $\alpha = 60°$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75°$, $\beta = 30°$, $M = 50$ кН·м, $a = 0{,}5$ м. *Определить:* реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

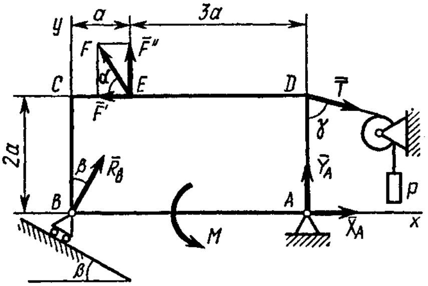


Рис. С.1

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси x, y и изобразим действующие на пластину силы: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\bar{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A представим в виде двух составляющих $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, реакция шарнирной опоры на катках в точке B направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно произвольно взятой точки (для нашего примера выбрана точка A) воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ ($F_x = F \cdot \cos\alpha$, $F_y = F \cdot \sin\alpha$) и учтем, что $M_A(\bar{F}) = M_A(\bar{F}_x) + M_A(\bar{F}_y)$.

Сумма проекций сил на оси координат:

$$\sum F_{ix} = X_A + T \cdot \sin\gamma - F \cdot \cos\alpha + R_B \cdot \sin\beta = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - T \cdot \cos\gamma + F \cdot \sin\alpha + R_B \cdot \cos\beta = 0. \qquad (2)$$

Сумма моментов сил относительно моментной точки A:

$$\sum M_A\left(\bar{F}_i\right) = M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - \\ - F\cdot\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0. \qquad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8{,}5$ кН; $Y_A = -23{,}3$ кН; $R_B = 7{,}3$ кН.

Знак «минус» у составляющих $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ указывает на то, что эти силы направлены противоположно показанным на рис. С.1.

Результирующая реакция в точке A определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

Задание С.2. Определение реакций опор составной конструкции

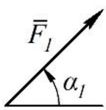
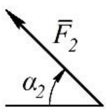
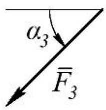
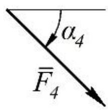
Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. С.2.0 – С.2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. С.2.6 – С.2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или гладкая плоскость (рис. С.2.0 и С.2.1), или невесомый стержень BB' (рис. С.2.2 и С.2.3), или шарнир (рис. С.2.4 – С.2.9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. С.2.0, С.2.3, С.2.8), или шарнирная опора на катках (рис. С.2.7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 40$ кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 10$ кН/м и ещё две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С.2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\bar{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила $\bar{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и нагрузка, распределенная на участке CK).

Определить реакции связей в точках A, B, C (для рис. С.2.0, С.2.3, С.2.7, С.2.8 ещё и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,2$ м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С.2а.

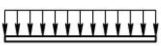
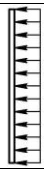
Указания. Задание С.2 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При решении задачи можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что её реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

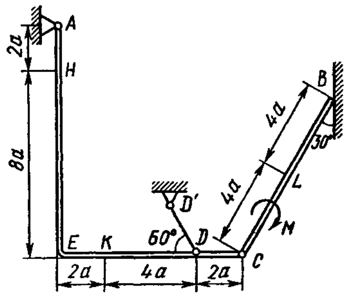
Таблица С.2

Силы					Нагру-женный участок
	$F_1 = 5$ кН	$F_2 = 10$ кН	$F_3 = 15$ кН	$F_4 = 20$ кН	

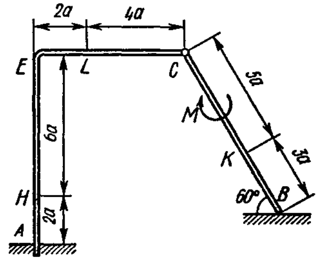
Номер условия	Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.	
0	*K*	60	–	–	*H*	30	–	–	*CL*
1	–	–	*L*	60	–	–	*E*	30	*CK*
2	*L*	15	–	–	*K*	60	–	–	*AE*
3	–	–	*K*	30	–	–	*H*	60	*CL*
4	*L*	30	–	–	*E*	60	–	–	*CK*
5	–	–	*L*	75	–	–	*K*	30	*AE*
6	*E*	60	–	–	*K*	75	–	–	*CL*
7	–	–	*H*	60	*L*	30	–	–	*CK*
8	–	–	*K*	30	–	–	*E*	15	*CL*
9	*H*	30	–	–	–	–	*L*	60	*CK*

Таблица С.2а

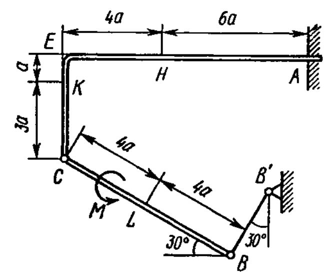
Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 0, 3, 5, 7, 8	рис. 1, 2, 4, 6, 9
			



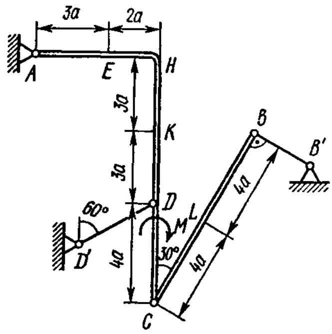
C.2.0



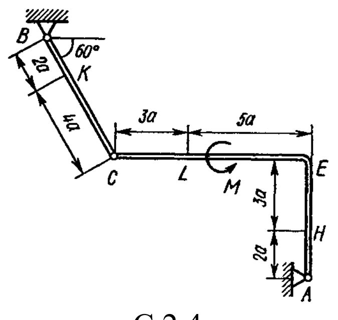
C.2.1



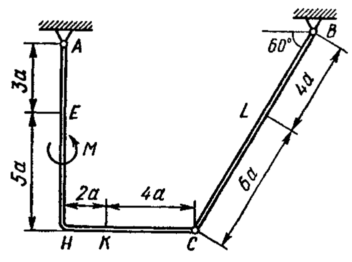
C.2.2



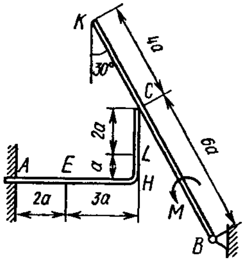
C.2.3



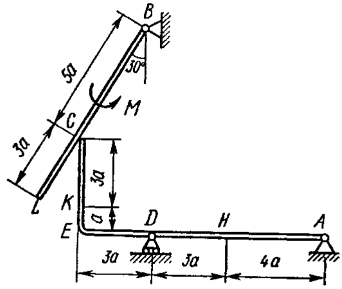
C.2.4



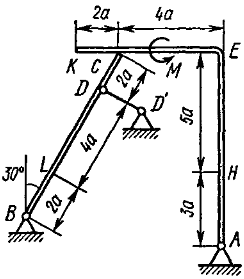
C.2.5



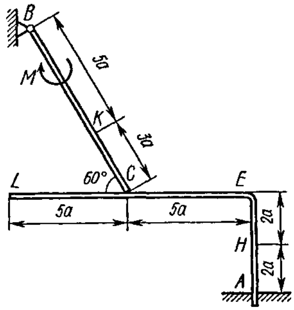
C.2.6



C.2.7



C.2.8



C.2.9

Пример С.2. На угольник ABC ($\angle ABC = 90°$), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. С.2, а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила $\bar{F}$, а к угольнику – равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара с моментом M.

Дано: $F = 10$ кН, $M = 5$ кН$\cdot$м, $q = 20$ кН/м, $a = 0,2$ м. *Определить*: реакции в точках A, C, D вызванные заданными нагрузками.

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. С.2, б). Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на стержень силы: силу $\bar{F}$, реакцию $\bar{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\bar{X}_D$ и $\bar{Y}_D$ реакции шарнира D. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = X_D + F - N\sin 60° = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = Y_D + N\cos 60° = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_D\left(\bar{F}_i\right) = N \cdot 2a - F\sin 60° \cdot 5a = 0. \qquad (3)$$

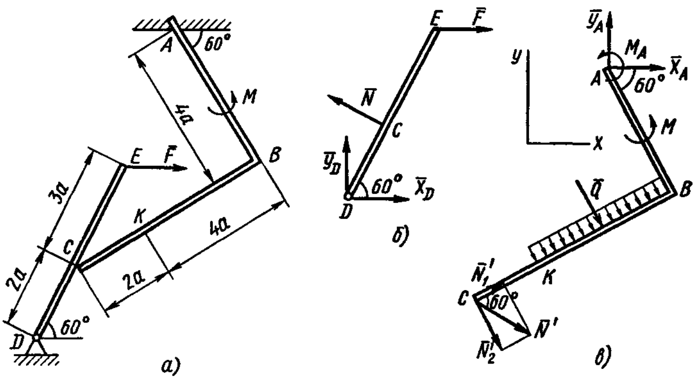


Рис. С.2

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С.2, в). На него действуют сила давления стержня $\bar{N}'$, направленная противоположно реакции $\bar{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем сосредоточенной силой $\bar{Q}$, приложенной в середине участка KB (численно $Q = q \cdot 4a = 16$ кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и пары с моментом

M_A. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = X_A + Q\cos 60° + N'\sin 60° = 0; \qquad (4)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - Q\sin 60° - N'\cos 60° = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_A\left(\bar{F}_i\right) = M_A + M + Q\cdot 2a + N'\cos 60°\cdot 4a + N'\sin 60°\cdot 6a = 0. \qquad (6)$$

При вычислении момента силы $\bar{N}'$ разлагаем её на составляющие $\bar{N}_1'$ и $\bar{N}_2'$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1) – (6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N' = N$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: $N = 21{,}7$ кН, $X_D = 8{,}8$ кН, $Y_D = -10{,}8$ кН, $X_A = -26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = -42{,}6$ кН·м.

Знаки указывают, что силы $\bar{Y}_D$, $\bar{X}_A$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Пространственная произвольная система сил

Задание С.4. Определение реакций опор пространственной конструкции

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены двумя подшипниками в точках A и B, и двумя невесомыми стержнями *1*, *2* (рис. С.4.0, С.4.1) или же сферическим шарниром (или подпятником) в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем *1* (рис. С.4.2 –

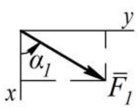
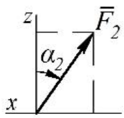
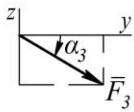
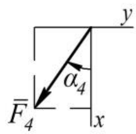
С.4.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1 = 10$ кН, вес меньшей плиты $P_3 = 5$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xAy – горизонтальная).

На плиты действуют: пара сил с моментом $M = 8$ кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С.4; при этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xAy, сила $\bar{F}_2$ – в плоскости, параллельной xAz, и сила $\bar{F}_3$ – в плоскости, параллельной yAz. Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B, и реакцию стержня *1* (стержней *1, 2*). При подсчетах принять $a = 0{,}5$ м.

Таблица С.4

Силы								
	$F_1 = 4$ кН		$F_2 = 6$ кН		$F_3 = 8$ кН		$F_4 = 10$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.
0	E	60	H	30	–	–	–	–
1	–	–	D	60	E	30	–	–

2	–	–	–	–	*K*	60	*E*	30
3	*K*	30	–	–	*D*	0	–	–
4	–	–	*E*	30	–	–	*D*	60
5	*H*	0	*K*	60	–	–	–	–
6	–	–	*H*	90	*D*	30	–	–
7	–	–	–	–	*H*	60	*K*	90
8	*D*	30	–	–	*K*	0	–	–
9	–	–	*D*	90	–	–	*H*	30

Указания. Задание С.4 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При решении задачи учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить её на две составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона $M_x\left(\bar{F}\right)=M_x\left(\bar{F}'\right)+M_x\left(\bar{F}''\right)$ и т.д.

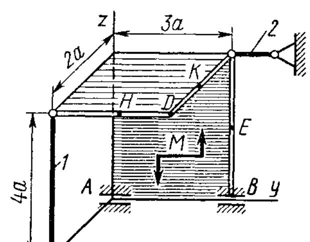


Рис. С.4.0

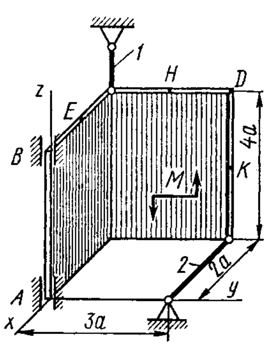


Рис. С.4.1

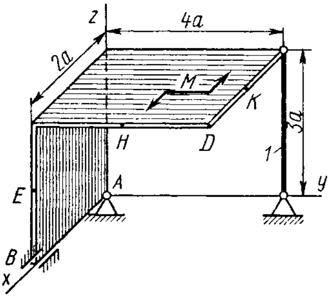


Рис. С.4.2

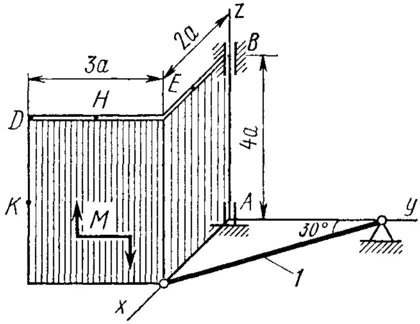


Рис. С.4.3

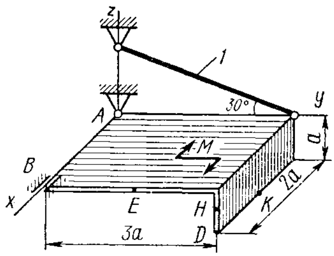


Рис. С.4.4

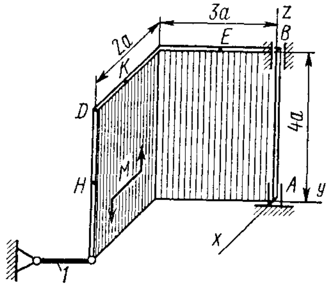


Рис. С.4.5

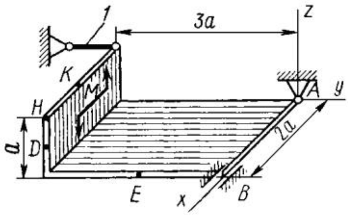


Рис. С.4.6

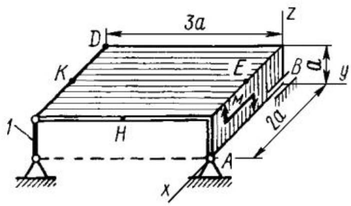


Рис. С.4.7

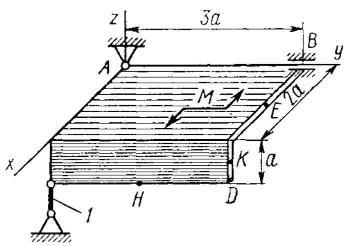


Рис. С.4.8

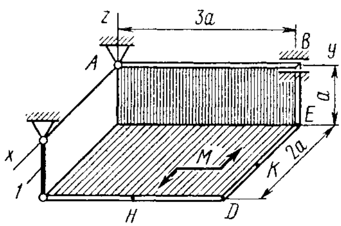


Рис. С.4.9

Пример С.4. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. С.4) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xAz, действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной yAz – пара сил с моментом M.

Дано: $P = 3$ кН, $F = 8$ кН, $M = 4$ кН·м, $\alpha = 60°$, $AC = 2a = 0{,}8$ м, $AB = 3a = 1{,}2$ м, $BE = EH = a = 0{,}4$ м.

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил.

Для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем её на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям x и z ($F' = F \cdot \cos\alpha$, $F'' = F \cdot \sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона. Аналогично можно разложить реакцию $\bar{N}$.

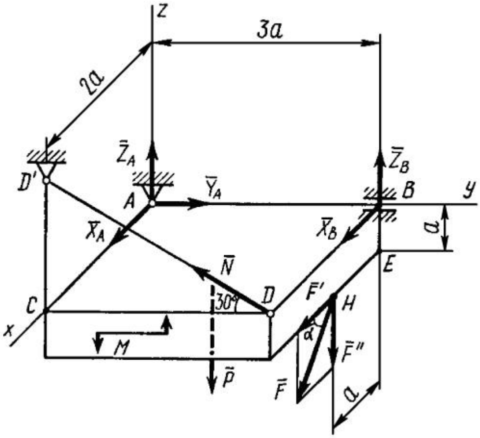


Рис. С.4

а) уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum F_{ix} = X_A + X_B + F\cos\alpha = 0\,; \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - N\cos 30° = 0\,; \tag{2}$$

$$\sum F_{iz} = Z_A + Z_B - P + N\sin 30° - F\sin\alpha = 0\,. \tag{3}$$

б) уравнения моментов сил относительно осей координат:

$$\sum M_x\left(\bar{F}_i\right) = M - P\cdot\frac{3a}{2} + Z_B\cdot 3a - F\sin\alpha\cdot 3a + N\sin 30°\cdot 3a = 0\,; \tag{4}$$

$$\sum M_y\left(\bar{F}_i\right) = P\cdot a - N\sin 30°\cdot 2a + F\sin\alpha\cdot a - F\cos\alpha\cdot a = 0\,; \tag{5}$$

$$\sum M_z\left(\bar{F}_i\right) = -F\cos\alpha\cdot 3a - N\cos 30°\cdot 2a - X_B\cdot 3a = 0\,. \tag{6}$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин, и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = 3{,}4$ кН; $Y_A = 5{,}1$ кН; $Z_A = 4{,}8$ кН; $X_B = -7{,}4$ кН; $Z_B = 2{,}1$ кН; $N = 5{,}9$ кН. Знак «минус» указывает, что реакция $\bar{X}_B$ направлена противоположно, показанной на рис. С.4.

Результирующие реакции опор A и B определяются по формулам:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}\,; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2}\,.$$

РАЗДЕЛ II

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки

Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

Задание К.1 включает в себя две задачи – К.1а и К.1б.

Задание К.1а. Точка B движется в плоскости xOy (рис. К.1.0 – К.1.9, табл. К.1; траектория точки на рисунках показана условно).

Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1\,\text{с}$ *определить* скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К.1 (для рис. К.1.0 – К.1.2 в столбце 2, для рис. К.1.3 – К.1.5 в столбце 3, для рис. К.1.6 –

К.1.9 в столбце 4). Как и в заданиях С.1 – С.4, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К.1 – по последней.

Задание К.1б. Точка движется по дуге окружности радиуса $R=2$ м по закону $s=f(t)$, заданному в табл. К.1 в столбце 5 (s – в метрах, t – в секундах), где $s=AM$ – расстояние точки от некоторого начала A, измеренное вдоль дуги окружности. *Определить* скорость и ускорение точки в момент времени $t_1=1$ с. Изобразить на рисунке векторы $\bar{\upsilon}$ и $\bar{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении M, а положительное направление отсчета s – от A к M.

Указания. Задание К.1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания её движения.

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1=1$ с. В некоторых вариантах задания К.1а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Таблица К.1

Номер условия	$y=f(t)$			$s=f(t)$
	рис. 0 – 2	рис. 3 – 5	рис. 6 – 9	
1	2	3	4	5

0	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$6t-2t^2$
3	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3t^2-10t$
7	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

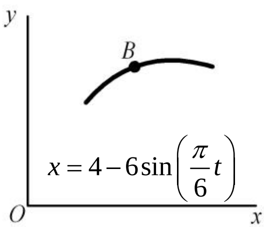


Рис. К.1.0

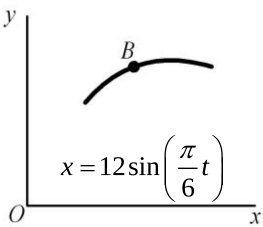


Рис. К.1.1

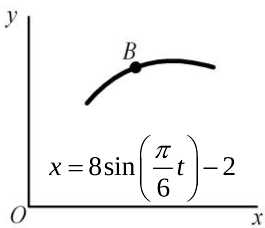
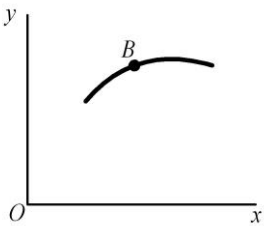
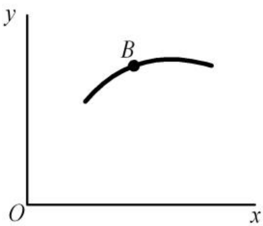
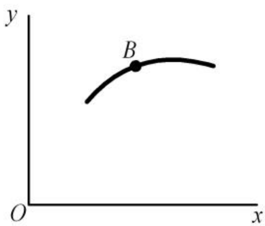


Рис. К.1.2







$x = 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$ $\qquad$ $x = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ $\qquad$ $x = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Рис. К.1.3 $\qquad$ Рис. К.1.4 $\qquad$ Рис. К.1.5

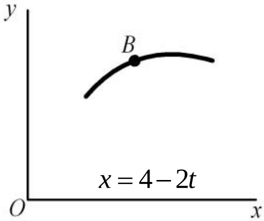


Рис. К.1.6

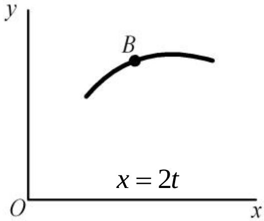


Рис. К.1.7

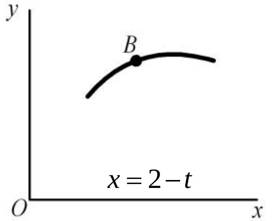


Рис. К.1.8

Пример К.1а. Даны уравнения движения точки в плоскости xOy:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

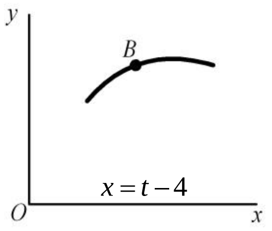


Рис. К.1.9

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с *найти* скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \tag{1}$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \ \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К.1а):

$$x = (y+1)^2 + 1. \tag{2}$$

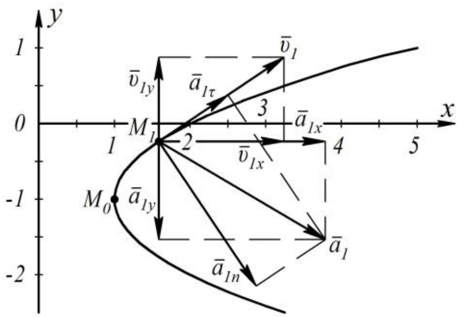


Рис. К.1а

2. Скорость точки найдем по её проекциям на координатные оси:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$\upsilon_{1x} = 1{,}11 \text{ см/с}, \ \upsilon_{1y} = 0{,}73 \text{ см/с}, \ \upsilon_1 = 1{,}33 \text{ см/с}. \tag{3}$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)$$

и при $t_1 = 1$ с

$$a_{1x} = 0{,}87 \text{ см/с}^2, \ a_{1y} = -0{,}12 \text{ см/с}^2, \ a_1 = 0{,}88 \text{ см/с}^2. \tag{4}$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$. Получим

$$2\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 2\upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dt} + 2\upsilon_y \frac{d\upsilon_y}{dt} ,$$

откуда

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\left|\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y\right|}{\upsilon} . \tag{5}$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1\text{ с}$ $a_{1\tau} = 0{,}66\text{ см/с}^2$.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1\text{ с}$ $a_{1n} = 0{,}58\text{ см/с}^2$.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \dfrac{\upsilon^2}{a_n}$. Подставляя сюда числовые значения υ_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1\text{ с}$ $\rho_1 = 3{,}05\text{ см}$.

Ответ: $\upsilon_1 = 1{,}33\text{ см/с}$, $a_1 = 0{,}88\text{ см/с}^2$, $a_{1\tau} = 0{,}66\text{ см/с}^2$, $a_{1n} = 0{,}58\text{ см/с}^2$, $\rho_1 = 3{,}05\text{ см}$.

Пример К.1б. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2\text{ м}$ и по закону $s = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = AM$ (рис. К.1б). Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1\text{ с}$.

Решение. Определяем скорость точки:

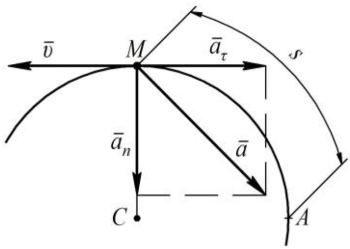


Рис. К.1б

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

При $t_1 = 1$ с получим

$$\upsilon_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1{,}11 \text{ м/с}.$$

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

При $t_1 = 1$ с получим, учтя, что $R = 2$ м,

$$a_{1\tau} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} = -0{,}87 \text{ см/с}^2,\ a_{1n} = \frac{\upsilon_1^2}{2} = \frac{\pi^2}{16} = 0{,}62 \text{ см/с}^2.$$

Тогда ускорение точки при $t_1 = 1$ с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16} = 1{,}07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рис. К.1б векторы $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{a}_1$, учитывая знаки υ_1 и $a_{1\tau}$, и считая положительным направление от A к M.

Задание К.2. Исследование вращательного движения твердого тела

Механизм состоит из ступенчатых колес *1–3*, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К.2.0 – К.2.9, табл. К.2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса *1* – $r_1 = 2$ см, $R_1 = 2$ см, у колеса *2* – $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса *3* – $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки A, B и C.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса *1,* $s_4(t)$ – закон движения рейки *4,* $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса *2,* $\upsilon_5(t)$ – закон изменения скорости груза *5* и т. д. (везде φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и υ_4, υ_5 – вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (υ – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (υ_5 – скорость груза *5* и т.д.).

Таблица К.2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4\left(7t - t^2\right)$	υ_B, υ_C	ε_2, a_A, a_5
1	$\upsilon_5 = 2\left(t^2 - 3\right)$	υ_A, υ_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	υ_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	υ_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	υ_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	υ_5, υ_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2\left(t^2 - 3t\right)$	υ_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5

7	$\upsilon_4 = 3t^2 - 8$	υ_A , ω_3	ε_3 , a_B , a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	υ_4 , ω_2	ε_1 , a_C , a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	υ_5 , υ_B	ε_2 , a_A , a_4

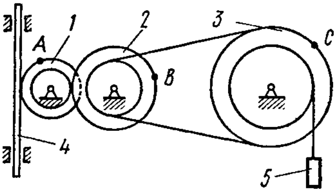


Рис. К.2.0

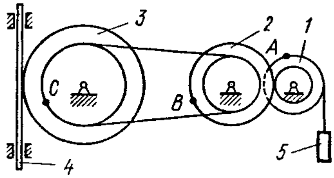


Рис. К.2.1

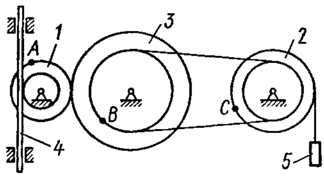


Рис. К.2.2

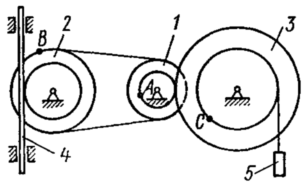


Рис. К.2.3

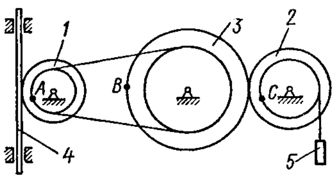


Рис. К.2.4

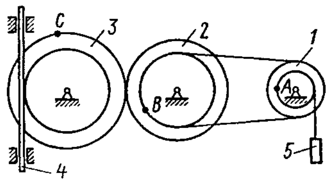


Рис. К.2.5

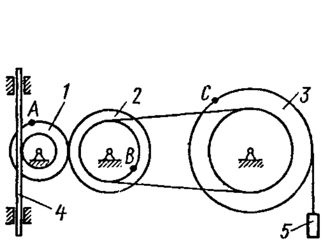


Рис. К.2.6

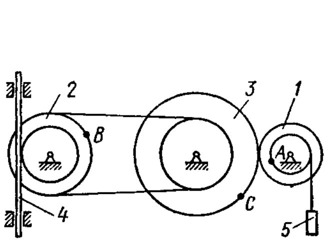


Рис. К.2.7

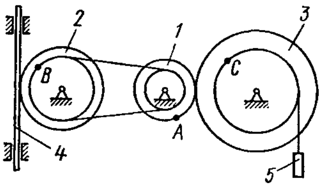


Рис. К.2.8

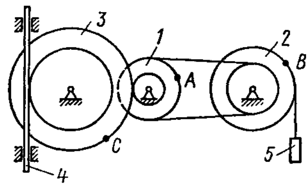


Рис. К.2.9

Указания. Задание К.2 – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример К.2. Рейка *1*, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_2, и колесо *3* радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. К.2). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), A – точка обода колеса *3*, $t_1 = 3$ с. *Определить:* ω_3, υ_4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

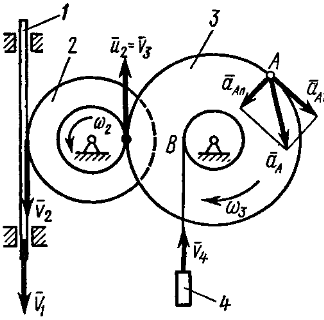


Рис. К.2

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через υ_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки *1*, находим её скорость:

$$\upsilon_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \quad (1)$$

Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то $\upsilon_2 = \upsilon_1$ или $\omega_2 R_2 = \upsilon_1$. Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = \upsilon_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим угловые скорости ω_2 и ω_3:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \quad (2)$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_3 = 6,75$ с$^{-1}$.

2. Определяем скорость υ_4 груза *4*. Так как $\upsilon_4 = \upsilon_B = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с $\upsilon_4 = 20,25$ см/с.

3. Определяем угловое ускорение ε_3 колеса *3*. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1,5t$. Тогда при $t_1 = 3$ с $\varepsilon_3 = 4,5$ с$^{-2}$.

4. Определяем полное ускорение a_A точки A. Для точки A $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где касательное a_A^τ и нормальное a_A^n ускорения определяются:

$$a_A^\tau = \varepsilon_3 R_3, \quad a_A^n = \omega_3^2 R_3 .$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с имеем

$$a_A^\tau = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_A^n = 364,5 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2} = 366,3 \text{ см/с}^2 .$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К.2.

Ответ: $\omega_3 = 6,75 \text{ с}^{-1}$; $\upsilon_4 = 20,25$ см/с; $\varepsilon_3 = 4,5 \text{ с}^{-2}$; $a_A = 366,3 \text{ см/с}^2$.

Плоское движение твердого тела

Задание К.3. Определение линейных и угловых скоростей и ускорений точек и звеньев механизма

Плоский механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна B или E (рис. К.3.0 – К.3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,6$ м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ, Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К.3а (для рис. К.3.0 – К.3.4) или в табл. К.3б (для рис. К.3.5 – К.3.9); при этом в табл. К.3б ω_1 и ω_4 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблице в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. К.3.0 следует отложить от DB против хода часовой стрелки и т.д.), а на рис. К.3.1 – по ходу часовой стрелки.

Построение чертежа надо начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К.3 (см. рис. К.3б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{\upsilon}_B$ и ускорение $\bar{a}_B$ – от точки B к b (на рис. К.3.0 – К.3.4).

Таблица К.3а (к рис. К.3.0 – К.3.4)

Номер условия	Углы, град.					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, $с^{-1}$	ε_1, $с^{-2}$	υ_B, м/с	a_B, м/с^2	υ точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	–	–	5	4	D, E	AB	A	AB

Таблица К.3б (к рис. К.3.5 – К.3.9)

Номер условия	Углы, град.					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, $с^{-1}$	ω_4, $с^{-1}$	υ точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	–	4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	–	B, E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	–	5	A, E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	–	D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	–	6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	–	B, E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	–	2	A, E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	–	D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	–	8	A, E	DE	A	AB

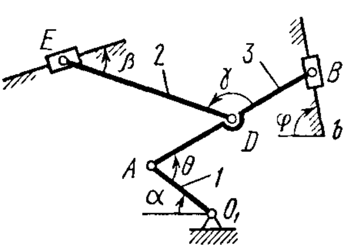


Рис. К.3.0

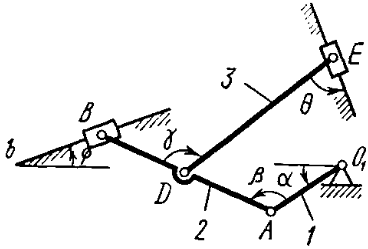


Рис. К.3.1

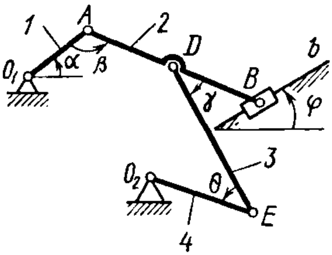


Рис. К.3.2

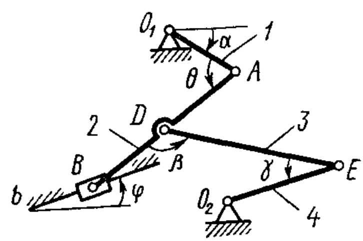


Рис. К.3.3

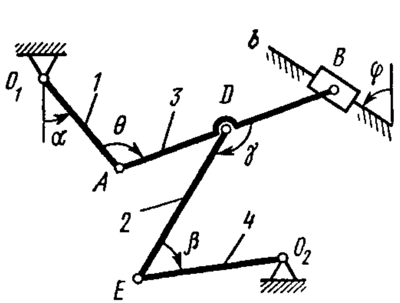


Рис. К.3.4

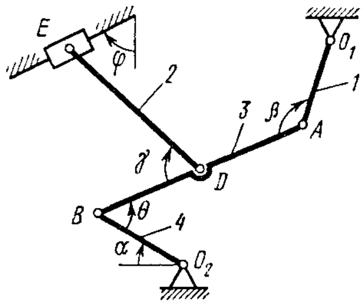


Рис. К.3.5

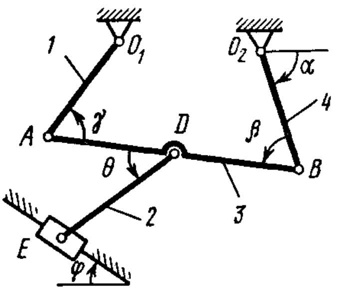


Рис. К.3.6

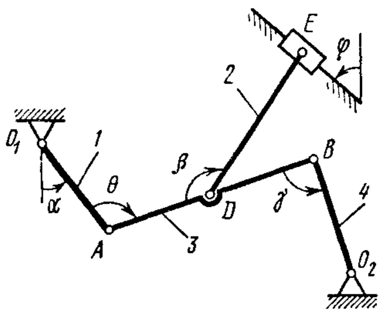


Рис. К.3.6 Рис. К.3.7

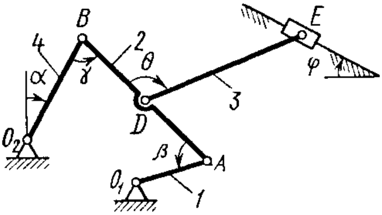


Рис. К.3.8

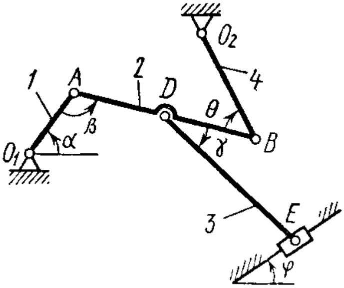


Рис. К.3.9

Указания. Задание К.3 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (МЦС) и теоремой о проекциях скоростей двух точек тела, применив их к каждому звену механизма в отдельности.

Определение скоростей точек механизма надо начинать с ведущего звена, угловая скорость которого задана. Поскольку ведущее звено *1* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = const$ (на примере для рис. К.3.8), то скорость точки A определяется по формуле:

$$\upsilon_A = \omega_1 \cdot O_1 A.$$

Вектор $\bar{\upsilon}_A$ приложен в точке A и направлен перпендикулярно радиусу $O_1 A$ в сторону вращения звена *1*.

Скорость точки B, принадлежащей звену AB, можно определить тремя способами: 1) с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС) звена AB; 2) с помощью теоремы о равенстве проекций скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки; 3) с помощью плана скоростей. Чаще всего используют метод МЦС, так как он позволяет легко определять скорости других точек этого эвена. Указанные способы используются и для определения скоростей точек D, E и др.

При определении ускорений точек механизма следует исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{AB} + \bar{a}^{n}_{AB}$, где A и B – точки звеньев механизма. Ускорение $\bar{a}_A$ или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка A движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^{n}_A$); ускорение $\bar{a}_B$ нужно определить. Аналогичные векторные уравнения составляются и при определении ускорений других точек механизма.

Так как угловая скорость ω_1 звена O_1A постоянна, то угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$, а также касательное ускорение $a^{\tau}_{O_1A} = 0$, поэтому $|\bar{a}_A| = |\bar{a}^{n}_{O_1A}| = a_A = \omega_1^2 \cdot O_1A$. Вектор ускорения $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ направлен перпендикулярно звену AB, а его модуль неизвестен. Ускорение a^{n}_{BA} известно и по величине, и по направлению. Оно равно $a^{n}_{BA} = \dfrac{\upsilon^2_{BA}}{AB}$, а вектор $\bar{a}^{n}_{BA}$ направлен параллельно стержню AB от точки B к точке A.

Пример К.3. Механизм (рис. К.3а) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $AD = DB$, $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и

ε_1 – против хода часовой стрелки). *Определить:* υ_B, υ_E, ω_2, a_B, ε_3.

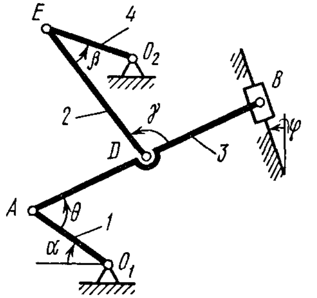


Рис. К.3а

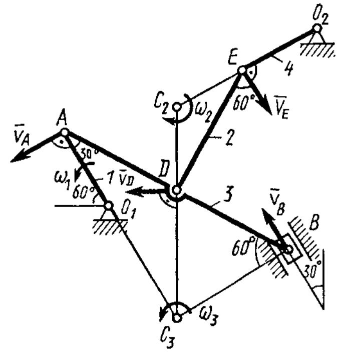


Рис. К.3б

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К.3б) и изображаем все векторы скоростей.

2. Определяем υ_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти υ_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{\upsilon}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{\upsilon}_A$ численно

$$\upsilon_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \bar{\upsilon}_A \perp O_1 A. \qquad (1)$$

Направление $\bar{\upsilon}_B$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{\upsilon}_A$ и направление $\bar{\upsilon}_B$ воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{\upsilon}_B$ (*проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки*). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$\upsilon_B \cos 30° = \upsilon_A \cos 60° \quad \text{и} \quad \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{2}$$

3. Определяем $\bar{\upsilon}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{\upsilon}_E$ надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержням AB и DE. Для этого, зная направления $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$, восставленных из точек A и B (вектор $\bar{\upsilon}_A$ перпендикулярен стержню *1*). По направлению вектора $\bar{\upsilon}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС (точка C_3). Вектор $\bar{\upsilon}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину $\bar{\upsilon}_D$ найдем из пропорции

$$\frac{\upsilon_D}{C_3D} = \frac{\upsilon_B}{C_3B}. \tag{3}$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B заметим, что треугольник AC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°. Поэтому $C_3B = AB\sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда треугольник BC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D.$ В результате равенство (3) даёт

$$\upsilon_D = \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \quad \upsilon_D \perp C_3D. \tag{4}$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2 то $\bar{\upsilon}_E \perp O_2E$. Тогда, восстанавливая из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{\upsilon}_E$ и $\bar{\upsilon}_D$ построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\bar{\upsilon}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\bar{\upsilon}_E$

направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К.3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D.$ Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{\upsilon_E}{C_2E} = \frac{\upsilon_D}{C_2D}, \quad \upsilon_E = \upsilon_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{5}$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня *2* известен (точка C_2) и $C_2D = \dfrac{l_2}{2\cos 30^\circ} = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \tag{6}$$

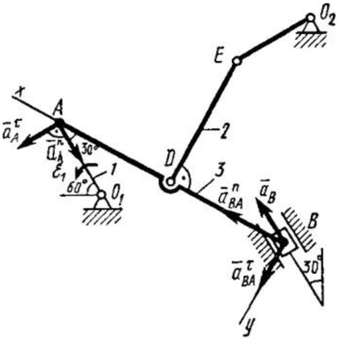


Рис. К.3в

5. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. К.3в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\bar{a}_B$ надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где численно

$$\begin{aligned} a_A^\tau &= \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2; \\ a_A^n &= \omega_1^2 \cdot l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, $\bar{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К.3в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar{\upsilon}_B$.

Для определения ускорения $\bar{a}_B$, примем за полюс точку A звена AB и составим векторное уравнение

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n} = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar{a}_{BA}^{n}$ (вдоль звена AB от B к A) и $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ (в любую сторону перпендикулярно звену AB); численно $a_{BA}^{n} = \omega_3^2 \cdot l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня *3*, получим

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_A}{C_3A} = \frac{\upsilon_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66\ \text{с}^{-1} \quad \text{и} \quad a_{BA}^{n} = 0,61\ \text{м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^{τ}; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\bar{a}_{BA}^{\tau}$. Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^{\tau} \cos 60^\circ - a_A^{n} \cos 30^\circ + a_{BA}^{n}. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72\ \text{м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar{a}_B$ направлен, как показано на рис. К.3в.

6. Определяем угловое ускорение ε_3 звена *3*. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^{τ}. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное AB (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^{\tau} \sin 60^\circ + a_A^{n} \sin 30^\circ + a_{BA}^{\tau}. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^{\tau} = -3{,}58$ м/с^2.

Знак указывает, что действительное направление $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ противоположно показанному на рис. К.3в.

Теперь из равенства $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{l_3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $\upsilon_B = 0{,}46$ м/с; $\upsilon_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$; $a_B = 0{,}72$ м/с^2; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ с$^{-2}$.

Примечание. Если точка B, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К.3.5 – К.3.9, где B движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\bar{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\bar{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar{a}_B = \bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_B^{n}$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_B^{n} = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}. \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}_B^{n}$ (см., например, рис. К.3.9) будет направлен вдоль O_2B, а вектор $\bar{a}_B^{\tau}$ – перпендикулярно O_2B в любую сторону. Числовые значения a_A^{τ}, a_A^{n} и a_{BA}^{n} определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^{\tau} = 0$ или $a_A^{n} = 0$, если точка A движется прямолинейно).

Значение a_B^n также вычисляется по формуле $a_B^n = \frac{\upsilon_B^2}{\rho} = \frac{\upsilon_B^2}{l}$, где l – радиус окружности O_2B, а υ_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ, и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^τ, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{\left(a_B^\tau\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2}$. Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Сложное движение точки

Задание К.4. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Круглая пластина радиуса $R = 60$ см (рис. К.4.0 – К.4.4) или прямоугольная пластина (рис. К.4.5 – К.4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$ заданному в табл. К.4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости).

По окружности радиуса R (рис. К.4.0 – К.4.4) или по пластине вдоль прямой BD (рис. К.4.5 – К.4.9) движется точка M; закон её относительного движения, т.е. зависимость

$s = AM = f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. К.4.0 – К.4.4 и для рис. К.4.5 – К.4.9; там же даны размеры l и b. На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указания. Задание К.4 – на сложное движение точки. Для решения задачи необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1$ с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. К.4.0 – К.4.4, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица К.4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. К.4.0 – К.4.4		Для рис. К.4.5 – К.4.9	
		l	$s = AM = f_2(t)$	b, см	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$	12	$50(3t - t^2) - 64$
1	$3t^2 - 8t$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$

2	$6t^3-12t^2$	R	$\frac{\pi}{3}R\left(2t^2-1\right)$	10	$80\left(t^2-t\right)+40$
3	t^2-2t^3	R	$\frac{\pi}{6}R\left(3t-t^2\right)$	16	$60\left(t^4-3t^2\right)+56$
4	$10t^2-5t^3$	R	$\frac{\pi}{3}R\left(t^3-2t\right)$	8	$80\left(2t^2-t^3\right)-48$
5	$2\left(t^2-t\right)$	R	$\frac{\pi}{6}R\left(t^3-2t\right)$	20	$60\left(t^3-2t^2\right)$
6	$5t-4t^2$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R\left(t^3-2t^2\right)$	12	$40\left(t^2-3t\right)+32$
7	$15t-3t^3$	R	$\frac{\pi}{6}R\left(t-5t^2\right)$	8	$60\left(t-t^3\right)+24$
8	$2t^3-11t$	R	$\frac{\pi}{3}R\left(3t^2-t\right)$	10	$50\left(t^3-t\right)-30$
9	$6t^2-3t^3$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R\left(t-2t^2\right)$	20	$40\left(t-2t^3\right)-40$

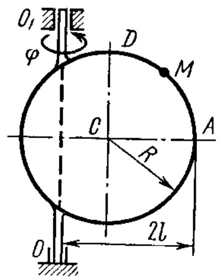


Рис. К.4.0

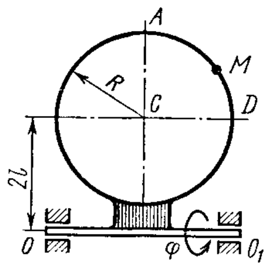
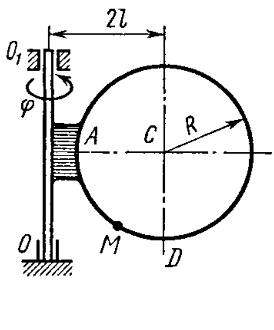


Рис. К.4.1



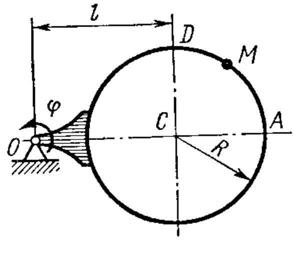


Рис. К.4.2 Рис. К.4.3

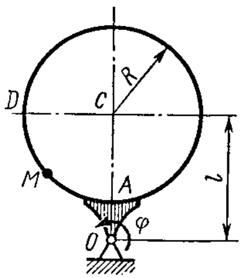


Рис. К.4.4

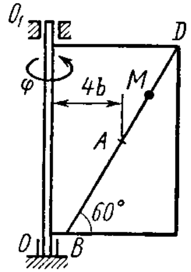


Рис. К.4.5

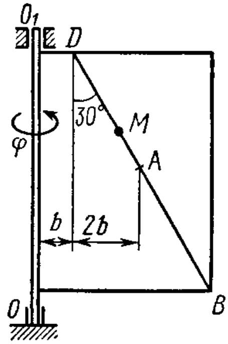


Рис. К.4.6

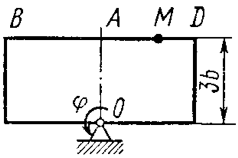


Рис. К.4.7

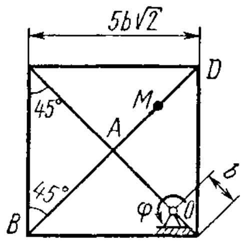


Рис. К.4.8

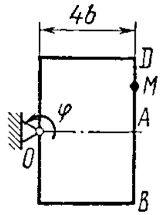


Рис. К.4.9

Рассмотрим два примера решения этого задания.

Пример К.4а. Пластина $OEAB_1D$ ($OE = OD$, рис. К.4а) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К.4а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса движется точка R по закону $s = AB = f_2(t)$ (положительное направление отсчета s – от A к B).

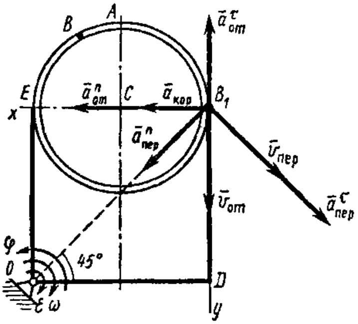


Рис. К.4а

Дано: $R = 0{,}5$ м, $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$, $s = \pi R\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах).

Определить: $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая её движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{\upsilon}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн}, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$$

Определим все, входящие в равенства (1) величины.

1. *Относительное движение.* Это движение происходит по закону

$$s = AB = \pi R\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right). \tag{2}$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1. Подставляя в уравнении (2) $t_1 = 2$ с, получим

$$s_1 = \pi R\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}5\pi R.$$

Тогда $$\angle ABC = \frac{s_1}{R} = -0{,}5\pi .$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка B в момент $t_1 = 2$ с находится справа от точки A. Изображаем её на рис. К.4а в этом положении (точка B_1).

Теперь находим числовые значения $\upsilon_{отн}$, $a^{\tau}_{отн}$, $a^{n}_{отн}$.

$$\upsilon_{отн} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right),$$

$$a^{\tau}_{отн} = \dot{\upsilon}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad a^{n}_{отн} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{\rho_{отн}} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{R},$$

где $\rho_{отн}$ – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R. Для момента $t_1 = 2$ с, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим

$$\upsilon_{отн} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12} = -1{,}42 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{отн} = \dot{\upsilon}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi^3}{36} = 0{,}86 \text{ м/с}^2, \quad a^{n}_{отн} = \frac{\pi^4}{24} = 4{,}06 \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}^{\tau}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ – в противоположную сторону; вектор $\bar{a}^{n}_{отн}$ направлен к центру C окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К.4а.

2. *Переносное движение.* Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1{,}5t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при $t_1 = 2$ с $$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = -4 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ; отметим это на рис. К.4а.

Для определения $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O. Из рисунка видно, что $h_1 = 2R\sqrt{2} = 1,41$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4), получим

$$\upsilon_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 2,82 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2, \quad a^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2. \tag{5}$$

Изображаем на рис. К.4а векторы $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ с учетом направлений ω и ε, и вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ (направлен к оси вращения).

3. *Кориолисово ускорение.* Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле $a_{кор} = 2|\omega| \cdot |\upsilon_{отн}| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) и вектором $\bar{\upsilon}_{отн}$. В нашем случае этот угол равен 90°, так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$. Численно в момент времени $t_1 = 2$ с, так как в этот момент $|\upsilon_{отн}| = 1,42$ м/с и $|\omega| = 2 \text{ с}^{-1}$, получим

$$a_{кор} = 5,68 \text{ м/с}^2. \tag{6}$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н.Е. Жуковского: так как вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω, т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\bar{a}_{кор}$ на рис. К.4а. Иначе направление $\bar{a}_{кор}$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_{кор} = 2[\bar{\omega} \times \bar{\upsilon}_{отн}]$.

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. *Определение* $\upsilon_{абс}$. Проведем координатные оси B_1xy (см. рис. К.4а) и спроектируем почленно обе части равенства $\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$\upsilon_{абс\ x} = \upsilon_{отн\ x} + \upsilon_{пер\ x} = 0 - \left|\upsilon_{пер}\right| \cos 45° = -1,99 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_{абс\ y} = \upsilon_{отн\ y} + \upsilon_{пер\ y} = \left|\upsilon_{отн}\right| + \left|\upsilon_{пер}\right| \cos 45° = 3,41 \text{ м/с}.$$

После этого находим

$$\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{абс\ x} + \upsilon^2_{абс\ y}} = 3,95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\bar{\upsilon}_{отн}$ и $\bar{\upsilon}_{пер}$ равен 45°, значение $\upsilon_{абс}$ можно так же определить по формуле

$$\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{отн} + \upsilon^2_{пер} + 2\left|\upsilon_{отн}\right| \cdot \left|\upsilon_{пер}\right| \cdot \cos 45°} = 3,95 \text{ м/с}.$$

5. *Определение* $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн} + \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{абс}$ спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси B_1xy. Получим

$$a_{абс\ x} = a^n_{отн} - \left|a^{\tau}_{пер}\right| \cos 45° + a^n_{пер} \cos 45° + a_{кор},$$

$$a_{абс\ y} = -\left|a^{\tau}_{отн}\right| + \left|a^{\tau}_{пер}\right| \cos 45° + a^n_{пер} \cos 45°.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени $t_1 = 2$ с, найдем, что в этот момент

$$a_{абс\ x} = 9,74 \text{ м/с}^2, \quad a_{абс\ y} = 7,15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда $$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абс\ x} + a^2_{абс\ y}} = 12,08 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{абс} = 3{,}95$ м/с; $a_{абс} = 12{,}08$ м/с^2.

Пример К.4б. Треугольная пластина ADE вращается вокруг оси z по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К.4б дуговой стрелкой). По гипотенузе AD движется точка B по закону $s = AB = f_2(t)$; положительное направление отсчета s – от A к D.

Дано: $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$, $s = AB = 2 + 15t - 3t^2$ (φ – в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить: $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая её движение по прямой AD относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость $\bar{\upsilon}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}$.

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. *Относительное движение*. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2. \tag{2}$$

Поэтому

$$\upsilon_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t, \quad a_{отн} = \dot{\upsilon}_{отн} = -6.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см}, \quad \upsilon_{отн} = 3 \text{ см/с}, \quad a_{отн} = -6 \text{ см/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{a}_{отн}$ – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. К.4б.

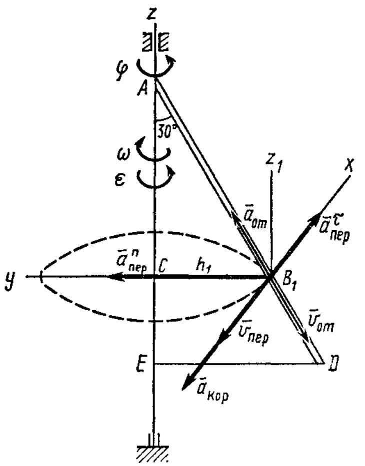


Рис. К.4б

2. *Переносное движение*. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 0{,}3t^2 - 2{,}2\,, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 0{,}6t$$

и при $t_1 = 2$ с,

$$\omega = -1\ \text{с}^{-1}, \quad \varepsilon = 1{,}2\ \text{с}^{-2}. \tag{4}$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. К.4б соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения z: $h_1 = AB_1 \sin 30° = 10$ см. Тогда в момент $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4)

$$\upsilon_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 10\ \text{см/с},$$

$$a_{пер}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12\ \text{см/с}^2, \quad a_{пер}^{n} = \omega^2 \cdot h_1 = 10\ \text{см/с}^2. \tag{5}$$

Изобразим на рис. К.4б векторы $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ (с учетом знаков ω и ε) и $\bar{a}^{n}_{пер}$; направлены векторы $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ перпендикулярно плоскости ADE, а вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ – по линии B_1C к оси вращения.

3. *Кориолисово ускорение*. Так как угол между вектором $\bar{\upsilon}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 30°, то численно в момент времени $t_1 = 2$ с

$$a_{кор} = 2|\omega| \cdot |\upsilon_{отн}| \cdot \sin 30° = 3 \text{ см/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н.Е. Жуковского. Для этого вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\bar{a}^{n}_{пер}$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\bar{a}_{кор}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\bar{\upsilon}_{пер}$ (см. рис. К.4б).

4. *Определение* $\upsilon_{абс}$. Так как $\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}$, а векторы $\bar{\upsilon}_{отн}$ и $\bar{\upsilon}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то $\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{отн} + \upsilon^2_{пер}}$; в момент времени $t_1 = 2$ с $\upsilon_{абс} = 10,44$ см/с.

5. *Определение* $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{абс}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\bar{a}_{абс}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ и $\bar{a}_{кор}$ лежат на оси x, а векторы $\bar{a}^{n}_{пер}$ и $\bar{a}_{отн}$ расположены в плоскости B_1yz_1, т.е. в плоскости пластины. Тогда, проектируя обе части равенства (7) на оси B_1xyz_1 и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$a_{абс\ x} = -\left|a^{\tau}_{пер}\right| - a_{кор} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{абс\ y} = \left|a_{отн}\right| \sin 30° + a^{n}_{пер} = 13 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{абс\ y} = \left|a_{отн}\right| \cos 30° = 5{,}20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{абс}$

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абс\ x} + a^2_{абс\ y} + a^2_{абс\ z}} = 16{,}64 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{абс} = 10{,}44$ см/с, $a_{абс} = 16{,}64$ см/с^2.

РАЗДЕЛ III

ДИНАМИКА

Динамика материальной точки

Задание Д.1. Составление и решение дифференциальных уравнений движения материальной тачки

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д.1.0 – Д.1.9, табл. Д.1).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\bar{Q}$ (её направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\bar{R}$, зависящая от скорости $\bar{\upsilon}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0{,}2$) и переменная сила $\bar{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

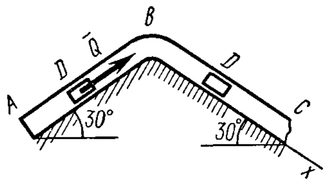
Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Указания. Задание Д.1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x, учтя, что

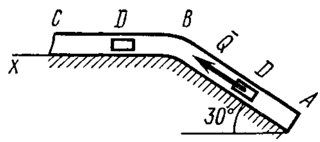
$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dx}.$$

Таблица Д.1

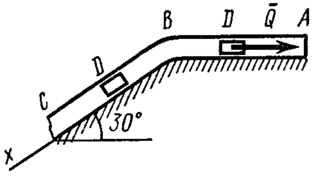
Номер условия	m, кг	υ_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0,4\upsilon$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0,8\upsilon^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	24	9	$0,5\upsilon$	–	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0,6\upsilon^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0,4\upsilon$	–	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0,5\upsilon^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3\upsilon$	–	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8\upsilon^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0,5\upsilon$	–	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0,2\upsilon^2$	4	–	$-6\sin(4t)$



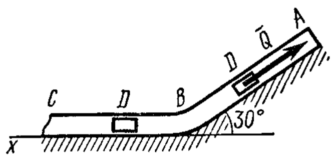
Д.1.0



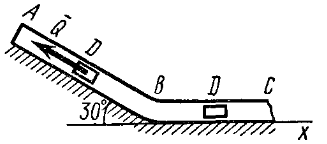
Д.1.1



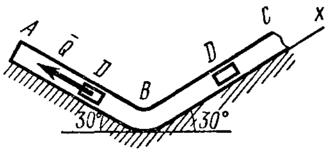
Д.1.2



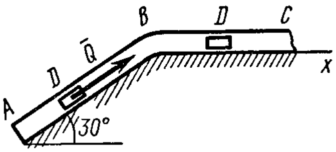
Д.1.3



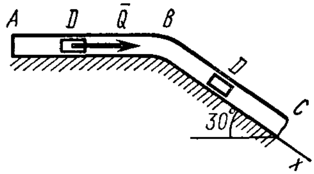
Д.1.4



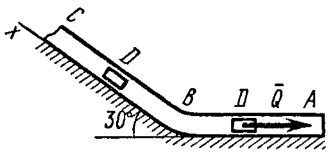
Д.1.5



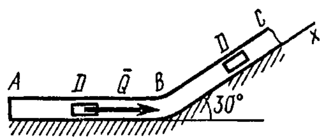
Д.1.6



Д.1.7



Д.1.8

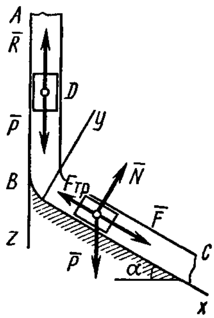


Д.1.9

Пример Д.1. На вертикальном участке AB трубы (рис. Д.1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления среды $\bar{R}$; расстояние от точки A, где $\upsilon = \upsilon_0$, до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 2$ кг, $\upsilon_0 = 5$ м/с, $l = 2{,}5$ м, $R = \mu\upsilon^2$, где $\mu = 0{,}4$ кг/м, $F_x = 16\sin(4t)$.

Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке BC.



Д.1

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ и сопротивления среды $\bar{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d\upsilon_z}{dt} = \sum F_{iz} \quad \text{или} \quad m\frac{d\upsilon_z}{dt} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu\upsilon^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $\upsilon_z = \upsilon$, получим

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = mg - \mu\upsilon^2 \quad \text{или} \quad \upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - \upsilon^2\right). \qquad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0,2\ \text{м}^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50\ \text{м}^2/\text{с}^2, \qquad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2\upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = -2k\left(\upsilon^2 - n\right). \qquad (4)$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2\upsilon d\upsilon}{\left(\upsilon^2 - n\right)} = -2kdz \quad \text{и} \quad \ln\left|\upsilon^2 - n\right| = -2kz + C_1. \qquad (5)$$

По начальным условиям при $z=0$ $\upsilon=\upsilon_0$, определяем постоянную интегрирования $C_1=\ln\left|\upsilon_0^2-n\right|$ и из равенства (5) находим

$$\ln\left|\upsilon^2-n\right|=-2kz+\ln\left|\upsilon_0^2-n\right| \quad \text{или} \quad \ln\left|\upsilon^2-n\right|-\ln\left|\upsilon_0^2-n\right|=-2kz.$$

Отсюда $$\ln\frac{\upsilon^2-n}{\upsilon_0^2-n}=-2kz \quad \text{и} \quad \frac{\upsilon^2-n}{\upsilon_0^2-n}=e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$\upsilon^2=n+\left(\upsilon_0^2-n\right)e^{-2kz}. \tag{6}$$

Полагая в равенстве (6) $z=l=2{,}5$ м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость υ_B груза в точке B ($\upsilon_0=5$ м/с, число $e=2{,}7$):

$$\upsilon_B^2=50-25e^{-1} \quad \text{и} \quad \upsilon_B=6{,}4 \text{ м/с}. \tag{7}$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC; найденная скорость υ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\upsilon_0=\upsilon_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P}=m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{тр}$ и $\bar{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By, и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=P_x+N_x+F_{тр\,x}+F_x$$

или

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=mg\sin\alpha-F_{тр}+F_x, \tag{8}$$

где $F_{тр}=fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By. Так как $a_y=0$, получим $0=N-mg\cos\alpha$, откуда $N=mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр}=fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x=16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) + 16\sin\left(4t\right). \qquad (9)$$

Разделим обе части равенства (9) на m, вычислим $g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) = \ = g\left(\sin 30° - 0,2\cos 30°\right) = 3,2$; $16/m = 8$. Тогда уравнение (9) примет вид:

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 3,2 + 8\sin\left(4t\right). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$\upsilon_x = 3,2t - 2\cos\left(4t\right) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0 = \upsilon_B$, где υ_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), определим постоянную интегрирования

$$C_2 = \upsilon_B + 2\cos\left(0\right) = 8,4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) примет вид:

$$\upsilon_x = 3,2t - 2\cos\left(4t\right) + 8,4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1,6t^2 - 0,5\sin\left(4t\right) + 8,4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно *искомый закон движения груза* будет

$$x = 1,6t^2 - 0,5\sin\left(4t\right) + 8,4t, \qquad (14)$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Динамика механической системы

Задание Д.6. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система состоит из грузов *1* и *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней $R_3 = 0,3$ м, $r_3 = 0,1$ м и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0,2$ м, блока *4* радиуса $R_4 = 0,2$ м и катка (или подвижного блока) *5* (рис. Д.6.0 – Д.6.9, табл. Д.6); тело *5* считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока *4* – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0,1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив *3* (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив *3* действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

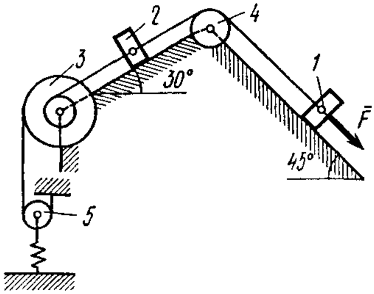
Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным $s_1 = 0,2$ м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы Д.6, где обозначено: υ_1, υ_2, υ_{C5} – скорости грузов *1, 2* и центра масс тела *5* соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел *3* и *4*.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток *5* на рис. Д.6.5), катятся по плоскостям без скольжения.

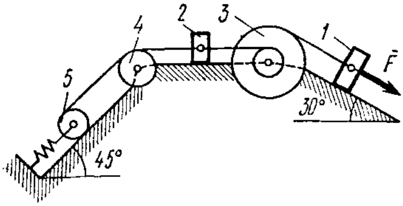
На всех рисунках не изображать груз *2*, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица Д.6

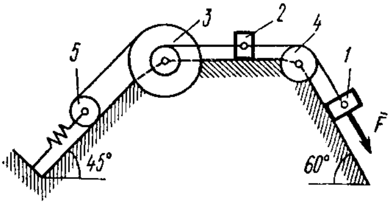
Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н$\cdot$м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	υ_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	υ_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	υ_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	υ_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	υ_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	υ_{C5}



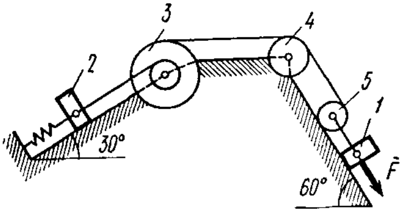
Д.6.0



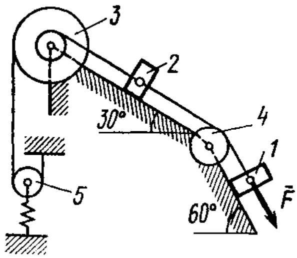
Д.6.1



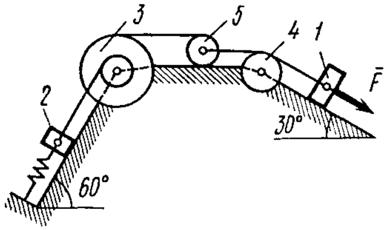
Д.6.2



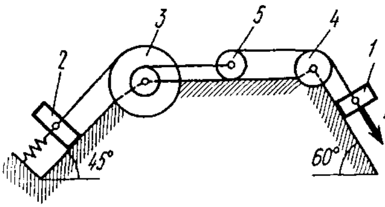
Д.6.3



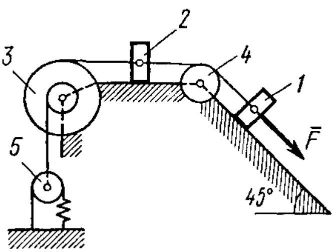
Д.6.4



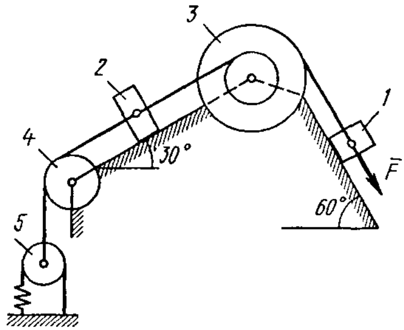
Д.6.5



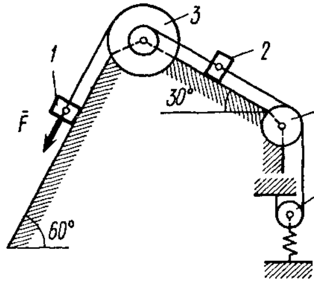
Д.6.6



Д.6.7



Д.6.8



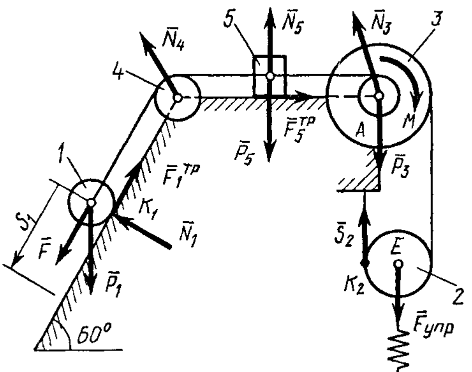
Д.6.9

Указания. Задание Д.6 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

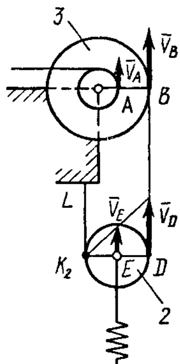
Пример Д.6. Механическая система (рис. Д.6а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка *1*, подвижного блока *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3, и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока *4* и груза *5* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3*. К центру E блока *2* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; её начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки её приложения. На шкив *3* при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}2$ м, $c = 240$ Н/м, $M = 0{,}6$ Н$\cdot$м, $F = 20(3+2s)$ Н, $f = 0{,}1$, $s_1 = 0{,}2$ м. *Определить:* угловую скорость ω_3 шкива *3* в тот момент времени, когда $s = s_1$.



Д.6а



Д.6б

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *1*, *3*, *5* и невесомых тел *2*, *4*, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}$, $\bar{F}_{упр}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$, реакции $\bar{N}_1$, $\bar{N}_3$, $\bar{N}_4$, $\bar{N}_5$, натяжение нити $\bar{S}_2$, силы трения $\bar{F}_{тр1}$, $\bar{F}_{тр2}$ и момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Для определения угловой скорости ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j , \tag{1}$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^e$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещение системы из начального положение в конечное; $\sum A_i^j$ – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями,

$$\sum A_i^j = 0 .$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^e . \tag{2}$$

2. Определяем T. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 . \tag{3}$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело 5 – поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{m_1 \upsilon_{C1}^2}{2} + \frac{I_{C1}\omega_1^2}{2}; \quad T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \quad T_1 = \frac{m_5 \upsilon_{C5}^2}{2} . \tag{4}$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $\upsilon_{C1} = \upsilon_5 = \upsilon_A$ где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива *3* и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка *1* радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$\upsilon_{C1} = \upsilon_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{\upsilon_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{\upsilon_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \tag{5}$$

Кроме того, входящие в (4) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = \frac{m_1 r_1^2}{2}; \quad I_3 = m_3 \rho_3^2. \tag{6}$$

Подставив все величины (5) и (6) в равенства (4), а затем, используя равенство (3), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \tag{7}$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка *1* пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза *5* ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива *3*, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s)\,ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ;$$

$$A(\bar{F}_{тр}) = -F_{тр} s_5 = -f P_5 s_1;$$

$$A(M) = -M \varphi_3;$$

$$A(\bar{F}_{упр}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\bar{N}_1$, $\bar{F}_{тр1}$ и $\bar{S}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\bar{P}_3$, $\bar{N}_3$ и $\bar{N}_4$ – неподвижны; а реакция $\bar{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$ где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $\omega_3 = \dfrac{\upsilon_A}{r_3} = \dfrac{\upsilon_{C1}}{r_3}$, (равенство $\upsilon_{C1} = \upsilon_A$ уже отмечалось), то $\varphi_3 = \dfrac{s_1}{r_3}$.

Далее, из рис. Д.6б видно, что $\upsilon_D = \upsilon_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока *2* (он как бы «катится» по участку нити K_2L), то $\upsilon_E = 0,5\upsilon_D = 0,5\omega_3 R_3$; следовательно, $\lambda_1 = s_E = \ = 0,5\varphi_3 R_3 = \dfrac{s_1}{2r_3} R_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

$$\sum A_i^a = 20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - cs_1^2 \frac{R_3^2}{8r_3^2}. \qquad (8)$$

Подставляя выражения (7) и (8) в уравнение (2), придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 =$$

$$= 20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - \frac{M}{r_3}s_1 - cs_1^2\frac{R_3^2}{8r_3^2}. \qquad (9)$$

Из равенства (9), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3. *Ответ:* $\omega_3 = 8{,}1\ \text{с}^{-1}$.

Аналитическая механика

Задание Д.8. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

Вертикальный вал AK (рис. Д.8.0 – Д.8.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\ \text{с}^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д.8 в столбце 2 ($AB = BD = DE = EK = a$). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10\ \text{кг}$, состоящий из частей *1* и *2* (размеры частей стержня показаны на рисунках, где $b = 0{,}1\ \text{м}$, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой $m_3 = 3\ \text{кг}$ на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α, β, γ, φ даны в столбцах 5–8.

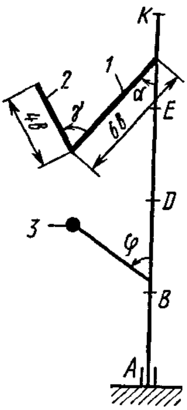
Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять $a = 0{,}6\ \text{м}$.

Таблица Д.8

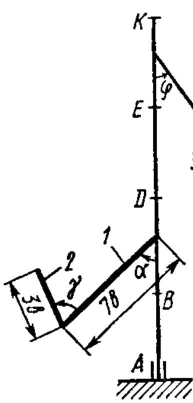
<table>
<tr><td rowspan="2">Номер условия</td><td rowspan="2">Подшипник в точке</td><td colspan="2">Крепление в точке</td><td rowspan="2">α, град</td><td>γ, град</td><td>β, град</td><td rowspan="2">φ, град</td></tr>
<tr><td>ломаного стержня</td><td>невесомого стержня</td><td>рис. 0 – 4</td><td>рис. 5 – 9</td></tr>
</table>

1	2	3	4	5	6	7	8
0	*B*	*D*	*K*	45	225	135	60
1	*K*	*B*	*D*	60	150	240	45
2	*K*	*E*	*B*	30	120	210	60
3	*D*	*K*	*B*	60	240	150	30
4	*K*	*D*	*E*	30	210	120	60
5	*E*	*B*	*K*	45	135	225	60
6	*E*	*D*	*K*	60	150	60	30
7	*K*	*B*	*E*	30	120	30	60
8	*D*	*E*	*K*	60	60	150	30
9	*E*	*K*	*D*	30	210	120	60

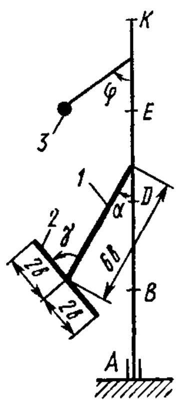
Указания. Задание Д.8 – на применение принципа Даламбера к определению реакций связей. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела $\bar{\Phi}_i$ (в данном задании стержня) имеют равнодействующую $\bar{\Phi}$, то численно $\Phi = ma_C$, где a_C – ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\bar{\Phi}$ в общем случае не проходит через точку C (см. пример Д.8).



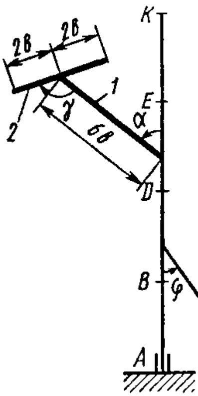
Д.8.0



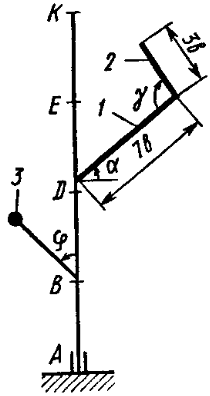
Д.8.1



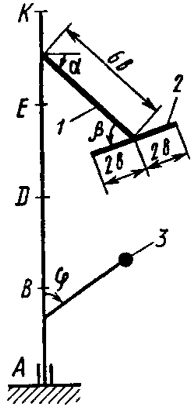
Д.8.2



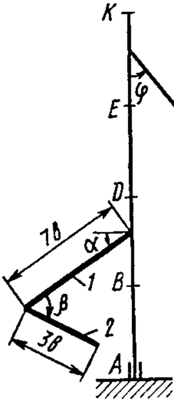
Д.8.3



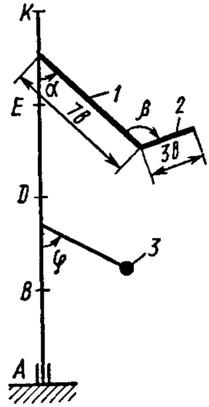
Д.8.4



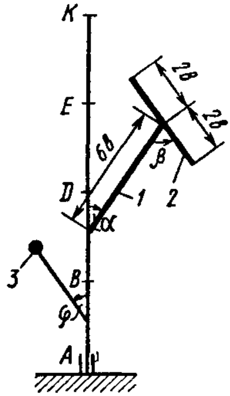
Д.8.5



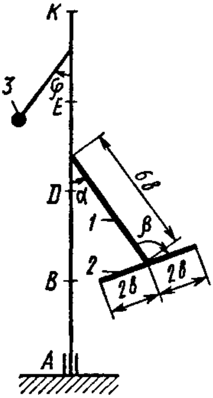
Д.8.6



Д.8.7



Д.8.8

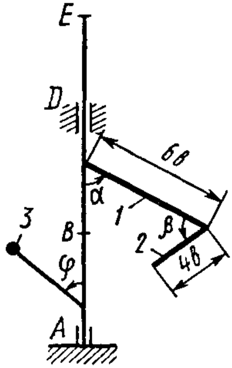


Д.8.9

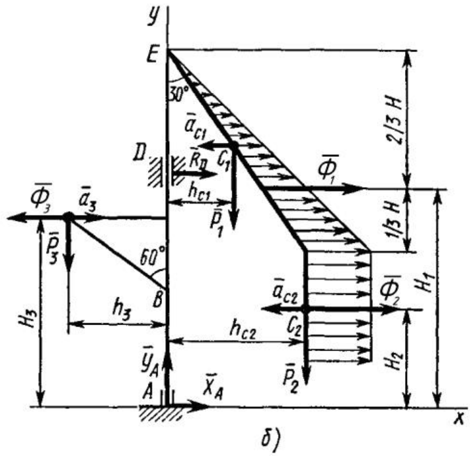
Пример Д.8. Вертикальный вал длиной $3a$ ($AB = BD = DE = a$), закрепленный подпятником A и подшипником D (рис. Д.8а), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей *1* и *2*, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: $\omega = 8$ с$^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг, $m_3 = 2$ кг, $\alpha = 30°$, $\beta = 150°$, $\varphi = 60°$, $a = 0,3$ м, $b = 0,1$ м. *Определить:* реакции подпятника A и подшипника D пренебрегая весом вала.

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. Д.8б). Массы и веса частей *1* и *2* ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны $m_1 = 0,6m$, $m_2 = 0,4m$.



Д.8а



Д.8б

$$P_1 = 0,6mg\ ; \quad P_2 = 0,4mg\ ; \quad P_3 = m_3 g\ . \qquad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Axy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ и реакции связей – составляющие реакции подпятника $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\bar{R}_D$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{ni}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{ni} = \omega^2 h_i$, где h_i – расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\bar{\Phi}_i$ будут направлены от оси вращения, а численно $\Phi_i = \Delta m_i a_{ni} = \Delta m_i \omega^2 h_i$, где Δm_i – масса элемента. Так как все Φ_i пропорциональны h_i то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части *1* треугольник, а для части *2* – прямоугольник (рис. Д.8б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим её равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $\Phi = ma_C$, где m – масса тела, a_C – ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$\Phi_1 = m_1 a_{C1}; \quad \Phi_2 = m_2 a_{C2}. \tag{2}$$

Сила инерции точечной массы *3* должна быть направлена в сторону, противоположную её ускорению и численно будет равна

$$\Phi_3 = m_3 a_3. \tag{3}$$

Ускорения центров масс частей *1* и *2* стержня и груза *3* равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}; \quad a_{C2} = \omega^2 h_{C2}; \quad a_3 = \omega^2 h_3, \tag{4}$$

где h_{C1}, h_{C2} – расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 – соответствующее расстояние груза:

$$\begin{gathered} h_{C1} = 3b\sin 30^\circ = 0{,}15 \text{ м}; \\ h_{C2} = 6b\sin 30^\circ = 0{,}3 \text{ м}; \\ h_3 = l\sin 60^\circ = 5b\sin 60^\circ = 0{,}43 \text{ м}. \end{gathered} \tag{5}$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учтя (5), получим числовые значения Φ_1, Φ_2 и Φ_3:

$$\begin{gathered} \Phi_1 = 0{,}6m\omega^2 h_{C1} = 57{,}6 \text{ Н}; \\ \Phi_2 = 0{,}4m\omega^2 h_{C2} = 76{,}8 \text{ Н}; \\ \Phi_3 = m_2\omega^2 h_3 = 55{,}0 \text{ Н}. \end{gathered} \tag{6}$$

При этом линии действия равнодействующих $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ пройдут через центры тяжестей соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия $\bar{\Phi}_1$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника E, где $H = 6b\cos 30°$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\begin{gathered}\sum F_{ix} = 0;\ X_A + R_D + \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0;\\ \sum F_{iy} = 0;\ Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0;\\ \sum M_A\left(\bar{F}_i\right) = 0;\ -R_D \cdot 2a - P_1 \cdot h_{C1} - P_2 \cdot h_{C2} + P_3 \cdot h_3 -\\ -\Phi_1 \cdot H_1 - \Phi_2 \cdot H_2 + \Phi_3 \cdot H_3 = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

где H_1, H_2, H_3 – плечи сил $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\Phi}_3$ относительно точки A, равные (при подсчетах учтено, $H = 6b\cos 30° = 0,52$ м):

$$\begin{gathered}H_1 = 3a - \frac{2}{3}H = 0,55\ \text{м};\\ H_2 = 3a - \left(H + 2b\right) = 0,18\ \text{м};\\ H_3 = a + l\cos 60° = 0,55\ \text{м}.\end{gathered} \tag{8}$$

Подставив в уравнения (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (8) и решив эту систему уравнений (7), найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33,7$ Н; $Y_A = 117,7$ Н; $R_D = -45,7$ Н.

Задание Д.9. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами α, β, γ, φ, θ (рис. Д.9.0 – Д.9.9, табл. Д.9а и Д.9б). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: $l_1 = 0,4$ м, $l_4 = 0,6$ м (размеры l_2 и l_3 произвольны); точка E находится в середине соответствующего стержня.

На ползун B механизма действует сила упругости пружины $\bar{F}$; численно $F = c\lambda$, где c – коэффициент жесткости пружины, λ – её деформация. Кроме того, на рис. Д.9.0 – Д.9.7 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2; на рис. Д.9.8 и Д.9.9 на ползун D действует сила $\bar{Q}$, а на кривошип O_1A – пара сил с моментом M.

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в табл. Д.9а для рис. Д.9.0 – Д.9.4 и в табл. Д.9б для рис. Д.9.5 – Д.9.9, где Q выражено в ньютонах, а M, M_1, M_2 – в ньютоно-метрах.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере Д.9 (см. рис. Д.9, а также рис. Д.9.10б). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну B стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. Д.9.10а), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. Д.9.10б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Указания. Задание Д.9 – на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемом задании имеет одну степень свободы, т.е. одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять её нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Чтобы найти λ, надо из полученного условия равновесия определить силу упругости F. На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т.е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление силы, укажет знак.

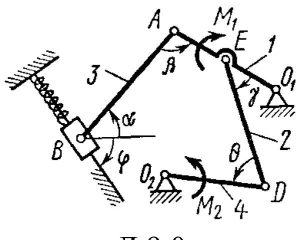
Таблица Д.9а (к рис. Д.9.0 – Д.9.4)

Номер условия	Углы, град.					c, Н/см	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180

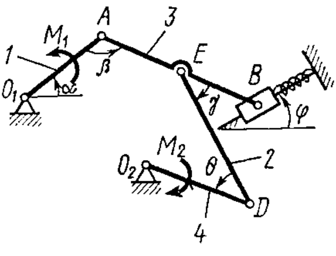
9	90	150	120	90	30	180	380	160

Таблица Д.9б (к рис. Д.9.5 – Д.9.9)

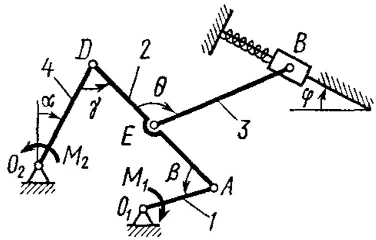
Номер условия	Углы, град.					c, Н/см	Для рис. 5 – 7		Для рис. 8 – 9	
	α	β	γ	φ	θ		M_1	M_2	M	Q
0	90	120	90	90	60	180	120	460	100	400
1	60	150	30	90	30	160	140	440	120	380
2	30	120	120	0	60	150	160	420	140	360
3	0	60	90	0	120	140	180	400	160	340
4	30	120	30	0	60	130	200	380	180	320
5	0	150	30	0	60	120	220	360	200	300
6	0	150	90	0	120	110	240	340	220	280
7	90	120	120	90	150	100	260	320	240	260
8	60	60	60	90	30	90	280	300	260	240
9	120	30	30	90	150	80	300	280	280	220



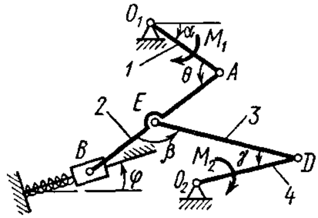
Д.9.0



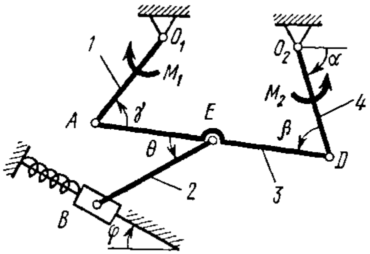
Д.9.1



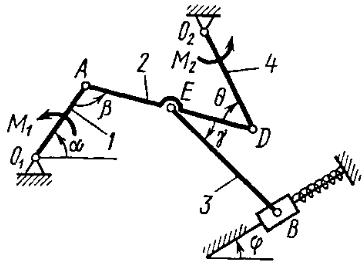
Д.9.2



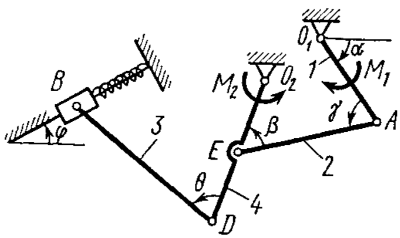
Д.9.3



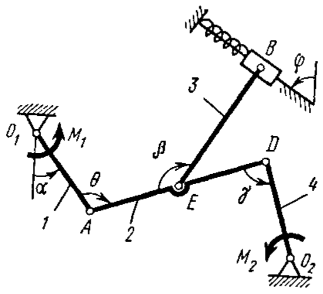
Д.9.4



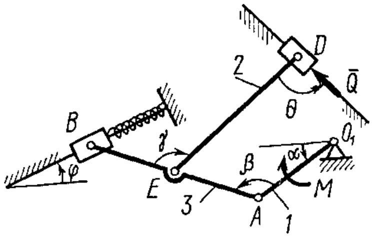
Д.9.5



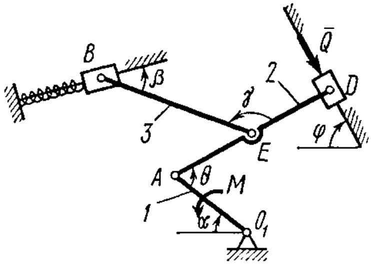
Д.9.6



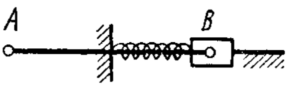
Д.9.7



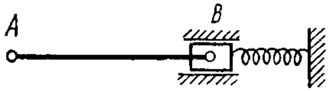
Д.9.8



Д.9.9



Д.9.10а



Д.9.10б

Пример Д.9. Механизм (рис. Д.9а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней *1*, *2*, *3* и ползунов B, D, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой O шарнирами. К ползуну B прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c, к ползуну D приложена сила $\bar{Q}$, а к стержню *1* (кривошипу) – пара сил с моментом M.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 60°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 120°$, $l_1 = 0,4$ м, $AE = ED$, $c = 125$ Н/см, $M = 150$ Н·м, $Q = 350$ Н. *Определить:* деформацию λ пружины при равновесии механизма.

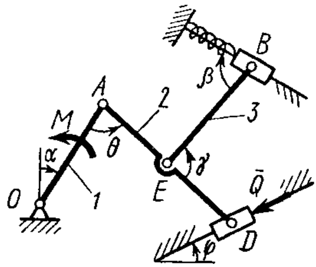


Рис. Д.9а

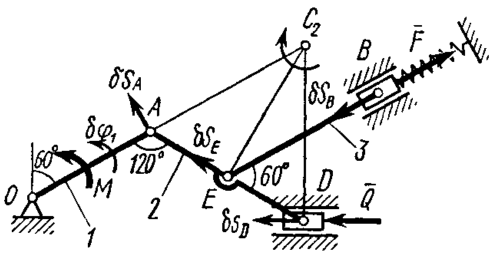


Рис. Д.9б

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. Д.9б); при этом согласно последнему из указаний к задаче Д.9 прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было $\varphi = 180°$).

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_i^a = 0, \qquad (1)$$

где δA_i^a – элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях.

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу $\bar{Q}$, силу упругости $\bar{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом M.

Неизвестную силу F найдем с помощью уравнения (1), а зная F и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ – поворот стержня *1* вокруг оси O, δs_D и δs_B – перемещения ползунов (точек) D и B.

Из перемещений $\delta\varphi_1$, δs_D, δs_B независимое от других – одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, какими тогда будут δs_D и δs_B, выразив их через $\delta\varphi_1$, при этом важно верно определить и направления так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и воспользуемся известными из кинематики соотношениями (ход расчетов такой же, как в примере К.3).

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$; получим

$$\delta s_A = l_1 \cdot \delta\varphi_1; \quad \delta s_A \perp OA. \tag{2}$$

Теперь определим и изобразим δs_D, учитывая, что проекции δs_D и δs_A на прямую AD должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули и знаки). Тогда

$$\delta s_D \cos 30° = \delta s_A \cos 30° \quad \text{и} \quad \delta s_D = \delta s_A = l_1 \cdot \delta\varphi_1. \tag{3}$$

Чтобы определить δs_B, найдем сначала δs_E. Для этого построим мгновенный центр вращения (скоростей) C_2 стержня *2* (на пересечении перпендикуляров к δs_A и δs_D, восставленных из точек A и D) и покажем направление поворота стержня *2* вокруг C_2, учтя направление δs_A или δs_D. Так как $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60°$, то треугольник AC_2D – равносторонний и C_2E в нем высота, поскольку $AE = ED$. Тогда перемещение δs_E, перпендикулярное C_2E, будет направлено по прямой EA (при изображении δs_E учитываем направление поворота вокруг центра C_2).

Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_B и δs_E на прямую BE должны быть равны друг другу, получим (значение δs_E можно найти и составив соответствующую пропорцию)

$$\delta s_E = \delta s_A \cos 30° = l_1 \cdot \delta\varphi_1 \cos 30° . \tag{4}$$

Наконец, из условия равенства проекций δs_B и δs_E на прямую BE находим и изображаем δs_B. Численно

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 60° = l_1 \cdot \delta\varphi_1 \cos 30° \cdot \cos 60° = 0,43 l_1 \cdot \delta\varphi_1 . \tag{5}$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1); получим

$$M\delta\varphi_1 + Q\delta s_D - F\delta s_B = 0 , \tag{6}$$

или, заменяя здесь δs_D и δs_B их значениями (3) и (5) и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки,

$$\left(M + Q \cdot l_1 - F \cdot 0,43 l_1\right)\delta\varphi_1 = 0 . \tag{7}$$

Так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M + Q \cdot l_1 - F \cdot 0,43 l_1 = 0 . \tag{8}$$

Из уравнения (8) находим значение F и определяем $\lambda = \dfrac{F}{c}$.

Ответ: $\lambda = 13,5$ см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

Задание Д.10. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов *1* и *2*, обмотанных нитями, грузов *3–6*, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д.10.0 – Д.10.9, табл. Д.10). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива *1* равны: $R_1 = 0,2$ м, $r_1 = 0,1$ м, а шкива *2* – $R_2 = 0,3$ м, $r_2 = 0,15$ м; их радиусы инерций относительно осей вращения равны соответственно $\rho_1 = 0,1$ м и $\rho_2 = 0,2$ м.

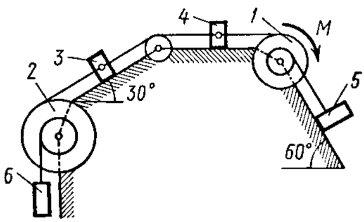
Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса P_1, …, P_6 шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы *1, 2* изображать всегда как части системы).

Указания. Задание Д.10 – на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера-Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в задаче Д.9, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^{и} = I_z \varepsilon$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела; направление $M^{и}$ противоположно направлению ε.

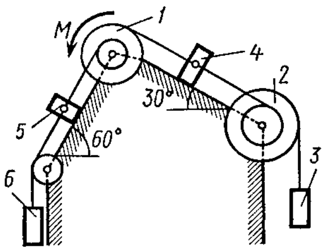
Таблица Д.10

Номер условия	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	P_4, Н	P_5, Н	P_6, Н	M, Н·м

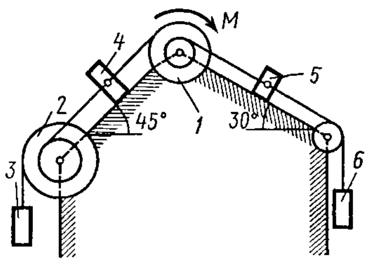
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16



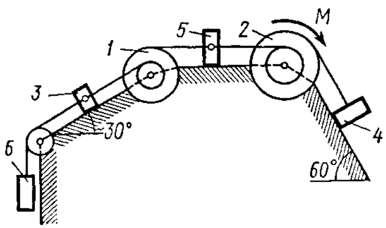
Д.10.0



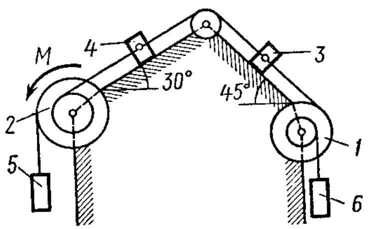
Д.10.1



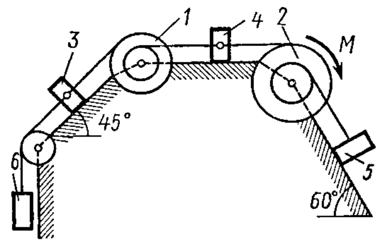
Д.10.2



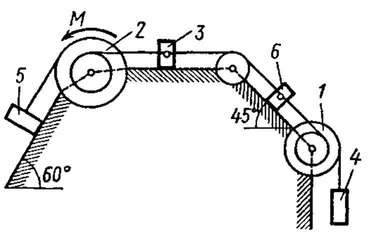
Д.10.3



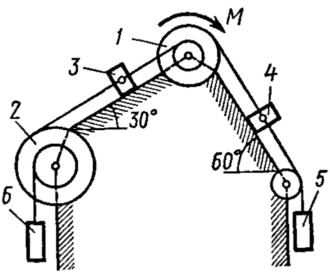
Д.10.4



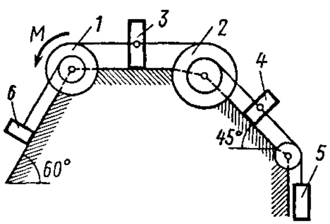
Д.10.5



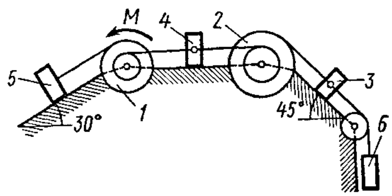
Д.10.6



Д.10.7



Д.10.8



Д.10.9

Пример Д.10. Механическая система (рис. Д.10) состоит из обмотанных нитями блока *1* радиуса R_1 и ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов *3* и *4*, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к блоку *1*.

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0,2$ м, $R_2 = 0,3$ м, $r_2 = 0,15$ м, $\rho_2 = 0,2$ м. *Определить:* ускорение груза *3*, пренебрегая трением.

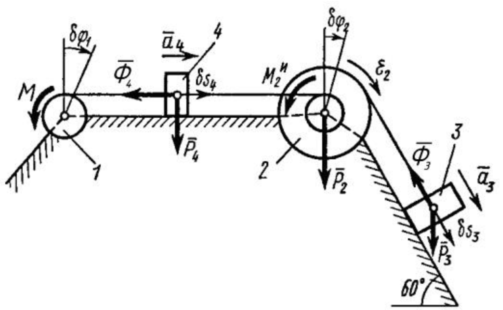


Рис. Д.10

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел *1, 2, 3, 4*, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные.

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^и = 0, \tag{1}$$

где $\sum \delta A_i^a$ – сумма элементарных работ активных сил; $\sum \delta A_i^и$ – сумма элементарных работ сил инерции.

Изображаем на чертеже активные силы $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ и пару сил с моментом M. Задавшись направлением ускорения a_3, изображаем на чертеже силы инерции $\bar{\Phi}_3$, $\bar{\Phi}_4$ и пару сил инерции с моментом $M_2^и$, величины которых равны:

$$\Phi_3 = m_3 a_3 = \frac{P_3}{g} a_3; \quad \Phi_4 = m_4 a_4 = \frac{P_4}{g} a_4; \quad M_2^и = I_2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \tag{2}$$

Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$\left(P_3 \sin 60° - \Phi_3\right)\delta s_3 - M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 - \Phi_4 \delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0 . \quad (3)$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2 \delta\varphi_2 ; \quad \delta s_4 = r_2 \delta\varphi_2 ; \quad \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2 . \quad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3\left(\sin 60° - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \frac{P_4}{g}a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2 = 0 . \quad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2} ; \quad a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2}a_3 .$$

Затем, учтя, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60° - M\frac{r_2}{R_1}}{\frac{P_3 R_2}{g} + \frac{P_2 \rho_2^2}{g R_2} + \frac{P_4 r_2^2}{g R_2}} = \frac{P_3 R_2^2 \sin 60° - M\frac{R_2 r_2}{R_1}}{P_3 R_2^2 + P_2 \rho_2^2 + P_4 r_2^2} g .$$

Вычисления дают следующий ответ: $a_3 = -0{,}9$ м/с^2. Знак указывает, что ускорение груза *3* и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рис. Д.10.