МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени И.Т. Трубилина»

КАФЕДРА СТАТИСТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Методические рекомендации
по выполнению контрольной работы
для обучающихся по направлению «Экономика»
(очно-заочная форма обучения)

Краснодар
КубГАУ
2021

УДК 336
ББК 65.05
О 754

Р е ц е н з е н т :
В.И. Ксенофонтов - доктор экономических наук, директор Краснодарского ЦНТИ - филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России

***С о с т а в и т е л и* :**
А. Е. Сенникова, Н. Х. Ворокова, А. Е. Жминько,

О 754 **Основы финансовых вычислений:** методические рекомендации по выполнению контрольной работы для обучающихся по направлению «Экономика» (очно-заочная форма обучения) / сост. А.Е. Сенникова, Н.Х. Ворокова, А.Е. Жминько,– Краснодар: КубГАУ, Издательство: Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2021. – 55 с.

Методические рекомендации содержат краткое теоретическое изложение основных положений дисциплины «Основы финансовых вычислений» в тематическом разрезе, а также задания по выполнению контрольных работ.

Предназначены для студентов направления 38.03.01 «Экономика».

УДК 336
ББК 65.05

Оглавление

Введение………………………………………………………………… 4

Программа курса…………………………………………………… 5

Задания для контрольной работы………………………………….. 6

Тема 1 Простые проценты………………………………………………… 7

Тема 2 Сложные проценты……………………………………………... 13

Тема 3 Эквивалентность процентных ставок……………………………. 21

Тема 4 Постоянные финансовые ренты…………………………………….. 25

Тема 5 Переменные финансовые ренты. Конверсия финансовых рент……………………………………………………... 30

Тема 6 Погашение долгосрочных кредитов……………………………… 36

Тема 7 Эффективность финансовых операций………………….………. 44

Задания для контрольной работы………………………………….. 50

Введение

В рыночной экономике от специалиста требуется умение оценивать возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. При этом следует учитывать, что принятие управленческих решений финансового характера всегда осуществляется в условиях неопределенности.

Финансовые вычисления представляют собой учебную дисциплину, в которой раскрывается методика количественного анализа финансовых, кредитных и банковских операций. Овладение методами и приемами финансовых вычислений является важной составляющей в профессиональной подготовке экономиста, банковского работника, предпринимателя, менеджера и других специалистов.

Цель изучения курса «Основы финансовых вычислений» – является формирование у обучающихся способности собрать и обработать исходные данные, рассчитать экономические показатели, характеризующие деятельность организаций.

Финансовые вычисления охватывают круг задач, в которых присутствуют основные параметры финансовых сделок: величина капитала (кредита, депозита, ссуды), сроков финансовых операций, процентных ставок. Эти параметры связаны между собой определенной функциональной зависимостью. Финансовые вычисления устанавливают количественные связи между параметрами финансовых операций.

Рекомендуется следующий порядок изучения дисциплины: ознакомиться с программой, изучить рекомендованную литературу, разобраться с методикой решения типовых задач, выполнить письменную контрольную работу.

Рекомендуемая литература

1. Бурда, А. Г. Основы финансовых вычислений : учебное пособие для обучающихся по направлению подготовки бакалавриата «Экономика» / А. Г. Бурда. — Краснодар, Саратов : Южный институт менеджмента, Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 104 c. — ISBN 978-5-93926-318-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/78039.html

2. Кузнецов Г. В. Основы финансовых вычислений [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г. В. Кузнецов, А. А. Кочетыгов. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 407 с. – Режим доступа: https://new.znanium.com/read?id=32451

3. Мелкумов Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика [Электронный ресурс] : учеб.-справоч. пособие / Я. С. Мелкумов. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 408 с. – Режим доступа: https://new.znanium.com/read?id=107321

4. Сенникова А.Е. Основы финансовых вычислений : учебное пособие / Н.Х. Ворокова, А.Е. Сенникова. – Краснодар: КубГАУ, Издательство: Краснодарский ЦНТИ, 2021. – 203 с. – Режим доступа: https://kubsau.ru/upload/iblock/664/6649bb6cb26ece5d5c2c433c45036962.pdf

Программа курса

Тема 1. Простые проценты

Время как фактор в финансовых и коммерческих расчетах. Сущность процентных платежей. Составляющие финансовых операций. Расчет процентных платежей и наращенных сумм. Определение сроков платежа, величин простых процентных и учетных ставок.

Использование процентных и учетных ставок при нахождении наращенных сумм. Ломбардный кредит. Потребительский кредит.

Дисконтирование и его сущность. Математическое дисконтирование. Банковское дисконтирование.

Тема 2. Сложные проценты

Декурсивный и антисипативный способы определения процентов. Расчет наращенных сумм на основе сложных декурсивных процентов. Номинальная и эффективная ставки процентов.

Расчет наращенных сумм на основе сложных антисипативных процентов. Дисконтирование по сложной ставке процента. Непрерывные проценты. Учет инфляции и налогов при определении наращенных сумм.

Тема 3. Эквивалентность процентных ставок

Финансовая эквивалентность процентных ставок. Эквивалентность простых и сложных, процентных и учетных ставок. Средние величины в финансовых расчетах.

Консолидация платежей. Общий случай изменения условий коммерческих сделок.

Тема 4. Потоки платежей

Виды финансовых рент и их основные параметры. Наращенная сумма постоянной (обычной) ренты. Современная величина постоянной ренты.

Определение параметров финансовых рент (величины годового платежа, продолжительности финансовых рент). Расчет рентных платежей с использованием простых процентов. Рента пренумерандо. Переменные потоки платежей.

Тема 5. Конверсия финансовых рент

Простые конверсии. Изменение продолжительности и срочности ренты. Общий случай замены финансовых рент.

Задания для контрольной работы

По курсу финансовых вычислений студент выполняет одну контрольную работу в соответствии с первой буквой фамилии. Работы, выполненные не по варианту студента, не рецензируются.

Контрольная работа включает 10 задач небольшого объёма каждая, охватывающих основное содержание дисциплины. Она выполняется в отдельной тетради, желательно оставлять поля на страницах для замечаний рецензента. Задачи решаются в следующей последовательности: записывается условие конкретной задачи, в которой общие обозначения заменяются конкретными значениями параметров определенного варианта; приводится подробное решение задач с необходимыми пояснениями, формулами, расчётами. В конце каждой задачи пишется краткий вывод или ответ. После решения всех задач приводится список использованной литературы, ставится дата выполнения контрольной работы и личная подпись студента.

Варианты контрольной работы и номера задач

Первая буква фамилии студента	Номера задач									
А	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181
Б	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182
В	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183
Г	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184
Д, Е	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185
Ж, З	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186
И	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187
К	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188
Л	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189
М	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190
Н	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191
О	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192
П	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193
Р	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194
С	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195
Т	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196
У	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197
Ф	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198
Х, Ц	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199
Остальные буквы	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200

Тема 1. Простые проценты

В финансово-кредитных расчетах используются следующие основные понятия и обозначения:
P – величина капитала, предоставленного в долг в виде депозита, ссуды, векселя, облигации, товарного кредита и т.п.;
I – процентный доход (проценты), это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг;
i – процентная ставка, это относительная величина дохода от капитала за определенный отрезок времени, обычно год;
n (t) – срок ссуды в годах (месяцах, днях);
S – наращенная сумма денег, полученная прибавлением к первоначальной величине капитала (P) начисленных процентов (I) или умножением первоначальной суммы долга на множитель наращения.

Простые проценты – это метод расчета дохода кредитора от предоставления денег в долг заемщику, при котором проценты начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды.

По условиям финансового договора процентные деньги могут выплачиваться кредитору по мере их начисления в каждом периоде или вместе с основной суммой долга по истечении всего срока договора. В последнем случае сумма, получаемая кредитором, называется наращенной суммой, а метод начисления процентов – декурсивным (последующим).

Наращенная сумма, с использованием простых процентов при сроке финансовой операции n лет, определяется по формуле:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni) . \qquad (1)$$

Если срок финансовой сделки не равен целому числу лет, то периоды начисления процентов выражают дробным числом, как отношение числа дней функционирования сделки к календарному числу дней в году. В этом случае наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1 + \frac{t}{K} i) , \qquad (2)$$

где t – число дней функционирования сделки (число дней, на которое предоставлена ссуда),

К – временная база (число дней в году, составляющая 365 или 366).

В мировой практике различают три метода процентных расчётов, которые зависят от выбранного периода начисления:
а) «Английская практика», учитывающая продолжительность года К=365 дней, а продолжительность месяцев – в днях, соответствующих календарному исчислению, т. е. 28, 29, 30 и 31 день;
б) «Французская практика», когда продолжительность года принимается равной К=360 дням, а продолжительность месяцев в днях соответствует календарному исчислению;
в) «Германская практика», при которой продолжительность года К=360 дней, продолжительность месяца равна 30 дням, являющийся наименее точным.

При начислении процентов день выдачи и день погашения ссуды принимают за один день.

При установлении переменной процентной ставки наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m) = P(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j), \tag{3}$$

где i_j - ставка простых процентов в периоде j;

n_j - продолжительность j-ого периода;

m - число периодов начисления процентов;

$j = 1, 2, \ldots, m$.

Наряду с декурсивным, применяется антисипативный (предварительный) метод, который сводится к тому, что проценты начисляются в начале расчетного периода, при этом за базу (100 %) принимается сумма погашения долга (наращенная сумма S) и используется не процентная, а учетная ставка (d). Расчёт наращенной суммы производится по формуле:

$$S = \frac{P}{1 - nd}, \tag{4}$$

где d - учетная ставка, выраженная десятичной дробью.

Срок ссуды при наращении по простым процентам определяется в годах (n) и днях (t)

$$n = \frac{S - P}{pi} = \frac{S / P - 1}{i}, \ n = \frac{S - P}{Sd} = \frac{1 - P / S}{d}; \tag{5}$$

$$t = \frac{S - P}{pi} \cdot K; \ t = \frac{S - P}{Sd} \cdot K. \tag{6}$$

Если срок финансовой операции выражается в днях, то наращенная сумма при начислении простых антисипативных процентов будет определяться по формуле:

$$S = \frac{P}{1 - \frac{t}{K} \cdot d}. \tag{7}$$

Потребительский кредит предоставляется населению для покупки предметов личного потребления. Существуют различные формы потребительского кредита, отличающиеся друг от друга методами и сроками погашения. Одним из них является метод, при котором суммы процентных платежей изменяются от периода к периоду по мере изменения сроков погашения ссуды (т.е. проценты в каждом периоде начисляются на остаток основной суммы долга).

Кредит в условиях рынка выступает в различных формах. Одной из таких форм является коммерческий кредит, распространенным инструментом которого служит коммерческий вексель.

Вексель – это особый вид письменного долгового обязательства, дающий его владельцу бесспорное право требовать, по истечении указанного в нем срока, уплаты денег с должника.

Векселедержатель (кредитор) или владелец иных долговых обязательств, в случае необходимости получения денег по векселю или другим долговым обязательствам, ранее указанных в них сроков, может продать его банку или другому субъекту по пониженной цене, т.е. по цене, ниже номинальной стоимости векселя, указанной в нем. Такая сделка носит название учета векселя или дисконтирования. Сумма, полученная владельцем векселя в результате этой сделки, называется дисконтированной величиной. Она ниже номинальной стоимости векселя на величину процентного платежа, начисленного со дня дисконтирования до дня, ранее предусмотренного для погашения векселя.

Дисконтом называется разность между номинальной стоимостью долгового обязательства и суммой, полученной векселедержателем в результате учета векселя.

При банковском дисконтировании учет векселя осуществляется с использованием учетной ставки *d*, по формулам:

$$P' = S(1 - nd) \text{ или } P' = S\left(1 - \frac{t}{K}d\right). \qquad (8)$$

При математическом дисконтировании используется процентная ставка *i*, а расчет параметров сделки ведется по формулам:

$$P' = \frac{S}{1 + ni} \text{ или } P' = \frac{S}{1 + \frac{t}{K} \cdot i}, \qquad (9)$$

где P' – сумма, полученная владельцем векселя в результате его учета (дисконтированная величина векселя);

t – число дней между днем дисконтирования и днем, ранее предусмотренным для погашения веселя;

К – временная база (как правило, К=360 дней).

Разность между номинальной стоимостью векселя и его дисконтированной величиной является дисконтом (дисконт – это доход субъекта финансовой сделки, принявшего к учету вексель, т.е. дисконт – это доход банка).

$$D' = S - P' \qquad (10)$$

Пример 1. Банк выдал клиенту ссуду в размере 400 тыс. руб. сроком на 9 месяцев. Определить наращенную сумму, если применялась: а) процентная ставка 12% годовых; б) учетная ставка 12% годовых. За какой срок наращенная сумма увеличится до 500 тыс. руб.

Решение: P = 400 тыс. руб.; i=0,12; d=0,12; $n = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Наращенную сумму долга найдем по формулам (1) и (4):

а) $S = P(1 + ni) = 400000 \cdot (1 + 0{,}75 \cdot 0{,}12) = 436000{,}00$ руб;

б) $S = \frac{P}{1 - nd} = \frac{400000}{1 - 0{,}75 \cdot 0{,}12} = 439560{,}44$ руб.

Сравнение показывает, что для клиента целесообразнее получать кредит по процентной, а не учетной ставке при прочих равных условиях.

Срок ссуды найдем по формуле (5), где S = 50 тыс. руб.

$$n = \frac{S - P}{pi} = \frac{500 - 400}{400 \cdot 0{,}12} = 2{,}08\,; \quad n = \frac{S - P}{Sd} = \frac{500 - 400}{500 \cdot 0{,}12} = 1{,}67\,.$$

Срок ссуды составляет 2,08 года при наращении по процентной ставке и 1,67 года по учетной ставке.

Ответ: а) S = 436000 руб.; б) S = 439560,44 руб.; n = 2,08 года; n = 1,67 года.

Пример 2. Банк выдал клиенту кредит 20 января 2013 г. в размере 100 тыс. руб. Срок возврата кредита 17 июня. Процентная ставка установлена 10,5% годовых. Наращенную сумму долга, подлежащую возврату, рассчитать тремя методами.

Решение.

1. Определяем точное число дней ссуды :

январь – с 20-го по 31-е включительно	– 12 дней;
февраль	– 28 дней;
март	– 31 день;
апрель	– 30 дней;
май	– 31 день;
июнь	– 17 дней.
Итого	– 149 дней.

Так как при начислении процентов день выдачи и день погашения ссуды принимают за один день, то $t_{точное} = 149 - 1 = 148$ дней.

2. Определяем приближенное число дней ссуды (продолжительность каждого месяца принимается за 30 дней):

январь – с 20-го по 30-е включительно	– 11 дней;
февраль	– 30 дней;
март	– 30 дней;
апрель	– 30 дней;
май	– 30 дней;
июнь	– 17 дней.
Итого	– 148 дней.

$t_{приближенное} = 148 - 1 = 147$ дней.

Возможные варианты расчета наращенной суммы:

а) по точным процентам с точным числом дней ссуды («английская практика»);

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{148}{365} \cdot 0{,}105) = 104258 \text{ руб.}$$

б) по обыкновенным процентам с точным числом дней ссуды («французская практика»):

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{148}{360} \cdot 0{,}105) = 104317 \text{ руб.}$$

в) по обыкновенным процентам с приближенным числом дней ссуды («германская практика»):

$$S = 100000 \cdot (1 + \frac{147}{360} \cdot 0{,}105) = 104288 \text{ руб.}$$

Ответ: а) S = 104258 руб.; б) S = 104317 руб.; в) S = 104288 руб.

Пример 3. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие процентная ставка 7% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определить наращенную за год сумму, если вкладчик поместил 600 тыс. руб.

Решение.

P = 600000 руб., $n_1 = 0{,}5$; $n_2 = n_3 = 0{,}25$; $i_1 = 0{,}07$; $i_2 = 0{,}085$ $i_3 = 0{,}1$

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m) =$$

$$= 600000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}07 + 0{,}25 \cdot 0{,}085 + 0{,}25 \cdot 0{,}1) = 648750 \text{ руб.}$$

Ответ: S = 648750 руб.

Пример 4. Финансовой организацией клиенту предоставлен потребительский кредит в размере 180 тыс. руб. на срок 12 месяцев под 10 % годовых с ежемесячным погашением кредита. Составить план погашения кредита.

Решение. Предположим, что величина кредита P, и он должен выплачиваться равными месячными платежами m раз с начислением процентов по годовой ставке i.

Тогда, процентный платеж составит:

в первом месяце $I_1 = \dfrac{Pi}{1200}$

во втором месяце $I_2 = (P - \dfrac{P}{m}) \cdot \dfrac{i}{1200} = \dfrac{Pi}{1200}(1 - \dfrac{1}{m})$;

в третьем месяце $I_3 = (P - 2\dfrac{P}{m}) \cdot \dfrac{i}{1200} = \dfrac{Pi}{1200}(1 - \dfrac{2}{m})$;

и так далее.

Общая величина процентных выплат определяется по формуле

$$I = \frac{Pi\,(m + 1)}{2400}. \tag{11}$$

Ежемесячная выплата основного долга составит

$$q = \frac{P}{m}. \tag{12}$$

По условию задачи P = 180000 руб.; m = 12 месяцев; i=10%.

Ежемесячная величина основного долга: $q = \dfrac{P}{m} = \dfrac{180000}{12} = 15000$ руб.

Ежемесячные процентные платежи:

$$I_1 = \frac{P \cdot i}{1200} = \frac{180000 \cdot 10}{1200} = 1500 \text{ руб.;}$$

$$I_2 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{1}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{1}{12}) = 1375 \text{ руб.;}$$

$$I_3 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{2}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{2}{12}) = 1250 \text{ руб.;}$$

$$I_4 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{3}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{3}{12}) = 1125$$ руб.;

$$I_5 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{4}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{4}{12}) = 1000$$ руб.;

$$I_6 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{5}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{5}{12}) = 875$$ руб.;

$$I_7 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{6}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{6}{12}) = 750$$ руб.;

$$I_8 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{7}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{7}{12}) = 625$$ руб.;

$$I_9 = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{8}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{8}{12}) = 500$$ руб.;

$$I_{10} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{9}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{9}{12}) = 375$$ руб.;

$$I_{11} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{10}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{10}{12}) = 250$$ руб.;

$$I_{12} = \frac{P \cdot i}{1200} \cdot (1 - \frac{11}{m}) = 1500 \cdot (1 - \frac{11}{12}) = 125$$ руб.

Сумма процентных платежей за пользование кредитом составит:

$$I = \frac{Pi(m+1)}{2400} = \frac{180000 \cdot 10(12+1)}{2400} = 9750$$ руб.

Расчеты по погашению кредита представим в таблице 1.

Таблица 1 - План погашения кредита, руб.

Месяц	Непогашенная сумма основного долга	Процентный платеж	Месячная выплата основного долга	Сумма месячного погасительного платежа
	180000			
1	165000	1500	15000	16500
2	150000	1375	15000	16375
3	135000	1250	15000	16250
4	120000	1125	15000	16125
5	105000	1000	15000	16000
6	90000	875	15000	15875
7	75000	750	15000	15750
8	60000	625	15000	15625
9	45000	500	15000	15500
10	30000	375	15000	15375
11	15000	250	15000	15250
12	–	125	15000	15125
ИТОГО	–	9750	180000	189750

Пример 5. Владелец векселя номинальной стоимостью 65000 руб. и сроком обращения 1 год предъявил его банку- эмитенту для учета за 90 дней до даты погашения. Банк учел его по учетной ставке 12 %. Определить дисконтированную величину (P') и величину дисконта (D').

Решение. По условию S=65000 руб., t=90 дней, K=360 дней, d=0,12.

$$P' = S(1 - \frac{t}{K} \cdot d) = 65000 \cdot \left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0,12\right) = 63050 \text{ руб.}$$

D'=$D' = S - P' = 65000 - 63050 = 1950$ руб.

Ответ: P'=63050 руб.; D'=1950 руб.

Тема 2. Сложные проценты

В практике финансовых операций часто применяют сложные проценты, когда начисленный в данном расчетном периоде процентный платеж прибавляется к предыдущему капиталу, а процентный платеж на следующий расчетный период рассчитывается на уже наращенную величину капитала .

При антисипативном методе расчета процентный платеж начисляется в начале каждого расчетного периода, а при декурсивном способе – в конце расчетного периода. В практике обычно применяется декурсивный способ начисления процентов.

При *декурсивном* способе наращенная сумма (S) находится по формуле

$$S = P(1+i)^n \quad , \tag{13}$$

где i – сложная ставка процента, выраженная десятичной дробью; n – число лет наращения (может быть целым числом или дробным); P – первоначальная величина капитала.

Если в течение года начисление процентов производится «m» раз, то процентная ставка называется номинальной и обозначается j. Тогда наращенная сумма за весь расчетный период

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{n \cdot m} \quad , \tag{14}$$

где m – частота начислений процентов в году (*ежегодное* начисление m = 1; *по полугодиям* m = 2; *ежеквартальное* m = 4; *ежемесячное* m = 12; *ежедневное* m=365).

Срок ссуды при наращении по сложной ставке процента находится по формулам :

$$n = \frac{\ell n(S:P)}{\ell n(1+i)} \tag{15},$$

$$n = \frac{\ell n(S:P)}{m \cdot \ell n(1+\frac{j}{m})} \quad . \tag{16}$$

При *антисипативном* способе начисления процентов наращение осуществляется по сложной учетной ставке по формулам:

а) при ежегодном начислении процентов (m=1)

$$S = \frac{P}{(1-d)^n} = P(1-d)^{-n}; \qquad (17)$$

б) при m-разовом начислении процентов в году

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}} = P(1-\frac{f}{m})^{-mn}. \qquad (18)$$

Дисконтирование по сложной ставке процента может быть математическим и банковским.

Математическое дисконтирование заключается в определении современной величины капитала *P* по значению наращенной суммы *S* с использованием сложной ставки декурсивных процентов. Современная стоимость капитала составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P' = \frac{S}{(1+i)^n}; \qquad (19)$$

б) при *m*-разовом начислении процентов в году

$$P' = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}. \qquad (20)$$

Банковское дисконтирование по сложной учетной ставке может быть использовано при учете среднесрочных и долгосрочных долговых обязательств. Дисконтированная величина долгового обязательства составит:

а) при ежегодном начислении процентов

$$P' = S(1-d)^n; \qquad (21)$$

б) при *m*-разовом начислении процентов

$$P' = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}. \qquad (22)$$

Дисконт (D') определяется по формуле $D' = S - P'$.

При *непрерывном* наращении процентов применяют *силу роста*, которая характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная сила роста (b) представляет собой номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$. Наращенная сумма капитала составит

$$S = Pe^{bn}, \qquad (23)$$

а современная стоимость $$P = \frac{S}{e^{bn}}. \qquad (24)$$

Переменная сила роста (b_t) изменяется во времени, следуя закону, представленному в виде непрерывной функции времени $b_t = f(t)$.

Линейная функция:

$$b_t = b_0 + at\ ,\tag{25}$$

где b_0 – начальное значение силы роста, *a* – прирост силы роста в единицу времени.

Наращенная сумма капитала составит:

$$S = Pe^{b_0 n + \frac{an^2}{2}}\ ,\tag{26}$$

а современная стоимость:

$$P = \frac{S}{e^{b_0 n + \frac{an^2}{2}}}\ .\tag{27}$$

Экспоненциальная функция:

$$b_t = b_0 a^t\ ,\tag{28}$$

где b_0 – начальное значение силы роста, *a* – постоянный коэффициент роста.

Наращенная сумма капитала составит:

$$S = Pe^{\frac{b_0}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}\ ,\tag{29}$$

а современная стоимость:

$$P = \frac{S}{e^{\frac{b_0}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}}\ .\tag{30}$$

Наращенная сумма с учетом *влияния инфляции* (*C*) по схеме *простых* процентов определяется по формулам:

а) декурсивные проценты

$$C = \frac{P\left(1 + ni\right)}{I_p}\ ;\tag{31}$$

б) антисипативные проценты

$$C = \frac{P\left(1 - nd\right)^{-1}}{I_p} = \frac{P}{I_p\left(1 - nd\right)}\ ,\tag{32}$$

где I_p – *индекс цен* за соответствующий период *n* (эту величину также называют *индексом инфляции* за период *n*).

Соответственно, *темп прироста инфляции* h_n за период времени *n* лет составит:

$$h_n = (I_p - 1)\,100\ .\tag{33}$$

Индекс инфляции I_p за весь период в *n* лет при известных темпах прироста инфляции за составляющие его подпериоды:

$$I_p = \left(1 + \frac{h_1}{100}\right)^{n_1}\left(1 + \frac{h_2}{100}\right)^{n_2}\ldots\left(1 + \frac{h_\ell}{100}\right)^{n_\ell} = \prod_{\kappa=1}^{\ell}\left(1 + \frac{h_\kappa}{100}\right)^{n_\kappa}\ ,\tag{34}$$

где $h_1, h_2, \dots, h_\ell$ – темпы прироста инфляции за соответствующие подпериоды, %;

$n_\kappa,\ \kappa = 1, 2, \dots, n_\ell$ – период действия соответствующего темпа прироста инфляции, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = \sum_{\kappa=1}^{\ell} n_\kappa$.

Наращенная сумма с учетом *влияния инфляции* по схеме *сложных* процентов определяется по формулам:

а) декурсивные проценты

$$C = \frac{P(1+i)^n}{I_p}, \text{ при } m=1; \quad C = \frac{P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{I_p}, \text{ при } m>1; \tag{35}$$

б) антисипативные проценты

$$C = \frac{P(1-d)^{-n}}{I_p} = \frac{P}{I_p(1-d)^n}, \text{ при } m=1; \tag{36}$$

$$C = \frac{P\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-mn}}{I_p} = \frac{P}{I_p\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}, \text{ при } m>1; \tag{37}$$

в) непрерывные проценты

$$C = \frac{Pe^{bn}}{I_p}. \tag{38}$$

Реальная доходность финансовой операции с учетом инфляции измеряется с помощью соответствующих ставок процента:

а) по схеме простых процентов

$$i_{реальн.} = \frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{I_p} - 1\right); \quad d_{реальн.} = \frac{1-(1-nd)I_p}{n}; \tag{39}$$

б) по схеме сложных процентов

$$i_{реальн.} = \frac{(1+i)}{\sqrt[n]{I_p}} - 1, \quad d_{реальн.} = 1-(1-d)\sqrt[n]{I_p}, \text{ при } m=1; \tag{40}$$

$$j_{реальн.} = m\left(\frac{1+\frac{j}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}} - 1\right), \quad f_{реальн.} = m\left(1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p}\right), \text{ при } m>1; \qquad (41)$$

$$b_{реальн.} = \delta - \frac{1}{n}\ln I_p, \; m \to \infty. \qquad (42)$$

Минимальная ставка процента, нейтрализующая действие инфляции, определяется из равенства индекса инфляции и соответствующего множителя наращения. Если начисляются сложные декурсивные проценты по ставке i за n лет, а индекс инфляции за этот же период составил I_p, то:

$$(1+i)^n = I_p, \text{ откуда } i = \sqrt[n]{I_p} - 1. \qquad (43)$$

Для обеспечения реального наращения капитала в условиях инфляции должно выполняться неравенство $i > \sqrt[n]{I_p} - 1$.

В целях компенсации потерь от снижения покупательной способности денег ставку процента корректируют с учетом темпа инфляции. Величина корректирующей *брутто-ставки* r, которая обеспечивает реальную доходность финансовой операции по заданной ставке процента, определяется по формулам:

а) по схеме простых процентов

$$r_{i_{пр}} = \frac{(1+ni)I_p - 1}{n}; \quad r_{d_{пр}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1-nd}{I_p}\right); \qquad (44)$$

б) по схеме сложных процентов

$$r_{i_{сл}} = (1+i)\sqrt[n]{I_p} - 1, \quad r_{d_{сл}} = 1 - \frac{1-d}{\sqrt[n]{I_p}}, \text{ при } m=1; \qquad (45)$$

$$r_j = m\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p} - 1\right), \quad r_f = m\left(1 - \frac{1-\frac{f}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}}\right), \text{ при } m>1; \qquad (46)$$

$$r_b = b + \frac{1}{n}\ln I_p, \quad m \to \infty. \qquad (47)$$

<u>Пример 6</u>. Сумма 200 тыс. руб. инвестируется под процентную ставку 15 % годовых: 1) на 3 месяца; 2) на 6 месяцев; 3) на 1 год; 4) на 6 лет; 5) на 9 лет. Найти наращенные суммы по схеме простых и сложных процентов.

Решение.

1. По условию задачи n_1=0,25 года, n_2=0,5 года, n_3=1 год, n_4=6 лет, n_5=9 лет, P=200000 руб., i=0,15. При наращении простых процентов получим:

1.1. $S = 200000 \ (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}15) = 207500$ руб.

1.2. $S = 200000 \ (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}15) = 215000$ руб.

1.3. $S = 200000 \ (1 + 1 \cdot 0{,}15) = 230000$ руб.

1.4. $S = 200000 \ (1 + 6 \cdot 0{,}15) = 380000$ руб.

1.5. $S = 200000 \ (1 + 9 \cdot 0{,}15) = 470000$ руб.

2. При наращении сложных процентов получим:

2.1. $S = 200000 \ (1 + 0{,}15)^{0,25} = 207112$ руб.

2.2. $S = 200000 \ (1 + 0{,}15)^{0,5} = 214476$ руб.

2.3. $S = 200000 \ (1 + 0{,}15) = 230000$ руб.

2.4. $S = 200000 \ (1 + 0{,}15)^{6} = 462612$ руб.

2.5. $S = 200000 \ (1 + 0{,}15)^{9} = 703575$ руб.

Для владельца капитала более выгодной является схема простых декурсивных процентов, если срок финансовой операции менее одного года; схема сложных декурсивных процентов – если срок превышает один год. При однократном начислении процентов и продолжительности периода один год обе схемы дают равные результаты.

Пример 7. Клиент имеет в коммерческом банке первоначальную сумму 100 тыс. руб. Годовая сложная процентная ставка составляет 8%.

Определить наращенную сумму, если периоды наращения составляют: а) 90 дней; б) 9 месяцев; в) один год; г) пять лет.

Задачу решить при условии, что начисление процентов производилось: а) один раз в году; б) ежеквартально.

Определить, через какой срок первоначальная сумма денег клиента удвоится.

Решение. P=100000 руб.; i=0,08; $n_1 = \frac{90}{360} = 0{,}25$; $n_2 = \frac{9}{12} = 0{,}75$; $n_3 = 1$; $n_4 = 5$; S=?

1. Наращенная сумма при ежегодном начислении процентов (m=1) будет определяться:

$$S = P(1 + i)^n .$$

а) $S_1 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08)^{0,25} = 101943$ руб.;

б) $S_2 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08)^{0,75} = 105942$ руб.;

в) $S_3 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08) = 108000$ руб.;

г) $S_4 = 100000 \cdot (1 + 0{,}08)^{5} = 146933$ руб.

2. Наращенная сумма при ежеквартальном начислении процентов (m=4) будет определяться:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{n \cdot m} .$$

а) $S_1 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{0{,}25 \cdot 4} = 102000$ руб.;

б) $S_2 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{0{,}75 \cdot 4} = 106121$ руб.;

в) $S_3 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{4} = 108243$ руб.;

г) $S_4 = 100000 \cdot (1 + \frac{0{,}08}{4})^{5 \cdot 4} = 148595$ руб.

Вывод: с увеличением частоты начислений процентов в течение срока ссуды, при прочих равных условиях, возрастает и наращенная сумма.

Найдем срок, необходимый для удвоения первоначального капитала (S:P=2) при наращении по:

а) ставке сложных процентов

$$n = \frac{\ell n(S:P)}{\ell n(1+i)} = \frac{\ell n 2}{\ell n 1{,}08} = 9 \text{ лет;}$$

б) номинальной ставке сложных процентов

$$n = m\frac{\ell n(S:P)}{m \cdot \ell n(1+\frac{j}{m})} = \frac{\ell n 2}{4 \cdot \ell n(1+\frac{0{,}08}{4})} = 8{,}75 \text{ года;}$$

Значит, первоначальная сумма возрастает в два раза за срок 8,75 или 9 лет.

Пример 8. Финансовой организацией выдан клиенту кредит в размере 250 тыс. руб. по учетной ставке 10 % годовых. Определить наращенную сумму долга, если срок возврата кредита составляет: а) шесть месяцев; б) два года. Проценты начисляются: а) один раз в году; б) по полугодиям.

Решение.

По условию задачи P=250000 руб.; d=0,1; $n_1 = \frac{6}{12} = 0{,}5$; $n_2 = 2$.

1. Наращенная сумма сложных антисипативных процентов при ежегодном начислении процентов (m=1) будет определяться:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}.$$

а) $S_1 = \frac{250000}{(1-0{,}1)^{0{,}5}} = 263523$ руб.; б) $S_2 = \frac{250000}{(1-0{,}1)^2} = 308642$ руб.

2. Наращенная сумма сложных антисипативных процентов при полугодовом начислении процентов (m=2) будет определяться:

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}.$$

а) $S_1 = \frac{250000}{\left(1 - \frac{0,1}{2}\right)^{2 \cdot 0,5}} = 263158$ руб.; б) $S_2 = \frac{250000}{\left(1 - \frac{0,1}{2}\right)^{2 \cdot 2}} = 306934$ руб.

<u>Вывод:</u> при увеличении частоты начислений процентов в году наращенная сумма антисипативных процентов уменьшается при прочих равных условиях в отличие от декурсивных процентов.

<u>Пример 9</u>. Долговое обязательство на сумму 120 тыс. руб. должно быть погашено через 5 лет. Владелец долгового обязательства учел его в банке по сложной ставке 9,5% годовых. Найти сумму дисконта, полученную банком если используется: а) учетная ставка; б) процентная ставка.

<u>Решение:</u>

а) При использовании банковского дисконтирования: S=120000 руб.; d=0,095; n=5.

$$P' = S(1-d)^n;$$

$$P' = 120000 \cdot (1 - 0,095)^5 = 72849 \text{ руб.};$$

$$D' = S - P' = 120000 - 72849 = 47151 \text{ руб.}$$

б) При использовании математического дисконтирования: S=120000 руб.; i=0,095; n=5.

$$P' = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{120000}{(1+0,095)^5} = 76227 \text{ руб.};$$

$$D' = S - P' = 120000 - 76227 = 43773 \text{ руб.}$$

<u>Вывод:</u> при банковском дисконтировании владелец векселя получит 72849 руб. а при математическом – 76227 руб. Соответственно банку будет принадлежать сумма в 47151 руб. или 43773 руб.

Таким образом, для клиента выгоднее учитывать вексель по процентной ставке, а для банка – по учетной ставке.

<u>Пример 10.</u> На сумму 90 тыс. руб. в течение 3,5 лет ежеквартально начисляются сложные проценты по ставке 14% годовых. За этот же период цены росли ежемесячно в течение первого года на 1%, в течение второго года – на 1,1%, в течение третьего – на 1,3%, последние полгода – на 1,1%. Определить: покупательную способность наращенной суммы через 3,5 года; ставку реальной доходности финансовой операции; минимальную положительную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала. Какова должна быть банковская ставка, которая обеспечит реальную доходность операции 14% годовых при ежеквартальном начислении процентов?

Решение. Имеем: P=90000 руб.; n=3,5 года или 42 месяца, n_1=n_2=n_3=12 месяцев, n_4=6 месяцев; h_1=1, h_2=1,1, h_3=1,3, h_4=1,1; m=4; j=0,14.

1. Найдем индекс инфляции за 3,5 года или 42 месяца:

$$I_p = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{12} \left(1 + \frac{1,1}{100}\right)^{12} \left(1 + \frac{1,3}{100}\right)^{12} \left(1 + \frac{1,1}{100}\right)^{6} = 1,6021 .$$

2. Определяем покупательную способность наращенной суммы с учетом инфляции. Так как m=4 (т.е. m>1), то

$$C = \frac{P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{I_p} = \frac{90000\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{4\cdot 3,5}}{1,6021} = 90932,22 \text{ руб.}$$

Таким образом, реальная наращенная сумма с учетом инфляции оказалась больше первоначальной только на 932,22 руб.

3. Ставка реальной доходности наращения составит:

$$j_{реальн.} = m\left(\frac{1+\frac{j}{m}}{\sqrt[mn]{I_p}} - 1\right) = 4\left(\frac{1+\frac{0,14}{4}}{\sqrt[4\cdot 3,5]{1,6021}} - 1\right) = 0,0029 \quad \text{или } 0,29\%,$$

т.е. при исходных параметрах финансовая операция является малоприбыльной.

4. Минимальная ставка, компенсирующая влияние инфляции составит:

$$\left(1+\frac{j_{полож.}}{m}\right)^{mn} = I_p, \tag{48}$$

откуда $j_{полож.} = m\left(\sqrt[mn]{I_p} - 1\right) = 4\left(\sqrt[4\cdot 3,5]{1,6021} - 1\right) = 0,137$ или 13,7%.

Таким образом, для обеспечения реального наращения капитала номинальная процентная ставка должна превышать 13,7% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

5. Брутто-ставка, обеспечивающая реальную доходность 14% годовых с поквартальным начислением процентов, при данных темпах инфляции будет определяться по формуле:

$$r_j = m\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p} - 1\right) = 4\left(\left(1+\frac{0,14}{4}\right)\sqrt[4\cdot 3,5]{1,6021} - 1\right) = 0,2817 \quad \text{или } 28,17\%.$$

Это означает, что если банк увеличит номинальную процентную ставку до 28,17% годовых, то влияние инфляции будет полностью компенсировано.

Тема 3. Эквивалентность процентных ставок

В финансовых сделках часто возникает необходимость изменения условий финансовых операций, например, изменить сроки платежа, процентную ставку заменить учетной ставкой, объединить платежи в один. При этом должен соблюдаться принцип равноценности финансовых последствий изменения условий сделки, т.е. финансовые обязательства должны быть для обеих сторон эквивалентными.

*Процентные ставки, обеспечивающие равноценность финансовых последствий называются **эквивалентными.*** Эквивалентность ставок обеспечивается равенством множителей наращения или дисконтных множителей.

Определим формулы эквивалентности простых и сложных процентов. $(1+ni_n)=(1+i_c)^n$ отсюда $i_c=\sqrt{1+ni}-1$ или $i_n=\frac{(1+i_c)^n}{n}-1$. Аналогично выводятся все другие формулы эквивалентности.

Таблица 2 – Эквивалентность процентных ставок

№ п/п	Вид ставки	Формула эквивалентности	
1	$i_{пр}$ и $d_{пр}$	*Срок сделки выражен в годах (n)*	
		$i_{пр}=\frac{d_{пр}}{1-d_{пр}n}$ (49)	$d_{пр}=\frac{i_{пр}}{1+i_{пр}n}$ (50)
		Срок сделки выражен в месяцах (m)	
		$i_{пр}=\frac{12d_{пр}}{12-d_{пр}m}$ (51)	$d_{пр}=\frac{12i_{пр}}{12+i_{пр}m}$ (52)
		Срок сделки выражен в днях (временная база для обеих ставок 360 дней)	
		$i_{пр}=\frac{360d_{пр}}{360-d_{пр}t}$ (53)	$d_{пр}=\frac{360i_{пр}}{360+i_{пр}t}$ (54)
		Срок сделки выражен в днях (временная база для процентной ставки 365 дней, а для учетной ставки 360 дней)	
		$i_{пр}=\frac{365d_{пр}}{360-d_{пр}t}$ (55)	$d_{пр}=\frac{360i_{пр}}{365+i_{пр}t}$ (56)
2	$i_{сл}$ и $i_{пр}$	$i_{сл}=\sqrt[n]{(1+i_{пр}n)}-1$ (57)	$i_{пр}=\frac{(1+i_{сл})^n-1}{n}$ (58)
3	$d_{пр}$ и $d_{сл}$	$d_{сл}=1-\sqrt[n]{1-d_{пр}n}$ (59)	$d_{пр}=\frac{1-(1-d_{сл})^n}{n}$ (60)
4	$d_{сл}$ и $i_{сл}$	$i_{сл}=\frac{d_{сл}}{1-d_{сл}}$ (61)	$d_{сл}=\frac{i_{сл}}{1+i_{сл}}$ (62)
5	$i_{пр}$ и $d_{сл}$	$i_{пр}=\frac{(1-d_{сл})^{-n}-1}{n}$ (63)	$d_{сл}=1-\sqrt[n]{(1+i_{пр}n)^{-1}}$ (64)
6	$i_{сл}$ и $d_{пр}$	$i_{сл}=\sqrt[n]{(1-d_{пр}n)^{-1}}-1$ (65)	$d_{пр}=\frac{1-(1+i_{сл})^{-n}}{n}$ (66)

№ п/п	Вид ставки	Формула эквивалентности	
7	$i_{пр}$ и j	$i_{пр} = \dfrac{\left(1 + {j}/{m}\right)^{mn} - 1}{n}$ (67)	$j = m \cdot (\sqrt[nm]{1 + i_{пр} n} - 1)$ (68)
8	$i_{сл}$ и j	$j = m(\sqrt[m]{(1 + i_{сл})} - 1)$ (69)	$i_{сл} = \left(1 + {j}/{m}\right)^{m} - 1$ (70)
9	$i_{пр}$ и f	$i_{пр} = \dfrac{\left(1 - {f}/{m}\right)^{-nm} - 1}{n}$ (71)	$f = m(1 - \sqrt[nm]{(1 + i_{пр} n)^{-1}})$ (72)
10	$i_{сл}$ и f	$i_{сл} = \left(1 - {f}/{m}\right)^{-m} - 1$ (73)	$f = m(1 - \sqrt[m]{(1 + i_{сл})^{-1}})$ (74)
11	$d_{пр}$ и j	$j = m(\sqrt[mn]{(1 - d_{пр} n)^{-1}} - 1)$ (75)	$d_{пр} = \dfrac{1 - \left(1 + {j}/{m}\right)^{-nm}}{n}$ (76)
12	$d_{сл}$ и j	$d_{сл} = 1 - \left(1 + {j}/{m}\right)^{-m}$ (77)	$j = m(\sqrt[m]{(1 - d_{сл})^{-1}} - 1)$ (78)
13	$d_{пр}$ и f	$d_{пр} = \dfrac{1 - \left(1 - {f}/{m}\right)^{nm}}{n}$ (79)	$f = m(1 - \sqrt[nm]{(1 - d_{пр} n)})$ (80)
14	$d_{сл}$ и f	$d_{сл} = 1 - \left(1 - {f}/{m}\right)^{m}$ (81)	$f = m(1 - \sqrt[m]{1 - d_{сл}})$ (82)
15	j и f	$j = m(\left(1 - {f}/{m}\right)^{-1} - 1)$ (83)	$f = m\left(1 - \left(1 + {j}/{m}\right)^{-1}\right)$ (84)

Если в финансовой операции размер процентной ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней.

Пусть за периоды $n_1, n_2, \ldots n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Средние процентные ставки получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу: $1 + N\bar{i}_{пр} = 1 + \sum_{t=1}^{к} n_t i_t$,

отсюда $\bar{i}_{пр} = \dfrac{\sum_{t=1}^{к} n_t i_t}{N}$.

Аналогично получим $\overline{d}_{пр} = \frac{\sum_{t=1}^{к} n_t d_t}{N}$, (85)

где N = $\sum_{t=1}^{к} n_t$ - общий срок наращения процентов,

$\overline{d}_{пр}$ и $\overline{i}_{пр}$ - средняя учетная и процентная ставка.

Если изменяются во времени и первоначальные суммы, то

$\overline{i}_{пр} = \frac{\sum_{t=1}^{к} i_t n_t P_t}{\sum_{t=1}^{к} n_t P_t}$.(3.38)

Если усредняются переменные во времени ставки сложных процентов, то:

$$\overline{i}_{сл} = \sqrt[N]{П\,(1 + i_t)^{n_t}} - 1\,; \qquad (86)$$

$$\overline{d}_{сл} = 1 - \sqrt[N]{\Pi\,(1 - d_t)^{n_t}}\;. \qquad (87)$$

<u>Пример 11.</u> Клиенту банком выдан кредит на пять лет под 9 % годовых.

Определить эквивалентную:

а) ставку сложных процентов, если кредит был выдан по ставке простых процентов;

б) ставку простых процентов, если кредит был выдан по ставке сложных процентов;

в) учетную ставку простых процентов, если кредит был выдан по процентной ставке простых процентов;

г) учетную ставку сложных процентов, если кредит был выдан по процентной ставке сложных процентов.

<u>Решение</u>: n=5.

а) $i_п = 0{,}09$; $i_c = ?$

$$i_c = (1 + n \cdot i_п)^{\frac{1}{n}} - 1 = (1 + 5 \cdot 0{,}09)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}077\;.$$

Значит, при одинаковой величине начального капитала одну и ту же наращенную сумму можно получить при простой процентной ставке 9% годовых или сложной процентной ставке 7,7% годовых, если срок сделки составляет 5 лет.

б) $i_c = 0{,}09$; $i_п = ?$

$$i_п = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n} = \frac{(1 + 0{,}09)^5 - 1}{5} = 0{,}108\;.$$

Кредит, выданный под 9% сложных годовых процентов, эквивалентен кредиту под 10,8% простых процентов на срок 5 лет.

в) $i_п = 0{,}09$; $d_п$ =?

$$d_n = \frac{i_n}{1 + n \cdot i_n} = \frac{0,09}{1 + 5 \cdot 0,09} = 0,062 \ ;$$

Кредит, выданный по простой процентной ставке 9% годовых, будет эквивалентен кредиту, выданному по простой учетной ставке 6,2% годовых.

г) $i_c = 0,09$; d_c =?

$$d_c = \frac{i_c}{1 + i_c} = \frac{0,09}{1 + 0,09} = 0,083 \ .$$

Таким образом, кредит, выданный по сложной процентной ставке 9% годовых, обеспечивает ту же наращенную сумму, что и по сложной учетной ставке 8,3% годовых.

Пример 12. При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 28% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно, поквартально?

Решение.

$$j = 12\left(\sqrt[12]{1 + 0,28} - 1\right) = 0,24942 \ ; \qquad j = 4\left(\sqrt[4]{1 + 0,28} - 1\right) = 0,25464 \ .$$

Пример 13. Для первых двух лет ссуды применяется ставка 20%, для следующих трех лет она составляет 24%. Нужно найти среднюю сложную процентную ставку.

Решение.

$$\bar{i} = \sqrt[5]{(1 + 0,20)^2 \cdot (1 + 0,24)^3} - 1 = 0,22384, \text{ или } 22,384\%.$$

Тема 4. Потоки платежей

Финансовые операции представляющие совокупность сделок, распределенных во времени, называются потоком платежей. Отдельный элемент называется членом потока. Если все члены потока платежей положительны (т.е. осуществляются только поступления средств или только выплаты и поток платежей можно считать однонаправленным), а временные интервалы между двумя последовательными платежами являются равными, то такой поток называется финансовой рентой или аннуитетом. Например, получение процентов по облигациям или погашение кредита в рассрочку.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

R – величина отдельного платежа, называемая членом ренты;

n – срок ренты, от начала первого периода до конца последнего;

i или j – годовые сложные процентные ставки, используемые для наращения ренты или дисконтирования платежей;

m – частота начислений процентов в году;

p – число рентных платежей в году;
S – наращенная сумма ренты, т.е. сумма всех платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты;
A – современная величина ренты (приведенная стоимость), т.е. сумма всех платежей, уменьшенная (дисконтированная) на величину процентной ставки на определенный момент времени (как правило, на начало ренты).

В зависимости от различных условий ренты подразделяются на следующие виды:
- годовые, с выплатой раз в году и p - срочные, с выплатой p- раз в году;
- дискретные, с фиксированным числом выплат и непрерывные, когда промежутки между выплатами стремятся к нулю;
- с ежегодным, m – разовым и непрерывным начислением процентов;
- постоянные, с одинаковой величиной платежа и переменные, с меняющейся во времени величиной платежа;
- обыкновенные (постнумерандо) с платежами в конце временных периодов и пренумерандо с платежами в начале периодов.

Таблица 3 – Определение наращенной суммы и современной стоимости постоянной ренты постнумерандо

Число платежей в году	Число начисления процентов в году	Наращенная сумма	Современная стоимость
$p=1$	$m=1$	$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ (88)	$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ (89)
	$m>1$	$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1}$ (90)	$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1}$ (91)
	$m \to \infty$	$S = R\frac{e^{bn} - 1}{e^{b} - 1}$ (92)	$A = R\frac{1-e^{-bn}}{e^{b} - 1}$ (93)
$p>1$	$m=1$	$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}$ (94)	$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)}$ (95)
	$m=p$	$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j}$ (96)	$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$ (97)
	$m \neq p$	$S = R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{p((1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1)}$ (98	$A = R\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{p((1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1)}$ (99)

	$m \to \infty$	$S = R\dfrac{e^{bn}-1}{p(e^{b/p}-1)}$ (100)	$A = R\dfrac{1-e^{-bn}}{p(e^{b/p}-1)}$ (101)

Часто при разработке контрактов и условий финансовых сделок задаются обобщающие характеристики S и A, а определяются другие параметры ренты: R; n; i или j.

В случае согласования остальных параметров финансовой сделки *срок ренты* можно рассчитать с помощью величины наращенной суммы или современной стоимости ренты.

Таблица 4 – Расчет срока постоянных рент постнумерандо

Число платежей в году	Число начислений процентов в году	Исходные параметры	
		S	A
p=1	*m=1*	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$ (102)	$n = \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$ (103)
	m>1	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}\left(\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1\right)+1\right)}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$ (104)	$n = \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}\left(\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$ (105)
	$m \to \infty$	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}b+1\right)}{b}$ (106)	$n = \dfrac{-\ln\left(1-\dfrac{A}{R}b\right)}{b}$ (107)
Число платежей в году	Число начислений процентов в году	Исходные параметры	
		S	*A*
p>1	*m=1*	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}p\left((1+i)^{1/p}-1\right)+1\right)}{\ln(1+i)}$ (108)	$n = \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}p\left((1+i)^{1/p}-1\right)\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$ (109)
	m=p	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}j+1\right)}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$ (110)	$n = \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$ (111)

Число платежей в году	Число начислений процентов в году	Исходные параметры	
		S	A
	$m \neq p$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (112)	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$ (113)
	$m \to \infty$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(e^{b/p}-1\right)+1\right)}{b}$ (114)	$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{A}{R}p\left(e^{b/p}-1\right)\right)}{b}$ (115)

В финансовой практике применяются также переменные ренты, в которых величины отдельных платежей изменяются по определенным правилам, а не являются постоянными.

Пример 14. Акционерное общество создает инвестиционный фонд. Ежегодно в фонд вносится 500 тыс. руб. под 7% годовых. Найти наращенную величину фонда, если он формируется в течение 5 лет. Как изменится срок ренты, если процентная ставка снизится в два раза? Определить современную величину ренты.

Решение.

а) Платежи производятся одинаковыми суммами в конце каждого периода (постнумерандо), через равные промежутки времени один раз в году.

R=500000 руб., i=0,07; n=5; S=?

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{i},\quad S=500000\cdot\frac{(1+0{,}07)^{5}-1}{0{,}07}=2875370 \text{ руб.}$$

Значит, к концу пятилетнего срока инвестиционный фонд составит 2875370 руб.

б) Рентные платежи осуществляются равными суммами два раза в году, а проценты начисляются ежеквартально.

R=500000 руб.; j=0,07; n=5; p=2; m=4; S=?

$$S=R\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)}=500000\cdot\frac{\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 5}-1}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1\right)}=2937003 \text{ руб.}$$

Видно, что наращенная сумма возрастает с увеличением частоты начислений процентов и числа рентных платежей в году.

в) Определим срок ренты, если процентная ставка снизится в два раза. Учтем оба варианта расчета.

В первом варианте параметры ренты составят:

R=500000 руб.; i=0,035; S=2875370 руб.; n=?

Срок ренты находится по формуле:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\cdot i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{2875370}{500000}\cdot 0{,}035 + 1\right)}{\ln(1+0{,}035)} = 5{,}33 \text{ года.}$$

Во втором варианте параметры ренты составят:
R=500000 руб.; *j*=0,035; *S*=2937003; *p*=2; *m*=4; *n*=?

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\cdot p\cdot\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right) + 1\right)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{2937003}{500000}\cdot 2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1\right) + 1\right)}{4\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)} = 5{,}39 \text{ года.}$$

Срок образования инвестиционного фонда увеличился до 5,39 года.
г) Современная величина постоянной ренты постнумерандо по первому варианте расчета составит:

$$A = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 500000\cdot\frac{1-(1+0{,}07)^{-5}}{0{,}07} = 2050099 \text{ руб.}$$

Значит, для создания инвестиционного фонда в размере 2875370 руб. через 5 лет, можно было вложить единовременно 2050099 руб. под 7% годовых сложных процентов.
Во втором варианте современная величина составит:

$$A = R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\cdot\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)} = 500000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{-4\cdot 5}}{2\cdot\left(\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1\right)} = 2075946 \text{ руб.}$$

Современная величина ренты несколько возросла и составила 2075946 руб., но и наращенная сумма равна 2937003 руб.

Тема 5. Переменные финансовые ренты. Конверсия финансовых рент

В практике встречаются случаи, когда члены потока платежей изменяются в течение срока ренты. Изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка, а иногда и случайными факторами.

Поток последовательных платежей, члены которого не являются постоянными величинами, называется *переменной рентой*. Изменение величины платежей может быть описано каким-либо законом или носить нерегулярный характер. При этом определяются параметры следующих видов рент:

а) ренты с разовыми изменениями платежей:

Наращенная сумма годовой ренты

$$S = R_1 \cdot s_{n_1;i_1} \cdot (1+i_1)^{n-n_1} + R_2 \cdot s_{n_2;i_2} \cdot (1+i_2)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k \cdot s_{n_k;i_k}, \qquad (5.1)$$

где $s_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коэффициент наращения годовой ренты.

Современная величина годовой ренты

$$A = R_1 \cdot a_{n_1;i_1} + R_2 \cdot a_{n_2;i_2} \cdot v^{n_1} + \ldots + R_k \cdot a_{n_k;i_k} \cdot v^{n-n_k}, \qquad (5.2)$$

где $a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$v = \dfrac{1}{(1+i)}$ – дисконтный множитель по ставке i;

n – срок ренты, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_к$;

$n_1, n_2, \ldots, n_к$ – продолжительность временных отрезков;

$R_1, R_2, \ldots, R_к$ - годовой платеж в соответствующем временном отрезке;

$i_1, i_2, \ldots, i_к$ – процентные ставки.

Если платежи вносятся несколько раз в году, то коэффициенты наращения ($s_{n;i}^{(p)}$) или приведения ($a_{n;i}^{(p)}$) рассчитываются как для p-срочной ренты.

б) ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов:

Наращенная сумма переменной ренты с постоянным абсолютным изменением ее членов составит:

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right), \qquad (5.3)$$

где d – разность арифметической прогрессии (величина абсолютного годового изменения членов ренты с соответствующим знаком),

R – первый член ренты.

Современная величина данной ренты составит:

$$A = R \cdot a_{n;i} + \frac{d}{i}\left(a_{n;i} - nv^n\right). \qquad (5.4)$$

Зная значение постоянного прироста d, процентной ставки i, наращенной суммы S или текущей суммы долга A, определяется размер первого платежа R:

$$R=\frac{S-\frac{d}{i}\left(s_{n;i}-n\right)}{s_{n;i}};\tag{5.5}$$

$$R=\frac{A-\frac{d}{i}\left(a_{n;i}-nv^{n}\right)}{a_{n;i}}.\tag{5.6}$$

Величина абсолютного прироста d определяется по формулам:

$$d=\frac{i\left(S-R\cdot s_{n;i}\right)}{s_{n;i}-n};$$

$$d=\frac{i\left(A-R\cdot a_{n;i}\right)}{a_{n;i}-nv^{n}}.\tag{5.7}$$

Для переменной p-срочной ренты с постоянным абсолютным приростом платежей наращенная сумма и современная стоимость определяются по формулам:

$$S=\sum_{t=1}^{pn}\left(R+\frac{d}{p}(t-1)\right)(1+i)^{n-t/p};\tag{5.8}$$

$$A=\sum_{t=1}^{pn}\left(R+\frac{d}{p}t\right)v^{t/p}.\tag{5.9}$$

в) ренты с постоянным относительным приростом платежей:

Наращенная сумма и современная стоимость ренты составят:

а) при ежегодных платежах

$$S=R\frac{q^{n}-(1+i)^{n}}{q-(1+i)};\tag{5.10}$$

$$A=R\frac{(qv)^{n}-1}{q-(1+i)},\tag{5.11}$$

где q – знаменатель прогрессии, т.е. коэффициент роста;

б) при p-срочной ренте

$$S=R\frac{q^{np}-(1+i)^{n}}{q-(1+i)^{1/p}};\tag{5.12}$$

$$A=R\frac{q^{np}v^{n}-1}{q-(1+i)^{1/p}}.\tag{5.13}$$

Расчеты по коммерческим сделкам могут предусматривать изменение условий оплаты, которое называется *конверсией финансовых рент*. Простейшими случаями конверсии являются *выкуп* ренты (замена ренты разовым платежом) и *рассрочка* платежа (замена разового платежа рентой).

Замена нескольких рент одной, параметры которой надо определить, называется *консолидацией* рент. Современная величина вновь образованной консолидированной ренты должна быть равна сумме современных величин консолидируемых рент:

$$A = \sum_{q=1}^{K} A_q = \sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}, \tag{5.14}$$

где А – современная величина консолидированной ренты;

A_q – современная величина q-ой заменяемой ренты, q=1, 2, …, K;

K – число консолидируемых рент;

R_q – член q-ой ренты;

n_q и i_q – соответственно продолжительность и процентная ставка q-ой ренты.

Член консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$R = \frac{A}{a_{n;i}} = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{a_{n;i}} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n;i}}, \tag{5.15}$$

где $a_{n;i}$ – коэффициент приведения консолидированной ренты.

Член консолидированной отсроченной ренты определяется по формуле:

$$R_{отсроч.} = \frac{A}{a_{n-t;i} \cdot v^t} = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{a_{n-t;i} \cdot v^t} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot a_{n_q;i_q}}{a_{n-t;i} \cdot v^t}, \tag{5.16}$$

где $a_{n-t;i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{i}$ – коэффициент приведения отсроченной консолидированной ренты;

t – продолжительность отсрочки, лет;

i – процентная ставка консолидированной ренты;

$v^t = \frac{1}{(1+i)^t}$ – дисконтный множитель за период t, на который отложена рента.

Срок консолидированной немедленной ренты определяется по формуле:

$$n = \frac{-\ln\left(\frac{1}{K}\sum_{q=1}^{K}\frac{1-(1+i_q)^{-n_q}}{i_q}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{5.17}$$

Если процентные ставки объединяемых рент и вновь создаваемой равны между собой, т.е. $i_1 = i_2 = \ldots = i_q = i$, то

$$n = \frac{\ln K - \ln \sum_{q=1}^{K}(1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}. \tag{5.18}$$

Замена немедленной ренты на отсроченную, т.е. когда первый платеж по ренте переносится на более поздний срок в t лет. При этом возможны следующие варианты конверсии:

1) общая продолжительность ренты остается прежней, т.е. $n_1 = n_2 = n$, рентный платеж составит:

$$R_2 = \frac{A_1}{a_{n;i} \cdot v^t} = \frac{R_1}{v^t} = R_1 (1 + i)^t, \tag{5.19}$$

где R_1 и R_2 – годовые платежи соответственно первоначальной и отсроченной ренты;

$a_{n;i}$ – коэффициент приведения первоначальной годовой ренты;

t - продолжительность отсрочки;

2) общая продолжительность ренты изменяется, т.е. $n_1 \neq n_2$, рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = \frac{A_1 \cdot (1 + i)^t}{a_{n_1;i}} = R_1 \cdot \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} \cdot (1 + i)^t, \tag{5.20}$$

где $a_{n_1;i}$ и $a_{n_2;i}$ – коэффициенты приведения соответственно первоначальной и отложенной рент;

3) члены ренты остаются неизменными, т.е. $R_1 = R_2$, тогда срок отложенной ренты составит:

$$n_2 = \frac{-\ln\left(1 - \left(1 - (1 + i)^{-n_1}\right)(1 + i)^t\right)}{\ln(1 + i)}.$$

Замена годовой ренты на p-срочную. Годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1 заменяется на *p*-срочную с параметрами R_2, n_2, *p*. Если заданы срок заменяющей ренты, ее периодичность и ставка, то

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}^{(p)}}, \tag{5.21}$$

где $a_{n_1;i} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n_1}}{i}$ – коэффициент приведения годовой ренты;

$a_{n_2;i}^{(p)} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n_2}}{p\left((1 + i)^{1/p} - 1\right)}$ – коэффициент приведения *p*-срочной ренты.

Если $n_1 = n_2 = n$, то

$$R_2 = R_1 \frac{p\left((1 + i)^{1/p} - 1\right)}{i}. \tag{5.22}$$

При *изменении продолжительности ренты* размер нового рентного платежа составит

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}. \qquad (5.23)$$

При *изменении срочности ренты* (числа выплат в году) годовой рентный платеж определяется по формуле:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n;i}^{(p_1)}}{a_{n;i}^{(p_2)}} = R_1 \frac{p_1\left((1+i)^{1/p_1}-1\right)}{p_2\left((1+i)^{1/p_2}-1\right)}, \qquad (5.24)$$

где p_1 и p_2 – характеристики срочности двух рент.

Пример 5.1 По условиям контракта платежи вносятся в конце года, первый платеж составляет 2 млн. руб., каждый год его величина возрастает на 200 тыс. руб., срок выплат 4 года, процентная ставка 8%. Определить наращенную сумму.

Решение. Параметры ренты:

$R = 2000000$ руб.; $n = 4$; $i = 0{,}08$; $d = 200000$ руб.;

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}08)^4 - 1}{0{,}08} = 4{,}506112 .$$

$$S = R \cdot s_{n;i} + \frac{d}{i}\left(s_{n;i} - n\right) = 2000000 \cdot 4{,}506112 + \frac{200000}{0{,}08}\left(4{,}506112 - 4\right) = 10277504 \text{ руб.}$$

Пример 5.2 Клиентом получен кредит сроком на 7 лет, при следующих условиях погашения: первый платеж 2 млн. руб., каждый следующий возрастает на 10%, платежи вносятся два раза в году, процентная ставка 8% годовых. Определить размер полученного кредита и сумму долга, подлежащую возврату.
Решение. Параметры ренты:

$R = 2000000$ руб.; $n = 7$; $i = 0{,}08$; $p = 2$; $q = 1{,}1$.

Размер полученного кредита – это современная стоимость ренты.

$$A = R \frac{q^{np} v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000 \frac{1{,}1^{14} \cdot 1{,}08^{-7} - 1}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 40000000 \text{ руб.}$$

$$S = R \frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}} = 2000000 \frac{1{,}1^{14} - 1{,}08^7}{1{,}1 - 1{,}08^{1/2}} = 68576300 \text{ руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1 Предприятием был получен кредит на 10 лет. Условия погашения кредита следующие: в первые пять лет платежи размером 6 млн. руб. вносятся каждый год под 11% годовых; следующие три года платежи размером 4 млн. руб. вносятся по полугодиям под 9% годовых. Последние два года ежеквартально вносятся платежи размером 3 млн. руб. под 8% годовых. Определите наращенную сумму долга по кредиту. Рассчитайте современную стоимость кредита.

5.2 Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 7 лет: а) в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 60 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 3000 руб.; б) каждое полугодие будут поступать платежи, первый из которых составит 35 тыс. руб., а каждый последующий будет увеличиваться на 1700 руб. Определите наращенную стоимость и приведенную величину этого аннуитета, если банк применяет процентную ставку 12% годовых, а сложные проценты начисляются один раз в конце года.

5.3 По условиям контракта на счет клиента в банке поступают в течение 6 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 150 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 11%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 10% годовых.

5.4 За 5 лет необходимо накопить 1000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 15%, а процентная ставка равна 11% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Как изменится величина первого вклада, если предполагается ежеквартальный рост поступлений на 6%?

5.5 За 10 лет необходимо накопить 5000 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 10000 руб., а процентная ставка равна 10% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 150 тыс. руб.

5.6 Три немедленные годовые ренты постнумерандо, с характеристиками: R_q = 130; 220 и 300 тыс. руб.; n_q = 5; 12 и 8 лет; i_q = 14; 22 и 18% ; заменяются: а) одной немедленной рентой постнумерандо со сроком 10 лет и процентной ставкой 20% годовых; б) одной отсроченной на 3 года рентой с общим сроком 10 лет, включая отсрочку, и процентной ставкой 20% годовых. Определите величину годового платежа консолидированной ренты.

5.7. Объединяются три ренты со сроками n_q = 7; 4 и 9 лет, члены рент равны между собой, а R_q = 500 тыс. руб.; процентные ставки также равны и составляют i_q = 8%. Размер консолидированного годового платежа равен 1,5 млн. руб., процентная ставка сохраняется на уровне 8% годовых. Определите срок новой ренты.

5.8. Фирма по торговле недвижимостью продает объект стоимостью 3,5 млн. руб. При этом предлагаются следующие варианты оплаты: а) оплата в течение трех лет равными платежами, вносимыми в конце года под 9% годовых; б) оплата с отсрочкой платежа в один год, остальные условия аналогичны предыдущему варианту; в) оплата с отсрочкой в один год, но срок ренты возрастает до четырех лет. Определите финансовые последствия для каждого варианта.

5.9. По условиям договора немедленная годовая рента сроком четыре года, величиной годового платежа 200 тыс. руб. и процентной ставкой 10 % годовых, заменяется отсроченной на два года рентой. Определите срок новой ренты при сохранении остальных параметров.

5.10. По условиям соглашения между кредитором и заемщиком годовая рента постнумерандо с величиной годового платежа 180 тыс. руб., сроком три года и ставкой 14% годовых, заменяется на квартальную при сохранении остальных параметров. Оцените новый аннуитет. Как изменятся параметры аннуитета, если срок ренты увеличится до четырех лет?

Вопросы для самоконтроля

1. Какой аннуитет называется переменным?
2. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
3. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным относительным изменением его членов. Какую последовательность образуют члены такого аннуитета?
4. Перечислите виды конверсии ренты.
5. Что такое консолидация ренты?
6. Что такое отсроченная рента?

Тема 6. Погашение долгосрочных кредитов

В банковской практике стран со стабильной экономикой и невысокой инфляцией (до 10% в год) среднесрочным считается кредит, выданный на срок от 2 до 5 лет, если срок кредита составляет 5 и более лет, то он является долгосрочным.

Стороны сделки выбирают удобные для них условия погашения долгосрочных кредитов в виде постоянных и переменных финансовых рент, а также нерегулярных потоков платежей. Затем, в соответствии с условиями контракта, составляется план погашения задолженности. Одним из важных элементов этого плана является определение числа срочных выплат и их величины.

Срочные выплаты – это денежные средства, предназначенные для погашения как основного долга, так и текущих процентных платежей. Величина срочных уплат зависит от суммы кредита, его срока, наличия и продолжительности льготного периода, размера процентной ставки и других условий.

Погашение долга в рассрочку

а) Погашение займа производится равными срочными выплатами, когда каждая срочная выплата Y является суммой двух величин: годового расхода по погашению основного долга R и процентного платежа по займу I, т.е. $Y = R + I$.

Величина долгосрочного кредита D равна сумме всех дисконтированных платежей, т.е. является современной величиной всех срочных выплат:

$$D = \frac{Y_1}{(1+i)} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}$$

Если все срочные выплаты по кредиту равны между собой, т.е. $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n$ с одинаковой процентной ставкой , то величина кредита составит:

$$D = Y \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}, \tag{6.1}$$

а величина срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y = D \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}. \tag{6.2}$$

Зная первую процентную выплату $I_1 = i \cdot D$ и величину срочной выплаты Y, можно определить сумму первого погашения основного долга $R_1 = Y - I_1$. Это, в свою очередь, дает остаток долга на второй расчетный период $D_2 = D - R_1$, который является базой для начисления процентов в следующем году $I_2 = i \cdot D_2$, что позволит определить величину платежа основного долга во втором году $R_2 = Y - I_2$ и т.д.

Выплата основного долга R_k в k-ом периоде времени

$$R_k = Y(1+i)^{-n+k-1}, \tag{6.3}$$

где $k = 1, 2, \ldots n$ - порядковый номер расчетного периода времени.

Остаток основной суммы задолженности в k-ом периоде

$$D_k = \frac{D((1+i)^n - (1+i)^{k-1})}{(1+i)^n - 1}. \tag{6.4}$$

Сумма начисленных процентов в k-ом периоде времени

$$I_k = Y(1 - (1+i)^{-n+k-1}). \tag{6.5}$$

Если процентная ставка по займу изменяется во времени, то величина годовой срочной выплаты определяется по формуле:

$$Y_k = D_k \frac{i_k (1+i_k)^{n-k+1}}{(1+i_k)^{n-k+1} - 1}. \tag{6.6}$$

б) Погашение займа производится равными выплатами основного долга, то в этом случае размеры платежей по основному долгу будут равными

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_k = \ldots = R_n = \frac{D}{n}, \tag{6.7}$$

а остаток основного долга в начале k-го расчетного периода определится как

$$D_k = D - R(k-1), \tag{6.8}$$

где D – величина всего долга.

Величина срочной выплаты в k-ом расчетном периоде равна:

$$Y_k = D_k \cdot i + R = (D - R(k-1)) \cdot i + R. \qquad (6.9)$$

Величина процентного платежа для k-го расчетного периода находится по формуле:

$$I_k = D_k \cdot i = (D - R(k-1)) \cdot i. \qquad (6.10)$$

в) Погашение займа производится переменными выплатами основного долга, а выплаты изменяются в арифметической прогрессии, то есть контрактом предусмотрено погашение основного долга осуществлять платежами, возрастающими или убывающими в арифметической прогрессии с разностью d, тогда выплаты основного долга в k-ом периоде составляют

$$R_k = R_1 \pm (n-k) \cdot d. \qquad (6.11)$$

Для возрастающей арифметической прогрессии величина первого платежа по погашению основной суммы долга по займу составит:

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d, \qquad (6.12)$$

а для убывающей арифметической прогрессии

$$R_1 = \frac{D}{n} + \frac{n-1}{2} \cdot d. \qquad (6.13)$$

Если выплаты изменяются в геометрической прогрессии, то погашение основного долга производится платежами, каждый из которых больше или меньше предыдущего в q раз. Эти платежи являются членами возрастающей или убывающей геометрической прогрессии, где q – знаменатель прогрессии.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}, \text{ при } q > 1; \qquad (6.14)$$

$$R_1 = D \cdot \frac{1-q}{1-q^n}; \text{ при } 0 < q < 1. \qquad (6.15)$$

Конверсия займов

Конверсией называется изменение условий займов, когда могут меняться сроки их погашения, процентные ставки и т.п.

Обозначим параметры займов:

n – первоначальный срок погашения займов до конверсии;

n_1 – срок, на который продлен период погашения в результате конверсии;

k – число оплаченных расчетных периодов до конверсии;

i – процентная ставка до конверсии;

i_1 – процентная ставка после конверсии;

Y – величина срочной выплаты до конверсии;

Y_1 – величина срочной выплаты после конверсии;

D – величина основного долга;

D_{n-k} – остаток долга на момент конверсии.

Для составления плана погашения конверсионного займа определяют:

а) величину срочной выплаты по старым условиям:

$$Y = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; \qquad (6.16)$$

б) остаток долга на момент конверсии:

$$D_{n-k} = Y\frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k}\cdot i}; \qquad (6.17)$$

в) величину срочной выплаты по новым условиям:

$$Y_1 = D_{n-k}\frac{i(1+i)^{n-k+n_1}}{(1+i)^{n-k+n_1} - 1}. \qquad (6.18)$$

Льготные кредиты

При льготном долгосрочном кредитовании заемщик фактически получает субсидию, а кредитор теряет определенную сумму в результате данной сделки. Эта добровольно упущенная выгода кредитора называется ***грант-элементом*** и может быть рассчитана в виде абсолютной или относительной величины.

Обозначим параметры льготных займов:

D – сумма предоставленного кредита;

n – срок кредита, лет;

g – льготная процентная ставка, по которой предоставлен кредит;

i – общепринятая процентная ставка ($i > g$);

$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i;

$a_{n;g} = \dfrac{1-(1+g)^{-n}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g;

$a_{L;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-L}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком L;

L – продолжительность льготного периода погашения кредита, лет;

$a_{n-L;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i}$ – коэффициент приведения ренты по ставке i со сроком $n-L$;

$a_{n-L;g} = \dfrac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g}$ – коэффициент приведения ренты по ставке g со сроком $n-L$;

$v^L = \dfrac{1}{(1+i)^L}$ – дисконтный множитель по ставке i;

w – относительный грант-элемент;

W – абсолютный грант-элемент.

Для всех вариантов льготного кредитования абсолютный грант-элемент может быть рассчитан по формуле:

$$W = D \cdot w\,. \tag{6.19}$$

Варианты льготного кредита:

а) кредит предоставляется по льготной ставке:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}; \tag{6.20}$$

б) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого выплачиваются только проценты:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot v^{L} + g \cdot a_{L;i} \right); \tag{6.21}$$

в) кредит предоставляется по льготной ставке и имеет льготный период погашения, в течение которого проценты не выплачиваются:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \right) \cdot \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^{L}; \tag{6.22}$$

г) беспроцентный кредит:

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{n}; \tag{6.23}$$

д) беспроцентный кредит с наличием льготного периода погашения:

$$w = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{n} \cdot v^{L}. \tag{6.24}$$

Пример 6.1. Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 300 тыс. руб. на 5 лет под 10% годовых. Начисление процентов производится раз в году. Погашение кредита должно производиться: а) равными срочными выплатами; б) равными выплатами основного долга; в) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 10 тыс. руб.; г) выплаты основной суммы долга должны ежегодно возрастать на 5%. Составить план погашения займа для каждого варианта.

Решение. Параметры кредита: D = 300000 руб.; n = 5; i = 0,1; d = 10000 руб.;
q = 1,05.

а) Определяется величина срочной выплаты

$$Y = D\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1} = 300000 \quad \frac{0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^{5}}{(1+0{,}1)^{5}-1} = 79139 \quad \text{руб.}$$

Далее последовательно рассчитываются процентные платежи, годовой расход по погашению основной суммы долга, остаток долга за каждый год и составляется план погашения задолженности.

Таблица 6.1 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, *D*	Процентный платеж, *I*	Годовой расход по погашению основного долга, *R*	Годовая срочная выплата, *Y*
1	300000	30000	49139	79139
2	250861	25086	54053	79139
3	196808	19681	59458	79139
4	137350	13735	65404	79139
5	71946	7193	71946	79139
Итого	—	95695	300000	395695

б) Определяем величину годового расхода по погашению основной суммы долга

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_k = \ldots = R_n = \frac{D}{n} = \frac{300000}{5} = 60000 \text{ руб.}$$

Остальные параметры сделки определяются последовательно по годам и составляется план погашения кредита.

Таблица 6.2 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, *D*	Процентный платеж, *I*	Годовой расход по погашению основного долга, *R*	Годовая срочная выплата, *Y*
1	300000	30000	60000	90000
2	240000	24000	60000	84000
3	180000	18000	60000	78000
4	120000	12000	60000	72000
5	60000	6000	60000	66000
Итого	—	90000	300000	390000

в) Определяем величину первого платежа для возрастающей арифметической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d = \frac{300000}{5} - \frac{5-1}{2} \cdot 10000 = 40000 \text{ руб.}$$

Таблица 6.3 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, *D*	Процентный платеж, *I*	Годовой расход по погашению основного долга, *R*	Годовая срочная выплата, *Y*
1	300000	30000	40000	70000
2	260000	26000	50000	76000
3	210000	21000	60000	81000
4	150000	15000	70000	85000
5	80000	8000	80000	88000
Итого	—	100000	300000	400000

г) Определяем величину первого платежа для возрастающей геометрической прогрессии, а затем составляем план погашения.

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 300000 \quad \frac{1{,}05 - 1}{1{,}05^5 - 1} = 54292 \quad \text{руб.}$$

Таблица 6.4 - План погашения кредита, руб.

Год	Остаток долга, *D*	Процентный платеж, *I*	Годовой расход по погашению основного долга, *R*	Годовая срочная выплата, *Y*
1	300000	30000	54292	84292
2	245708	24571	57007	81578
3	185851	18585	59857	78442
4	125994	12599	62850	75449
5	63144	6314	65994	72308
Итого	—	92069	300000	392069

Пример 6.2 Льготный заем в сумме 500000 руб. выдан на 10 лет под 8% годовых. Обычная ставка для подобных займов составляет 14%. Погашение займа предусматривает льготный период 2 года, в течение которых будут выплачиваться только проценты. Определить абсолютную и относительную величину грант-элемента.

Решение. По условию задачи имеем: D =500000 руб., n =10; i =14%; g = 0,08; L =2,

$$a_{L;i} = \frac{1-(1+i)^{-L}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-2}}{0{,}14} = 1{,}646661 \quad ;$$

$$a_{n-L;i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-L)}}{i} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-(10-2)}}{0{,}14} = 4{,}638864 \quad ;$$

$$a_{n-L;g} = \frac{1-(1+g)^{-(n-L)}}{g} = \frac{1-(1+0{,}08)^{-(10-2)}}{0{,}08} = 5{,}746639 \quad ;$$

$$v^L = \frac{1}{(1+i)^L} = \frac{1}{(1+0{,}14)^2} = 0{,}769468 \quad .$$

Определяем величину относительного грант-элемента:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot v^L + g \cdot a_{L;i} \right) = 1 - \left(\frac{4{,}638843}{5{,}746639} \cdot 0{,}769468 + 0{,}08 \cdot 1{,}646661 \right) = 0{,}2471$$

или 24,11%.

Абсолютная величина грант-элемента, т.е. добровольно упущенной выгоды кредитора, составит:

$$W = D \cdot w = 500000 \cdot 0{,}2411 = 123550 \quad \text{руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Банк выдал долгосрочный кредит в сумме (таблица 6.5) на несколько лет под 12% годовых. Погашение кредита должно производиться равными срочными выплатами при ежегодном начислении сложных декурсивных процентов. Составьте план погашения кредита.

Таблица 6.5 – Размер и срок кредита

Вариант	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.	**Вариант**	Сумма на счете, млн. руб.	Срок, лет.
1	80	7	**16**	29	7
2	70	6	**17**	35	10
3	100	5	**18**	40	8
4	88	7	**19**	99	9
5	50	6	**20**	60	6
6	55	8	**21**	75	9
7	68	5	**22**	89	8
8	39	8	**23**	90	7
9	45	7	**24**	97	10
10	92	9	**25**	85	8
11	59	6	**26**	77	7
12	63	7	**27**	41	9
13	38	10	**28**	65	7
14	59	7	**29**	87	6
15	20	8	**30**	71	9

6.2 Составьте план погашения кредита по данным таблицы 6.5 если банк выдал долгосрочный кредит под 14% годовых. Начисление процентов производится раз в году. Погашение кредита должно производиться равными выплатами основного долга.

6.3 Составьте план погашения кредита по данным таблицы 6.5 если банк выдал долгосрочный кредит под 9% годовых. Выплаты основного долга должны ежегодно возрастать на 3 млн. руб. проценты начисляются один раз в году.

6.4 Кредит в размере (таблица 6.5) должен быть погашен в течение нескольких лет ежегодными выплатами. Процентная ставка сложных декурсивных процентов составляет 15% годовых. Платежи основного долга ежегодно возрастают на 7%. Составьте план погашения кредита.

6.5 Клиентом банка получен кредит в размере 10 млн. руб. сроком на 7 лет. Первые два года ставка составляет 8% годовых, следующие два года – 10%, последние три года – 15%. Погашение основного долга и выплата процентов осуществляется в конце года. Составьте план погашения займа.

6.6 Кредит в сумме 40 млн. руб., выданный на 5 лет под 6% годовых, погашается равными срочными выплатами в конце каждого года. После погашения третьего платежа кредитор и заемщик договорились о продлении срока погашения займа на 2 года и увеличении процентной ставки с момента конверсии до 10%. Составьте план погашения оставшейся части долга.

6.7 Льготный заем в сумме (таблица 6.5) выдан на несколько лет под 7% годовых. Обычная ставка для подобных займов 12%. Погашение долга предусматривается равными срочными выплатами. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 3 года, в течение которого выплачиваются только проценты; в) имеется льготный период 3 года, в течение которого проценты не выплачиваются.

6.8. Предоставлен льготный беспроцентный заем в размере (таблица 6.5) на несколько лет. Существующая процентная ставка на момент выдачи займа 9%. Определите относительную и абсолютную величину грант-элемента, если: а) льготный период погашения не предусмотрен; б) имеется льготный период погашения займа 2 года.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие кредиты считаются кратко, средне и долгосрочными?
2. Что такое срочные выплаты?
3. От каких параметров зависит величина срочных выплат?
4. Назовите варианты погашения долгосрочного кредита в рассрочку.
5. Что такое конверсия займов?
6. Что представляет собою грант-элемент?
7. Перечислите варианты льготных кредитов.

Тема 7. Эффективность финансовых операций

Решение проблемы измерения и сравнения степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета условной годовой ставки для каждого вида операций с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения.

Расчетная процентная ставка, отражающая общую доходность финансовой операции, имеет различные названия. В простых депозитных и ссудных операциях она называется *эффективной,* в расчетах по оценке облигаций ее часто называют *полной доходностью,* в анализе производственных инвестиций для аналогичного по содержанию показателя применяется термин – *внутренняя норма доходности.* В целом для всех случаев, кроме анализа производственных инвестиций, эта годовая ставка называется – *полной доходностью.*

Минимальная полная доходность – это расчетная ставка процента, при которой капитализация всех видов доходов от операции равна сумме инвестиций и, следовательно, капиталовложения окупаются. Чем выше полная доходность, тем больше эффективность операции.

Ссудные операции. Доходность этих операций измеряется с помощью эквивалентной годовой ставки сложных процентов.

Условные обозначения:

D – размер ссуды;

n – срок ссуды, выраженный в годах;

G – сумма удержанных комиссионных;

$i_э$ – ставка полной доходности;

D – G – размер фактически выданной суммы.

Наращение величины $D - G$ по ставке полной доходности $i_э$ должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке простых процентов – i, т.е.

$$(D-G)\cdot(1+i_э)^n = D\cdot(1+ni).$$

Так как сумма удержанных комиссионных *G* определяется в процентах от номинальной стоимости кредита *D*, то *G*=*Dq*, где *q* – доля комиссионных в сумме кредита, тогда:

$$i_э = \left(\frac{1+ni}{1-q}\right)^{1/n} - 1. \tag{7.1}$$

Если полная доходность финансовой операции измеряется в виде ставки простых процентов, получим:

$$i_{эп} = \frac{1+ni}{(1-q)n} - 1. \tag{7.2}$$

Когда ссуда выдается под сложные проценты *i*, то исходное уравнение для определения сложной процентной ставки полной доходности $i_э$, имеет вид: $(D-G)\cdot(1+i_э)^n = D\cdot(1+i)^n$, откуда

$$i_э = \frac{1+i}{(1-q)^{1/n}} - 1. \tag{7.3}$$

Пример 7.1 При выдаче ссуды на 200 дней под 12 % годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,8 % от суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов, если кредит выдан:
а) по простым процентам; б) по сложным процентам.

Решение. По условию задачи: n = 200/365; i = 0,12; q = 0,008.
Используя формулы (7.1) и (7.2), получим:

а) $i_э = \left(\dfrac{1+0{,}12\cdot\dfrac{200}{365}}{1-0{,}008}\right)^{\frac{365}{200}} - 1 = 0{,}1398$ или 13,98%;

б) $i_э = \dfrac{1+0{,}12}{(1-0{,}008)^{365/200}} - 1 = 0{,}1365$ или 13,65%.

Учетные операции. При определении ставки доходности операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$**,** если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке d, с удержанием комиссионных и дисконта, то заемщик получит сумму D (1 – n'd – q) или D – Dn'd – Dq.
D – номинальная стоимость векселя;
Dn'd - дисконт;
G = Dq – сумма комиссионных удержаний;
d – простая учетная ставка;
n' - временной интервал между датой учета и датой погашения векселя.

Тогда D (1 – n'd – q) (1 + $i_э$)^n = D, отсюда:

$$i_э = (1 - n'd - q)^{-\frac{1}{n}} - 1. \qquad (7.4)$$

Если эффективность измеряется в виде ставки простых процентов – $i_{эп}$., то D (1 – n'd – q) (1 + n$i_{эп}$) = D, отсюда

$$i_{эп} = \frac{1}{(1 - n'd - q)n} - 1. \qquad (7.5)$$

Пример 7.2 Вексель учтен в банке по учетной ставке 8 % годовых за 90 дней до даты погашения. При учете с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 % (К=360 дней). Определить полную доходность операции по ставке сложных процентов.

Решение. По условию задачи $n' = \frac{90}{360}$, d = 0,08; q = 0,004.

$$i_э = (1 - \frac{90}{360} 0,08 - 0,004)^{-\frac{360}{90}} - 1 = 0,102$$ или 10,2%.

Покупка и продажа векселя (простая учетная ставка).

Если вексель или другое долговое обязательство через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить с помощью ставок простых и сложных процентов.

Финансовая результативность операции здесь связана с разностью цен купли-продажи, которые в свою очередь определяются сроками этих активов до погашения векселя и уровнем учетных ставок.

Обозначим:

S – номинал векселя;

К = 365 дней; К' = 360 дней;

d_1 – учетная ставка, по которой вексель был куплен;

t_1 – число дней до наступления срока погашения векселя;

t_2 – число дней, до продажи векселя;

d_2 – учетная ставка, по которой вексель был продан;

P_1 – цена векселя в момент его покупки (учета);

P_2 – цена продажи векселя;

$t_1 - t_2$ – время между моментом покупки и продажи векселя.

Доходность купли продажи (в виде ставки простых процентов $i_{эп}$).

$$i_{эп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1(t_1 - t_2)} \cdot K \text{ или } i_{эп} = \frac{(t_1 d_1 - t_2 d_2)}{(K' - t_1 d_1)} \cdot \frac{K}{(t_1 - t_2)} \qquad (7.6)$$

При использовании годовой сложной процентной ставки доходность сделки составит:

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1 \text{ или } i_э = \left(\frac{K' - t_2 d_2}{K' - t_1 d_1}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1. \qquad (7.7)$$

Пример 7.3 Вексель номинальной стоимостью 1 млн. руб. был учтен в банке за 120 дней до его погашения по учетной ставке 9%. Через 30 дней он был переучтен в другом банке по учетной ставке 8%. Определить эффективность данной операции в виде простой и сложной ставки.

Решение. По условию: S = 1 млн. руб., t_1 = 120 дней; t_2 = 120-30 = 90 дней;
d_1 = 0,09; d_2 = 0,08.

Найдем эффективность сделки по формуле (7.6):

$$i_{эп} = \frac{(120 \cdot 0,09 - 90 \cdot 0,08)}{(360 - 120 \cdot 0,09)} \cdot \frac{365}{(120 - 90)} = 0,125 .$$

Эффективность операции составляет 12,5%.

Если использовать ставку сложных процентов, то эффективность сделки определяется по формуле (7.7):

$$i_э = \left(\frac{360 - 90 \cdot 0,08}{360 - 120 \cdot 0,09}\right)^{\frac{365}{30}} - 1 = 0,133 .$$

Эффективность операции составляет 13,3%.

Операции с депозитными сертификатами.

Если депозитный сертификат, или другой подобного рода краткосрочный инструмент, через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения вновь продан, то доходность такой операции можно измерить в виде ставки простых или сложных процентов.

Если сертификат с разовым начислением процентов, со сроком погашения t_1, покупается по номиналу, продается за t_2 дней до погашения, а процентная ставка сертификата изменилась с i_1 до i_2, то эффективность по простой ставке находится по формуле:

$$i_{эп} = \left(\frac{1 + \frac{t_1}{K} i_1}{1 + \frac{t_2}{K} i_2} - 1\right) \frac{K}{t_1 - t_2}, \text{ где К = 365 или 360 дней.} \qquad (7.8)$$

Если мерой эффективности служит сложная процентная ставка, то:

$$i_э = \left(\frac{K + t_1 i_1}{K + t_2 i_2}\right)^{K/(t_1 - t_2)} - 1 . \qquad (7.9)$$

Сертификат покупается после выпуска и погашается в конце срока:
P_1 – номинал финансового инструмента;
P_2 – цена приобретения финансового инструмента;
i – объявленная эмитентом процентная ставка.

$$i_{эп} = \left(P_1 \frac{1 + \frac{t_1}{K} i}{P_2} - 1 \right) \frac{K}{t_2}; \qquad (7.10)$$

$$i_э = \left(\frac{P_1 \left(1 + \frac{t_1}{K} i \right)}{P_2} \right)^{365/t_2} - 1. \qquad (7.11)$$

Пример 7.4 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 185 дней до срока его погашения и продан через 120 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была 15,0 %, в момент продажи – 12,7 %. Определить доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.

Решение. По условию t_1 = 185 дней, t_2 = 120 дней, i_1 = 0,15; i_2 = 0,127. Используем формулу (7.9)

$$i_э = \left(\frac{365 + 185 \cdot 0{,}15}{365 + 120 \cdot 0{,}127} \right)^{365/(185-120)} - 1 = 0{,}1993$$ или 19,93%.

Задачи для самостоятельного решения

7.1 Банк предоставил кредит в сумме 200 тыс. руб. на 250 дней под 18,0 % годовых простых процентов. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,8 % от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности простых и сложных процентов.

7.2 Банком предоставлен кредит на 300 дней под 12,0 % годовых в сумме 180 тыс. рублей. При выдаче кредита были удержаны комиссионные в сумме 0,5 %. Определите годовую ставку полной доходности сложных процентов, если проценты начислялись: а) по простым процентам; б) по сложным процентам.

7.3 Банком предоставлен кредит сроком на 5 лет в сумме 245 тыс. рублей, под 11,8 % годовых (проценты сложные). При выдаче кредита были удержаны комиссионные в размере 0,7% от величины кредита. Определите годовую ставку полной доходности операции по сложным процентам. На какую величину повысилась стоимость кредита для заемщика вследствие удержания комиссионных?

7.4 Вексель учтен в банке по учетной ставке 12,0 % годовых за 130 дней до его оплаты. При учете векселя удержаны комиссионные в размере 0,4 %. Определите доходность операции в виде простых и сложных процентов.

7.5 Вексель куплен за 158 дней до его погашения с учетной ставкой 8,0 % годовых. Через 67 дней его реализовали по учетной ставке 7,3 %. Определите эффективность операции в виде простой и сложной ставки.

7.6 Вексель стоимостью 140 тыс. рублей учтен банком по учетной ставке 18,0 % годовых за 140 дней до оплаты. Через 60 дней банк переучел его в другом банке по учетной ставке 14,7 % годовых. Определите эффективность данной финансовой операции для банка по простой и сложной ставке. Как изменится эффективность операции, если переучет векселя проведен по учетной ставке 19,8 % годовых?

7.7 Банком выпущен депозитный сертификат номинальной стоимостью 400 тыс. рублей сроком на 11 месяцев по ставке 17,0 % годовых. Определите эффективность следующих финансовых операций:

- клиент приобрел сертификат по номиналу в момент его выпуска и продал его через 90 дней после приобретения по ставке 14,0 % годовых;
- клиент приобрел сертификат через 45 дней после его выпуска и погасил его в конце установленного срока;
- клиент приобрел сертификат через 50 дней после выпуска под 17,0 % годовых, а через 180 дней после приобретения реализовал его по ставке 15,8 % годовых.

7.8 Сертификат с номиналом 140 тыс. рублей, с объявленной доходностью 12,7 % (простые проценты) сроком 640 дней куплен за 165 тыс. рублей за 190 дней до его оплаты. Какова доходность инвестиции?

7.9 Денежный сертификат был приобретен за 170 дней до срока погашения в сумме 90 тыс. рублей и продан за 115 тыс. рублей через 90 дней. Определите доходность операции, если применялась простая и сложная ставка процентов.

7.10 Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 250 дней до срока его погашения и продан через 140 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была равна 14,7 %, в момент продажи – 12,5 %. Определите доходность операции купли – продажи в виде годовой ставки сложных процентов.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под полной доходностью финансовой операции?
2. Как определяется годовая ставка полной доходности в виде ставки простых и сложных процентов?
3. Из какого уравнения выводится показатель доходности учетных операций?
4. Как определяется доходность операций с векселями?
5. Как оценивается доходность перепродажи депозитного сертификата?

Задания для контрольной работы

Задачи 1-10. Банк выдал клиенту ссуду в размере «P» тыс. руб. сроком на: 50 дней, 2 месяца, 8 месяцев, 10 месяцев и 1 год по ставке «i» простых процентов (и «d» учетной ставке процента). Определить наращенную сумму, если проценты начислялись: а) по процентной ставке; б) по учетной ставке. Через какой срок величина ссуды увеличится на: 15 % ;20%; 35%, а также в 1,5 раза.

№ задачи	Величина ссуды, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	Учетная ставка, % (d)	**№ задачи**	Величина ссуды, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, %. (i)	Учетная ставка, % (d)
1	500	13,0	13,0	**11**	260	12,5	12,5
2	430	13,5	13,5	**12**	420	9,5	9,5
3	280	11,0	11,0	**13**	390	14,2	14,2
4	360	10,5	10,5	**14**	560	11,5	11,5
5	240	14,0	14,0	**15**	370	12,7	12,7
6	290	11,8	11,8	**16**	620	11,3	11,3
7	380	12,7	12,7	**17**	260	16,7	16,7
8	630	15,1	15,1	**18**	340	12,9	12,9
9	510	12,3	12,3	**19**	580	13,8	13,8
10	470	13,2	13,2	**20**	350	15,1	15,1

Задачи 21-40. Банк выдал клиенту кредит. Определите сумму, подлежащую возврату по английской, французской и германской практике по данным таблицы. Как изменятся наращенные суммы при использовании всех трех методов, если процентная ставка увеличится в: 1,1раза, 1,3 раза.

№ задачи	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.	**№ задачи**	Дата выдачи кредита	Срок возврата	Процентная ставка, %	Сумма основного долга, руб.
21	10.01	20.08	10,2	200000	**31**	16.01	11.09	13,4	300000
22	19.01	30.10	14,0	300000	**32**	1.02	13.08	11,0	570000
23	5.02	18.09	12,6	280000	**33**	28.03	30.10	18,5	512000
24	9.01	1.06	18,0	350000	**34**	12.02	5.12	14,3	640000
25	30.01	10.11	14,9	100000	**35**	14.03	5.06	20,4	700000
26	24.03	15.09	10,0	275000	**36**	16.01	26.10	17,0	450000
27	16.02	20.11	14,3	120000	**37**	11.04	24.11	18,9	396000
28	18.03	3.12	18,7	800000	**38**	9.01	12.09	12,0	360000
29	16.04	23.10	21,2	750000	**39**	6.04	7.12	14,3	430000
30	3.01	19.10	13,0	240000	**40**	5.02	6.10	16,7	270000

Задачи 41-60 Фирма получила кредит с оговоренной суммой возврата (таблица 1.6). Определите процентную и учетную ставку, если срок кредита составляет: 60 дней; 120 дней; 5 месяцев; 8 месяцев; 1 год (К = 360).

№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.	№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб.	Сумма возврата, тыс. руб.
41	200	250	**51**	370	399
42	180	220	**52**	390	436
43	150	175	**53**	280	307
44	370	410	**54**	450	474
45	250	280	**55**	480	509
46	380	420	**56**	805	845
47	470	500	**57**	610	629
48	620	650	**58**	740	781
49	390	420	**59**	210	242
50	250	286	**60**	280	296

Задачи 61-80. Клиенту банка предоставлен потребительский кредит сроком на 12 месяцев с ежемесячным погашением кредита в сумме «*P*» руб., под «*i*» % годовых. Составить план погашения кредита.

№ задачи	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	№ задачи	Сумма кредита, руб. (P)	Процентная ставка, % (i)
61	100000	15,0	**71**	140000	12,5
62	150000	15,5	**72**	480000	13,0
63	170000	16,0	**73**	430000	13,5
64	190000	16,5	**74**	380000	14,0
65	200000	17,0	**75**	290000	14,5
66	240000	17,5	**76**	430000	15,0
67	250000	18,0	**77**	330000	15,5
68	280000	18,5	**78**	420000	16,0
69	300000	19,0	**79**	500000	16,5
70	340000	19,5	**80**	510000	17,0

Задачи 81-100. Определенная сумма (таблица) инвестируется под годовую процентную ставку: а) на 30 дней; б) 80 дней; в) на 3 месяца; г) на 6 месяцев; д) 1 год; е) 5 лет; ж) 8 лет. Найдите наращенные суммы при условии ежегодного начисления сложных и простых процентов.

№ задачи	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %	№ задачи	Ссуда, тыс. руб.	Ставка, %
81	800	16,0	**91**	200	17,4
82	280	18,5	**92**	300	15,0
83	370	16,3	**93**	400	16,2
84	690	14,9	**94**	1000	17,0
85	1100	15,7	**95**	600	15,9
86	1850	19,0	**96**	700	15,2
87	680	18,0	**97**	890	16,4
88	390	14,1	**98**	900	15,2
89	485	13,7	**99**	970	14,9
90	920	18,2	**100**	850	16,4

Задачи 101-120. Клиент имеет в коммерческом банке первоначальную сумму «P» тыс. руб. Годовая сложная процентная ставка составляет «i» процентов.

Определить наращенную сумму, если периоды наращения составляют: а) 70 дней; б) 100 дней; в) 6 месяцев; г) 8 месяцев; д) один год; е) три года; ж) шесть лет.

Задачи решить при условии, что начисление процентов производилось: а) один раз в году; б) каждые два месяца; в) ежеквартально; г) ежемесячно.

Определить, через какой срок первоначальная сумма денег клиента удвоится; увеличится в три раза.

№ задачи	Первоначальная сумма, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, % (i)	**№ задачи**	Первоначальная сумма, тыс. руб. (P)	Процентная ставка, % (i)
101	350	10,0	**111**	435	9,5
102	275	10,5	**112**	240	8,0
103	400	11,0	**113**	245	8,5
104	325	11,5	**114**	455	7,5
105	530	12,0	**115**	360	7,0
106	458	9,6	**116**	520	8,9
107	490	11,5	**117**	689	6,5
108	678	10,3	**118**	491	5,9
109	720	10,1	**119**	370	9,1
110	810	7,6	**120**	545	8,2

Задачи 121-140. По условиям финансового контракта на депозит (таблица), положенный в банк на: 110 дней; 5 месяцев; 2 года; 5 лет, начисляются проценты по сложной учетной ставке. Определите наращенную сумму для каждого из сроков, если начисление процентов производится: а) ежегодно; б) каждое полугодие; в) ежеквартально; г) каждые два месяца; д) ежемесячно.

№ задачи	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %	**№ задачи**	Вклад, тыс. руб.	Ставка, %
121	500	10,0	**131**	470	7,4
122	320	11,5	**132**	365	10,0
123	650	10,3	**133**	820	9,2
124	490	10,9	**134**	950	11,0
125	900	9,7	**135**	710	8,9
126	950	9,0	**136**	790	11,2
127	780	8,0	**137**	520	10,4
128	390	10,1	**138**	640	10,2
129	485	10,7	**139**	950	10,9
130	620	11,2	**140**	820	11,4

Задачи 141-160. На вклад (таблица) начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке. Оцените: сумму вклада через а) 2,5 года; б) 5 лет; реальную доходность финансовой операции; минимальную положи-

тельную ставку, обеспечивающую реальное наращение капитала; брутто-ставку, если ожидаемый темп прироста инфляции – 1,5% в месяц.

№ задачи	Сумма, тыс. руб.	Число раз начисления процентов в году	Номинальная процентная ставка, %	**№ задачи**	Сумма, тыс. руб.	Число раз начисления процентов в году	Номинальная процентная ставка, %
1	800	12	10,0	**16**	200	6	11,9
2	280	2	13,8	**17**	300	4	11,6
3	370	4	12,8	**18**	400	2	12,3
4	690	6	14,7	**19**	1000	12	10,8
5	1100	12	12,0	**20**	600	6	14,0
6	1850	4	11,9	**21**	700	4	13,7
7	680	2	12,8	**22**	890	12	14,2
8	390	12	13,6	**23**	900	6	12,7
9	485	2	14,7	**24**	970	6	13,4
10	920	6	14,1	**25**	850	2	12,4

Задачи 161-180. Определите:
- простую процентную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке;
- простую процентную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- сложную процентную ставку, если кредит выдан по простой учетной ставке;
- простую учетную ставку, если кредит выдан по сложной процентной ставке;
- сложную учетную ставку, если кредит выдан по простой процентной ставке;
- простую процентную ставку, если кредит выдан по сложной учетной ставке.

№ задачи	Срок предоставления кредита	Ставка, %	**№ задачи**	Срок предоставления кредита	Ставка, %
161	2 года	10,7	**171**	4 года	16,8
162	3 месяца	11,0	**172**	240 дней	19,0
163	120 дней	10,5	**173**	5 месяцев	19,5
164	1,5 год	11,5	**174**	5 лет	15,5
165	9 месяцев	11,9	**175**	300 дней	16,5
166	200 дней	10,3	**176**	13 месяцев	16,0
167	4 года	12,0	**177**	3 года	17,0
168	320 дней	12,5	**178**	6 месяцев	17,5
169	4 месяца	12,8	**179**	320 дней	17,9
170	3 года	13,0	**180**	4 года	15,8

Задачи 181-200. Предприятие создает инвестиционный фонд. Ежегодно для создания фонда в банк вносится «R» тыс. руб. под «i» % годовых. Найти наращенную сумму ренты, если фонд создается в течении «n» лет, при условии что:

а) рентные платежи осуществляются один раз в году, начисление процентов производится один раз в конце периода начисления;

б) рентные платежи осуществляются один раз в году, а проценты начисляются ежеквартально;

в) рентные платежи осуществляются ежеквартально, а проценты начисляются один раз в году;

г) рентные платежи осуществляются два раза в году, и проценты начисляются два раза в год.

д) рентные платежи осуществляются каждые два месяца в году, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить срок, для каждого варианта, который необходим для создания инвестиционного фонда, если процентная ставка снизится в полтора раза.

Определить современную величину постоянной ренты для каждого варианта.

№ задачи	Величина ежегодного платежа, тыс. руб. (R)	Процентная ставка, % (i)	Срок ренты, лет (n)	**№ задачи**	Величина ежегодного платежа, тыс. руб. (R)	Процентная ставка, % (i)	Срок ренты, лет (n)
181	250	9,0	7	**191**	270	11,0	8
182	190	10,5	4	**192**	280	10,8	5
183	270	11,0	6	**193**	195	10,0	6
184	180	11,5	5	**194**	230	10,5	7
185	190	12,0	3	**195**	245	12,5	4
186	320	9,1	4	**196**	240	10,9	8
187	475	10,9	7	**197**	295	11,4	2
188	420	11,3	3	**198**	360	12,3	5
189	290	10,5	5	**199**	185	10,2	6
190	310	9,2	3	**200**	255	12,7	4

Учебное издание

Сенникова Алина Евгеньевна,
Ворокова Нодира Хасановна,
Жминько Альбина Евгеньевна

Основы финансовых вычислений

Методические рекомендации

В авторской редакции

Подписано в печать 12.07.2021 . Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. – 3,44. Уч.- изд. л.–1,52. Тираж 100 экз. Заказ № 38