Министерство сельского хозяйства РФ
ФГБОУ «КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И.Т. ТРУБИЛИНА»

ФАКУЛЬТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра применения электрической энергии

ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ЭНЕРГОСНАБЖЕНИЯ

Методические указания
к выполнению контрольной работы для магистрантов направления
35.04.06 «Агроинженерия», направленность подготовки
«Электрооборудование и электротехнологии»

Краснодар
КубГАУ
2019

Составители: В.Г. Сазыкин, А.А. Багметов

Оптимизации систем энергоснабжения: метод. указания к выполнению контрольной работы / сост. В.Г. Сазыкин, А.А. Багметов. Краснодар: КубГАУ, 2019 – 49 с.

В методических указаниях даны основные теоретические положения содержания выполняемой контрольной работы, приведены исходные данные и порядок выполнения разделов контрольной работы по дисциплине «Оптимизации систем энергоснабжения».

Методические указания предназначены для магистрантов высших учебных заведений очной формы обучения, занимающихся по направлению подготовки 35.04.06 «Агроинженерия» для направленности подготовки «Электрооборудование и электротехнологии». Входят в фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией факультета энергетики Кубанского госагроуниверситета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……………………………………………………... 4

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ………………………………….… 5

1.1 Этапы поиска оптимального решения ………………….. 5

1.2 Линейные оптимизационные задачи ……………………. 9

1.3 Графическое решение задачи линейного программирования ……………………………………….… 10

1.4 Симплекс-метод ………………………………………….. 14

2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ………………………………... 16

2.1 Варианты исходных данных …………………………….. 16

2.2 Содержание контрольной работы ……………………… 31

3. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ. 31

3.1 Постановка транспортной задачи ……………………….. 31

3.2 Алгоритм решения транспортной задачи ………………. 34

3.3 Пример выполнения расчетов в контрольной работе …. 36

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ……………………………….. 51

ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа по дисциплине «Оптимизации систем энергоснабжения» входит в фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации, относится к формам контроля и оценки качества освоения обучающимися основных образовательных программ.

Контрольная работа – сложный вид самостоятельной письменной работы, направленный на творческое освоение общепрофессиональных и профильных профессиональных дисциплин (модулей) и выработку соответствующих профессиональных компетенций. При оценке уровня выполнения контрольной работы, в соответствии с поставленными целями для данного вида учебной деятельности контролируются следующие умения, навыки и компетенции:

- умение работать с объектами изучения, рекомендуемыми литературными источниками, справочной литературой;
- умение собирать и систематизировать практический материал;
- умение самостоятельно осмыслять проблему на основе существующих методик;
- умение логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы;
- умение соблюдать форму научного исследования;
- умение пользоваться глобальными информационными ресурсами;
- способность и готовность к использованию основных прикладных программных средств;
- умение обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса;
- способность создать содержательную презентацию выполненной работы.

1 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1 Этапы поиска оптимального решения

Решение оптимизационной задачи состоит из нескольких последовательных этапов.

1. Сбор и анализ исходной информации (исходных данных). При сборе исходной информации необходимо правильно разделить информацию на главную и второстепенную, а также оценить категорию принимаемой исходной информации (детерминированная, случайная, неопределенная).

2. Составление математической модели, под которой понимается формализованное математическое описание решаемой задачи, которая включает: целевую функцию; ограничения и граничные условия.

Обобщенная запись целевой функции имеет следующий вид:

$$Z(x_1, x_2, \ldots x_n) \to extr, \tag{1.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ – искомые переменные, значения которых вычисляются в процессе решения задачи; общее количество переменных равно n .

Отличные от нуля положительные переменные принято называть *базисными*, нулевые переменные – *свободными*.

При решении оптимизационной задачи ищется экстремум целевой функции. Зависимость между переменными в целевой функции может быть *линейной* или *нелинейной*. У многоэкстремальных функций ищется *глобальный* экстремум (наименьший минимум или наибольший максимум).

Ограничения представляют собой различные технические, экономические, экологические условия, учитываемые при решении задачи. Ограничения представляют собой зависимости между переменными задаваемые в форме неравенств, неполных неравенств или равенств:

$$f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \le b_1;$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = b_2; \qquad (1.2)$$

$$f_m(x_1, x_2, \dots x_n) > b_m;$$

Общее количество ограничений b_i равно m. Правые части ограничений, представляющие собой постоянные коэффициенты, называются *свободными членами*.

Для перехода от ограничений неравенств к равенствам используются искусственные приемы, например, обозначение левой части ограничения как новой неизвестной величины в виде дополнительной переменной и добавление ее к левой части неравенства. Последнее обращается в строгое равенство. При этом общее количество n искомых переменных увеличивается.

При $n = m$ система (1.2) имеет единственное решение. Поэтому в этом случае нет места оптимизации.

При $n < m$ система (1.2) не имеет решения и, следовательно, выбирать оптимальное решение не из чего.

При $n > m$ система (1.2) имеет бесконечное множество решений, из которых можно выбрать оптимальное решение.

Граничные условия устанавливают диапазон изменения искомых переменных:

$$d_i \le x_i \le D_i, i = 1,2, \dots n, \qquad (1.3)$$

где d_i и D_i – соответственно нижняя и верхняя границы диапазона изменения переменной x_i.

3. Выбор метода решения, определяемого видом математической модели. Для решения подавляющего большинства оптимизационных задач используются методы *математического программирования*, позволяющие найти экстремальное значение целевой функции (1.1) при соотношениях между переменными, устанавливаемых ограничениями (1.2), в диапазоне изменения переменных, определяемом граничными условиями (1.3).

Математическое программирование представляет собой, как правило, многократно повторяющуюся вычислительную процедуру, приводящую к искомому оптимальному решению.

Выбор метода математического программирования для решения оптимизационной задачи определяется видом зависимостей в математической модели, характером искомых переменных, категорией исходных данных и количеством критериев оптимальности.

Если в математической модели имеются только линейные зависимости между переменными, для решения оптимизационной задачи используются методы *линейного программирования.*

Если в математической модели имеются нелинейные зависимости между переменными, для решения оптимизационной задачи используются методы *нелинейного программирования.* Если среди переменных имеются целочисленные или дискретные переменные, для решения оптимизационных задач такого класса используются, соответственно, методы *целочисленного или дискретного программирования.*

В случае, когда исходные данные или их часть являются случайными величинами, решение оптимизационной задачи выполняется методами *стохастического программирования*.

При недетерминированной (неопределенной) исходной информации оптимизационные задачи могут быть решены с применением математического аппарата *теории игр*.

Задачи, в которых оптимизация проводится не по одному, а по нескольким критериям, относятся к классу задач *многокритериальной оптимизации*. Решение таких задач заключается в нахождении компромисса между принятыми критериями оптимальности.

4. Выполнение математических вычислений. Решение оптимизационных задач с небольшим количеством переменных $x_i (i = 1,2)$ при знании алгоритмов методов математического программирования можно выполнить традиционными вычислениями с использованием калькулятора.

Решение реальных задач, размерность которых может быть достаточно большой, возможно только с помощью компьютера. При этом компьютер должен иметь соответствующее программное обеспечение, например, электронных таблиц Excel, дает возможность пользователю решать множество оптимизационных задач, совершенно различных по своему классу и содержанию.

5. Анализ решения задачи. Окончательное решение оптимизационной задачи принимается по результатам ее анализа. В качестве главного средства анализа используется математическая модель, позволяющая выполнить параметрический, структурный и многокритериальный анализ задачи.

Параметрическим называется такой анализ, при котором задача решается многократно при различных значениях некоторого исходного данного (параметра). Оценивается влияние этого параметра на результаты решения.

При *структурном* анализе многократное решение задачи выполняется при различной структуре ограничений и граничных условий. Оценивается влияние ограничений и граничных условий на результаты решения.

Решение задачи по различным критериям (с различными целевыми функциями) составляет суть *многокритериального* анализа.

Окончательное решение задачи принимается после исследования всех решений, полученных при параметрическом, структурном и многокритериальном анализах.

1.2 Линейные оптимизационные задачи

Если целевая функция (1.1) и система ограничений (1.2) являются линейно зависимыми от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, то для решения оптимизационной задачи используются методы *линейного программирования*.

Линейная математическая модель в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} Z = z_1 x_1 + z_2 x_2 + \cdots + z_n x_n \to extr, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \le b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2, \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n > b_m, \\ x_i \ge 0, i = 1,2, \ldots n, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где z_i, b_j, a_{ij} – заданные постоянные величины, $i = 1,2, \ldots n;\ j = 1,2, \ldots m;$

Задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти экстремальное значение линейной целевой функции Z при ограничениях, заданных в форме линейных равенств и (или) неравенств, и граничных условиях, указывающих диапазон изменения переменных.

В реальных оптимизационных задачах ищется или минимум или максимум целевой функции. Методы линейного программирования работают совершенно одинаково, как при поиске минимума целевой функции, так и при поиске ее максимума.

Допустим, что в линейной математической модели (1.4) ищется *минимум* целевой функции:

$$Z = z_1 x_1 + z_2 x_2 + \cdots + z_n x_n \to min.$$

Если по этой же математической модели нужно найти *максимум* целевой функции Z , то у коэффициентов целевой функции меняются знаки на противоположные и вновь ищется минимум функции Z :

$$Z = -z_1x_1 - z_2x_2 - \dots - z_nx_n \to min.$$

Таким образом,

$$\min(-z_1x_1 - z_2x_2 - \dots - z_nx_n) = \max(z_1x_1 + z_2x_2 + \dots + z_nx_n).$$

1.3 Графическое решение задачи линейного программирования

Этот метод является достаточно простым, наглядным и позволяет сделать некоторые общие выводы по решению оптимизационных задач методами линейного программирования. Однако применение графического метода ограничено задачами относительно небольшой размерности.

Рассмотрим математическую модель линейной оптимизационной задачи, в которой требуется найти минимум целевой функции:

$$Z = z_1x_1 + z_2x_2 \to \min,$$

при ограничениях :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3$$

и граничных условиях неотрицательности переменных:

$$x_i \ge 0, i = 1,2.$$

После введения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5 перейдем от ограничений-неравенств к равенствам:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2, \qquad (1.5)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5 = b_3.$$

Отметим, что граничные условия неотрицательности переменных распространяются и на дополнительные переменные:

$$x_i \geq 0, i = 3, 4, 5.$$

Отложим по горизонтальной оси значения переменной x_1, а по вертикальной оси – значения переменной x_2 (рис. 1.1). Учитывая граничные условия $(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$, штриховкой выделим полуплоскости допустимых значений переменных x_1 и x_2 (вправо от оси x_2 и вверх от оси x_1).

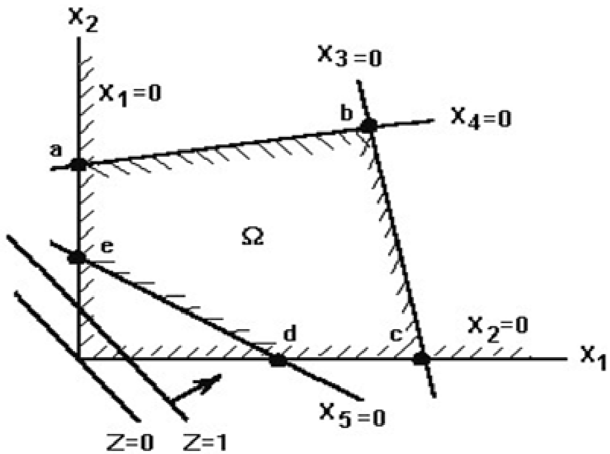

Рисунок 1.1 – Графическое решение задачи

Рассмотрим одно из ограничений-равенств, например, первое:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1$$

и перепишем его в виде:

$$x_3 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1.$$

Приравняем переменную x_3 к нулю:

$$x_3 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 = 0.$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение прямой линии в плоскости x_1x_2. На этой прямой значение $x_3 = 0$. Следовательно, по одну сторону от этой прямой $x_3 > 0$, по другую $x_3 < 0$. Учитывая граничное условие $x_3 \geq 0$, штриховкой выделим полуплоскость, в которой $x_3 > 0$.

Аналогичные графические построения выполним для второго и третьего ограничений системы (1.5).

В результате выполненных графических построений на плоскости x_1x_2 выделится область Ω допустимых значений переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 Эта область представляет собой выпуклый многогранник *abcde*. Все допустимые решения задачи, в том числе и оптимальное решение, будут принадлежать области Ω.

Рассмотрим выражение целевой функции и приравняем его к нулю:

$$Z = z_1x_1 + z_2x_2 = 0.$$

В плоскости x_1x_2 это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат.

Приравняем выражение целевой функции к любому отличному от нуля значению, например, к единице:

$$Z = z_1x_1 + z_2x_2 = 0$$

и построим в плоскости x_1x_2 соответствующую прямую.

Прямые $Z = const$ являются *линиями равного уровня* целевой функции, поскольку на каждой такой линии значение целевой функции неизменно. Линии равного уровня параллельны между собой.

По взаимному расположению линий равного уровня $Z = 0$ и $Z = 1$ определим направление возрастания целевой функции Z . Это направление указано на рис. 1.1 стрелкой.

Перемещая прямую целевой функции Z в направлении ее возрастания параллельно самой себе, определим ближайшую точку, принадлежащую области Ω допустимых значений переменных.

В соответствии с графическими построениями такой точкой будет вершина e многогранника Ω. Эта вершина и будет соответствовать минимуму целевой функции, т.е. оптимальному решению задачи.

Минимальное значение целевой функции Z достигается при следующих значениях переменных:

$$x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_1 = 0, x_5 = 0.$$

Три переменные отличаются от нуля, две переменные равны нулю. Видно, что количество не равных нулю переменных равно количеству ограничений. Остальные переменные равны нулю.

На основании выполненного графического решения задачи линейного программирования можно сделать следующие общие выводы по решению линейной оптимизационной задачи:

- оптимальное решение задачи всегда находится в одной из вершин многогранника Ω, поэтому для отыскания оптимального решения достаточно рассмотреть только конечное количество решений, лежащих в вершинах многогранника Ω, и не рассматривать бесконечное количество решений, лежащих на гранях и внутри этого многогранника;

- в каждом решении, отвечающем одной из вершин многогранника Ω, количество положительных (не равных нулю) переменных равно количеству ограничений m , остальные

$(n-m)$ переменные равны нулю;

- для отыскания оптимального решения следует рассмотреть только те решения, в которых содержится m переменных, не равных нулю (базисных), и $(n-m)$ переменных, равных нулю (свободных).

1.4 Симплекс-метод

Симплекс-метод является универсальным аналитическим методом решения задач линейного программирования. Симплекс – понятие геометрическое, означающее совокупность вершин многомерного тела. Идея симплекс-метода заключается в последовательном переборе решений – в последовательном переходе от одной вершины к другой. При этом осуществляется итерационный перебор улучшающий решение на каждом шаге.

Метод состоит из двух этапов: на первом этапе ищется допустимое решение; на втором этапе это допустимое решение улучшается до оптимального.

Алгоритм симплекс-метода

1. Система ограничений преобразуется к виду, удобному для разделения переменных на свободные и базисные.

2. Система ограничений и целевая функция записываются в виде таблицы.

3. Записывается исходное решение, в котором свободные переменные равны нулю, базисные переменные равны свободным членам ограничений, значение целевой функции равно нулю.

4. Просматривается столбец свободных членов b_i. Если все $b_i > 0$, то решение является допустимым и осуществляется переход к п. 7. Если есть свободные члены $b_i < 0$, то выбирается любой из них и соответствующая строка будет разрешающей.

5. Просматриваются коэффициенты a_{ij} разрешающей

строки. Если все эти коэффициенты положительны, задача не имеет решения. Если среди коэффициентов a_{ij} разрешающей строки есть отрицательные, то выбирается любой из них и соответствующий столбец будет разрешающим.

6. Выполняется пересчет всех коэффициентов таблицы, включая значение целевой функции, которое имеет противоположный знак. Осуществляется переход к п. 4.

7. Просматриваются коэффициенты z_i строки целевой функции. Если все эти коэффициенты $z_i < 0$ (при поиске минимума Z) или $z_i > 0$ (при поиске максимума Z), то текущее решение будет оптимальным. Вычислительная процедура заканчивается.

8. Если есть коэффициенты $z_i > 0$ (при поиске минимума Z) или $z_i < 0$ (при поиске максимума Z), то выбирается любой из них и соответствующий столбец будет разрешающим. Вычисляются отношения свободных членов b_i к положительным коэффициентам a_{ij} разрешающего столбца. Строка, отвечающая минимальному из этих отношений, будет разрешающей.

9. Выполняется пересчет всех коэффициентов таблицы. Осуществляется переход к п. 7.

Среди задач линейного программирования, решаемых симплексным методом, имеются задачи с единой математической моделью под названием «транспортная задача». Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

В контрольной работе предлагается один из вариантов транспортной задачи, наиболее полно характеризующий проблемы оптимизации энергоснабжения потребителей.

2 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

2.1 Варианты исходных данных

Контрольная работа выполняется по одному из вариантов, задаваемых преподавателем из (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Варианты для выполнения контрольной работы

Вариант	Исходный параметр	Номер узла, i		
		1	2	3
1	Узлы источников питания *A*	35	45	
	Узлы потребителей *B*	15	40	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{1,4}$	$\frac{1,9}{2,1}$	$\frac{2,2}{1,5}$
2	Узлы источников питания *A*	70	25	
	Узлы потребителей *B*	45	30	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{1,4}$	$\frac{1,6}{2,3}$	$\frac{2,3}{1,3}$
3	Узлы источников питания *A*	55	30	
	Узлы потребителей *B*	35	10	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,9}{2,1}$	$\frac{1,5}{1,8}$	$\frac{1,6}{1,2}$
4	Узлы источников питания *A*	40	35	
	Узлы потребителей *B*	25	30	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,8}{2,1}$	$\frac{1,2}{1,7}$	$\frac{1,6}{2,3}$
5	Узлы источников питания *A*	55	45	
	Узлы потребителей *B*	30	40	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{2,1}$	$\frac{1,7}{2,3}$	$\frac{1,2}{2,4}$

6	Узлы источников питания *A*	55	30	
	Узлы потребителей *B*	25	45	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{2,3}$	$\frac{1,5}{2,1}$	$\frac{1,8}{2,4}$
7	Узлы источников питания *A*	55	25	
	Узлы потребителей *B*	15	35	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{2,1}$	$\frac{1,2}{1,7}$	$\frac{1,7}{1,9}$
8	Узлы источников питания *A*	70	30	
	Узлы потребителей *B*	55	20	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{2,1}$	$\frac{1,3}{1,7}$	$\frac{1,8}{2,2}$
9	Узлы источников питания *A*	55	40	
	Узлы потребителей *B*	25	20	50
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{2,3}$	$\frac{1,4}{1,7}$	$\frac{1,8}{2,2}$
10	Узлы источников питания *A*	65	25	
	Узлы потребителей *B*	30	20	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{2,1}$	$\frac{1,8}{2,3}$	$\frac{1,7}{2,2}$
11	Узлы источников питания *A*	60	40	
	Узлы потребителей *B*	55	25	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,1}{2,2}$	$\frac{1,2}{2,1}$	$\frac{1,5}{1,9}$

12	Узлы источников питания *A*	25	50	
	Узлы потребителей *B*	40	15	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}4}{2{,}3}$	$\frac{1{,}6}{2{,}1}$	$\frac{1{,}5}{1{,}8}$
13	Узлы источников питания *A*	40	45	
	Узлы потребителей *B*	55	10	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}4}{2{,}4}$	$\frac{1{,}2}{2{,}2}$	$\frac{1{,}7}{2{,}3}$
14	Узлы источников питания *A*	30	45	
	Узлы потребителей *B*	35	15	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{2{,}2}{2{,}4}$	$\frac{1{,}5}{2{,}1}$	$\frac{1{,}7}{2{,}2}$
15	Узлы источников питания *A*	40	35	
	Узлы потребителей *B*	20	45	10
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}1}{2{,}3}$	$\frac{2{,}2}{2{,}1}$	$\frac{1{,}9}{2{,}4}$
16	Узлы источников питания *A*	50	45	
	Узлы потребителей *B*	15	55	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}3}{2{,}1}$	$\frac{1{,}7}{2{,}2}$	$\frac{1{,}3}{2{,}4}$
17	Узлы источников питания *A*	45	35	
	Узлы потребителей *B*	10	55	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}1}{1{,}8}$	$\frac{1{,}6}{1{,}7}$	$\frac{1{,}5}{2{,}1}$

18	Узлы источников питания *A*	50	20	
	Узлы потребителей *B*	15	25	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,7}{2,2}$	$\frac{1,1}{1,5}$	$\frac{1,4}{2,4}$
19	Узлы источников питания *A*	30	55	
	Узлы потребителей *B*	35	10	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{1,8}$	$\frac{1,3}{1,9}$	$\frac{1,4}{2,3}$
20	Узлы источников питания *A*	70	30	
	Узлы потребителей *B*	35	25	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{2,1}{2,2}$	$\frac{1,6}{2,3}$	$\frac{1,4}{1,7}$
21	Узлы источников питания *A*	40	45	
	Узлы потребителей *B*	35	20	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,8}{2,2}$	$\frac{1,7}{1,5}$	$\frac{1,4}{2,4}$
22	Узлы источников питания *A*	85	15	
	Узлы потребителей *B*	45	30	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,8}{1,9}$	$\frac{1,1}{1,7}$	$\frac{1,2}{2,1}$
23	Узлы источников питания *A*	30	40	
	Узлы потребителей *B*	45	15	10
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,6}{2,3}$	$\frac{1,3}{1,4}$	$\frac{2,2}{1,7}$

24	Узлы источников питания *A*	35	65	
	Узлы потребителей *B*	30	55	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}7}{2{,}1}$	$\frac{1{,}1}{1{,}5}$	$\frac{2{,}2}{1{,}4}$
25	Узлы источников питания *A*	40	60	
	Узлы потребителей *B*	30	45	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}9}{2{,}2}$	$\frac{1{,}5}{2{,}1}$	$\frac{1{,}3}{2{,}3}$
26	Узлы источников питания *A*	30	70	
	Узлы потребителей *B*	25	35	40
	Стоимость передачи единицы мощности z_{1i} / z_{2i}	$\frac{1{,}3}{1{,}7}$	$\frac{1{,}6}{2{,}2}$	$\frac{1{,}9}{2{,}4}$
27	Узлы источников питания *A*	55	45	
	Узлы потребителей *B*	25	35	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}7}{2{,}3}$	$\frac{1{,}4}{2{,}1}$	$\frac{1{,}5}{1{,}9}$
28	Узлы источников питания *A*	35	40	
	Узлы потребителей *B*	25	20	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}4}{2{,}2}$	$\frac{1{,}1}{2{,}1}$	$\frac{1{,}8}{1{,}9}$
29	Узлы источников питания *A*	40	25	
	Узлы потребителей *B*	20	30	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1{,}6}{2{,}2}$	$\frac{1{,}3}{2{,}4}$	$\frac{1{,}2}{1{,}8}$

30	Узлы источников питания *A*	70	20	
	Узлы потребителей *B*	45	35	10
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{2,4}$	$\frac{1,1}{2,2}$	$\frac{1,5}{1,7}$
31	Узлы источников питания *A*	35	40	
	Узлы потребителей *B*	20	25	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{2,1}{2,2}$	$\frac{1,2}{1,4}$	$\frac{1,5}{2,3}$
32	Узлы источников питания *A*	45	35	
	Узлы потребителей *B*	15	55	10
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,5}{2,1}$	$\frac{2,2}{2,4}$	$\frac{1,7}{2,2}$
33	Узлы источников питания *A*	25	45	
	Узлы потребителей *B*	35	20	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,5}{1,7}$	$\frac{1,1}{1,9}$	$\frac{1,4}{2,1}$
34	Узлы источников питания *A*	30	45	
	Узлы потребителей *B*	25	15	35
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{1,5}$	$\frac{1,8}{2,2}$	$\frac{1,6}{2,4}$
35	Узлы источников питания *A*	60	35	
	Узлы потребителей *B*	30	25	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{1,9}$	$\frac{1,4}{1,7}$	$\frac{1,6}{2,3}$

36	Узлы источников питания *A*	35	40	
	Узлы потребителей *B*	20	25	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,1}{1,3}$	$\frac{1,9}{2,2}$	$\frac{1,8}{2,3}$
37	Узлы источников питания *A*	15	85	
	Узлы потребителей *B*	35	45	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,1}{1,6}$	$\frac{1,7}{1,8}$	$\frac{1,2}{2,3}$
38	Узлы источников питания *A*	40	50	
	Узлы потребителей *B*	10	55	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{1,4}$	$\frac{1,7}{2,1}$	$\frac{2,2}{1,3}$
39	Узлы источников питания *A*	25	50	
	Узлы потребителей *B*	15	40	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{2,0}$	$\frac{1,5}{1,7}$	$\frac{1,2}{1,8}$
40	Узлы источников питания *A*	50	40	
	Узлы потребителей *B*	25	35	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,7}{2,1}$	$\frac{1,8}{2,0}$	$\frac{1,1}{2,2}$
41	Узлы источников питания *A*	55	20	
	Узлы потребителей *B*	15	50	10
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,4}{2,1}$	$\frac{1,1}{1,7}$	$\frac{1,5}{1,9}$

42	Узлы источников питания *A*	60	30	
	Узлы потребителей *B*	15	25	50
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{2,0}$	$\frac{1,4}{1,7}$	$\frac{1,9}{2,2}$
43	Узлы источников питания *A*	20	45	
	Узлы потребителей *B*	30	25	10
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,1}{2,0}$	$\frac{1,6}{2,1}$	$\frac{1,8}{1,9}$
44	Узлы источников питания *A*	20	75	
	Узлы потребителей *B*	35	45	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,1}{2,0}$	$\frac{1,3}{2,4}$	$\frac{1,5}{1,8}$
45	Узлы источников питания *A*	30	55	
	Узлы потребителей *B*	45	15	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{2,2}{2,3}$	$\frac{1,2}{2,1}$	$\frac{1,7}{2,0}$
46	Узлы источников питания *A*	60	35	
	Узлы потребителей *B*	25	50	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{2,1}$	$\frac{1,8}{2,2}$	$\frac{1,4}{2,4}$
47	Узлы источников питания *A*	40	50	
	Узлы потребителей *B*	25	35	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,7}{2,2}$	$\frac{1,2}{1,5}$	$\frac{1,5}{2,4}$

48	Узлы источников питания *A*	20	60	
	Узлы потребителей *B*	35	30	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,5}{1,8}$	$\frac{1,2}{1,6}$	$\frac{1,3}{2,3}$
49	Узлы источников питания *A*	40	35	
	Узлы потребителей *B*	30	25	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,9}{2,3}$	$\frac{1,5}{1,4}$	$\frac{1,8}{2,4}$
50	Узлы источников питания *A*	15	70	
	Узлы потребителей *B*	35	20	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,9}{2,1}$	$\frac{1,1}{1,8}$	$\frac{1,3}{2,4}$
51	Узлы источников питания *A*	70	30	
	Узлы потребителей *B*	45	35	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{2,1}{2,2}$	$\frac{1,8}{2,3}$	$\frac{1,4}{1,7}$
52	Узлы источников питания *A*	40	55	
	Узлы потребителей *B*	35	15	45
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,8}{2,2}$	$\frac{1,2}{1,5}$	$\frac{1,4}{2,4}$
53	Узлы источников питания *A*	75	25	
	Узлы потребителей *B*	45	35	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,8}{1,9}$	$\frac{1,3}{1,7}$	$\frac{1,2}{2,1}$

54	Узлы источников питания *A*	35	45	
	Узлы потребителей *B*	25	15	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,8}{2,2}$	$\frac{1,5}{1,7}$	$\frac{1,3}{2,3}$
55	Узлы источников питания *A*	35	60	
	Узлы потребителей *B*	30	50	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,7}{2,1}$	$\frac{1,1}{1,2}$	$\frac{2,2}{1,4}$
56	Узлы источников питания *A*	50	35	
	Узлы потребителей *B*	40	25	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{1,3}$	$\frac{2,0}{1,6}$	$\frac{1,5}{2,3}$
57	Узлы источников питания *A*	50	40	
	Узлы потребителей *B*	25	30	35
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,4}{1,7}$	$\frac{1,3}{2,3}$	$\frac{1,2}{1,8}$
58	Узлы источников питания *A*	25	45	
	Узлы потребителей *B*	35	15	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{1,4}$	$\frac{1,4}{2,1}$	$\frac{1,5}{2,3}$
59	Узлы источников питания *A*	40	55	
	Узлы потребителей *B*	35	45	25
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,7}{2,2}$	$\frac{1,5}{2,1}$	$\frac{1,3}{2,3}$

60	Узлы источников питания *A*	35	45	
	Узлы потребителей *B*	40	10	30
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,4}{2,1}$	$\frac{1,3}{2,2}$	$\frac{1,7}{2,4}$
61	Узлы источников питания *A*	25	75	
	Узлы потребителей *B*	35	45	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,4}{1,9}$	$\frac{1,3}{2,1}$	$\frac{1,5}{1,8}$
62	Узлы источников питания *A*	35	65	
	Узлы потребителей *B*	55	25	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{1,7}$	$\frac{1,5}{2,3}$	$\frac{1,8}{2,4}$
63	Узлы источников питания *A*	30	65	
	Узлы потребителей *B*	20	35	40
	Стоимость передачи единицы мощности z_{1i} / z_{2i}	$\frac{1,3}{1,7}$	$\frac{1,6}{2,2}$	$\frac{1,8}{2,4}$
64	Узлы источников питания *A*	50	45	
	Узлы потребителей *B*	25	30	40
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,7}{2,3}$	$\frac{1,4}{2,1}$	$\frac{1,6}{1,9}$
65	Узлы источников питания *A*	35	45	
	Узлы потребителей *B*	50	10	20
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,4}{2,2}$	$\frac{1,3}{2,1}$	$\frac{1,8}{1,9}$

66	Узлы источников питания *A*	45	25	
	Узлы потребителей *B*	20	35	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,6}{2,2}$	$\frac{1,3}{2,4}$	$\frac{1,2}{1,7}$
67	Узлы источников питания *A*	70	25	
	Узлы потребителей *B*	45	35	15
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,3}{2,4}$	$\frac{1,4}{2,2}$	$\frac{1,5}{1,7}$
68	Узлы источников питания *A*	45	25	
	Узлы потребителей *B*	20	15	35
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,1}{1,4}$	$\frac{1,4}{2,2}$	$\frac{1,3}{1,8}$
69	Узлы источников питания *A*	25	50	
	Узлы потребителей *B*	10	30	35
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{1,2}{2,1}$	$\frac{1,6}{2,3}$	$\frac{1,5}{2,2}$
70	Узлы источников питания *A*	30	40	
	Узлы потребителей *B*	15	20	35
	Стоимость передачи единицы мощности $\frac{z_{1i}}{z_{2i}}$	$\frac{2,1}{2,2}$	$\frac{1,2}{1,5}$	$\frac{1,5}{2,3}$

2.2 Содержание контрольной работы

В соответствии с полученным вариантом обучающийся должен раскрыть следующие вопросы и оформить полученные результаты в виде пояснительной записки:

- указать исходные данные;
- привести основные теоретические сведения по оптимизации решения задачи;

- описать алгоритм решения транспортной задачи;
- составить математическую модель для решения транспортной задачи;
- получить допустимое решение в соответствии с алгоритмом минимальной удельной стоимости, используя табличную форму записи;
- уточнить полученное допустимое решение с помощью распределительного метода;
- получить оптимальное решение, используя метод потенциалов;
- привести список использованной литературы.

3 МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1 Постановка транспортной задачи

Транспортная задача – это задача отыскания таких путей перевозки продукта (энергоресурсов) от пунктов производства к пунктам потребления, при которых общая стоимость перевозок (передачи) оказывается минимальной.

Математический аппарат транспортной задачи применим и к задачам электроэнергетики. Здесь под продуктом подразумевается электрическая мощность, передаваемая от источников питания к потребителям по линиям электропередачи. Источниками питания являются электрические станции или подстанции, потребителями – промышленные, городские, сельскохозяйственные потребители электроэнергии. Оптимизации подлежат затраты на схему электрической сети, состоящей из линий электропередачи, связывающих узлы источников питания с узлами потребителей.

Пусть в проектируемой системе электроснабжения имеется $i = 1, 2, \dots, n$ узлов источников питания и

$j = 1, 2, \dots, m$ узлов потребителей. Мощность каждого из источников составляет A_i, а мощность каждого из потребителей – B_i единиц мощности (ЕМ). Известно взаимное расположение узлов источников и потребителей. Стоимость передачи единицы мощности z_{ij} от источника i к потребителю j – удельная стоимость в удельных единицах (УЕ) равна отношению УЕ/ЕМ.

Общее количество возможных к строительству линий электропередачи, связывающих источники с потребителями, составляет nm . Мощности, передаваемые по этим линиям, являются искомыми переменными x_{ij}, следовательно, количество искомых переменных составляет nm .

Затраты на электрическую сеть равны сумме произведений удельных стоимостей на величины передаваемых мощностей от источников i к потребителям j . Поэтому подлежащая минимизации целевая функция Z имеет следующий вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \cdot \qquad (3.1)$$

С позиций теоретической электротехники электрическая сеть является электрической цепью и для этой сети применимы все законы, известные из курса электротехники, в частности 1-й закон Кирхгофа. Для каждого i -го источника питания сумма мощностей, оттекающих по линиям ко всем $j = 1, 2, \dots, m$ узлам потребителей, равна мощности A_i этого источника. Для каждого j -го потребителя сумма мощностей, притекающих по линиям от всех $i = 1, 2, \dots, n$ источников, равна мощности B_i этого потребителя:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = A_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = B_j \end{cases} \qquad (3.2)$$

Соотношения (3.2), представляющие собой балансы мощности в каждом из узлов, являются ограничениями при решении транспортной задачи. Общее количество ограничений равно количеству узлов источников и потребителей $n + m$.

Из теоретической электротехники известно, что для любой электрической сети количество независимых уравнений, составленных по 1-му закону Кирхгофа, на единицу меньше количества узлов и составляет (n+m–1). Следовательно, количество независимых ограничений составляет (n+m–1). Количество базисных (не равных нулю) переменных равняется количеству независимых ограничений и составляет (n+m–1). Остальные переменные являются свободными (равными нулю). Количество свободных переменных составляет:

$$(nm - (n + m - 1)).$$

Каждая базисная переменная x_{ij} соответствует присутствию в схеме линии между узлами i и j, поскольку мощность, протекающая между узлами i и j, не равна нулю. Каждая свободная переменная x_{ij} соответствует отсутствию в схеме линии между узлами i и j, поскольку мощность, протекающая между узлами i и j, равна нулю.

В рассматриваемой постановке транспортной задачи все искомые мощности x_{ij}, передаваемые от источников к потребителям, являются неотрицательными. Следовательно, граничные условия имеют вид:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \qquad (3.3)$$

Выражения (3.1), (3.2) и (3.3) представляют собой математическую модель транспортной задачи. Видно, что выражения целевой функции (3.1) и ограничений (3.2) являются линейными. Следовательно, транспортная задача может быть решена симплекс-методом [4, 6]. Однако непосредственное применение этого метода к решению транспортной задачи оказывается нецелесообразным. В силу своей универсальности симплекс-метод имеет достаточно сложную вычислительную процедуру и без учета специфических особенностей транспортной задачи ее решение оказывается слишком громоздким.

Особенности транспортной задачи следующие:

- все ограничения имеют форму равенств;

- все коэффициенты при переменных в системе ограничений равны плюс единице;

- каждая переменная дважды входит в систему ограничений (3.2); один раз в балансы узлов источников A, второй раз в балансы узлов потребителей B.

С учетом этих особенностей для решения транспортных задач разработаны специальные методы решения, более простые, чем симплекс-метод.

3.2 Алгоритм решения транспортной задачи

1. В соответствии с исходными данными составляется транспортная матрица размерностью nm, где n – количество источников питания, m – количество потребителей.

2. Находится допустимое решение, например методом наименьшей удельной стоимости.

3. Для допустимого решения каждой i-й строке и каждому j-му столбцу транспортной матрицы присваивается значение потенциала V_i и U_j $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$. Для каждой базисной переменной сумма потенциалов равна

удельной стоимости $V_i + U_j = z_{ij}$.

4. Произвольно задавшись значением одного из потенциалов, по уравнениям $V_i + U_j = z_{ij}$, справедливым для базисных переменных, вычисляются значения остальных потенциалов.

5. Для всех свободных переменных проверяется соотношение суммы потенциалов с удельной стоимостью. Если для всех свободных переменных $V_i + U_j < z_{ij}$, то полученное решение является оптимальным.

6. Если имеются свободные переменные, для которых $V_i + U_j > z_{ij}$, то выбирается любая из этих свободных переменных и переводится в базис. Для этого строится цикл пересчета (замкнутая ломаная линия), начальная вершина которого лежит в клетке выбранной свободной переменной. Остальные вершины цикла лежат в клетках, соответствующих базисным переменным. Начальной вершине цикла присваивается знак «+», соответствующий увеличению переменной. Далее знаки вершин цикла чередуются. Знаки «+» соответствуют увеличению базисных переменных, знаки «–» – их уменьшению.

7. Из отрицательных вершин цикла выбирается вершина с наименьшим значением базисной переменной и на эту величину изменяются все переменные, лежащие в вершинах цикла. В положительных вершинах переменные увеличиваются, в отрицательных – уменьшаются. При этом выбранная свободная переменная становится базисной, а наименьшая по величине базисная переменная в отрицательной вершине цикла становится свободной (равной нулю).

8. Для вновь полученного решения вычислительная процедура повторяется, начиная с пункта 3.

3.3 Пример выполнения расчетов в контрольной работе

1. Составить математическую модель решения транспортной задачи в соответствии с алгоритмом решения оптимизационных задач и исходными данными.

В проектируемой системе электроснабжения имеется два узла с источниками питания и три узла потребителей. Мощности источников составляют A_1 и A_2, а мощности потребителей – B_1, B_2, B_3 ЕМ. Взаимное расположение узлов и возможные к сооружению линии электрической сети показаны на рис. 3.1. Удельные затраты на передачу мощностей по линиям между узлами источников и потребителей составляют $z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{22}, z_{23}$ УЕ/ЕМ.

Целевая функция, представляющая собой суммарные денежные затраты на электрическую сеть, в соответствии выражением (3.1) будет иметь вид:

$$Z = z_{11}x_{11} + z_{12}x_{12} + z_{13}x_{13} + z_{21}x_{21} + z_{22}x_{22} + z_{23}x_{23} \rightarrow min.$$

Ограничения, представляющие собой балансы мощности в узлах электрической сети, в соответствии с выражениями (3.2) будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} = A_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = A_2, \\ x_{11} + x_{21} = B_1, \\ x_{21} + x_{22} = B_2, \\ x_{13} + x_{23} = B_3. \end{gathered}$$

Граничные условия в соответствии с соотношением (3.3) запишутся как:

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0.$$

Полученные выражения представляют собой математическую модель транспортной задачи для схемы, приведенной на (рис. 3.1).

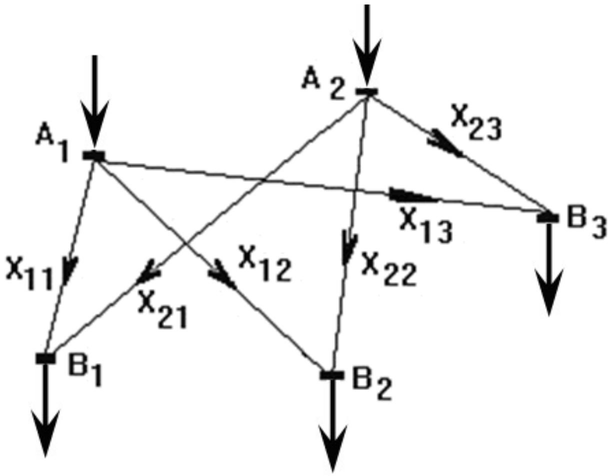

Рисунок 3.1 – Взаимное расположение узлов и возможные трассы сооружения линий электрической сети

2. Получение допустимого решения. При решении транспортных задач удобно пользоваться табличной формой записи. В этом случае ограничения (3.2) и (3.2а) записывают в виде транспортной матрицы размерностью nm . Для рассматриваемого примера транспортная матрица представлена в виде (табл. 3.1).

Справа указаны заданные мощности источников A_1 и A_2, снизу – заданные мощности потребителей B_1, B_2 и B_3, справа внизу – значение целевой функции Z . Непосредственно в клетках транспортной матрицы записаны подлежащие определению искомые переменные x_{ij} и заданные значения удельных стоимостей передачи мощности z_{ij}.

Каждая i -я строка матрицы соответствует уравнению баланса мощности i -го источника питания, каждый j -й столбец – уравнению баланса мощности j -го потребителя.

Таблица 3.1 – Транспортная матрица

x_{11} z_{11}	x_{12} z_{12}	x_{13} z_{13}	A_1 z_{ij}
x_{21} z_{21}	x_{22} z_{22}	x_{23} z_{23}	A_2 z_{ij}
B_1	B_2	B_3	Z

Исходное допустимое решение может быть получено по алгоритму *минимальной удельной стоимости*:

1. В транспортной матрице выбирается клетка с минимальным значением z_{ij}. Если имеется несколько таких клеток, то выбирается любая из них.

2. В выбранную клетку в качестве *базисной* переменной заносится наименьшая из двух величин A_i или B_j, т.е. $x_{ij} = \min(A_i, B_j)$. При этом выполняется баланс мощности по строке i или столбцу j, в которые входит переменная x_{ij}.

3. В остальные клетки строки *i* или столбца *j*, для которых выполнен баланс мощности, заносятся нули, соответствующие свободным переменным. Большая из двух величин A_i и B_j условно заменяется разностью этих двух величин.

4. Из оставшихся незаполненных клеток транспортной матрицы вновь выбирается клетка с минимальным значением z_{ij}. Далее пункты 2 и 3 повторяются до полного заполнения всех клеток транспортной матрицы.

Следует напомнить, что общее количество переменных составляет nm. Количество отличных от нуля базисных переменных составляет $(n+m-1)$. Количество равных нулю свободных переменных составляет $(nm-(n+m-1))$.

3. Найти допустимое решение для задачи при заданных исходных данных:

$A_1 = 50$, $A_2 = 30$ ЕМ;

$B_1 = 20$, $B_2 = 25$, $B_3 = 35$ ЕМ;

$z_{11} = 1{,}2$; $z_{12} = 1{,}8$; $z_{13} = 1{,}5$ УЕ/ЕМ;

$z_{21} = 1{,}6$; $z_{22} = 2{,}3$; $z_{23} = 2{,}1$ УЕ/ЕМ.

Изобразим транспортную матрицу размерностью 2×3 (табл. 3.2) и будем заполнять ее в соответствии с алгоритмом минимальной удельной стоимости.

Таблица 3.2 – Транспортная матрица минимальной удельной стоимости

20 1,2	0 1,8	30 1,5	$A_1 = 50$ z_{1j}
0 1,6	25 2,3	5 2,1	$A_2 = 30$ z_{2j}
$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$Z = 137$

В транспортной матрице выбирается клетка с минимальным значением z_{ij} . Это клетка с переменной x_{11} и удельной стоимостью $z_{11} = 1{,}2$. В эту клетку в качестве базисной переменной заносим меньшее из двух значений мощностей $x_{11} = \min(A_1 = 50, B_1 = 20) = 20$. Баланс для 1-го столбца (1-го потребителя) выполнен (20 = 20). В остальные клетки этого столбца заносим нули (свободная переменная $x_{21} = 0$).

Поскольку от источника A_1 отобрано 20 ЕМ, отходящих к потребителю B_1, мощность этого источника условно заменяется величиной 50 – 20 = 30.

Из оставшихся незаполненных клеток транспортной матрицы выбирается клетка с наименьшей удельной стоимостью $z_{13} = 1{,}5$. В качестве базисной переменной в эту клетку заносится меньшее из двух значений мощностей

$x_{13} = \min(A_1 = 30, B_3 = 35) = 30$. Баланс для 1-й строки (1-го источника) выполнен. В остальные клетки этой строки заносим нули (свободная переменная $x_{12} = 0$).

Поскольку потребителю B_3 поставлено 30 ЕМ, мощность этого потребителя условно заменяется величиной 35 – 30 = 5.

Из оставшихся незаполненных клеток транспортной матрицы выбираем клетку с наименьшей удельной стоимостью $z_{23} = 2{,}1$. В качестве базисной переменной в эту клетку заносим меньшее из двух значений мощностей $x_{23} = \min(A_2 = 30, B_3 = 5) = 5$. Баланс для 3-го столбца (3-го потребителя) выполнен.

Поскольку от источника A_2 отобрано 5 ЕМ, отходящих к потребителю B_3, мощность этого источника условно заменяется величиной 30 – 5=25.

Последнее значение заносится в оставшуюся незаполненную клетку транспортной матрицы в качестве базисной переменной x_{22} = 25.

Итак, вся транспортная матрица заполнена. Балансы мощности по строкам (по узлам источников) и по столбцам (по узлам потребителей) выполняются. Все переменные неотрицательны. Полученное исходное решение является *допустимым*. В этом решении свободные переменные: $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$; базисные переменные: $x_{11} = 20$, $x_{13} = 30$, $x_{22} = 25$, $x_{23} = 5$ ЕМ; значение целевой функции:

$$Z = z_{11}x_{11} + z_{12}x_{12} + z_{13}x_{13} + z_{21}x_{21} + z_{22}x_{22} + z_{23}x_{23} =$$
$$= 1{,}2 \cdot 20 + 1{,}8 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot 30 + 1{,}6 \cdot 0 + 2{,}3 \cdot 25 + 2{,}1 \cdot 5 = 137\ \text{УЕ}.$$

показано справа внизу (табл. 3.2).

Схема электрической сети, отвечающая полученному допустимому решению, показана на (рис. 3.2).

3. Уточнить полученное допустимое решение с помощью распределительного метода за счет перевода одной из базисных переменных в разряд свободных и одной из свободных переменных в разряд базисных. Количество свободных и количество базисных переменных при этом не меняются.

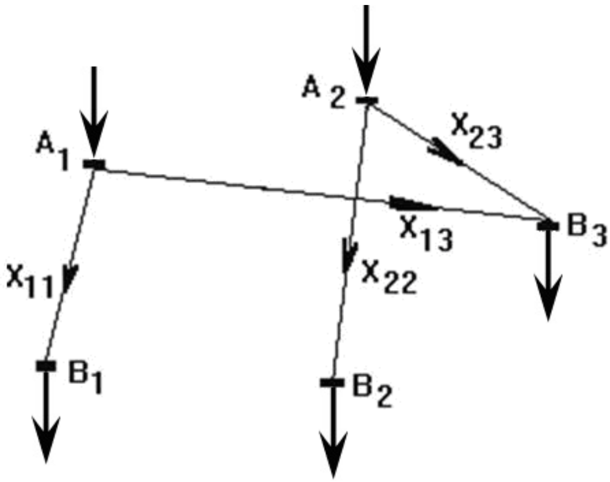

Рисунок 3.2 – Схема электрической сети, отвечающая допустимому решению по минимальной удельной стоимости

В полученном допустимом решении имеются две свободные переменные x_{12} и x_{21}. Произвольно выберем переменную x_{21} и увеличим значение этой переменной от нуля до единицы $x_{21} = 1$ (табл. 3.3.). При этом нарушаются балансы мощности по 1-му столбцу и 2-й строке.

Таблица 3.3 – Транспортная матрица распределительного метода

– 19 1,2	0 1,8	+ 31 1,5	$A_1 = 50$
+ 1 1,6	25 2,3	– 4 2,1	$A_2 = 30$
$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$Z = 136{,}8$

Для восстановления этих балансов уменьшим на единицу значения базисных переменных, входящих в 1-й столбец и 2-ю строку ($x_{12} = 19$, $x_{23} = 4$). При этом нарушаются балансы по 1-й строке и 3-му столбцу. Базисную переменную x_{13}, находящуюся на пересечении 1-й строки и 3-го столбца, увеличим на единицу ($x_{13} = 31$). Балансы мощности по всем строкам и столбцам оказываются восстановленными.

В результате выполненных действий в транспортной матрице получен замкнутый цикл, вершины которого отмечены знаками «+» и «–». Начальная вершина цикла лежит в клетке свободной переменной x_{21} которая переводится в базис. Все остальные вершины цикла лежат в клетках базисных переменных x_{11}, x_{13} и x_{23}. Знак «+» в вершине цикла соответствует увеличению переменной, знак «–» – ее уменьшению.

При увеличении на единицу свободной переменной изменение целевой функции определится как алгебраическая сумма удельных стоимостей, стоящих в вершинах цикла.

Изменение целевой функции при увеличении на единицу свободной переменной x_{21} составит:

$$\Delta Z = x_{21} - x_{11} + x_{23} = 1{,}6 - 1{,}2 + 1{,}5 - 2{,}1 = -0{,}2 < 0. \quad (3.4)$$

Из полученного результата видно, что при увеличении свободной переменной x_{21} значение целевой функции уменьшается. Эту свободную переменную следует перевести в базис.

Аналогичные действия можно выполнить и для свободной переменной x_{12}. Увеличение этой переменной на единицу даст увеличение целевой функции:

$$\Delta Z = x_{12} - x_{13} + x_{23} = 1{,}8 - 1{,}5 + 2{,}1 - 2{,}3 = 0{,}1 > 0. \quad (3.5)$$

Поэтому свободную переменную x_{12} не следует переводить в базис. Итак, в базис переводится переменная x_{21}. В соответствии со знаками вершин цикла (табл. 3.3) при увеличении этой переменной в положительную сторону базисные переменные x_{11} и x_{23} будут уменьшаться, а базисная переменная x_{23} будет увеличиваться. Естественно, что первой достигнет нулевого значения и станет свободной переменная x_{23}, меньшая из базисных переменных в отрицательных вершинах цикла. Свободная переменная x_{21} примет значение переменной x_{23}, и станет базисной. Базисные переменные x_{11} и x_{13}, изменятся на величину переменной x_{23} в соответствии со знаками в вершинах цикла. Получено новое допустимое решение (табл. 3.4 и рис. 3.3).

Таблица 3.4 – Транспортная матрица нового допустимого решения

15 1,2	0 1,8	35 1,5	$A_1 = 50$
5 1,6	25 2,3	0 2,1	$A_2 = 30$
$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$Z = 136$

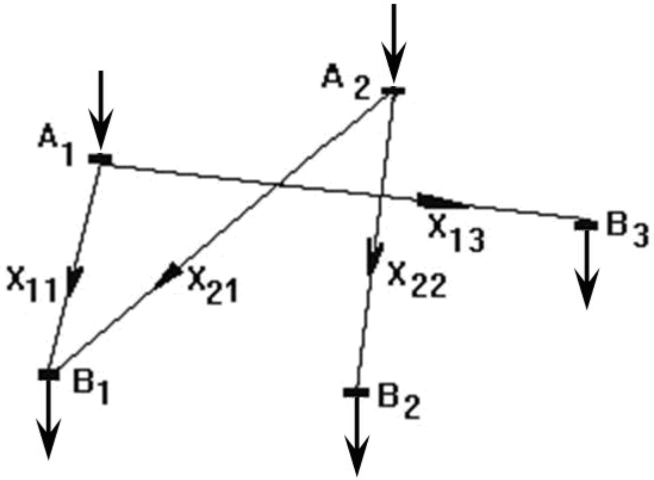

Рисунок 3.3 – Схема электрической сети
по распределительному методу

В этом новом решении получены свободные переменные $x_{12} = 0$, $x_{23} = 0$; базисные переменные $x_{11} = 15$, $x_{13} = 35$, $x_{21} = 35$, $x_{22} = 25$ ЕМ; значение целевой функции:

$$Z = z_{11}x_{11} + z_{12}x_{12} + z_{13}x_{13} + z_{21}x_{21} + z_{22}x_{22} + z_{23}x_{23} = \\ = 1{,}2 \cdot 15 + 1{,}8 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot 35 + 1{,}6 \cdot 5 + 2{,}3 \cdot 25 + 2{,}1 \cdot 0 = 136 \text{ УЕ}.$$

Из результата видно, что значение целевой функции улучшилось по сравнению с предыдущим решением (136 < 137).

В новом решении строятся циклы пересчета и определяются изменения целевой функции ΔZ для каждой свободной переменной x_{12} и x_{23}. Если для каждой свободной переменной изменение целевой функции $\Delta Z > 0$, то полученное решение будет оптимальным.

4. Использование метода потенциалов. Рассмотренный выше распределительный метод получения оптимального решения достаточно трудоемок. В каждом допустимом решении для каждой свободной переменной необходимо строить циклы и определять изменение целевой функции. Ниже рассмотрена модификация распределительного метода, получившая название *метода потенциалов* [2].

В соответствии с методом потенциалов каждой строке и каждому столбцу транспортной матрицы присваивается свой потенциал: строкам – потенциалы $V_i (i = 1,2, \ldots, n)$, столбцам – потенциалы $U_j (j = 1,2, \ldots, m)$, как показано в табл. 3.5.

Таблица 3.5 – Транспортная матрица метода потенциалов

	$U_1 = 1$	$U_2 = 1{,}7$	$U_3 = 1{,}3$	
$V_1 = 0{,}2$	15 1,2	0 1,8	35 1,5	$A_1 = 50$
$V_2 = 0{,}6$	5 1,6	25 2,3	0 2,1	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$Z = 136$

Эти потенциалы таковы, что для каждой базисной переменной сумма потенциалов равна удельной стоимости:

$$V_i + U_j = z_{ij}. \tag{3.6}$$

В общем случае, при условии:

$$V_i + U_j > z_{ij} \tag{3.7}$$

перевод свободной переменной x_{ij} в базис уменьшает целевую функцию Z , а при условии:

$$V_i + U_j < z_{ij} \tag{3.8}$$

перевод свободной переменной x_{ij} в базис увеличивает целевую функцию Z .

Проверим условия (3.7) и (3.8) для свободных переменных в транспортной матрице табл. 3.5. Для свободной переменной x_{23}:

$$V_2+U_3 = 0,6+1,3 = 1,9 < z_{23} =2,1.$$

Следовательно, свободную переменную x_{23} переводить в базис не следует, поскольку этот перевод приведет к увеличению целевой функции Z .

Для свободной переменной x_{12}:

$$V_1+U_2 = 0,2+1,7 = 1,9 > z_{12} = 1,8.$$

Следовательно, свободную переменную x_{12} следует перевести в базис, поскольку этот перевод приведет к уменьшению целевой функции Z .

Для свободной переменной x_{12} строим цикл пересчета (табл. 3.6) и из отрицательных вершин цикла выбираем меньшую базисную переменную $x_{11} = 15$. Эта переменная перейдет в разряд свободных $x_{12} = 0$, а переменная x_{12} станет базисной $x_{12} = 15$. В соответствии со знаками в вершинах цикла базисная переменная x_{21} увеличится на 15 единиц и станет равной $x_{21} = 5 + 15 = 20$, а базисная переменная x_{22} уменьшится на 15 единиц и станет равной $x_{22} = 25 - 15 = 5$.

Таблица 3.6 – Транспортная матрица цикла пересчета

	$U_1 = 1$	$U_2 = 1{,}7$	$U_3 = 1{,}3$	
$V_1 = 0{,}2$	- 15 1,2	+ 0 1,8	35 1,5	$A_1 = 50$
$V_2 = 0{,}6$	+ 5 1,6	- 25 2,3	0 2,1	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$Z = 136$

Новому допустимому решению соответствует транспортная матрица (табл. 3.7).

Таблица 3.7 – Транспортная матрица нового допустимого решения

	$U_1 = 1$	$U_2 = 1{,}7$	$U_3 = 1{,}4$	
$V_1 = 0{,}1$	0 1,2	15 1,8	35 1,5	$A_1 = 50$
$V_2 = 0{,}6$	20 1,6	10 2,3	0 2,1	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$Z = 134{,}5$

В этом решении свободные переменные $x_{11} = 0$, $x_{23} = 0$; базисные переменные $x_{12} = 15$, $x_{13} = 35$, $x_{21} = 20$, $x_{22} = 10$ ЕМ. Значение целевой функции:

$$Z = z_{11}x_{11} + z_{12}x_{12} + z_{13}x_{13} + z_{21}x_{21} + z_{22}x_{22} + z_{23}x_{23} =$$
$$= 1{,}2 \cdot 0 + 1{,}8 \cdot 15 + 1{,}5 \cdot 35 + 1{,}6 \cdot 20 + 2{,}3 \cdot 10 + 2{,}1 \cdot 0 = 134{,}5 \text{ УЕ}.$$

Проверим это решение на оптимальность. Произвольно зададимся значением одного из потенциалов $U_1 = 1$. В соответствии с уравнениями (3.6) остальные потенциалы будут равны:

$$V_2 = z_{21} - U_1 = 1{,}6 - 1 = 0{,}6;$$
$$U_2 = z_{22} - V_2 = 2{,}3 - 0{,}6 = 1{,}7;$$

$$V_1 = z_{12} - U_2 = 1{,}8 - 1{,}7 = 0{,}1;$$
$$U_3 = z_{13} - V_1 = 1{,}5 - 0{,}1 = 1{,}4.$$

Для свободных переменных x_{11} и x_{23} сумму потенциалов сопоставим с удельной стоимостью:

$$V_1 + U_1 = 0{,}1 + 1 = 1{,}1 < z_{11} = 1{,}2;$$
$$V_2 + U_3 = 0{,}6 + 1{,}4 = 2 < z_{23} = 2{,}1.$$

В соответствии с условием (3.8) перевод любой из этих переменных в базис приведет к увеличению целевой функции Z. Следовательно, полученное решение является оптимальным. Схема электрической сети, отвечающая оптимальному решению, показана на (рис. 3.4).

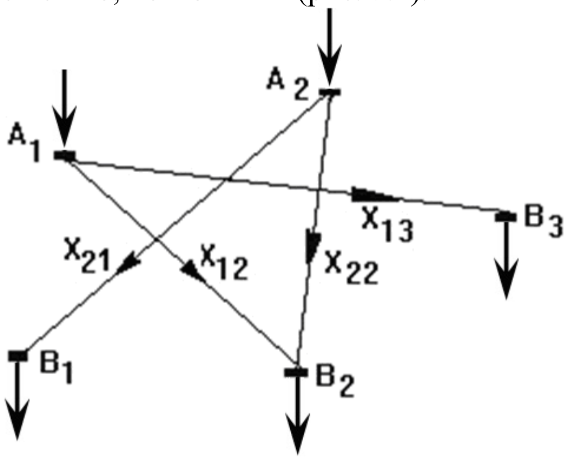

Рисунок 3.4 – Оптимальная схема электрической сети

5. Учет пропускной способности линий. При проектировании систем электроснабжения часто сталкиваются с задачей ограничения пропускной способности линии. В частности, ограничение передаваемой мощности по существующей линии обусловлено допустимым нагревом ее проводов.

Пусть для линии x_{ij} между источником i и потребителем j передаваемая мощность ограничена величиной $s (x_{ij} \le s)$.

Ограничение пропускной способности линии учитывается в транспортной задаче следующим образом.

1. Столбец j транспортной матрицы, отвечающий потребителю с мощностью B_j, разбивается на два столбца или на два условных потребителя с мощностями $B_j^{'} = B_j - S$ и $B_j^{''} = S$.

2. Для переменной между источником i и потребителем $B_j^{'}$ осуществляется блокировка передачи мощности, т.е. для этой переменной принимается очень большой показатель удельной стоимости.

Далее решение транспортной задачи ничем не отличается от решения задачи без ограничения пропускной способности линий. Следует только отметить, что для всех допустимых решений, в том числе и для оптимального решения, мощность, передаваемая от источника i к потребителю $B_j^{''}$, не превысит величины S.

Решение задачи для случая, когда мощность, передаваемая по линии x_{13}, ограничена величиной 20 ЕМ ($x_{13} \le 20$).

В исходной транспортной матрице (табл. 3.2) третий столбец разбиваем на два столбца с условными потребителями $B^{'} = 35 - 20 = 15$ и $B^{''} = 20$ ЕМ. Удельную стоимость передачи мощности от источника A_1 к условному потребителю $B_3^{'}$ примем равной 100 УЕ/ЕМ. Остальные удельные стоимости такие же, как в табл. 3.2.

Исходное допустимое решение получено методом наименьшей удельной стоимости и представлено в табл. 3.8.

В этом решении свободные переменные $x_{13}^{'} = x_{21} = x_{23}^{''} = 0$; базисные переменные $x_{11} = 20$, $x_{12} = 10$, $x_{13}^{''} = 20$, $x_{22} = 15$, $x_{23}^{''} = 15$ ЕМ. Значение целевой функции:

$$Z = z_{11}x_{11} + z_{12}x_{12} + z'_{13}x'_{13} + z''_{13}x''_{13} +$$
$$+ z_{21}x_{21} + z_{22}x_{22} + z'_{23}x'_{23} + z''_{23}x''_{23} = 1{,}2$$

Далее используем метод потенциалов. Для принятого произвольно значения одного из потенциалов $(U_1 = 1)$величины остальных потенциалов определены по выражению $V_i + U_j = z_{ij}$, справедливому для базисных переменных (табл. 3.8).

Таблица 3.8 – Транспортная матрица с учетом пропускной способности линий

	$U_1 = 1$	$U_2 = 1{,}6$	$U'_3 = 1{,}4$	$U''_3 = 1{,}3$	
$V_1 = 0{,}2$	-20 1,2	+10 1,8	0 100	20 15	$A_1 = 50$
$V_2 = 0{,}7$	+0 1,6	-15 2,3	15 2,1	0 2,1	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B'_3 = 15$	$B''_3 = 20$	$Z = 138$

Поскольку для свободной переменной x_{21}:

$$V_2 + U_1 = 1{,}7 > z_{21} = 1{,}6$$

переводим эту переменную в базис. Цикл пересчета переменных отмечен в (табл. 3.8). знаками «+» и «–». В разряд свободных перейдет базисная переменная x_{22}. Новое допустимое решение показано в (табл. 3.9).

Таблица 3.9 – Транспортная матрица нового допустимого решения

	$U_1 = 1$	$U_2 = 1{,}6$	$U'_3 = 1{,}5$	$U''_3 = 1{,}3$	
$V_1 = 0{,}2$	5 1,2	25 1,8	0 100	20 15	$A_1 = 50$
$V_2 = 0{,}6$	15 1,6	0 2,3	15 2,1	0 2,1	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B'_3 = 15$	$B''_3 = 20$	$Z = 136{,}5$

Это решение является оптимальным, поскольку для всех свободных переменных выполняется условие (3.8)

$$V_i + U_j = z_{ij}$$

при котором перевод любой свободной переменной в базис приведет к увеличению целевой функции Z. Схема, отвечающая оптимальному решению, приведена на (рис. 3.5).

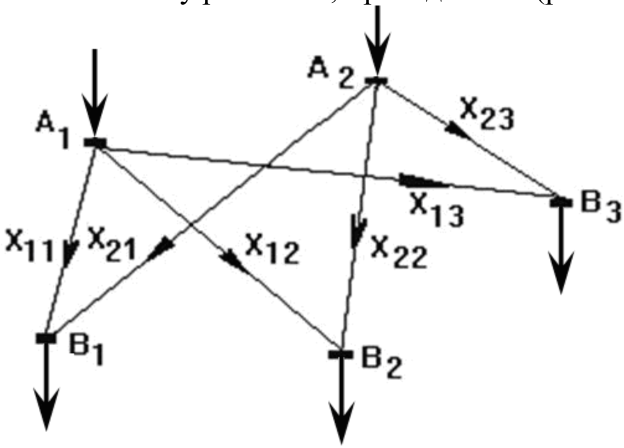

Рисунок 3.5 – Оптимальная схема электрической сети с учетом пропускной способности

Следует отметить, что при решении транспортных задач с ограничениями пропускной способности линий в схеме электрической сети возможно появление замкнутых контуров, а количество базисных переменных больше, чем в транспортной задаче без указанных ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аввакумов В.Г. Постановка и решение электроэнергетических задач исследования операций. – Киев: Вища школа, 2011.

2. Костин В.Н. Оптимизационные задачи электроэнергетики: Учебное пособие. – СПб.: СЗТУ, 2013.

3. Лещинская Т.Б., Наумов И.В. Электроснабжение сельского хозяйства: Учебник. – М.: КолосС, 2008.

4. Методы оптимизации: Учебник / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013.

5. Методы оптимизации режимов энергосистем / В.М. Горнштейн, Б.П. Мирошниченко, А.В. Пономарев. – М.: Энергоатомиздат, 2010.

6. Сазыкин В.Г., Кудряков А.Г. Оптимизации систем энергоснабжения: Учебное пособие для вузов. – Краснодар: КубГАУ, 2017.

7. Холмский В.Г. Расчет и оптимизация режимов электрических сетей (специальные вопросы): Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005.

8. Шапкин А.С., Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник. 2-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2015.

ОПТИМИЗАЦИИ СИТЕМ ЭНЕРГОСНАБЖЕНИЯ

Методические указания

Составители:
Сазыкин Василий Георгиевич
Багметов Александр Александрович

Подписано в печать 14.08.19. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. – 2,5. Уч.-изд. л. – 2,3.
Тираж 100 экз.

Типография ООО «КРОН»
г. Краснодар, просп. Чекистов, 20